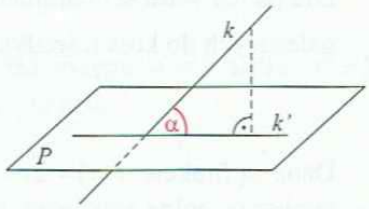
3. STEREOMETRIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

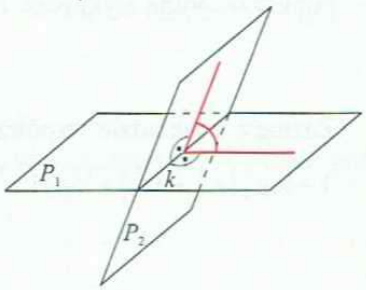
KĄT MIĘDZY PROSTĄ I PŁASZCZYZNĄ

- Prosta l jest prostopadła do płaszczyzny P, jeśli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie P mającej punkt wspólny z prostą l.
- Jeśli prosta l nie jest równoległa i nie jest prostopadła do płaszczyzny P, to kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny P nazywamy kąt między prostą l i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę P (rysunek obok).



KĄT DWUŚCIENNY

- Niech α oznacza kąt dwuścienny wyznaczony przez różne półpłaszczyzny P_1 i P_2 mające wspólną krawędź k. Miarą kąta α nazywamy miarę wypukłego kąta płaskiego, którego wierzchołek należy do prostej k, a ramiona są prostopadłe do k i jedno z nich zawiera się w płaszczyźnie P_1, a drugie w płaszczyźnie P_2 (rysunek obok).



GRANIASTOSŁUPY

- Równoległościan – graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.
- Graniastosłup prosty – graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.
- Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.
- Prostopadłościan – graniastosłup prosty, którego podstawa jest prostokątem.
- Objętość graniastosłupa o polu podstawy P i wysokości h: $V=Ph$.
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c=P_b+2P$ (P_b – pole powierzchni bocznej, P – pole podstawy graniastosłupa).

OSTROSŁUPY

- Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równe, a podstawa jest wielokątem foremnym.
- Czworościan foremny – ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.
- Spodek wysokości ostrosłupa – rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy.
- Twierdzenia o ostrosłupach.
  1) Jeśli wszystkie krawędzie boczne są równe (lub jeśli wszystkie krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy równe kąty), to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.
  2) Jeśli wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą równe kąty, to w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.
- Objętość ostrosłupa o polu podstawy P i wysokości h: $V=\frac{1}{3}Ph$.
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c=P_b+P$, gdzie P_b jest polem powierzchni bocznej, a P polem podstawy ostrosłupa.

WALEC

Oznaczenia: r – promień podstawy walca, h – wysokość walca.

- Objętość: $V=\pi r^2h$.
- Pole powierzchni bocznej: $P_b=2\pi rh$.
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c=2\pi r(r+h)$.

STOŻEK

Oznaczenia: r – promień podstawy stożka, h – wysokość stożka, l – tworząca stożka.

- Objętość: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.
- Pole powierzchni bocznej: $P_b=\pi rl$.
- Pole powierzchni całkowitej: $P_c=\pi r(r+l)$.

KULA

Oznaczenia: R – promień kuli.

- Objętość: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Pole powierzchni: $P=4\pi R^2$.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi	• określać własności podstawowych figur przestrzennych: graniastosłupów i ostrosłupów (prostych, prawidłowych)

3.1 Graniastosłup ma 66 krawędzi. Ile ścian bocznych ma ten graniastosłup?

3.2 Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach 3 i 4, a wysokość graniastosłupa ma długość 12.

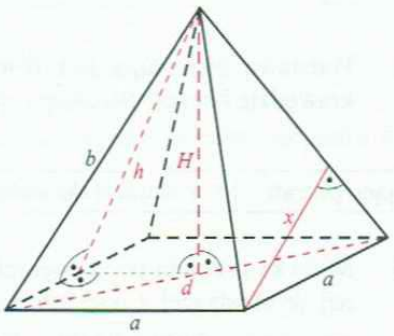
a) Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

b) Oblicz sinusy kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z przekątnymi ścian bocznych mającymi z nią wspólny koniec.

3.3 Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość a. Wyznacz długości przekątnych tego graniastosłupa.

3.4 Ile wierzchołków ma ostrosłup, który ma 44 krawędzie?

3.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, wprowadzono oznaczenia tj. na rysunku obok. Uzasadnij prawdziwość poniższych równości:



a) $d = a\sqrt{2}$;

b) $h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b^2$;

c) $H^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = b^2$;

d) $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$;

e) $\frac{h}{b} = \frac{x}{a}$.

3.6 Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość 6.

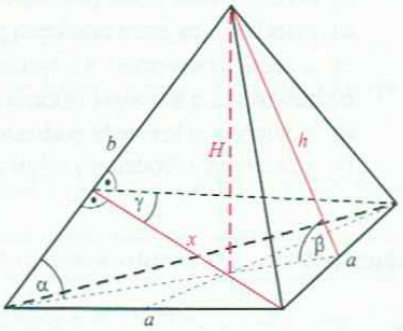
a) Oblicz długość wysokości ostrosłupa.

b) Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

c) Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od ściany bocznej.

