

7. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA

ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI I ROZWIĄZANIA DO ZADAŃ WPROWADZAJĄCYCH

PLANIMETRIA

1.1 $|\angle BAC| = 40^\circ$, $|\angle ABC| = 20^\circ$, $|\angle ACB| = 120^\circ$.

Rozwiązanie. α – miara kąta BAC . Wiemy, że $|\angle ABC| = \alpha - 20^\circ$ i $|\angle ACB| = 3\alpha$.

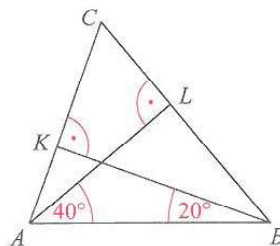
Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc $\alpha + \alpha - 20^\circ + 3\alpha = 180^\circ$. Stąd $\alpha = 40^\circ$, zaś $|\angle ABC| = 20^\circ$, $|\angle ACB| = 120^\circ$.

1.2 50° , 60° , 70° .

Rozwiązanie. W trójkącie ABL : $40^\circ + |\angle ABL| + 90^\circ = 180^\circ$, więc $|\angle ABL| = 50^\circ$.

W trójkącie KAB : $|\angle KAB| + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, więc $|\angle KAB| = 70^\circ$.

W trójkącie ABC : $70^\circ + 50^\circ + |\angle ACB| = 180^\circ$, więc $|\angle ACB| = 60^\circ$.



1.3 50° , 60° , 70° .

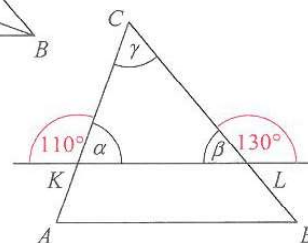
Rozwiązanie. α , β , γ – kąty trójkąta KLC (zobacz rysunek)

$\alpha + 110^\circ = 180^\circ$, więc $\alpha = 70^\circ$. $\beta + 130^\circ = 180^\circ$, więc $\beta = 50^\circ$.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc $\gamma = 60^\circ$.

Kąty BAC i LKC są kątami odpowiadającymi, więc $|\angle BAC| = |\angle LKC| = \alpha = 70^\circ$.

Kąty ABC i KLC są kątami odpowiadającymi, więc $|\angle ABC| = |\angle KLC| = \beta = 50^\circ$.



1.4 $a\sqrt{7}$.

Rozwiązanie. a – długość jednej przyprostokątnej, $5a$ – długość przeciwprostokątnej, b – długość drugiej przyprostokątnej,

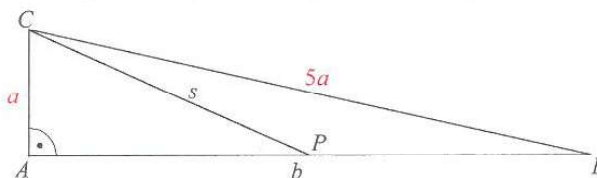
s – długość środkowej poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABC mamy $a^2 + b^2 = (5a)^2$.

Stąd $b^2 = 25a^2 - a^2 = 24a^2$, więc $b = \sqrt{24a^2} = \sqrt{4 \cdot 6a^2} = 2\sqrt{6}a$.

$|AP| = 0,5b = \sqrt{6}a$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta APC mamy

$s^2 = a^2 + (\sqrt{6}a)^2$. Stąd otrzymujemy $s = \sqrt{7}a$.



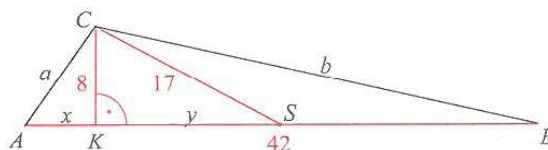
1.5 10 , $4\sqrt{85}$.

Rozwiązanie. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta KSC : $8^2 + y^2 = 17^2$, stąd $y = 15$.

Punkt S jest środkiem boku AB , więc $x = 21 - y = 6$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta AKC obliczymy $a = 10$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta KBC obliczymy $b = 4\sqrt{85}$.



1.6 $|AB| = 10$, $|AC| = 4\sqrt{13}$.

