

6.35 63 lata.

**Rozwiązanie.** Oznaczenia:  $a, b, c, d, x$  – wiek odpowiednio matki, ojca, pierwszego dziecka, drugiego dziecka, dziadka.

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 23, \text{ stąd } a+b+c+d = 92. \quad \frac{a+b+c+d+x}{5} = 31, \text{ stąd } (a+b+c+d) + x = 155.$$

Podstawiając do ostatniego równania w miejsce sumy  $a+b+c+d$  liczbę 92, otrzymujemy  $92+x=155$ , stąd  $x=63$ .

6.36 Mediana: 1, średnia arytmetyczna: 1,6.

**Rozwiązanie.** Zestaw danych składa się z 25 liczb: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4.

Środkową liczbą w uporządkowanym niemalejąco powyższym zestawie danych jest 1, więc jest to mediana tego zestawu.

$$\text{Średnia arytmetyczna: } \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{25} = \frac{40}{25} = 1,6.$$

6.37 a) 4,8; b) 4,3.

$$\text{Rozwiązanie. a) } \bar{a}_w = \frac{2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,7 + 9 \cdot 0,1}{0,2 + 0,7 + 0,1} = \frac{4,8}{1} = 4,8; \quad \text{b) } \bar{a}_w = \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{43}{10} = 4,3.$$

6.38 Rocznik 1995 (Bordeaux 1991: 9,1; Bordeaux 1995: 8,8).

6.39 a) Wariancja:  $\frac{1}{2}$ , odch. stand.:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b) wariancja: 2,25, odchylenie standardowe: 1,5.

$$\text{Rozwiązanie. a) } \bar{x} = 3. \quad \sigma^2 = \frac{2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2}{4} - 3^2 = \frac{38}{4} - 9 = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6.40  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  ( $\approx 0,82$ ).

$$\text{Rozwiązanie. a) } \bar{x} = \frac{150 \cdot 0 + 400 \cdot 1 + 550 \cdot 2 + 100 \cdot 3}{1200} = \frac{1800}{1200} = \frac{3}{2}. \quad \sigma^2 = \frac{150 \cdot 0^2 + 400 \cdot 1^2 + 550 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2}{1200} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3500}{1200} - \frac{9}{4} = \frac{2}{3}, \text{ stąd } \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

## ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI I ROZWIĄZANIA DO ZADAŃ MATURALNYCH

## PLANIMETRIA

1.  $3\sqrt{2}$ .2.  $1 \text{ cm}^2$ .**Rozwiązanie.** Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru  $P = 0,5ab \sin \alpha$ .Obliczamy miarę kąta między ramionami trójkąta:  $180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$ . Obliczamy pole trójkąta:  $P = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = 1$ .

3. 15 cm.

4. 5.

6.  $2\sqrt{3}$ .**Wskazówki. I SPOSÓB.** Środkowa trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej.**II SPOSÓB.** Skorzystaj z tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta.7. a)  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ , b)  $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ .**Rozwiązanie.**  $h$  – długość wysokości poprowadzonej do podstawy.

$$h^2 + 2^2 = 8^2, \text{ stąd } h = 2\sqrt{15}. \quad \text{Obliczamy pole trójkąta } ABC: P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}.$$

a) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ , gdzie  $r$  jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

$$4\sqrt{15} = \frac{1}{2}r(4+2 \cdot 8), \text{ stąd } r = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

b) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{abc}{4R}$ , gdzie  $R$  jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie.

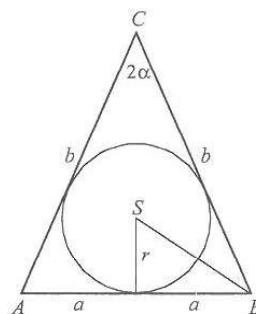
$$4\sqrt{15} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{4R}, \text{ stąd } R = \frac{16}{\sqrt{15}}.$$

8.  $\frac{1}{2}a\sqrt{7}$ .

9. Podstawa:  $\frac{2r}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$ . Ramię:  $\frac{r}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin \alpha}$ .

**Rozwiązanie.**  $|\angle ABC| = 90^\circ - \alpha$ ,  $S$  jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc  $|\angle ABS| = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ .  $\frac{r}{a} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$ , stąd  $a = \frac{r}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$ .

Zatem  $|AB| = \frac{2r}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$ .  $\frac{a}{b} = \sin \alpha$ , więc  $b = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin \alpha} = |AC| = |BC|$ .



10. a)  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ , b)  $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ .

**Rozwiązanie.**  $h$  – długość wysokości poprowadzonej do podstawy.

$h^2 + 2^2 = 8^2$ , stąd  $h = 2\sqrt{15}$ . Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ :  $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$ .

a) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ , gdzie  $r$  jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

$4\sqrt{15} = \frac{1}{2}r(4+2+8)$ , stąd  $r = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ .

b) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{abc}{4R}$ , gdzie  $R$  jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie.

$4\sqrt{15} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{4R}$ , stąd  $R = \frac{16}{\sqrt{15}}$ .

11.  $\sqrt[4]{15}$ .

**Rozwiązanie.**  $a$  – długość podstawy,  $2a$  – długość ramienia. Wyznaczamy długość  $h$  wysokości trójkąta poprowadzonej do podstawy, korzystając z tw. Pitagorasa:  $h^2 = (2a)^2 - (0,5a)^2 = \frac{15}{4}a^2$ , stąd  $h = \frac{\sqrt{15}}{2}a$ . Pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}a = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2 = 25$ . Stąd  $a = \frac{10}{\sqrt[4]{15}}$ .

Wyznaczamy długość  $r$  promienia okręgu wpisanego w trójkąt:  $P = \frac{1}{2}r(2a+2a+a) = \frac{1}{2}r \cdot 5a = 25$ , stąd  $r = \frac{10}{a} = \sqrt[4]{15}$ .

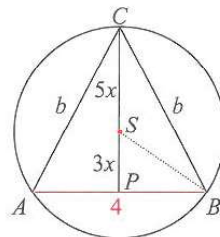
12.  $2\cos\alpha(1 - \cos\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha$ .

13.  $2\sqrt{5}$ .

**Rozwiązanie.** Punkt  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , więc odcinki  $SC$  i  $SB$  są promieniami tego okręgu. Zatem  $|SB| = 5x$ .

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $PBS$   $(3x)^2 + 2^2 = (5x)^2$ . Stąd  $x = 0,5$ , a  $|PC| = 8x = 4$ .

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $PBC$   $b^2 = 4^2 + 2^2$ . Stąd  $b = 2\sqrt{5}$ .



14.  $\frac{2}{3}a$ .

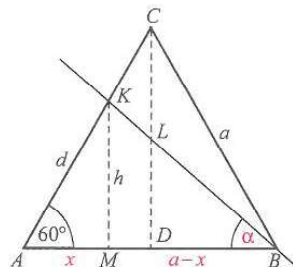
**Rozwiązanie.**  $|LD| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ . W trójkącie  $DBL$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|LD|}{|DB|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

W trójkącie  $AMK$   $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} = \sqrt{3}$ , stąd ①  $h = x\sqrt{3}$ . W trójkącie  $MBK$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Stąd ②  $2h = (a-x)\sqrt{3}$ . Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb  $x = \frac{1}{3}a$  i  $h$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}a$ .