Zdający potrafi	• badać wzajemne położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni • stosować pojęcia: kąta dwuściennego, kąta między prostą i płaszczyzną w rozwiązywaniu zadań

3.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, wprowadzono oznaczenia tj. na rysunku obok. Uzasadnij prawdziwość poniższych równości:



a) $H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2$;

b) $H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = h^2$;

c) $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$;

d) $\cos\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6h}$;

e) $a^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\gamma$.

3.8 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10, a krawędź boczna 13.

a) Oblicz sinus kąta, jaki tworzy krawędź boczna z krawędzią podstawy.

b) Oblicz kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

c) Oblicz kosinus kąta, jaki tworzy ściana boczna z podstawą.

d) Oblicz kosinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa.

3.9 Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

Zdający potrafi	• stosować i przekształcać wzory związane z polem powierzchni i objętością wielościanów • wyznaczać pola powierzchni i objętości wielościanów z zastosowaniem trygonometrii

3.10 Wyznacz podaną wielkość z danego wzoru **a)** h, $P=2a^2+4ah$; **b)** a, $V=\frac{1}{3}a^2h$.

3.11 Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość graniastosłupa.

3.12 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a i jest dwa razy krótsza niż krawędź boczna tego ostrosłupa.
a) Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. **b)** Wyznacz objętość ostrosłupa.

3.13 Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6. Ściany boczne tego ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30°.
a) Oblicz objętość ostrosłupa.
b) Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

3.14 Podstawą ostrosłupa jest równoramienny trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości a. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z podstawą kąt o mierze α. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zdający potrafi	• rysować siatki wielościanów

3.15 Mrówka przeszła po powierzchni sześcianu z wierzchołka A do wierzchołka będącego drugim końcem przekątnej wychodzącej z wierzchołka A, przy czym była to droga najkrótsza z możliwych. Narysuj siatkę sześcianu, a następnie oblicz odległość, jaką pokonała mrówka, jeżeli krawędź sześcianu ma długość $\sqrt{5}$ m.

3.16 Narysuj siatkę czworościanu foremnego.

Zdający potrafi	• wyznaczać przekroje płaskie wielościanów

3.17 Jaki wielokąt jest przekrojem ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną
a) przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek;
b) przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym;
c) przechodzącą przez wierzchołek oraz środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy;
d) zawierającą krawędź boczną i środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy;
e) zawierającą krawędź podstawy i środek rozłącznej z nią krawędzi bocznej;
f) zawierającą środek wysokości oraz środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy?

Zdający potrafi	• określać własności brył obrotowych (kuli, walca, stożka)

3.18 W kulę wpisano walec o promieniu podstawy 2,5 cm i wysokości 12 cm. Oblicz promień kuli.

3.19 Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o bokach 8 i 12. Oblicz długość promienia podstawy tego walca.

3.20 Oblicz długość promienia podstawy stożka, jeżeli powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest
a) półkolem o promieniu 4;
b) wycinkiem koła o promieniu 6 i kącie środkowym 60°.

Zdający potrafi	• stosować i przekształcać wzory związane z polem powierzchni i objętością brył obrotowych • wyznaczać pola powierzchni i objętości brył obrotowych z zastosowaniem trygonometrii

3.21 Wyznacz podaną wielkość z danego wzoru **a)** l, $P=\pi r(r+l)$; **b)** R, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.22 Oblicz objętość kuli, której powierzchnia ma pole 36π cm^2.

3.23 Promień podstawy walca ma długość 3. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt o mierze 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

3.24 Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość stożka o wysokości H i kącie rozwarcia 2α.

3.25 Pole powierzchni bocznej stożka jest dwa razy większe niż pole jego podstawy. Znajdź miarę kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

Zdający potrafi	• rozróżniać wielościany foremne • określać własności wielościanów foremnych • stosować własności wielościanów foremnych w rozwiązywaniu zadań

3.26 Czy istnieje wielościan foremny, którego ścianami są sześciokąty foremne?

3.27 Wielościan W ma sześć ścian, a powstał przez sklejenie podstawami dwóch identycznych czworościanów foremnych. Dlaczego wielościan W nie jest wielościanem foremnym?

3.28 Oblicz kosinus kąta między sąsiednimi ścianami ośmiościanu foremnego.

ZADANIA MATURALNE

GRANIASTOSŁUPY

graniastosłupy prawidłowe

297. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a przekątna tego graniastosłupa ma długość 9.
a) Oblicz objętość graniastosłupa.
b) Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna graniastosłupa z krawędzią podstawy mająca z nią punkt wspólny.

298. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z podstawą kąt α. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

299. Podstawą graniastosłupa prostego jest kwadrat. Przekątna graniastosłupa ma długość 2 dm i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Oblicz objętość graniastosłupa.

300. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 4 i tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt o mierze 60°. Oblicz objętość graniastosłupa.

301. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym długość krawędzi podstawy jest równa 20 cm oraz kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej ma miarę 45°.

302. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej równe jest sumie pól obu podstaw. Oblicz kosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

303. Ze środka ściany sześcianu o krawędzi a poprowadzono prostą prostopadłą do przekątnej sześcianu. Oblicz długości odcinków, na jakie ta prostopadła podzieliła przekątną sześcianu.

304. Podstawą prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest kwadrat $ABCD$, a odcinki AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 są krawędziami bocznymi. Oblicz odległość wierzchołka B_1 od płaszczyzny ACD_1 wiedząc, że $|AB|=a$ i $|AA_1|=b$.

305. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a. Najdłuższa przekątna graniastosłupa jest cztery razy dłuższa od najkrótszej przekątnej podstawy. Oblicz objętość graniastosłupa.

inne graniastosłupy

306. Dwie krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długość 3. Przekątna prostopadłościanu ma długość 12 i tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze 30°. Oblicz objętość prostopadłościanu.

307. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 2 i 4 oraz kącie ostrym o mierze 60°. Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze 30°. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa.

308. Siedem krawędzi graniastosłupa prostego ma długość 13, a pozostałe dwie krawędzie mają długość 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

309. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o obwodzie 18. Przekątne graniastosłupa mają długości 9 i $\sqrt{33}$, a krawędź boczna 4. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

310. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o kącie ostrym α. Przekątne graniastosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami β i γ ($\beta<\gamma$), a wysokość graniastosłupa ma długość H. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

311. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt β. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

312.* Oblicz objętość równoległościanu, którego wszystkie ściany są rombami o boku a i kącie ostrym α.

OSTROSŁUPY

ostrosłupy prawidłowe czworokątne

313. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt 30°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

314. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o boku $3\sqrt{2}$. Objętość tego ostrosłupa wynosi 18. Znajdź miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z podstawą ostrosłupa.

315. Miara kąta dwuściennego między ścianą boczną, a podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa α. Krawędź podstawy ma długość a. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

316. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są prostopadłe, a wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

317. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mając długość krawędzi podstawy 6 i miarę 120° kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

318. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe S. Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 2α. Oblicz objętość ostrosłupa.

319. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Wyznacz kosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

320. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mając długość krawędzi podstawy a i miarę 2α kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

321. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma długość H, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

322. Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od jego krawędzi bocznej jest równa d, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

323. Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od ściany bocznej jest równa d, a kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α. Oblicz objętość ostrosłupa.

324.* W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym odległości środka wysokości od krawędzi bocznej i ściany bocznej wynoszą odpowiednio a i b. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

ostrosłupy prawidłowe trójkątne

325. Oblicz pole powierzchni i objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a.

326. Oblicz odległość środków dwóch skośnych krawędzi czworościanu foremnego o krawędzi długości 2.

327. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą długości krawędzi podstawy. Znajdź miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z płaszczyzną podstawy.

328. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z podstawą kąt o mierze 60°. Promień okręgu opisanego na podstawie ma długość 10. Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

329. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 72. Krawędź boczna tworzy z podstawą kąt, którego kosinus równy jest $\frac{\sqrt{3}}{9}$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

330. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $\frac{1}{4}\sqrt{15}a^2$. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

331. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe S, a miara kąta między wysokościami dwóch ścian bocznych poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa jest równa 2α. Oblicz objętość ostrosłupa.

332. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe S, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

333. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α, zaś odległość wierzchołka podstawy od krawędzi bocznej, do której nie należy, jest równa a. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

334. Odległość środka wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego od ściany bocznej jest równa d. Krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

335. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy jest równe $4\sqrt{3}$, a miara kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest cztery razy mniejsza od miary kąta płaskiego ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa.

336. D Środek jednej z wysokości czworościanu foremnego połączono odcinkami z dwoma wierzchołkami nienależącymi do tej wysokości. Wykaż, że odcinki te są prostopadłe.

337. D Udowodnij, że punkt przecięcia wysokości czworościanu foremnego dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 3.

inne ostrosłupy prawidłowe

338. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a i jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej.

a) Oblicz objętość ostrosłupa.

b) Oblicz tangens kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.

339. Promienie okręgów opisanych na ścianach bocznych i na podstawie ostrosłupa prawidłowego n-kątnego mają długość R. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

inne ostrosłupy

340. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 5, a podstawa długość 8. Trójkąt ten jest podstawą ostrosłupa, a środek ciężkości trójkąta jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa wiedząc, że najkrótsza krawędź boczna ma długość 4.

341. W ostrosłupie, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości a, jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Dwie pozostałe krawędzie tworzą z podstawą kąty o mierze α. Znajdź pole największej ściany bocznej oraz tangens kąta nachylenia tej ściany do płaszczyzny podstawy.

342. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku a. Dwie sąsiednie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne tworzą z podstawą kąt α. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

343. Dwie krawędzie ostrosłupa trójkątnego zawierające się w prostych skośnych mają długość b, zaś pozostałe krawędzie mają długość a. Wyznacz objętość ostrosłupa.

344. D Wykaż, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego tworzą z podstawą kąty o równych miarach, to spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

345. D Wykaż, że jeśli na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg i środek tego okręgu jest jednocześnie spodkiem wysokości ostrosłupa, to ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

346. Jedna z krawędzi ostrosłupa trójkątnego ma długość 2, a pozostałe 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

347. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym boki równe mają długość b, a kąt między nimi zawarty jest równy α. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli każda krawędź boczna tworzy z wysokością ostrosłupa kąt β.