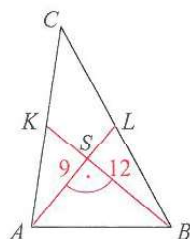
Rozwiązanie. Z tw. o środkowych trójkąta: $|AS| = \frac{2}{3} \cdot |AL| = 6$,

$|BS| = \frac{2}{3} \cdot |BK| = 8$, $|SK| = \frac{1}{3} \cdot |BK| = 4$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABS : $|AB|^2 = 6^2 + 8^2$. Stąd $|AB| = 10$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ASK : $|AK|^2 = 6^2 + 4^2$.

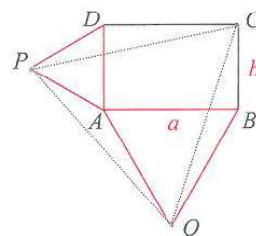
Stąd $|AK| = 2\sqrt{13}$. $|AC| = 2 \cdot |AK| = 4\sqrt{13}$.



1.7

Rozwiązanie. Niech a oznacza długość boku AB , b – długość boku BC .

Każdy z trójkątów CQB , PCD i PQA ma jeden bok o długości a i jeden o długości b , a kąt między bokami o długościach a i b w każdym z tych trójkątów jest równy $90^\circ + 60^\circ$. Trójkąty CQB , PCD i PQA są więc przystające (cecha bąk-kot-bąk), a to oznacza, że boki CQ , PC i PQ mają równą długość. Zatem trójkąt PQC jest równoboczny.

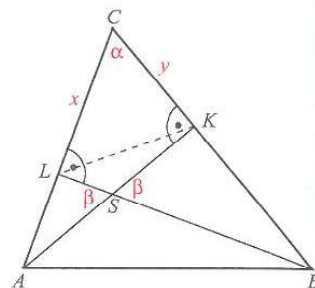


1.8

Rozwiązanie. a) Trójkąty AKC i BLC mają wspólny kąt ostry (kąt α) i są prostokątne, więc są podobne (cecha kąt-kąt).

b) Trójkąty LAS i BKS mają kąt ostry o tej samej mierze (kąt β) i są prostokątne, więc są podobne (cecha kąt-kąt).

c) Z podobieństwa trójkątów AKC i BLC mamy $\frac{x}{y} = \frac{|BC|}{|AC|}$, trójkąty ABC i LKC mają wspólny kąt (kąt α), więc są podobne (cecha bok-kąt-bok).



1.9

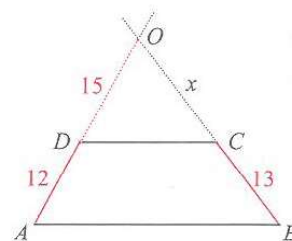
Wskazówka. Uzasadnij, że oba „małe” trójkąty są podobne do „dużego” trójkąta.

1.10 $|OC| = 16,25$.

Rozwiązanie. x – długość odcinka OC .

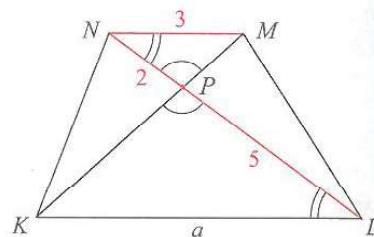
I SPOSÓB. Trójkąty DCO i ABO są podobne (cecha kąt-kąt), więc stosunki odpowiednich boków tych trójkątów są równe. Zatem $\frac{x}{15} = \frac{x+13}{27}$. Stąd otrzymujemy równość $27x = 15(x+13)$, z której wyznaczamy $x = 16\frac{1}{4}$.

II SPOSÓB. Z tw. Talesa wynika, że $\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Zatem $|OC| = \frac{15 \cdot 13}{12} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$.

1.11 $|KL| = 7\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. a – długość boku KL .

Kąty trójkątów KLP i MNP mają równe miary (kąty KPL i MPN – kąty wierzchołkowe, kąty KLP i PNM – kąty naprzemianległe), więc trójkąty te są podobne. Jeśli trójkąty są podobne, to stosunki odpowiednich boków są równe: $\frac{a}{3} = \frac{5}{2}$. Stąd otrzymujemy $a = 7,5$.



1.12

Rozwiązanie. $\frac{4,8}{4} = \frac{3}{2,5} = 1,2$, więc $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|BC|}$. Zatem, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $pr. BE \parallel pr. CD$, czyli czworokąt $BCDE$ jest trapezem.