W trójkącie  $AMK$   $\frac{x}{d} = \cos 60^\circ$ , więc  $d = 2x = \frac{2}{3}a$ .

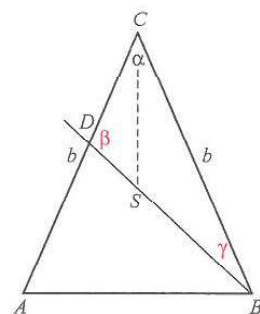


15.  $\frac{b \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$ .

**Rozwiązanie.** Trójkąt  $BCS$  jest równoramienny, odcinek  $SC$  zawiera się w dwusiecznej

kąta  $ACB$ , więc  $\gamma = 0,5\alpha$ .  $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 1,5\alpha$ . Z tw. sinusów dla trójkąta  $BDC$

$\frac{b}{\sin(180^\circ - 1,5\alpha)} = \frac{|DB|}{\sin \alpha}$ . Stąd  $|DB| = \frac{b \sin \alpha}{\sin(180^\circ - 1,5\alpha)} = \frac{b \sin \alpha}{\sin 1,5\alpha}$ .



16.  $2\sqrt{15}$ .

**Rozwiązanie.** Oznaczenia:  $2a, h, r, R$  – długości odpowiednio podstawy, wysokości poprowadzonej do podstawy, promienia okręgu wpisanego, promienia okręgu opisanego. Wyrazimy  $r$  i  $R$  w zależności od  $a$ .  $h^2 + a^2 = (4a)^2$ , więc  $h = a\sqrt{15}$ . Pole trójkąta  $P = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{15} = a^2\sqrt{15}$ .

Ze wzorów na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ ,  $P = \frac{abc}{4R}$  i z równości  $P = a^2\sqrt{15}$  otrzymujemy  $r = \frac{a\sqrt{15}}{5}$  i  $R = \frac{8a\sqrt{15}}{15}$ .

Wiemy, że  $\frac{a\sqrt{15}}{5} + \frac{a\sqrt{15}}{5} + \frac{8a\sqrt{15}}{15} = 11$ . Stąd  $a = \sqrt{15}$ , więc podstawa ma długość  $2\sqrt{15}$ .

17.  $\sqrt{2} - 1$ .

**Rozwiązanie.** W trójkącie  $ABL$   $\frac{h}{a} = \sin\beta$ , w trójkącie  $KBC$   $\frac{H}{\frac{1}{2}a} = \tan\beta$ .  $\frac{\sin\beta}{\tan\beta} = \cos\beta$ , więc  $\cos\beta = \frac{h}{a} \cdot \frac{2H}{a} = \frac{h}{2H}$ . Musimy teraz znaleźć

wartość ilorazu  $\frac{h}{H}$ . Z jedynki trygonometrycznej  $(\frac{h}{a})^2 + (\frac{h}{2H})^2 = 1$ . Ponieważ  $a^2 = hH$ , więc  $\frac{h^2}{hH} + \frac{1}{4} \cdot (\frac{h}{H})^2 = 1$ . Otrzymaliśmy równanie kwadratowe  $\frac{1}{4} \cdot (\frac{h}{H})^2 + \frac{h}{H} - 1 = 0$ , w którym niewiadomą jest iloraz  $\frac{h}{H}$ . Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest liczba  $2(\sqrt{2} - 1)$ , zatem

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{H} = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1.$$

18. 10.

19. 30.

20.  $\frac{3}{4}$ .23.  $\frac{\sqrt{3}}{10}$ .

**Rozwiązanie.**  $a, b$  – długości przyprostokątnych,  $c$  – długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

Musimy obliczyć wartość iloczynu  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$ , czyli wartość wyrażenia  $\frac{ab}{c^2}$ . Wiemy, że zachodzi równość  $5 \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ . Dzielimy obie strony

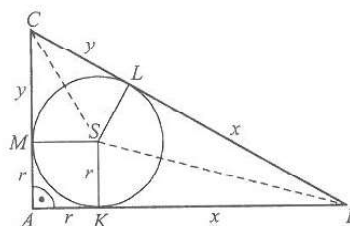
tej równości przez  $\frac{5}{2}c^2$ , otrzymujemy  $\frac{ab}{c^2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ .

24.

**Rozwiązanie.**  $|CB| = 2R$ , gdzie  $R$  promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

$\triangle KBS \equiv \triangle BLS$ , więc  $|KB| = |BL| = x$ ,  $\triangle MSC \equiv \triangle SLC$ , więc  $|MC| = |LC| = y$ .

Zatem  $x + y = 2R$ .  $|AB| + |AC| = 2r + x + y = 2r + 2R$ .

25.  $\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $\frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**Wskazówka.** Skorzystaj z tw. o dwusiecznej kąta trójkąta i z tw. Pitagorasa.

26.  $\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie.**  $a, b$  – długości przyprostokątnych,  $c$  – długość przeciwprostokątnej. Wiemy, że  $a + b = \sqrt{3} + \sqrt{5} - c$  i  $ab = 1$ .

$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = [(\sqrt{3} + \sqrt{5}) - c]^2 - 2 \cdot 1 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot c + c^2 - 2$ . Stąd  $2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot c = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 2$ .

Zatem  $c = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \sqrt{3}$ .

27. 0,6 lub 0,8.

28.  $\frac{25}{12}h$ .

**Rozwiązanie.**  $a, b$  – długości przyprostokątnych,  $c$  – długość przeciwprostokątnej.

Wiemy, że ①  $a + b = 5h - c$ . Pole  $P$  trójkąta:  $P = 0,5ab$  i  $P = 0,5ch$ , stąd ②  $ab = ch$ . Korzystając z tw. Pitagorasa oraz ① i ②, otrzymujemy  $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (5h - c)^2 - 2ch$ . Równość  $(5h - c)^2 - 2ch = c^2$  sprowadzamy do postaci  $25h^2 = 12ch$ . Stąd  $c = \frac{25}{12}h$ .

29.  $\sqrt{\frac{d}{5}}$ .

**Wskazówka.** Uzasadnij, że odległość punktu  $P$  od boku  $AC$  jest równa  $\frac{1}{3} \cdot |BC|$ , a od boku  $BC$  równa jest  $\frac{1}{3} \cdot |AC|$ .

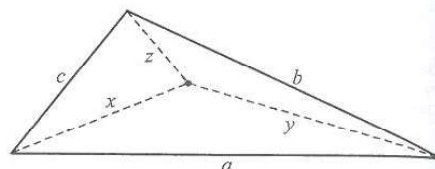
30.  $30^\circ$ .

32. 123,4 cm.

33.  $10^\circ$ .38.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

39.

**Rozwiązanie.** Z nierówności trójkąta mamy  $x+y>a$  i  $y+z>b$  i  $z+x>c$ . Dodając te nierówności stronami otrzymujemy nierówność  $2x+2y+2z>a+b+c$ , a po podzieleniu obu stron otrzymanej nierówności przez 2, dostajemy  $x+y+z>0,5(a+b+c)$ .



40.  $3(2\sqrt{3}-3)$ .

42.  $\frac{R(3\sqrt{5}+1)}{4}$  lub  $\frac{R(3\sqrt{5}-1)}{4}$ .

**Rozwiązanie.** Ozn.  $c$  – długość trzeciego boku.  $\alpha$  – miara kąta trójkąta leżącego naprzeciwko boku o długości  $R\sqrt{3}$ .

