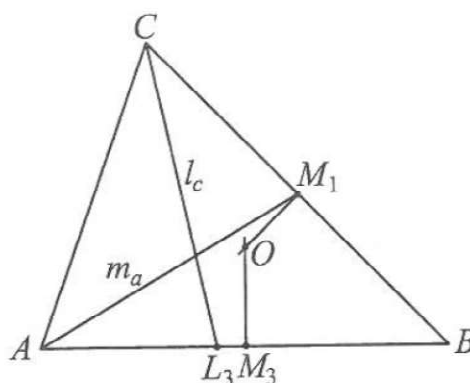
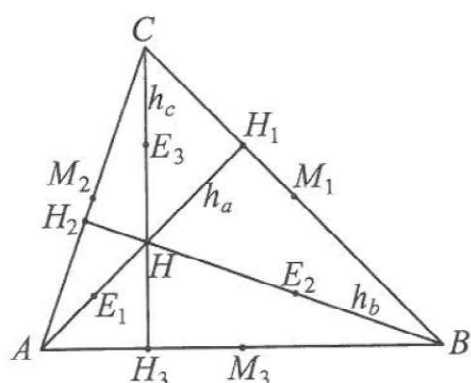
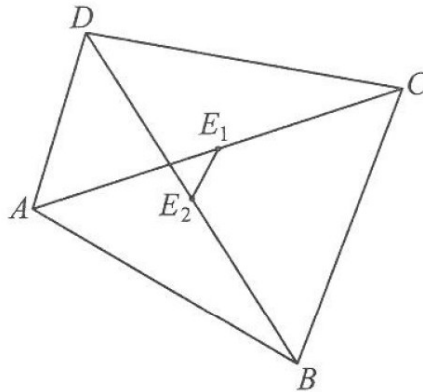
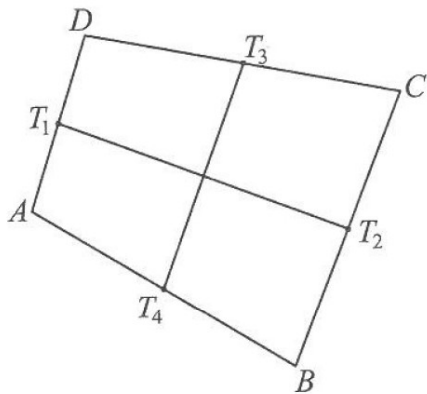


Oznaczenia w trójkącie ABC



M_1, M_2, M_3 – środki boków,
 H_1, H_2, H_3 – spodki wysokości,
 H – ortocentrum (punkt wspólny wysokości),
 O – środek okręgu opisanego,
 R – promień okręgu opisanego,
 M – środek ciężkości (punkt wspólny środkowych),
 L_1, L_2, L_3 – spodki dwusiecznych,
 E_1, E_2, E_3 – punkty Eulera będące środkami odcinków których końcami są wierzchołki trójkąta i ortocentrum,
 I – środek okręgu wpisanego (*incentrum* – punkt wspólny dwusiecznych),
 r – promień okręgu wpisanego,

l_a, l_b, l_c – długości odpowiednich dwusiecznych,
 m_a, m_b, m_c – długości odpowiednich środkowych,
 h_a, h_b, h_c – długości odpowiednich wysokości,
 a, b, c – długości boków (BC, AC, AB),
 α, β, γ – kąty przy odpowiednich wierzchołkach A, B, C ,
 I_a, I_b, I_c – środki okręgów dopisanych (stycznych odpowiednio do boków BC, AC, AB).



T_1, T_2, T_3, T_4 – środki boków AD, BC, DC, AB ,

E_1, E_2 – środki przekątnych AC, BD .

Odcinek T_1T_2 nazywamy pierwszą linią średnią.

Odcinek T_3T_4 nazywamy drugą linią średnią.

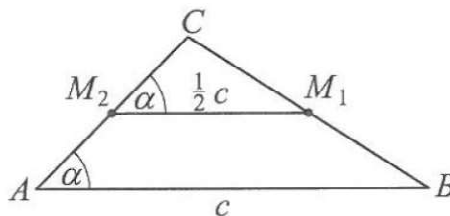
Odcinek E_1E_2 nazywamy trzecią linią średnią.