1.13 14:17.

Rozwiązanie. k – skala podobieństwa wielokątów. Stosunek obwodów tych wielokątów jest równy k . Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy k^2 . $k^2 = \frac{196}{289}$, więc $k = \frac{14}{17}$.

1.14 64 cm^2 , 36 cm^2 .

Rozwiązanie. $k = \frac{3}{4}$ – skala podobieństwa wielokątów. Stosunek pól P_1 i P_2 tych wielokątów jest równy kwadratowi skali podobieństwa, zatem $\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16}$. Wiemy, że $P_2 = P_1 + 28$, więc $\frac{P_1}{P_1 + 28} = \frac{9}{16}$. Stąd otrzymujemy $P_1 = 36$. $P_2 = P_1 + 28 = 36 + 28 = 64$.

1.15 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

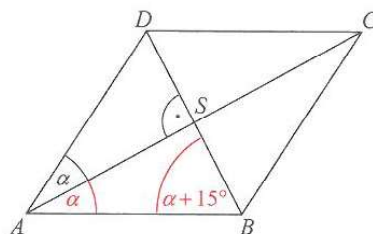
Rozwiązanie. Jeśli bok kwadratu ma długość a , to przekątna ma długość $a\sqrt{2}$. Musimy więc rozwiązać równanie $a\sqrt{2} + a = 1$. Rozwiązanie otrzymamy wyłączając a przed nawias: $a(\sqrt{2} + 1) = 1$, a następnie dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{2} + 1$: $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Przekątna kwadratu

ma długość $a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. Liczbę $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ można zapisać w postaci $2 - \sqrt{2}$.

1.16 75° i 105° .

Rozwiązanie. α – mniejszy z kątów, jakie przekątne rombu tworzą z bokami. Przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów, więc kąt ostry ma miarę 2α , a kąt rozwarty miarę $2\alpha + 30^\circ$.

Trójkąt ABS jest prostokątny, więc $\alpha + \alpha + 15^\circ = 90^\circ$. Stąd $2\alpha = 75^\circ$. Zatem kąt ostry rombu ma miarę 75° , a rozwarty 105° .

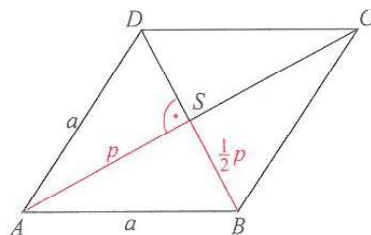
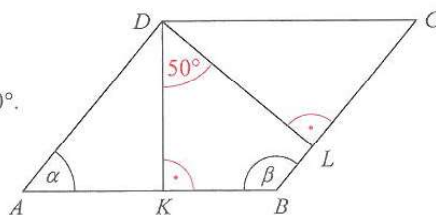


1.17 13 cm.

Wskazówka. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowy.1.18 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.**Rozwiązanie.** p – długość krótszej przekątnej. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta

$$ABS \quad a^2 = p^2 + \frac{1}{4}p^2. \quad \text{Stąd } a = \frac{\sqrt{5}}{2}p.$$

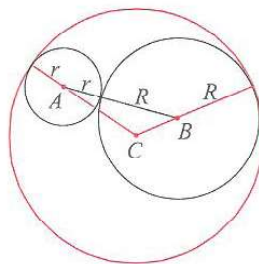
$$\text{Szukany stosunek: } \frac{4a}{3p} = \frac{2\sqrt{5}p}{3p} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

1.19 53° i 127° .**Rozwiązanie.** α – miara kąta ostrego równoległoboku, $\alpha + 74^\circ$ – miara kąta rozwartego.Suma miar dwóch kolejnych kątów równoległoboku wynosi 180° , zatem $\alpha + \alpha + 74^\circ = 180^\circ$. Stąd $\alpha = 53^\circ$, $\alpha + 74^\circ = 127^\circ$.1.20 50° .**Rozwiązanie.** W czworokącie KBLD $90^\circ + \beta + 90^\circ + 50^\circ = 360^\circ$, stąd $\beta = 130^\circ$. $\alpha + \beta = 180^\circ$, więc $\alpha = 50^\circ$.1.21 $|\angle A| = 36^\circ$, $|\angle B| = 45^\circ$, $|\angle C| = 135^\circ$, $|\angle D| = 144^\circ$.**Wskazówka.** Suma miar kątów przyległych do ramienia trapezu wynosi 180° .