348. W ostrosłupie trójkątnym wszystkie krawędzie boczne i dwie krawędzie podstawy mają długość b, a kąt między równymi bokami podstawy ma miarę α. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Dla jakich α zadanie to ma rozwiązanie?

349. Każda z krawędzi bocznych ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej $2c$ i kącie ostrym γ. Oblicz objętość ostrosłupa.

350. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny o kącie ostrym α, w którym ramię i krótsza podstawa ma długość a. Każda krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

351. Siatkę ostrosłupa tworzą dwa trójkąty równoboczne o boku a i dwa trójkąty prostokątne. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa.

352. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c i kącie ostrym α. Każda ściana boczna tworzy z podstawą kąt o mierze β. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

353. D W czworościanie $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości. Niech K, L, M i N będą środkami krawędzi odpowiednio AC, BC, BD i AD. Udowodnij, że proste KM i LN są prostopadłe.

354. D Udowodnij, że jeśli trzy ściany czworościanu są wzajemnie prostopadłe, to kwadrat pola czwartej ściany jest równy sumie kwadratów pól tych trzech ścian.

355. D Wykaż, że jeśli skośne krawędzie czworościanu są parami równe, to suma miar kątów między krawędziami wychodzącymi z jednego wierzchołka czworościanu jest równa 180°.

PRZEKROJE WIELOŚCIANÓW

przekroje graniastosłupów

356. Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i przeciwległy wierzchołek górnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α, a pole otrzymanego przekroju wynosi S. Oblicz objętość graniastosłupa.

357. Sześcian podzielono płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy na dwie bryły z których jedna ma pięć, a druga sześć ścian. Pole powierzchni całkowitej tej bryły, która ma pięć ścian jest równe połowie pola powierzchni sześcianu. Oblicz tangens kąta nachylenia płaszczyzny dzielącej sześcian do płaszczyzny podstawy.

358. Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt α. Oblicz pole otrzymanego przekroju dla a) $\alpha=45^\circ$; b) $\alpha=60^\circ$.

359. Prostopadłościan o podstawie kwadratu przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy otrzymując w przekroju romb o kącie ostrym α. Wyznacz kosinus kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu.

przekroje ostrosłupów prawidłowych czworokątnych

360. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ma miarę α, a krawędź podstawy ma długość a. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i wierzchołek.

361. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe S, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę α. Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną tego ostrosłupa i przechodzącą przez środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

362. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a i jest cztery razy krótsza od krawędzi bocznej. Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Oblicz pole otrzymanego przekroju oraz tangens kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

363. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę przez przekątną podstawy i środek krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną. Płaszczyzna ta tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, a pole otrzymanego przekroju jest równe P. Oblicz objętość ostrosłupa.

364. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przez krawędź podstawy o długości a poprowadzono płaszczyznę tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt β $(0<\beta<\alpha)$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

365. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α. Oblicz tangens kąta, jaki tworzy z płaszczyzną podstawy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa oraz środki dwóch sąsiednich boków podstawy.

366.* Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną wynosi P. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa.

przekroje ostrosłupów prawidłowych trójkątnych

367. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a i jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej. Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

368. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

369. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o podstawie ABC i wierzchołku S przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi AC, BC, AS i BS. Pole otrzymanego w ten sposób przekroju jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Oblicz kosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

370. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, której długość jest równa a. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i jest prostopadła do krawędzi bocznej.

371. Czworościan foremny o krawędzi a rozcięto płaszczyzną prostopadłą do jednej z krawędzi, przechodzącą w odległości $0{,}25a$ od jednego końca tej krawędzi. Oblicz objętości otrzymanych brył.

WIELOŚCIANY – INNE ZADANIA

372. 1a T w i e r d z e n i e (Eulera). *Jeżeli wielościan wypukły ma w wierzchołków, k krawędzi oraz s ścian to między liczbami w, k, s zachodzi równość* $w-k+s=2$.

a) Oblicz liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa mającego w podstawie pięćdziesięciokąt, a następnie sprawdź czy zachodzi podana w twierdzeniu równość.

b) W pewnym wielościanie wypukłym liczba krawędzi jest dwa razy większa od liczby ścian i o 50% większa od liczby wierzchołków. Ile wierzchołków ma ten wielościan?

373. 1a D e f i n i c j a. *Klinem nazywamy wielościan, którego podstawą jest prostokąt, a ścianami bocznymi są dwa trapezy równoramienne i dwa trójkąty równoramienne.*

Dany jest klin, którego podstawą jest prostokąt o bokach 10 cm i 6 cm, a jedną ze ścian bocznych jest trapez o bokach 10 cm, 5 cm, 4 cm i 5 cm.

a) Narysuj siatkę danego klina.

b) Oblicz pole powierzchni tego klina.

c) Objętość klina wyraża się wzorem $V=\frac{1}{6}(2a+c)bh$, gdzie a, b – długości boków prostokąta, a, c – długości podstaw trapezu, h – odległość podstawy c trapezu od podstawy klina. Oblicz objętość danego klina.