WOKÓŁ OKRĘGU EULERA

Tytuł brzmi bardzo poważnie i odstrasza, ale to bardzo dobry początek. Dla rozwiązania kilkunastu poniższych zadań korzystamy z dobrze znanych podstawowych faktów:

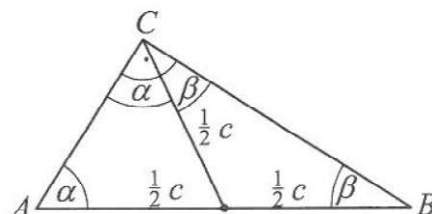
Fakt 1

Odcinek łączący środki boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy.



Fakt 2

Środkowa przeciwprostokątnej równa jest jej połowie i dzieli trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.



Zad. 1

Wykaż, że $M_1M_2 = H_1M_3$.

Zad. 2

Wykaż, że $H_1M_2 = H_3M_2$.

Zad. 3

Wykaż, że $M_1H_2 + M_2M_3 = BC$.

Zad. 4

Wykaż, że symetralna odcinka H_2H_3 przechodzi przez M_1 .

Fakt 3

Odległość wierzchołka trójkąta od *ortocentrum* jest dwa razy większa niż odległość środka okręgu opisanego od środka boku przeciwległego, np. $CH = 2OM_3$.

Zad. 5

Wykaż, że $\sphericalangle AE_1H_3 = \sphericalangle CE_3H_1$.

Zad. 6

Wykaż, że kąt między prostymi H_3M_2 i H_2E_3 jest równy kątowi między prostymi H_2M_3 i H_3E_2 .

Zad. 7

Wykaż, że $E_1H_2 = OM_1$.

Zad. 8

Wykaż, że $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$.

Zad. 9

Wykaż, że $M_1E_2 \parallel M_2E_1$.

Zad. 10

Wykaż, że $M_1E_2 \perp AB$.

Zad. 11

Wykaż, że $M_2E_1 \perp E_1E_2$.

Zad. 12

Wykaż, że $\sphericalangle M_2M_1H_3 = \beta$.

Zad. 13

Wykaż, że odcinek M_1E_2 zawiera się w dwusiecznej kąta BM_1H_3 .

Zad. 14

Wykaż, że $\sphericalangle M_1M_3H_1 = \sphericalangle H_1M_2M_1$.

Zad. 15

Wykaż, że $\sphericalangle M_2H_3H_1 = \sphericalangle M_2M_1H_3$.

Zad. 16

Wykaż, że $\sphericalangle M_1M_3H_1 = \sphericalangle H_1M_2M_1$.

Zad. 17

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 M_3 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 18

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 H_2 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 19

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 E_2 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 20

Wykaż, że $\sphericalangle M_1 E_1 H_1 = \sphericalangle M_1 H_2 H_1 = \beta - \gamma$.

Przy rozwiązywaniu kolejnych zadań będziemy wykorzystywali następujące twierdzenie.

Fakt 4

Trójkąt (zwany spodkowym), którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta ostrokątnego, odcina od niego trzy trójkąty podobne, przy czym $\sphericalangle H_1 H_3 B = \sphericalangle H_2 H_3 A = \gamma$, $\sphericalangle H_3 H_1 B = \sphericalangle H_2 H_1 C = \alpha$ oraz $\sphericalangle H_3 H_2 A = \sphericalangle H_1 H_2 C = \beta$.

Zad. 21

Wykaż, że M_1, M_2, M_3, H_1 leżą na jednym okręgu.

Zad. 22

Wykaż, że punkty H_1, H_2, H_3, M_1 są współokręgowe.

Zad. 23

Wykaż, że punkty E_1, E_2, M_1, H_1 są współokręgowe.

Zad. 24

Wykaż, że punkty H_1, H_2, E_1, E_2 leżą na jednym okręgu.

Zad. 25

Wykaż, że punkty O, M i H leżą na jednej prostej (Eulera), przy czym $2OM = MH$.

Zad. 26

Wykaż, że $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$.

Zad. 27

Wykaż, że odcinki OH i M_1E_1 przecinają się w połowie.

Zad. 28

Wykaż, że odcinki M_1E_1, M_2E_2, M_3E_3 przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je na pół.

Zad. 29

Wykaż, że $EH_1 = EH_2 = EH_3 = \frac{1}{2}R$.

Zad. 29

Wykaż, że $EH_1 = EH_2 = EH_3 = \frac{1}{2}R$.

Zad. 30

Wykaż, że punkty $E_1, E_2, E_3, M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3$ leżą na jednym okręgu (okrąg dziewięciu punktów lub okrąg Eulera).