1.23 9.

Rozwiązanie. a, b – długości podstaw. $a + b + 4 + 8 = 30$, więc $a + b = 18$. Długość d odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa połowie sumy długości podstaw, zatem $d = 9$.

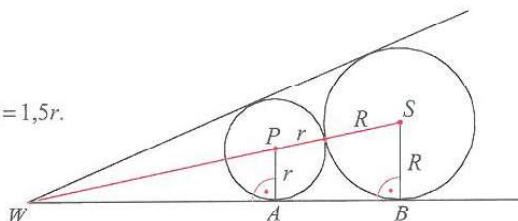
1.24 1 lub 7.

Wskazówka. Prowadząc promienie do końców cięciw, otrzymamy trójkąty równoramienne.1.25 $R = 3$.**Rozwiązanie.** Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym $|AB| = 3$, $|BC| = R + 2$ i $|AC| = R + 1$. Korzystając z tw. Pitagorasa, otrzymujemy równanie $(R + 1)^2 + 3^2 = (R + 2)^2$. Rozwiązaniem tego równania jest liczba $R = 3$.

1.26 8.

Rozwiązanie. Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie, więc $|AB| = r + R$.Okręgi o środkach A i B są styczne wewnętrznie do okręgu $o(C, 4)$, więc $|AC| = 4 - r$ i $|BC| = 4 - R$. Obwód trójkąta ABC : $(r + R) + (4 - r) + (4 - R) = 8$.1.27 140° .**Rozwiązanie.** α – miara kąta między stycznymi. Oba promienie i poprowadzone styczne wyznaczają czworokąt. Styczna tworzy z promieniem, przez którego koniec została poprowadzona, kąt prosty. Zatem wyznaczony czworokąt ma kąty o miarach $90^\circ, 90^\circ, 40^\circ, \alpha$. Suma miar kątów każdego czworokąta jest równa 360° , zatem $90^\circ + 90^\circ + 40^\circ + \alpha = 360^\circ$. Stąd otrzymujemy $\alpha = 140^\circ$.1.28 $\frac{8}{5}$ i $\frac{12}{5}$.**Rozwiązanie.** Z podobieństwa trójkątów WAP i WBS mamy $\frac{R}{r} = \frac{12}{8}$, stąd $R = 1,5r$.

$$|PS| = |WS| - |WP| = 4 = r + R = r + 1,5r = 2,5r.$$

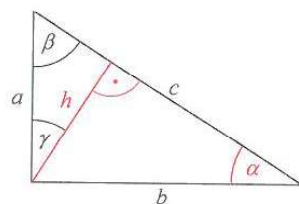
Zatem $r = 1,6$, zaś $R = 2,4$.1.29 a) $\operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{3}{4}$, $\cos(\angle BAC) = \frac{4}{5}$; b) $|\angle ABC| = 60^\circ$.**Rozwiązanie.** a) $\operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ADC : $|AC|^2 = 8^2 + 6^2$. Stąd $|AC| = 10$. $\cos(\angle BAC) = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.b) $\operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, więc $|\angle ABC| = 60^\circ$.

1.30 Przyprostokątne: $\frac{h}{\sin \alpha}$ i $\frac{h}{\cos \alpha}$, przeciwprostokątna: $\frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

Rozwiązanie. $\frac{h}{b} = \sin \alpha$, stąd $b = \frac{h}{\sin \alpha}$. $\frac{h}{c} = \cos \alpha$, stąd $c = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Suma miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego wynosi 90° , więc $\alpha + \beta = 90^\circ$ i $\gamma + \beta = 90^\circ$.

Stąd wynika, że $\gamma = \alpha$. $\frac{h}{a} = \cos \gamma = \cos \alpha$, więc $a = \frac{h}{\cos \alpha}$.

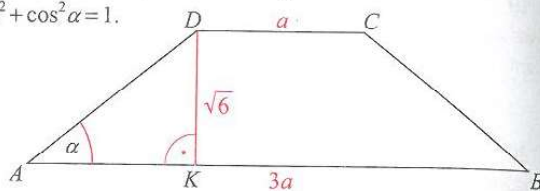


1.31 $24\sqrt{6}$.