Z tw. sinusów  $\frac{R\sqrt{3}}{\sin \alpha} = 2R$ . Stąd  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , zatem  $\alpha = 60^\circ$  lub  $\alpha = 120^\circ$ .

Jeżeli  $\alpha = 60^\circ$ , to z tw. kosinusów  $3R^2 = c^2 + \frac{1}{4}R^2 - 2c \cdot \frac{1}{2}R \cdot \frac{1}{2}$ . Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci  $2c^2 - cR - \frac{11}{2}R^2 = 0$ .

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest  $c = \frac{R+3\sqrt{5}R}{4}$ .

Jeżeli  $\alpha = 120^\circ$ , to z tw. kosinusów  $3R^2 = c^2 + \frac{1}{4}R^2 - 2c \cdot \frac{1}{2}R \cdot (-\frac{1}{2})$ . Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci  $2c^2 + cR - \frac{11}{2}R^2 = 0$ .

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest  $c = \frac{-R+3\sqrt{5}R}{4}$ .

43.

**Wskazówka.** Odcinek  $KS$  jest środkową trójkąta  $ABK$ , a odcinek  $LS$  środkową trójkąta  $ABL$ .

44.  $|BC|=8$ .

**Rozwiązanie.** Oznaczenia:  $|BC|=2x$ ,  $|\angle ABC|=2\alpha$ .

Z tw. cosinusów dla trójkąta  $ABC$ : ①  $36 = 16 + 4x^2 - 16x \cdot \cos \alpha$ .

Z tw. cosinusów dla trójkąta  $ABA'$ : ②  $10 = 16 + x^2 - 8x \cdot \cos \alpha$ .

Mnożąc równanie ② przez  $-2$  i dodając stronami otrzymane równanie i równanie ①, dostajemy  $32 = 2x^2$ . Stąd  $2x = 8$ .

45. 84.

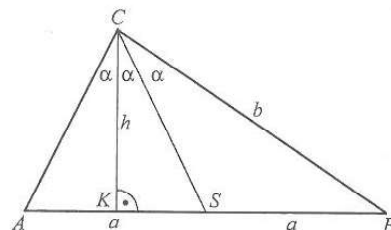
47.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Trójkąt  $ASC$  jest równoramienny, więc  $|KS| = \frac{1}{2}a$ . Odcinek  $CS$  zawiera się w

dwusiecznej kąta  $KCB$ , zatem  $\frac{h}{b} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$  (z twierdzenia o dwusiecznej kąta trójkąta).

$\frac{h}{b} = \cos 2\alpha$ , stąd  $2\alpha = 60^\circ$ . Obliczenie miar kątów trójkąta jest teraz natychmiastowe:

$|\angle ACB| = 3\alpha = 90^\circ$ ,  $|\angle KAC| = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ ,  $|\angle KBC| = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ$ .



49.  $\frac{4}{3}$ .

**Wskazówka.** Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta  $P = 0,5absin\alpha$ .

50.  $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ .

51.

**Wskazówka.** Narysuj odcinek  $MP$  równoległy do  $AB$  taki, że  $P \in BC$  i poszukaj trójkątów przystających.

52.  $\sqrt{b(a+b)}$ .

**Wskazówka.** Zobacz zadanie 37.

54.

**Rozwiązanie.** Daną zależność zapiszemy w postaci  $2\cos\alpha\cos\beta = 1 - \cos\gamma$  i przekształcimy równoważnie korzystając z równości:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta), \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = 1 - \cos\gamma \Leftrightarrow 2\cos\alpha\cos\beta = 1 - \cos[\pi - (\alpha + \beta)] \Leftrightarrow 2\cos\alpha\cos\beta = 1 + \cos(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = 1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}..$$

Kąty  $\alpha, \beta$  są z przedziału  $(0; \pi)$ , zatem  $\alpha - \beta = 0$ , czyli kąty  $\alpha, \beta$  są równe. Jeżeli dwa kąty trójkąta są równe, to trójkąt jest równoramienny.

58.  $\frac{3}{4}$  lub  $\frac{4}{3}$ .

**Rozwiązanie.**  $a-r$ ,  $a$ ,  $a+r$  – długości boków trójkąta ( $r > 0$ ). Z tw. Pitagorasa  $(a-r)^2 + a^2 = (a+r)^2$ . Stąd  $a^2 - 4ar = 0$ . Dzielimy obie strony otrzymanego równania przez  $a$ , otrzymujemy  $a - 4r = 0$ , zatem  $a = 4r$ .

Wyznaczamy tangens jednego z kątów ostrych:  $\frac{a-r}{a} = \frac{4r-r}{4r} = \frac{3}{4}$ .

59.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

61.  $\sqrt{6} - 2$ .

**Wskazówka.** Środkowa poprowadzona do przeciwprostokątnej jest od niej dwa razy krótsza.

62. 5, 7, 9.

63.

**Rozwiązanie.**  $a$ ,  $a+p$ ,  $a+2p$  – długości boków trójkąta.  $r$  – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.  $P$  – pole trójkąta.

$$P = \frac{1}{2}r(a + a + r + a + 2r) = \frac{1}{2}3r(a+r). \quad P = \frac{1}{2}h(a+r), \text{ gdzie } h \text{ jest wysokością poprowadzoną do boku o długości } a+r.$$

Zatem  $h = 3r$ , czyli  $r = \frac{1}{3}h$ .

64.  $\frac{4\sqrt{3}a^2}{13}$ .

65.  $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ .

66.  $5\sqrt{2}$ .

67.  $255 \text{ cm}^2$ .

68. Pole zwiększyłoby się o  $33 \text{ cm}^2$ .

69.  $9(\sqrt{3}+1)$ .

**Wskazówki.** I. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadź wysokość do dłuższego boku.

II. Oblicz miarę kąta ostrego równoległoboku.

70.  $3$  i  $\sqrt{11}$ .

72.  $48\sqrt{2}$ .

73. 4.

75.  $\frac{1}{\pi}$ .

77.

**Wskazówka.** Skorzystaj z tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta.

78. 6.

**Rozwiązanie.**  $|\angle KBC| = |\angle CDE| = \beta$  i  $|\angle BKC| = |\angle DCL|$ , więc trójkąty  $BKC$  i  $DCL$  są podobne. Zatem  $\frac{4}{a} = \frac{a}{9}$ . Stąd  $a = 6$ .

79. Pole:  $9\sqrt{3}$ . Przekątna:  $3\sqrt{3}$ .

80. 5.

**Rozwiązanie.** Trójkąty  $AKS$  i  $NAS$  są przystające, więc  $|AK| = 3-x$ . Podobnie, z przystawania odpowiednich trójkątów wnioskujemy, że  $|DM| = x$  i  $|LB| = x$ .  $|AB| = |AK| + |KL| + |LB| = 3-x+2+x = 5$ .

81.  $|BD| = 7$

**Rozwiązanie.**  $|\angle BCD| = 180^\circ - |\angle ABC| = 60^\circ$ .

**I SPOSÓB.**  $S$  jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów trójkąta  $BCD$ , więc łatwo uzasadnić, że  $\triangle SLC \equiv \triangle SCM$ ,  $\triangle SMD \equiv \triangle DKS$ ,  $\triangle KBS \equiv \triangle BLS$ . Zatem  $|LC| = |MC|$ ,  $|DM| = |DK|$ ,  $|KB| = |LB|$ .