BRYŁY OBROTOWE

walec, stożek, kula

374. Ołowiany walec o promieniu 12 cm i wysokości 5 cm przetopiono na kule o promieniu 3 cm. Ile kul otrzymano?

375. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

376. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, którego przekątna o długości 8 tworzy z bokiem równym wysokości walca kąt o mierze 60°. Oblicz objętość walca.

377. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka o promieniu podstawy r wiedząc, że tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α.

378. Promień podstawy stożka o objętości 72π jest trzy razy krótszy niż tworząca.

a) Wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.

379. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu 18. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

380. Po rozwinięciu powierzchni bocznej stożka na płaszczyźnie otrzymano wycinek kołowy o kącie środkowym 90° i promieniu 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.

381. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest wycinkiem kołowym o kącie środkowym α. Kąt ten oparty jest na cięciwie o długości a. Oblicz objętość tego stożka.

382. Kula o promieniu r i stożek mają równe objętości. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola powierzchni jego podstawy. Znajdź wysokość stożka.

383. Stożek i walec mają równe tworzące, równe objętości i równe pola powierzchni bocznej. Oblicz kosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

384. Pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli wpisanej w ten stożek. Oblicz kosinus kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy stożka.

385. Pole przekroju osiowego stożka jest $\pi\sqrt{3}$ razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej. Wyznacz miarę kąta zawartego między tworzącą, a wysokością tego stożka.

386.* Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α. Płaszczyzna prostopadła do wysokości stożka dzieli ten stożek na dwie bryły o równych polach powierzchni całkowitych. Oblicz stosunek objętości tych brył.

obracanie wielokątów

387. Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 :1. Prostokąt ten obracamy najpierw wokół dłuższego boku, a następnie wokół krótszego boku. Oblicz stosunek objętości i stosunek pól powierzchni całkowitych otrzymanych brył.

388. Prostokąt o bokach długości a i b $(a<b)$ obraca się dookoła prostej leżącej w płaszczyźnie prostokąta, nie przecinającej prostokąta, równoległej do większego boku i odległej od niego o c. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość bryły powstałej przez obrót prostokąta.

389. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest cztery razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tego trójkąta wokół najkrótszego boku.

390. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 2 i tworzy z przeciwprostokątną kąt 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną.

391. Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 8, a kąt między tymi bokami ma miarę 120°. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół prostej zawierającej bok o długości 8.

392. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 7 i 3, a kąt ostry trapezu ma miarę 60°. Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trapezu wokół prostej zawierającej dłuższą podstawę.

393. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej. Bryła B_1 powstała z obrotu trapezu wokół krótszej podstawy, a bryła B_2 powstała z obrotu trapezu wokół dłuższej podstawy. Wyznacz stosunek objętości brył B_1 i B_2.

394. W trójkącie ABC $|AB|=8$, $|BC|=10$, zaś $|\angle ABC|=60^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta ABC dookoła prostej zawierającej bok AC.

395. W trójkącie ABC $|AC|=7$, $|BC|=8$, zaś $|\angle ABC|=60^\circ$. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta ABC wokół prostej zawierającej bok AC.

396. W trójkącie ABC dane są: $|AB|=c$, $|\angle CAB|=\alpha$ i $|\angle ABC|=\beta$, gdzie $\beta>90^\circ$. Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C.

397. Trójkąt o boku długości a i kątach ostrych do niego przyległych o miarach β i γ obraca się dookoła prostej równoległej do tego boku, poprowadzonej przez wierzchołek kąta do niego przeciwległego. Oblicz objętość powstałej bryły.

398. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $x-y=0$, $x+y-4=0$, $x-3y=0$. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu tego trójkąta dookoła najdłuższego boku.

399. Oblicz pola powierzchni brył obrotowych otrzymanych przez obrót sześciokąta foremnego o boku a wokół
a) prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków sześciokąta;
b) prostej zawierającej dłuższą przekątną sześciokąta;
c) prostej zawierającej bok sześciokąta.

400. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa CD ma długość 1, a kąt ABC ma miarę 60°. Przekątna trapezu jest prostopadła do boku BC. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu trapezu wokół boku BC.

401. Romb o boku a i kącie ostrym α obraca się dookoła prostej przechodzącej przez wierzchołek kąta ostrego i prostopadłej do jednego z boków. Oblicz objętość powstałej bryły.

BRYŁA WPISANA W BRYŁĘ

bryły obrotowe

402. W kulę o promieniu 9 wpisano stożek o kącie rozwarcia 90°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

403. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku 4. W stożek ten wpisano walec o wysokości 1. Oblicz objętość walca.

404. W stożek o promieniu podstawy 1 i tworzącej 3 wpisano kulę. Oblicz pole powierzchni kuli

405. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem α. Kula opisana na tym stożku ma promień R. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

406. W kulę wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie, przy czym jeden z nich ma pole powierzchni bocznej trzy razy większe niż drugi. Oblicz stosunek długości wysokości tych stożków.

407. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola powierzchni kuli opisanej na tym stożku wynosi $3:8$. Znajdź kąt rozwarcia tego stożka.