Rozwiązanie. Pole trapezu: $P = \frac{3a+a}{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}a$. $|AK| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{3a-a}{2} = a$. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{|AK|}$, więc $a = \frac{\sqrt{6}}{\tan \alpha}$. Znając wartość sinusa kąta α , możemy obliczyć jego tangens. Korzystamy z jedynki trygonometrycznej: $(0,2)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

Stąd otrzymujemy: $\cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$. α jest kątem ostrym, więc $\cos \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Zatem $P = 2\sqrt{6}a = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\tan \alpha} = 24\sqrt{6}$.



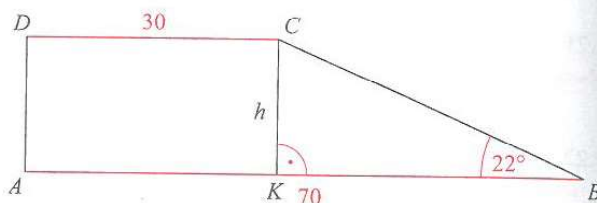
1.32 808.

Rozwiązanie. Pole trapezu: $P = \frac{30+70}{2} \cdot h = 50h$.

$|KB| = |AB| - |AK| = 70 - 30 = 40$. $\frac{h}{|KB|} = \tan 22^\circ = 0,404$,

zatem $h = 0,404 \cdot 40 = 16,16$.

Możemy teraz obliczyć pole trapezu: $P = 50h = 50 \cdot 16,16 = 808$.



1.33 Promień okręgu wpisanego: $\frac{1}{2}R$, obwód: $3\sqrt{3}R$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: a – długość boku trójkąta, h – długość wysokości trójkąta, r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość równą jednej trzeciej długości wysokości trójkąta, a długość promienia okręgu opisanego równa jest dwóm trzecim długości wysokości. Zatem $r = \frac{1}{2}R$.

Wiemy, że $R = \frac{2}{3}h$ i $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd otrzymujemy $a = \sqrt{3}R$. Obwód trójkąta jest równy $3a$, czyli $3\sqrt{3}R$.

1.34 $6\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Kąt między bokami o długościach 4 i 6 ma miarę $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

1.35 Pole: 60, długość promienia: $3\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. h – długość wysokości trójkąta poprowadzonej do podstawy, r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

Obliczamy h , korzystając z tw. Pitagorasa: $h^2 + 5^2 = 13^2$, stąd $h^2 = 144$, więc $h = 12$.

Obliczamy pole trójkąta $P = 0,5 \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

r obliczymy, korzystając ze wzoru na pole trójkąta ($P = 0,5r(a+b+c)$): $60 = 0,5r \cdot (10+13+13)$, stąd $60 = 18r$, zatem $r = 3\frac{1}{3}$.

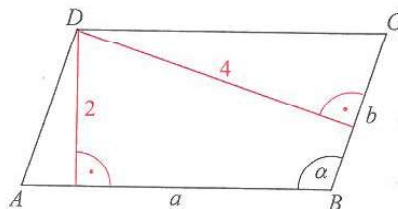
1.36 32.

Wskazówka. Wysokość rombu jest równa średnicy okręgu wpisanego w romb.

1.37 20.

Rozwiązanie. Wiemy, że ① $2a+2b=30$. Ze wzoru na pole równoległoboku: $P=2a$ i $P=4b$, więc ② $2a=4b$. Z układu równań ① i ② otrzymujemy $b=5$.

Obliczamy pole równoległoboku: $P=4b=4 \cdot 5=20$.



1.38 21.

Rozwiązanie. Kąt ostry równoległoboku ma miarę $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Pole równoległoboku: $P = 6 \cdot 7 \cdot \sin 30^\circ = 21$.

1.39 $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$.

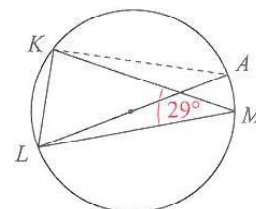
Rozwiązanie. Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku, więc $|\angle ACB| = \frac{1}{2} |\angle ASB| = 65^\circ$ i $|\angle BAC| = \frac{1}{2} |\angle BSC| = 50^\circ$. $|\angle ABC| = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ) = 65^\circ$.