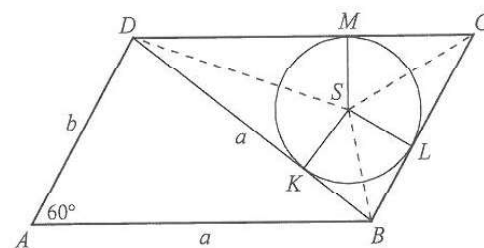
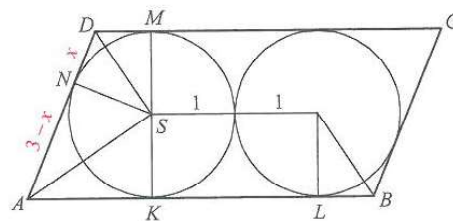
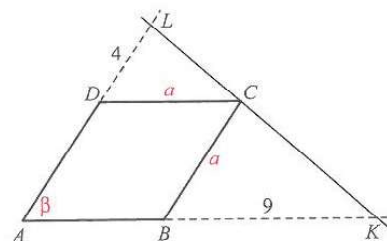
W trójkącie  $SLC$   $\frac{\sqrt{3}}{|LC|} = \tan 30^\circ$ , więc  $|LC| = 3 = |MC|$ . Wiemy, że  $a+b = 13$ .

$$d = |DK| + |KB| = |DM| + |BL| = a + b - (|MC| + |LC|) = 13 - 6 = 7.$$

**II SPOSÓB.** Wiemy, że  $a+b = 13$ . Z tw. kosinusów dla trójkąta  $BCD$ :  $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = (a+b)^2 - 2ab - ab = 13^2 - 3ab$ .

Stąd  $ab = \frac{169-d^2}{3}$ . Pole trójkąta  $BCD$ :  $P = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (a+b+d)$ , stąd i z równości  $ab = \frac{169-d^2}{3}$  dostajemy równanie

$$\frac{169-d^2}{6} = 13+d. \text{ Rozwiązując otrzymane równanie otrzymamy } d=7.$$



82.  $\frac{2R_C R_D}{\sqrt{R_C^2 + R_D^2}}$ .

**Rozwiązanie.** Ozn.  $a$  – długość boku rombu,  $p, q$  – długości przekątnych rombu odpowiednio  $AC$  i  $BD$ .

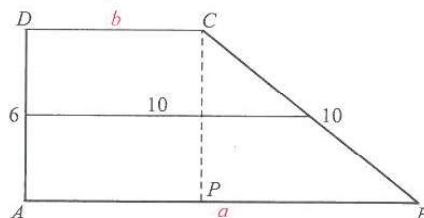
Pole rombu  $P = \frac{1}{2}pq$ .  $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}P = P_{\triangle ABD}$ .  $P_{\triangle ABC} = \frac{a^2 p}{4R_C} = \frac{1}{4}pq$ , stąd  $q = \frac{a^2}{R_C}$ .  $P_{\triangle ABD} = \frac{a^2 q}{4R_D} = \frac{1}{4}pq$ , stąd  $p = \frac{a^2}{R_D}$ .

Z tw. Pitagorasa:  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = a^2$ . Zatem  $\left(\frac{a^2}{2R_D}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2R_C}\right)^2 = a^2$ , stąd otrzymujemy  $a = \frac{2R_C R_D}{\sqrt{R_C^2 + R_D^2}}$ .

83. 6 i 14.

**Rozwiązanie.** Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa połowie sumy długości podstaw, zatem ①  $\frac{a+b}{2} = 10$ .

$|PB| = a - b$ , z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $PBC$   $(a-b)^2 = 10^2 - 6^2$ . Stąd ②  $a - b = 8$ . Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb  $a = 14$  i  $b = 6$ .



84. 96.

85.  $\frac{16}{25}$ .

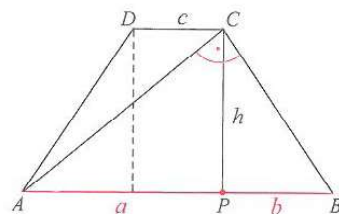
86.  $15 + 3\sqrt{3}$ .

87.  $60^\circ$  i  $120^\circ$ .

88.  $a\sqrt{ab}$ .

**Rozwiązanie.**  $c = a - b$ . Trójkąty  $AHC$  i  $CHB$  są podobne, więc  $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$ . Stąd  $h = \sqrt{ab}$ .

Obliczamy pole trapezu:  $P = \frac{c+a+b}{2} \cdot h = \frac{a-b+a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} = a\sqrt{ab}$ .



89. Od krótszej podstawy 2 cm, od dłuższej 6 cm.

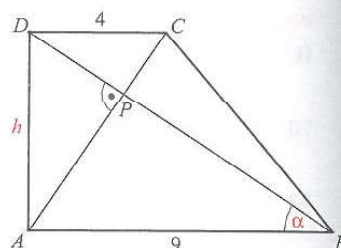
90.  $12(\sqrt{3} - 1)$ .

91. 9.

92. 6.

**Rozwiązanie.** Trójkąt  $ABD$  jest prostokątny, więc  $|\angle ADB| = 90^\circ - \alpha$ . Trójkąt  $APD$  jest prostokątny, więc  $|\angle DAP| = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ .

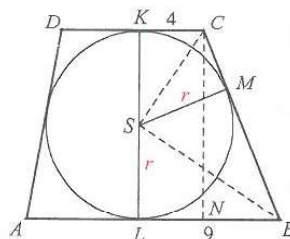
W trójkącie  $ACD$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{h}$ . W trójkącie  $ABD$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{9}$ . Zatem  $\frac{4}{h} = \frac{h}{9}$ . Stąd otrzymujemy  $h = 6$ .



94. 6 cm.

**Rozwiązanie.** Z tw. o odcinkach stycznych do okręgu wnioskujemy, że:  $|KC| = |MC| = 4$  i  $|LB| = |BM| = 9$ . Zatem  $|BC| = |BM| + |MC| = 9 + 4 = 13$ .

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $NBC$   $(2r)^2 + 5^2 = 13^2$ . Stąd  $r = 6$ .



95.

**Wskazówka.** Skorzystaj z tw. o odcinku łączącym środki ramion trapezu.

96. Obwód: 16. Pole: 8.

97. 5 i 30.

98.  $\frac{\sqrt{P \sin \alpha \sin \beta}}{2(\sin \alpha + \sin \beta)}$ .

99. Pole trapezu:  $\frac{9r^2}{2}$ .

100. 7 cm i 1 cm.

101.  $\frac{a^2}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha}$ .

**Rozwiązanie.**  $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$  i  $\frac{y}{x+a} = \operatorname{tg} \alpha$ . Stąd  $x = \frac{a \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ . Wyzna-

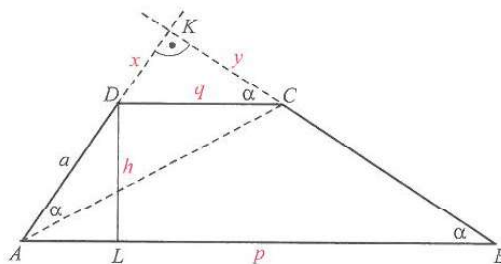
czamy długości podstaw trapezu:  $\frac{x}{q} = \sin \alpha$ , stąd  $q = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ ,

$\frac{x+a}{p} = \sin \alpha$ , stąd  $p = \frac{a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha}$ . Wyznaczamy długość wysokości tra-

pezu:  $|\angle ABK| = 90^\circ - \alpha$ , więc  $|\angle ADL| = \alpha$ ,  $\frac{h}{a} = \cos \alpha$ , stąd  $h = a \cos \alpha$ .