408. D Wykaż, że stosunek objętości stożka do objętości kuli weń wpisanej jest równy stosunkowi pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni kuli.

409.* Wysokość walca wpisanego w stożek jest równa promieniowi podstawy stożka. Stosunek objętości stożka do objętości walca jest równy $8:3$. Oblicz tangens kąta zawartego między wysokością, a tworzącą stożka.

kula i ostrosłup prawidłowy

410. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa H, a krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Oblicz pole powierzchni kuli wpisanej w ten ostrosłup.

411. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w kulę o promieniu R tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

412. Znajdź stosunek objętości kuli opisanej na czworościanie foremnym do objętości tego czworościanu.

413. W ostrosłup prawidłowy trójkątny wpisano kulę o promieniu r. Ściana boczna ostrosłupa nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

414. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a wpisany jest w sferę, której środek dzieli wysokość ostrosłupa w stosunku $\sqrt{5}:1$. Oblicz objętość ostrosłupa.

bryła wpisana w bryłę – inne zadania

415. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α. Każda krawędź boczna tworzy z podstawą kąt β. Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości opisanej na nim kuli.

416. W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano graniastosłup prawidłowy trójkątny w taki sposób, że dolna podstawa graniastosłupa zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki górnej podstawy leżą na powierzchni bocznej stożka. Oblicz objętość graniastosłupa wiedząc, że wszystkie jego krawędzie są równej długości.

417. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego nachylona jest do podstawy pod kątem α. W ostrosłup ten wpisano sześcian o krawędzi a tak, że cztery jego wierzchołki należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, zaś cztery pozostałe należą do podstawy ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.

418. Tworząca stożka ma długość l i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. W stożek ten wpisano sześcian tak, że cztery jego wierzchołki należą do powierzchni bocznej stożka, zaś cztery pozostałe należą do podstawy stożka. Znajdź długość krawędzi sześcianu.

419. Na czworościanie foremnym opisano walec w taki sposób, że skośne krawędzie czworościanu są średnicami podstaw walca. Znajdź stosunek objętości kuli opisanej na walcu do objętości kuli wpisanej w czworościan.

* * * * *

420. W sferę o promieniu R wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest równoramiennym trójkątem prostokątnym. Następnie w stożek ten wpisano sferę, a w tę sferę stożek, którego przekrój osiowy jest równoramiennym trójkątem prostokątnym itd. Oblicz sumę pól powierzchni tych wszystkich sfer.

421. W stożek o promieniu podstawy R i kącie nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy α wpisano ciąg kul w ten sposób, że pierwsza kula jest wpisana w stożek, zaś każda następna jest styczna zewnętrznie do poprzedniej i do stożka, a jej środek leży na osi stożka. Oblicz sumę objętości tego ciągu kul.

ZADANIA Z KONTEKSTEM REALISTYCZNYM

422. Do częściowo wypełnionego wodą zbiornika w kształcie walca o średnicy 1 m wpuszczono kroplę oliwy, która równomiernie rozlała się na powierzchni wody. Zakładając, że wpuszczona kropla miała kształt kuli o średnicy 0,3 cm, oblicz grubość utworzonej warstwy oliwy.

423. Do prostopadłościennego szklanego akwarium o wymiarach podstawy 50 cm i 90 cm wlano 216 litrów wody, wypełniając w ten sposób 80% jego objętości. Oblicz łączną powierzchnię ścian bocznych tego akwarium. Grubość szkła należy pominąć.

424. Osiemdziesięciolitrowe szklane akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wysokość 32 cm i do połowy napełnione jest wodą. Oblicz, o ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium, jeżeli wlejemy do niego 4,5 lira wody. Grubość szkła należy pominąć.

425. Prostopadłościenne, szczelnie zamknięte naczynie, o wymiarach podstawy 12 cm × 10 cm i wysokości 8 cm, w 75% swej objętości wypełnione jest wodą. Na jakiej wysokości będzie poziom wody w tym naczyniu, jeżeli postawimy je na ścianie o wymiarach 8 cm × 10 cm. Grubość ścianek naczynia należy pominąć.

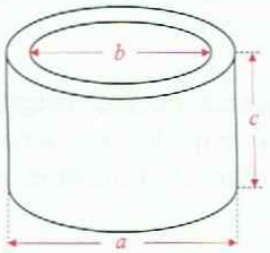
426. W tabeli podany został procentowy skład powietrza atmosferycznego.

Składnik	Zawartość w % objętości
Azot	78,08
Tlen	20,95
Inne składniki	0,97

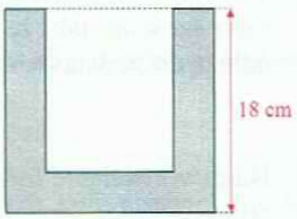
a) Oblicz, ile litrów tlenu znajduje się w pustym pokoju o wymiarach podłogi 4 m × 8 m i wysokości 3,5 m.

b) Oblicz, ile kilogramów powietrza znajduje się w tym pokoju. Gęstość powietrza wynosi 1,29 g/dm^3.