1.40 $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

Wskazówka. Stosunek miar kątów środkowych opartych na wyznaczonych łukach wynosi $2:3:4$. Suma tych kątów środkowych jest kątem pełnym.

1.41 $29^\circ, 61^\circ, 90^\circ$.

Rozwiązanie. Kąty KML i KAL są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, więc mają równe miary. Zatem $|\angle KAL| = 29^\circ$. Kąt LKA jest kątem wpisanym opartym na średnicy, więc jest kątem prostym. $|\angle KLA| = 180^\circ - (29^\circ + 90^\circ) = 61^\circ$.



1.42 25π .

Rozwiązanie. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu na nim opisanego. Obliczamy długość c przeciwprostokątnej, korzystając z tw. Pitagorasa: $c^2 = 7^2 + 24^2 = 625$ stąd $c = 25$. Długość okręgu: $l = 2\pi r = 25\pi$.

1.43 8π .

Rozwiązanie. Stosunek długości łuków jest równy $2:7$, więc długość krótszego łuku stanowi $\frac{2}{9}$ długości okręgu. Obliczamy długość krótszego łuku: $l = \frac{2}{9} \cdot 2\pi \cdot 18 = 8\pi$.

1.44 $2,2\pi$.

Rozwiązanie. Kąt ASB jest kątem środkowym, więc jego miara jest 2 razy większa od kąta ACB i jest równa 88° . Obliczamy pole zaznaczonego wycinka koła: $\frac{88^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{11}{5}\pi$.

1.45 π .

Rozwiązanie. Pole P pierścienia obliczymy, odejmując od pola koła opisanego na kwadracie pole koła wpisanego w kwadrat. Długość R promienia koła opisanego na kwadracie jest równa połowie długości przekątnej kwadratu: $R = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Długość r promienia koła wpisanego w kwadrat jest równa połowie długości boku kwadratu, więc $r = 1$. Obliczamy pole pierścienia: $P = \pi R^2 - \pi r^2 = 2\pi - \pi = \pi$.

1.46 $|\angle K| = 75^\circ, |\angle L| = 45^\circ, |\angle M| = 105^\circ, |\angle N| = 135^\circ$.

1.47 120° .

Rozwiązanie. Trójkąt ABD jest równoboczny, więc miara kąta BAD wynosi 60° . Z tw. o czworokącie wpisanym w okrąg wiemy, że suma miar kątów BAD i BCD jest równa 180° . Zatem kąt BCD ma miarę 120° .

1.48 $|KL| = 7, |MN| = 10$.

1.49 Sześć razy.

Rozwiązanie. Oznaczenia: x – długość boku AB , y – długość boku AD . Wiemy, że $|CD| = 7x$ i $|BC| = 3y$. Z tw. o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że $x + 7x = y + 3y$. Zatem $y = 2x$. $|BC| = 3y = 6x = 6|AB|$.

1.50 2 i $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Sześciokąt foremny o boku 1 można podzielić na sześć trójkątów równobocznych o boku 1 . Dłuższa przekątna ma długość dwa razy większą niż bok takiego trójkąta, więc ma długość 2 . Krótsza przekątna ma długość dwa razy większą niż wysokość trójkąta o boku 1 , więc ma długość $\sqrt{3}$.

1.51 a) 108° ; b) 120° ; c) 140° .

Wskazówki. I. Suma kątów wielokąta o n kątach jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$. II. Kąty wielokąta foremnego mają równe miary.

1.52 a) Trzy; b) nie ma osi symetrii; c) dwie – jeśli nie jest kwadratem, cztery – jeśli jest kwadratem; d) sześć.

1.53 Równoległobok i prosta.

1.54 4.

Rozwiązanie. R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Z tw. sinusów $2R = \frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{4}{\sin 150^\circ} = \frac{4}{\sin(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{4}{0,5} = 8$. Stąd $R = 4$.