Pole trapezu:  $P = \frac{1}{2} \cdot (p+q)h = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} + \frac{a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \right) \cdot a \cos \alpha = \frac{a \sin^2 \alpha + a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \cdot a \cos \alpha =$

$\frac{a^2 \cos \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} = \frac{a^2}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha}$ .



102.  $ab - \frac{b^2}{2\operatorname{tg}\alpha}$ .

103.  $3\sqrt{3}$ .

104.

**Rozwiązanie.**  $\beta, \gamma$  – miary kątów odpowiednio  $ABC$  i  $BCD$ . Suma kątów przyległych do ramienia trapezu jest równa  $180^\circ$ , więc  $\beta + \gamma = 180^\circ$ . Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów, zatem  $|\angle SBC| + |\angle BSC| = 0,5\beta + 0,5\gamma = 0,5 \cdot (\beta + \gamma) = 90^\circ$ . Suma dwóch kątów trójkąta  $SBC$  wynosi  $90^\circ$ , więc trójkąt ten jest prostokątny.

105.  $3,6 \text{ cm}^2$ .

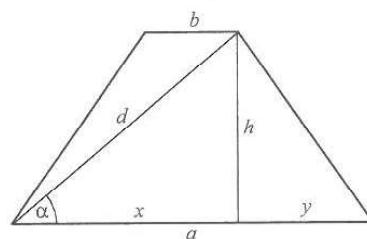
**Wskazówki.** I. Rozwiąż zadanie 104. II. Poprowadź wysokość trapezu przechodzącą przez środek okręgu wpisanego w trapez i poszukaj trójkątów podobnych.

106.  $\frac{3\sqrt{17}r}{8}$ .

107.  $0,5d^2\sin 2\alpha$ .

**Rozwiązanie.**  $\frac{h}{d} = \sin \alpha$ , stąd  $h = d\sin \alpha$ .  $\frac{x}{d} = \cos \alpha$ , stąd  $x = d\cos \alpha$ .

$y = \frac{a-b}{2}$ ,  $x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$ . Pole trapezu:  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = xh = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$ .



108. 3 cm i 5 cm.

**Wskazówka.** Wysokość trapezu poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których jeden ma długość równą długości odcinka łączącego środki ramion trapezu.

110. Promień okręgu wpisanego:  $\frac{3}{2}$ . Promień okręgu opisanego:  $\frac{10}{3}$ .

111. 2 : 1.

**Wskazówka.** I SPOSÓB. Wyznacz stosunek pól trójkątów  $ABK$  i  $DCK$ , gdzie  $K$  jest punktem wspólnym prostych  $AD$  i  $BC$ .

II SPOSÓB. Uzasadnij, że trójkąt  $ABC$  i „połówka” trójkąta  $ACD$  są trójkątami podobnymi.

112. Pole:  $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ , długość przekątnej:  $3\sqrt{3} \text{ cm}$ .

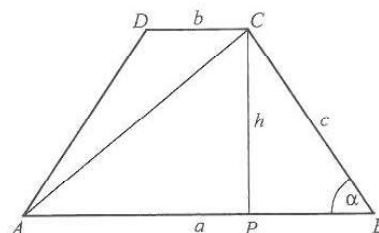
113.  $\sqrt{2} - 1$ .

**Rozwiązanie.** Trapez  $ABCD$  jest wpisany w okrąg, więc jest równoramienny.

$\frac{a+b+2c}{a+b} = 1 + \frac{2c}{a+b} = 1,5$ , stąd  $a+b=4c$ .  $|AP| = \frac{a+b}{2} = 2c$ .

$AB$  jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , więc  $ABC$  jest trójkątem prostokątnym i  $|\angle ACP| = \alpha$ .  $\frac{h}{c} = \sin \alpha$ ,  $\frac{|AP|}{h} = \frac{2c}{h} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , zatem  $\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Przekształcając ostatnią równość, otrzymujemy  $\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0$ . Otrzymane równanie rozwiązujemy wprowadzając niewiadomą pomocniczą  $t = \cos \alpha$ :  $t^2 + 2t - 1 = 0$ ,  $t_1 = -1 - \sqrt{2}$ ,  $t_2 = -1 + \sqrt{2}$ . Kosinus kąta ostrego jest dodatni, więc  $\cos \alpha = -1 + \sqrt{2}$ .



116.

**Wskazówka.** Niech  $K$  będzie punktem wspólnym prostych zawierających ramiona  $AD$  i  $BC$  trapezu. Poprowadź z wierzchołka  $K$  środkowe trójkątów  $ABK$  i  $DCK$ .

117.

**Rozwiązanie.** Niech  $P$  będzie polem danego trapezu; pozostałe oznaczenia, jak na rysunku obok.

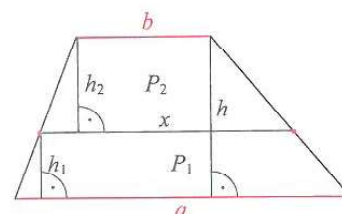
Wobec powyższego:  $P = \frac{1}{2}(a+b)h$ ,  $P_1 = \frac{1}{2}(a+x)h_1$ ,  $P_2 = \frac{1}{2}(x+b)h_2$  i  $h = h_1 + h_2$ .

$P_1 = P_2$ , zatem ①  $(a+x)h_1 = (x+b)h_2$ .  $P_1 + P_2 = P$ , więc  $\frac{1}{2}(a+x)h_1 + \frac{1}{2}(x+b)h_2 = \frac{1}{2}(a+b)(h_1 + h_2)$ .

Stąd otrzymujemy ②  $(x-b)h_1 = (a-x)h_2$ .

Po podzieleniu stronami równości ① i ② dostaniemy równość  $\frac{a+x}{x-b} = \frac{x+b}{a-x}$ .

Stąd otrzymujemy  $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .



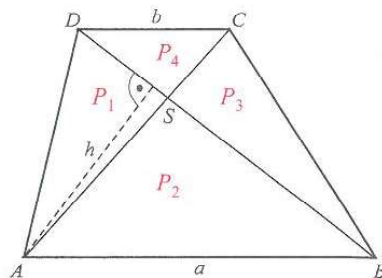
118.

**Rozwiązanie.**  $P_1, P_2, P_3, P_4$  – pola trójkątów odpowiednio  $DAS, ABS, SBC, DSC$ .

a)  $P_{ABC} = P_2 + P_3$ ,  $P_{ABD} = P_2 + P_1$ .  $P_{ABC} = P_{ABD}$  (pola trójkątów  $ABC$  i  $ABD$  są równe ponieważ mają wspólny bok, a wysokości obu trójkątów poprowadzone do tego boku mają równą długość). Z równości  $P_2 + P_3 = P_2 + P_1$  otrzymujemy równość  $P_3 = P_1$ .

b) Trójkąty  $ABS$  i  $CDS$  są podobne (kąty  $ABS$  i  $CDS$  są kątami odpowiadającymi, kąty  $ASB$  i  $CSD$  są kątami wierzchołkowymi), więc stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Skala podobieństwa trójkątów  $ABS$  i  $CDS$  jest równa  $a : b$ , zatem  $P_2 : P_4 = a^2 : b^2$ .

c) Pokażemy, że  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{a}{b}$ . Trójkąty  $ABS$  i  $CDS$  są podobne, więc stosunki odpowiednich boków są równe:  $\frac{|BS|}{|SD|} = \frac{a}{b}$ . Trójkąty  $ABS$  i  $ASD$  ma-



ją wspólną wysokość  $h$ . Zatem  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |SD| \cdot h} = \frac{|BS|}{|SD|} = \frac{a}{b}$ . Analogicznie dowodzimy, że  $\frac{P_3}{P_4} = \frac{a}{b}$ .