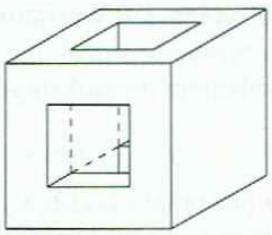
427. Rysunek obok przedstawia betonowy krąg w kształcie walca. Zaznaczone na rysunku wymiary kręgu są równe: $a = 1$ m, $b = 0{,}8$ m, $c = 0{,}5$ m. Przyjmij, że gęstość betonu wynosi 2300 kg/m^3 i oblicz masę tego kręgu.

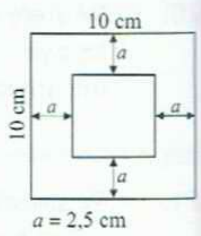


428. Naczynie w kształcie walca o pojemności 240π cm^3, używane do przeprowadzania doświadczeń z ciekłym azotem, odlane jest w całości z metalu. Wysokość naczynia wynosi 18 cm, a grubość wszystkich jego ścianek jest równa 3 cm. Przekrój osiowy naczynia pokazany jest na rysunku. Oblicz, ile cm^3 metalu zużyto na wykonanie tego naczynia.



429. W drewnianym, sześciennym klocku wycięte zostały dwa identyczne, prostopadłościenne i przelotowe otwory. Na rysunku pokazano otrzymaną bryłę oraz widok ściany sześcianu z wyciętym otworem.

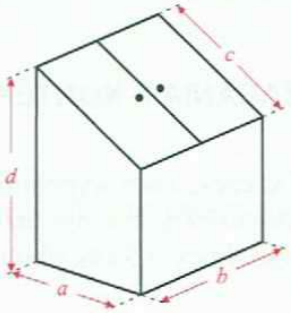




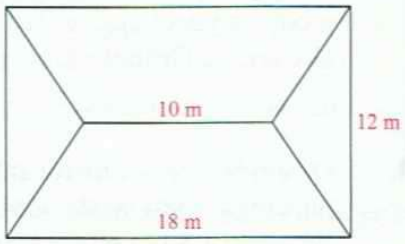
a) Oblicz objętość powstałej bryły.

b) Oblicz masę bryły wiedząc, że przed wycięciem otworów klocek ważył 50 dkg.

430. Ściany boczne drewnianej skrzyni są prostopadłe do prostokątnej podstawy. Zaznaczone na rysunku wymiary skrzyni są następujące: $a = 40$ cm, $b = 90$ cm, $c = 50$ cm, $d = 100$ cm. Oblicz objętość skrzyni. Wynik podaj w metrach sześciennych. Grubości wszystkich elementów, z których wykonana jest skrzynia, należy pominąć.



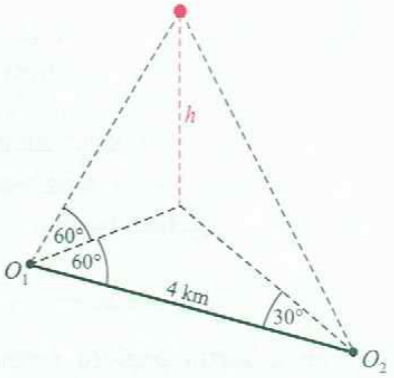
431. Na rysunku przedstawiony jest widok z góry czterospadowego dachu pewnego budynku. Wysokość poddasza w najwyższym punkcie wynosi 8 m.



a) Oblicz powierzchnię dachu.

b) Oblicz, ile paczek dachówki należy kupić na pokrycie tego dachu, jeżeli jedna paczka zawiera 20 m^2 dachówki, a na 1 m^2 powierzchni dachu zużywa się 1,8 m^2 dachówki.

432. W celu wyznaczenia położenia balonu meteorologicznego, z dwóch punktów obserwacyjnych O_1 i O_2 odległych o 4 km, dokonano pomiaru trzech kątów. Wyniki pomiarów przedstawione zostały na rysunku.

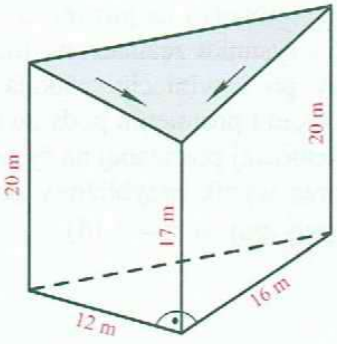


a) Oblicz wysokość h, na jakiej znajdował się balon.

b) Znajdź miarę kąta, pod jakim obserwowano balon z punktu obserwacyjnego O_2.

c) Oblicz, ile wynosiła odległość od balonu do punktu obserwacyjnego O_2.

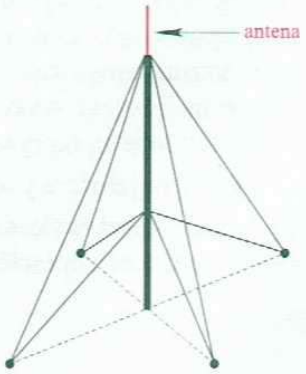
433. Budynek biurowy wybudowany na planie trójkąta prostokątnego posiada ukośnie usytuowaną, w stosunku do powierzchni ziemi, płaszczyznę dachu. Wymiary budynku podane zostały na rysunku.



a) Oblicz objętość budynku. Grubości ścian i innych elementów wewnętrznych należy pominąć.

b) Oblicz łączną powierzchnię ścian zewnętrznych budynku.