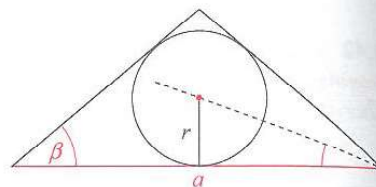
1.55 a) Promień okręgu opisanego: $\frac{a}{2 \sin 2\beta}$. b) Promień okręgu wpisanego: $\frac{a}{2} \tan \frac{\beta}{2}$.

Rozwiązanie. R, r – długości odpowiednio promienia okręgu opisanego, promienia okręgu wpisanego.

a) Kąt między ramionami trójkąta ma miarę $180^\circ - 2\beta$.

Z tw. sinusów $2R = \frac{a}{\sin(180^\circ - 2\beta)}$, więc $R = \frac{a}{2 \sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{a}{2 \sin 2\beta}$.

b) Środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc kąt między podstawą trójkąta, a dwusieczną ma miarę $\frac{\beta}{2}$. $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{0,5a}$, stąd $r = \frac{a}{2} \tan \frac{\beta}{2}$.



1.56 a) Promień okręgu opisanego: $\frac{a}{2 \sin(\alpha + \beta)}$. b) Długości boków: $\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

c) Promień okręgu wpisanego: $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}$.

Rozwiązanie. W a) i b) skorzystamy z równości $\sin(180^\circ - x) = \sin x$.

Równość tę otrzymujemy np. ze wzoru na sinus różnicy.

a) R – promień okręgu opisanego.

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Z tw. sinusów: $2R = \frac{a}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$,

zatem $R = \frac{a}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

b) Z tw. sinusów $\frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{b}{\sin \alpha}$, stąd $b = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Analogicznie dostajemy $c = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

c) I SPOSÓB. Środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc ① $\frac{r}{x} = \tan \frac{\alpha}{2}$ i ② $\frac{r}{a-x} = \tan \frac{\beta}{2}$.

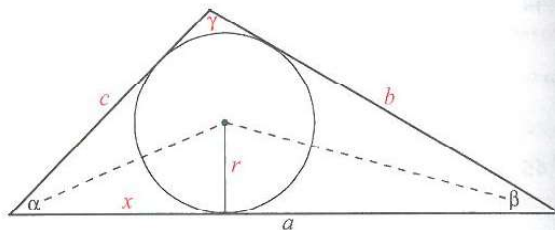
Wyznaczając x z równania ①: $x = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}}$ i podstawiając do równania ②, otrzymamy równanie $r = (a - \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}}) \cdot \tan \frac{\beta}{2}$. Z otrzymanego równania

wyznaczamy r : $r = \frac{a \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}$.

II SPOSÓB. Z b) wiemy, że $b = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

$P = \frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{1}{2} r(a + \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}) = \frac{1}{2} ra \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Z równości $\frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2} ra \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ otrzymujemy $r = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}$.



1.57 a) Promień okręgu opisanego: $\sqrt{\frac{13}{3}}$. b) Promień okręgu wpisanego: $\frac{2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{13}}$.

Rozwiązanie. c – długość trzeciego boku. Z tw. kosinusów $c^2 = 1 + 16 - 8 \cos 60^\circ$. Stąd $c = \sqrt{13}$.

a) Z tw. sinusów $2R = \frac{c}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$, więc $R = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

b) Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. $P = \frac{1}{2} r \cdot (1 + 4 + \sqrt{13})$, zatem $r = \frac{2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{13}}$.

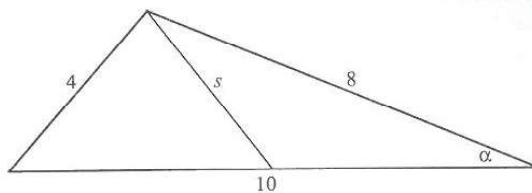
1.58 a) Kosinus: $\frac{37}{40}$. Tangens: $\frac{\sqrt{231}}{37}$. **b)** Środkowa: $\sqrt{15}$.

Rozwiązanie. a) Z tw. kosinusów $4^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = \frac{37}{40}$.

Korzystając z „jedynki trygonometrycznej” otrzymujemy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{231}}{40}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{231}}{37}.$$

b) Z tw. kosinusów $s^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 89 - 74 = 15$, więc $s = \sqrt{15}$.



1.59 $-\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: α – miara największego kąta trójkąta, $2x, 3x, 4x$ – długości boków trójkąta. Z tw. kosinusów: $16x^2 = 4x^2 + 9x^2 - 12x^2 \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = -0,25$.