119.  $\frac{21}{2}, \frac{63}{2}, \frac{63}{2}, \frac{189}{2}$ .

**Rozwiązanie.** W trapez  $ABCD$  można wpisać okrąg więc ①  $a + b = 13 + 15$ . Korzystamy ze wzoru na pole trapezu:  $0,5(a + b)h = 0,5 \cdot 28h = 168$ , stąd  $h = 12$ . Z tw. Pitagorasa dla trójkątów  $AKD$  i  $LBC$  znajdujemy  $|AK| = 5$  i  $|LB| = 9$ . Zatem ②  $a = 5 + b + 9$ . Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para  $a = 21$  i  $b = 7$ .

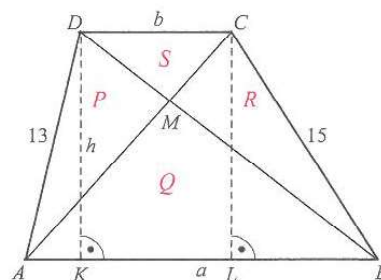
$P, Q, R, S$  – pola trójkątów odpowiednio  $DAM, ABM, MBC, DMC$ .

$P = R$  (patrz rozwiązanie zadania 118 a)).

$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b} = \frac{21}{7} = 3$  (patrz rozwiązanie zadania 118 c)), stąd  $Q = 3P$ .

$\frac{Q}{S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 9$  (patrz rozwiązanie zadania 118 b)), stąd  $Q = 9S$ .  $P + Q + R + S = 3S + 9S + 3S + S = 16S = 168$ , więc  $S = 10,5$ .

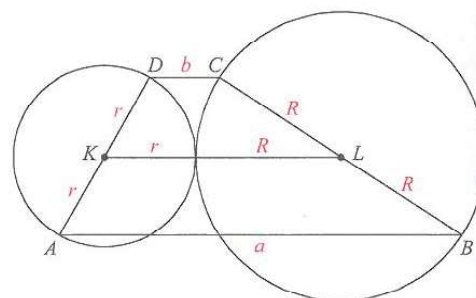
$P = R = 3S = 31,5$ ,  $Q = 9S = 95,5$ .

120.  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ .

121.

**Rozwiązanie.** Wykażemy, że sumy długości przeciwległych boków trapezu są równe, czyli, że  $a + b = 2r + 2R$ .

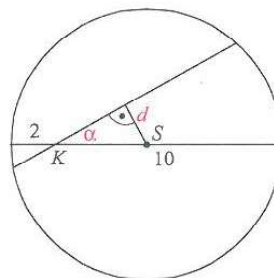
Odcinek  $KL$  jest odcinkiem łączącym środki ramion trapezu, więc jego długość jest równa połowie sumy długości podstaw trapezu. Zatem  $|KL| = r + R = 0,5(a + b)$ . Stąd  $a + b = 2r + 2R$ .

123.  $|\angle BAC| = |\angle ABC| = 63^\circ 30'$ ,  $|\angle ACB| = 53^\circ$ .125.  $150^\circ$ .

126. 2.

**Rozwiązanie.**  $\alpha = 30^\circ$ . Średnica okręgu ma długość 12, więc promień ma długość 6.

$|KS| = 6 - 2 = 4$ .  $\frac{d}{4} = \sin 30^\circ = 0,5$ , zatem  $d = 2$ .

127.  $50^\circ$  i  $110^\circ$ .128.  $4\sqrt{34}$ .129.  $12 \text{ cm}^2$ .

**Wskazówka.** Jeśli  $a$  jest długością boku sześciokąta foremnego, to długość promienia okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równa  $a$ , zaś długość promienia okręgu wpisanego równa jest długości wysokości trójkąta równobocznego o boku  $a$ .

130. a) 4; b) 4.

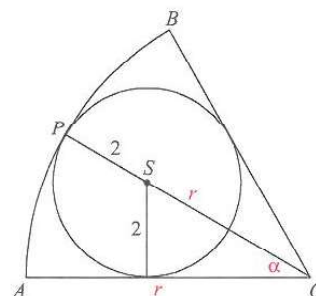
132. 3.

133.  $6\pi$ .

**Rozwiązanie.** Środek  $S$  okręgu wpisanego w wycinek koła leży na dwusiecznej kąta  $AOB$ ,

więc  $\alpha = 30^\circ$ .  $|SO| = r - 2$ .  $\frac{2}{r-2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , stąd  $r = 6$ .

Obliczamy pole wycinka koła:  $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2 = 6\pi$ .

134. 12 lub  $2\sqrt{22}$ .136.  $28 - 8\sqrt{6}$ .

137.  $a(\sqrt{3}-1)$ ,  $\frac{1}{2}a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ .

**Rozwiązanie.** Ozn.  $r$  – długość promienia okręgu o środku w punkcie  $S_2$ .  $S$  – środek cięciwy  $AB$ .

Zauważmy, że trójkąt  $BAS_2$  jest równoboczny. Zatem  $|AB|=r$ , zaś  $|SS_2|=\frac{r\sqrt{3}}{2}$ .  $BAS_1$  jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, więc  $|S_1S|=0,5 \cdot |AB|=0,5r$ .  $|S_1S_2|=|S_1S|+|SS_2|=\frac{r}{2}+\frac{r\sqrt{3}}{2}=a$ . Stąd  $r=a(\sqrt{3}-1)$ .  $|S_1A|=\frac{r\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ .

138.  $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$ .

139.  $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4a^2$ , gdzie  $a$  jest długością boku kwadratu.

**Wskazówka.** Rozważ sumy  $|PA|^2+|PC|^2$  i  $|PB|^2+|PD|^2$ .

140. 2.

141. 0,2.

143.  $\frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$ .

144.  $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2$  [ $=(2-\sqrt{3})^2$ ].

**Rozwiązanie.**  $\frac{r}{x}=\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ , stąd ❶  $x=r\sqrt{3}$ .  $\frac{R}{x+r+R}=\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ , stąd

i z ❶ otrzymujemy ❷  $R\sqrt{3}=r\sqrt{3}+r+R$ . Z równania ❷ wyznaczamy stosunek

promieni kół:  $\frac{R}{r}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}=2+\sqrt{3}$ .

Obliczamy stosunek pól kół:  $\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\left(\frac{R}{r}\right)^2=(2+\sqrt{3})^2$ .

145.  $81\pi$ .

146.

**Wskazówka.** Czworokąt  $ABS_1S_2$ , gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są środkami danych okręgów, jest trapezem. Co wiesz o kątach w trapezie?

147.  $\frac{1}{4}R$ .

**Rozwiązanie.**  $|PL|=R-r$ . Z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $KLP$   $x^2=(R-r)^2-r^2=R^2-2Rr$ .

$|QM|=0,5R-r$ . Z tw. Pitagorasa dla trójkąta  $PMQ$   $x^2=(0,5R+r)^2-(0,5R-r)^2=2Rr$ .

Zatem  $R^2-2Rr=2Rr$ . Stąd otrzymujemy  $r=0,25R$ .

148.  $\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$  lub  $\frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$ .

149.  $|\angle A|=50^\circ$ ,  $|\angle B|=90^\circ$ ,  $|\angle C|=90^\circ$ ,  $|\angle D|=130^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Kąty  $ABC$  i  $ADC$  są kątami wpisanymi w okrąg opartymi na średnicy, więc są kątami prostymi. Kąt  $BAD$  jest kątem wpisanym, opartym na tym samym, co kąt środkowy  $BSD$ , więc  $|\angle BAD|=0,5 \cdot |\angle BSD|=50^\circ$ . Suma miar kątów czworokąta wynosi  $360^\circ$ , zatem  $|\angle BCD|=360^\circ-(50^\circ+90^\circ+90^\circ)=130^\circ$ .

150.  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ .

**Wskazówka.** Skorzystaj z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku.

152. Pole czworokąta: 234,  $|AC|=20$ ,  $|BD|=25$ .

154.  $|\angle B|=60^\circ$ ,  $|\angle C|=100^\circ$ ,  $|\angle D|=120^\circ$ .

156. Długość boku  $AD$  jest równa 5.

157.  $\frac{109\sqrt{3}}{6}$  cm<sup>2</sup>.

159.  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $120^\circ$ .

160.  $|\angle A|=60^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Ozn.  $\alpha$  – miara kąta  $BAC$ .  $|\angle ABC|+|\angle ACB|=180^\circ-\alpha$ .

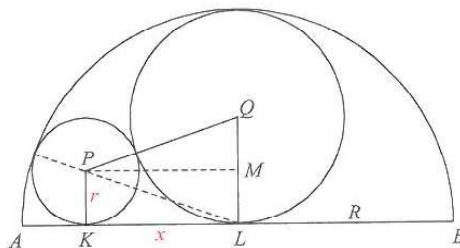
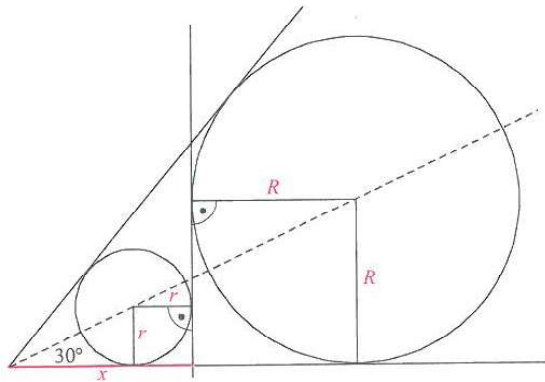
$|\angle OBC|+|\angle BCO|=0,5(|\angle ABC|+|\angle ACB|)=0,5(180^\circ-\alpha)=90^\circ-0,5\alpha$ .  $|\angle TOS|=|\angle COB|=180^\circ-(90^\circ-0,5\alpha)=90^\circ+0,5\alpha$ .

Na czworokącie  $ATOS$  można opisać okrąg, więc  $|\angle TOS|+|\angle TAS|=180^\circ$ . Zatem  $90^\circ+0,5\alpha+\alpha=180^\circ$ , stąd  $\alpha=60^\circ$ .

162.  $|AB|=7,5$ ,  $|BC|=13,5-5\sqrt{3}$ ,  $|AD|=1,25(3+\sqrt{21})$ .

163. Obwód:  $14\sqrt{3}+3\sqrt{21}$ . Pole:  $\frac{189\sqrt{3}}{4}$ .

**Wskazówka.** Uzasadnij, że trójkąt  $ABC$  jest równoboczny. Wykorzystując równość kątów  $ADB$  i  $BDC$ , uzasadnij, że  $|AD|=2 \cdot |DC|$ .

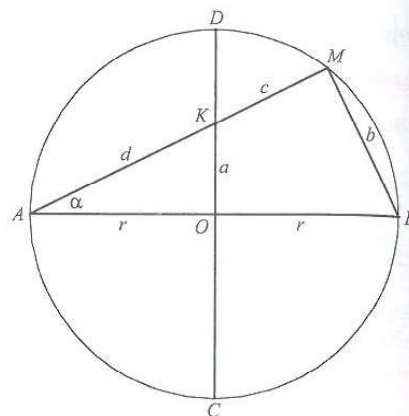


164.  $|\angle BAM| = 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.**  $\angle AMB$  jest oparty na średnicy, więc  $|\angle AMB| = 90^\circ$ . ①  $\frac{b}{2r} = \sin \alpha$ ,

②  $\frac{c+d}{2r} = \cos \alpha$ , ③  $\frac{a}{r} = \operatorname{tg} \alpha$ , ④  $\frac{r}{d} = \cos \alpha$ . W czworokąt  $OBMK$  można wpisać okrąg, więc ⑤  $a+b=c+r$ . Wyznaczając z równości ①, ②, ③, ④  $a, b, c$  i podstawiając do równości ⑤, otrzymujemy  $r \operatorname{tg} \alpha + 2r \sin \alpha = 2r \cos \alpha - \frac{r}{\cos \alpha} + r$ . Dzielimy obie strony tego równania przez  $r$  otrzymujemy równanie trygonometryczne  $2 \sin \alpha - 1 = 2 \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Przekształcając prawą stronę dostajemy  $2 \sin \alpha - 1 = \frac{-2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha}$ , a następnie  $2 \sin \alpha - 1 = \frac{-(2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha}$ . Stąd już łatwo uzasadnić, że  $\sin \alpha = 0,5$ , czyli  $\alpha = 30^\circ$ .

**Uwaga.** Otrzymane równanie trygonometryczne można rozwiązać w prostszy sposób korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta i wzorów na sumy funkcji trygonometrycznych, których znajomość nie jest wymagana na maturze.



165.  $|BC| = 4$ .

**Rozwiązanie.** Ozn.  $2\alpha$  – miara kąta  $DAB$ . Pola trójkątów  $BCA$  i  $BCD$  mają równe pola, ponieważ  $P_{BCA} = P_{BCE} + P_{ABE}$ ,  $P_{BCD} = P_{BCE} + P_{CDE}$ , a wiemy, że  $P_{ABE} = P_{CDE}$ . Jeżeli pola trójkątów  $BCA$  i  $BCD$  mają równe pola, to wysokości obu trójkątów poprowadzone do boku  $BC$  mają równe długości. Zatem punkty  $A$  i  $D$  są jednakowo odległe od prostej  $BC$ , a to oznacza, że boki  $BC$  i  $AD$  są równoległe. Jeżeli boki  $BC$  i  $AD$  są równoległe, to  $|\angle DAC| = |\angle BCA| = \alpha$  (bo kąty  $DAC$  i  $BCA$  są naprzemianległe, a przekątna  $AC$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $DAB$ ). Zatem trójkąt  $ABC$  jest równoramienny (bo kąty przy wierzchołkach  $A$  i  $C$  mają miarę  $\alpha$ ), czyli boki  $AB$  i  $BC$  mają długość 4.