1.60 a) Stosunek pól: $1 : 4$; **b)** stosunek promieni: 1 ; **c)** sinus kąta LKA : $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Rozwiązanie. a) $P_{\Delta KLA} = \frac{1}{2} ah$, $P_{\Delta KAM} = \frac{1}{2} \cdot 4ah$, więc $\frac{P_{\Delta KLA}}{P_{\Delta KAM}} = \frac{1}{4}$.

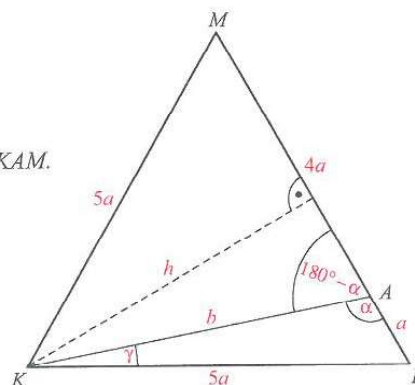
b) R_L – promień okręgu opisanego na trójkącie KLA , R_M – promień okręgu opisanego na trójkącie KAM .

Skorzystamy z tw. sinusów i równości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

$$2R_L = \frac{5a}{\sin \alpha}, \quad 2R_M = \frac{5a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{5a}{\sin \alpha}. \quad \text{Zatem } \frac{R_L}{R_M} = 1.$$

c) Z tw. kosinusów dla trójkąta KLA : $b^2 = a^2 + (5a)^2 - 2a \cdot 5a \cdot \cos 60^\circ = 21a^2$. Stąd $b = \sqrt{21}a$.

$$\text{Z tw. sinusów dla trójkąta } KLA: \frac{\sqrt{21}a}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin \gamma}. \quad \text{Zatem } \sin \gamma = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$



GEOMETRIA ANALITYCZNA

2.1 a) Postać ogólna: $4x - 2y - 5 = 0$, postać kierunkowa: $y = 2x - 2,5$.

b) Postać ogólna: $y - 6 = 0$, postać kierunkowa: $y = 6$.

c) Postać ogólna: $7x - 8 = 0$, nie ma postaci kierunkowej.

2.2 a) $3x - 12y - 18 = 0$; **b)** $-0,5x + 2y + 3 = 0$; **c)** $x - 4y - 6 = 0$.

Rozwiązanie. Równanie $y = 0,25x - 1,5$ sprowadzamy do postaci ogólnej $0,25x - y - 1,5 = 0$.

a) Aby współczynnik A był równy 3, musimy pomnożyć obie strony równania $0,25x - y - 1,5 = 0$ przez 12. Otrzymamy wówczas równanie $3x - 12y - 18 = 0$.

b) Aby współczynnik B był równy 2, musimy pomnożyć obie strony równania $0,25x - y - 1,5 = 0$ przez -2 . Otrzymamy wówczas równanie $-0,5x + 2y + 3 = 0$.

2.3 a) $y = 2x$; **b)** $y = 3x - 1$; **c)** $y = 2$; **d)** $x = 1$.

Rozwiązanie. a) Prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc jej równanie ma postać $y = ax$. Punkt $B = (1, 2)$ należy do prostej, więc $2 = a \cdot 1$. Zatem prosta określona jest równaniem $y = 2x$.

b) I SPOSÓB. Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty: $(y+4)(1+1) = (2+4)(x+1)$, stąd $y = 3x - 1$.

II SPOSÓB. Znajdziemy równanie kierunkowe prostej, czyli równanie postaci $y = ax + b$. Punkt $A = (-1, -4)$ należy do prostej, więc

① $-4 = -a + b$. Punkt $B = (1, 2)$ należy do prostej, więc ② $2 = a + b$. Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $a = 3, b = -1$.

Zatem prosta ma równanie $y = 3x - 1$.

c) Punkty A i B mają rzędną równą 2, więc prosta ma równanie $y = 2$.

d) Punkty A i B mają odciętą równą 1, więc prosta ma równanie $x = 1$.

2.4 a) Są współliniowe; **b)** nie są współliniowe.

Wskazówka. Znajdź równanie prostej AB , a następnie sprawdź, czy punkt C do niej należy.