166. 3,04 ha.

167. a) 1 : 2 000; b) 180 m.

168. 62 drzewa (wymiary działki: 75 m  $\times$  128 m).

169. 12,5 m.

170. a) 7,65 km; b) 3,6 km.

171. a) 108 cm; b)  $101\frac{11}{17}$  cm ( $\approx 101,6$  cm).

172.  $2\sqrt{3} + 1$  m ( $\approx 4,46$  m).

173. 45 min.

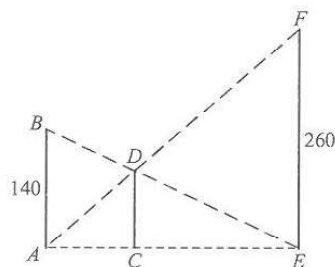
174. a)  $8\sqrt{3}$  km ( $\approx 13,9$  km); b) 8 km.

175. a)  $d = a \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} - 10$ , gdzie  $d$  – szerokość rzeki; b) 40 m.

176. 2 cm.

177. a) 91 m; b) odległość między  $M_1$  i  $M_2$ : 105 m, między  $M_2$  i  $M_3$ : 195 m.

**Wskazówka.** a) Skorzystaj z podobieństwa trójkątów  $ADB$  i  $DEF$  i np. z podobieństwa trójkątów  $AEB$  i  $CED$  (patrz rysunek obok).



178. a) 1,70 km; b)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  km ( $\approx 2,12$  km).

179. a) 1,8 km; b)  $6\frac{7}{15}$  km.

180. a) 14; b) 5; c) 12; d) 8.

181. a) o  $900^\circ$ ; b)  $162^\circ$ .

185.

**Wskazówka.** Poszukaj takich dwóch trójkątów przystających, że boki jednego trójkąta jest odcinek  $AC$ , a drugiego odcinek  $BD$ .

186.  $\frac{20}{\pi}$ .

187.  $4\sqrt{3} - 6$ .

189. 5.

190.

**Wskazówka.** Narysuj odcinek równoległy do boku  $AB$ , którego jednym końcem jest punkt  $K$ , a drugi koniec należy do boku  $BC$ .

191. Pole trójkąta wynosi  $4 + \frac{19}{6}\sqrt{3}$ .

192.

**Wskazówka.** Skorzystaj z tw. o dcinku łączącym środki ramion trapezu.

193.

**Wskazówka.** Skorzystaj ze związku między miarami kąta środkowego i kąta wpisanego, które są oparte na tym samym łuku.

194. Dwadzieścia.

**Rozwiązanie.**  $n$  – liczba wierzchołków wielokąta  $W$ .

Suma kątów każdego wielokąta o  $n$  wierzchołkach jest równa  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Miary kątów wielokąta  $W$  tworzą ciąg arytmetyczny, więc sumę miar kątów tego wielokąta możemy zapisać korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego:  $\frac{100^\circ+170^\circ}{2} \cdot n$ .

Z równości  $(n-2) \cdot 180^\circ = \frac{100^\circ+170^\circ}{2} \cdot n$  otrzymujemy  $n=8$ . Liczba przekątnych wielokąta wypukłego o  $n$  wierzchołkach jest równa  $\frac{n(n-3)}{2}$ , zatem liczba przekątnych wielokąta  $W$  jest równa 20.

195.  $2a^2$ .

197.  $\frac{\pi}{4}ab$ .

198. 2 i 3.

**Rozwiązanie.**  $\frac{x}{y} = \frac{4}{6}$  (skorzystaliśmy z tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie) i  $x+y=5$ .

Rozwiązaniem otrzymanego układu równań jest para  $x=2$  i  $y=3$ .

199. Pole:  $\frac{d^2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\tan \alpha}$ , promień:  $\frac{d \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin 2\alpha}$ .

200.  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ .

201.  $2 \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}$ .

**Wskazówka.** Jaką długość ma odcinek  $KL$  (zobacz rysunek)?

202. 12:5.

203.

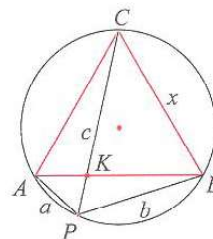
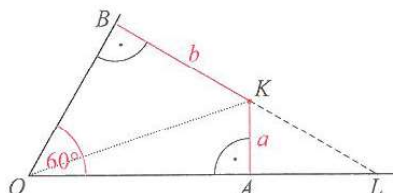
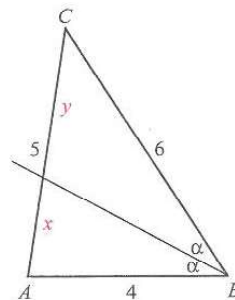
**Wskazówka.** Wykorzystaj podobieństwo trójkątów, np. trójkątów  $EBD$  i  $KBC$  oraz trójkątów  $AFG$  i  $ALC$ .

204.

**Rozwiązanie.**  $x$  – długość boku trójkąta  $ABC$ ,  $a, b, c$  – długości odcinków odpowiednio  $AP, BP, CP$   
 $K$  – punkt wspólny odcinków  $AB$  i  $PC$

Z podobieństwa trójkątów  $APK$  i  $PBC$ :  $\frac{|AK|}{x} = \frac{a}{c}$ , z podobieństwa trójkątów  $KBC$  i  $PBC$ :  $\frac{|KB|}{b} = \frac{x}{c}$ .

$|AK| + |KB| = x$ , zatem  $\frac{ax}{c} + \frac{bx}{c} = x$ . Stąd otrzymujemy  $a+b=c$ .



## PRAWIEMATURA PO ROZDZIALE 1.

| Numer zadania | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Odpowiedź     | D  | C  | A  | C  | B  | D  | B  | D  | B  | B   | D   | D   | C   | C   | A   | D   |

17.  $x \in \langle -1; 2 \rangle$

20.  $b = -2\sqrt{2}$ .

21. 24.

22.  $-5,5, -0,25, 5$ .

### Schematy punktowania zadań otwartych.

| Nr zad. | Uzyskujesz | za                                                                                                                                       |
|---------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 17      | 1 pkt.     | podanie pierwiastków równania $(2x-1)^2=9$ ( $x_1=-1, x_2=2$ ).                                                                          |
|         | 2 pkt.     | zapisanie zbioru rozwiązań nierówności ( $x \geq -1$ i $x \leq 2$ albo $\langle -1; 2 \rangle$ ).                                        |
| Nr zad. | Uzyskujesz | za                                                                                                                                       |
| 18      | 1 pkt.     | zapisanie liczb $a$ oraz $b$ np. w postaci $a=3n+1, b=3n+2$ , gdzie $n$ jest liczbą naturalną.                                           |
|         | 2 pkt.     | uzasadnienie, że liczba $(3n+1)^2 + (3n+2)^2 + 1$ jest podzielna przez 3.                                                                |
| Nr zad. | Uzyskujesz | za                                                                                                                                       |
| 19      | 1 pkt.     | uzasadnienie, że jeśli $ ABS  = \alpha$ , to $ ACB  = 90^\circ - \alpha$ albo że jeśli $ ACB  = \alpha$ , to $ ABS  = 90^\circ - \alpha$ |
|         | 2 pkt.     | uzasadnienie, że suma miar kątów $ABS$ i $ACB$ równa jest $90^\circ$ .                                                                   |