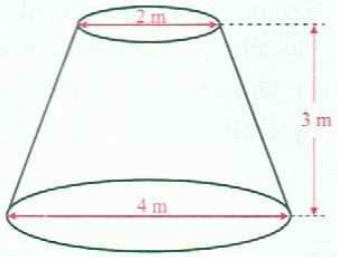
434. Do usztywnienia masztu antenowego użyto 8 odciągów będących stalowymi linami o łącznej długości wynoszącej 2,8 km. Końce lin zakotwiczone zostały w podłożu w czterech punktach stanowiących wierzchołki kwadratu, w środku którego znajduje się podstawa masztu (rysunek obok). Krótsze liny tworzą z podłożem kąt 30°, a dłuższe kąt 60°.



a) Oblicz długości poszczególnych lin.

b) Oblicz wysokość masztu (bez anteny).

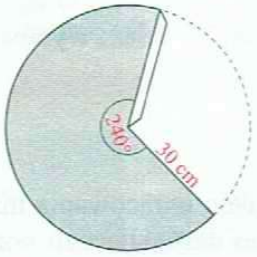
435. Cokół pomnika jest wykonany z granitu i ma kształt stożka ściętego. Na rysunku obok podano wymiary tego cokołu.



a) Oblicz objętość cokołu.

b) Sprawdź, czy będzie można unieść ten cokół za pomocą żurawia o maksymalnym udźwigu 60 ton. Gęstość granitu jest równa 2700 kg/m^3.

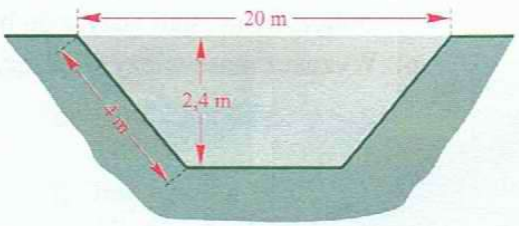
436. Po wycięciu i sklejeniu wycinka kołowego wykonanego z kartonu (rysunek obok) otrzymano powierzchnię boczną stożka. Oblicz



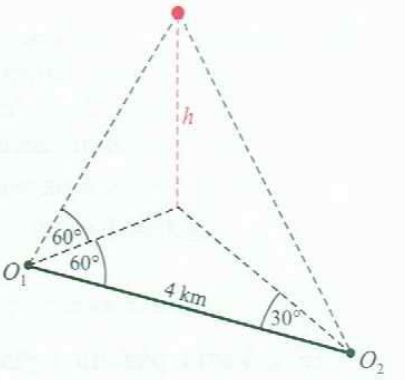
a) pole powierzchni bocznej stożka,

b) wysokość stożka.

437. W celu oszacowania ilości przepływającej wody w rzece, zbadano kształt jej koryta. Przyjęto, że przekrój koryta rzeki ma kształt trapezu równoramiennego i wykonano pomiary, których wyniki pokazane są na rysunku. Zmierzono również, że prędkość przepływającej wody wynosi 20 m/s. Oblicz, ile metrów sześciennych wody przepływa przez powierzchnię przekroju koryta rzeki w ciągu jednej minuty.



432. W celu wyznaczenia położenia balonu meteorologicznego, z dwóch punktów obserwacyjnych O_1 i O_2 odległych o 4 km, dokonano pomiaru trzech kątów. Wyniki pomiarów przedstawione zostały na rysunku.

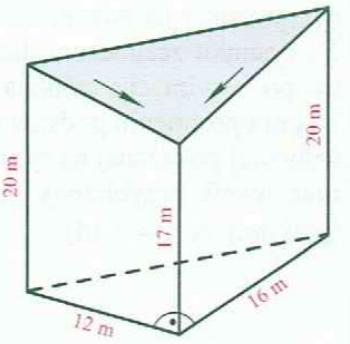


a) Oblicz wysokość h, na jakiej znajdował się balon.

b) Znajdź miarę kąta, pod jakim obserwowano balon z punktu obserwacyjnego O_2.

c) Oblicz, ile wynosiła odległość od balonu do punktu obserwacyjnego O_2.

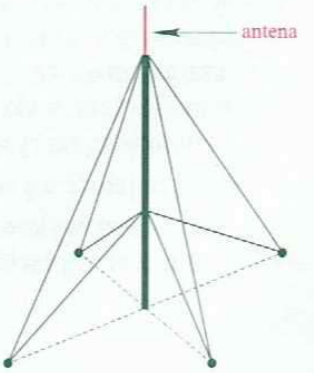
433. Budynek biurowy wybudowany na planie trójkąta prostokątnego posiada ukośnie usytuowaną, w stosunku do powierzchni ziemi, płaszczyznę dachu. Wymiary budynku podane zostały na rysunku.



a) Oblicz objętość budynku. Grubości ścian i innych elementów wewnętrznych należy pominąć.

b) Oblicz łączną powierzchnię ścian zewnętrznych budynku.

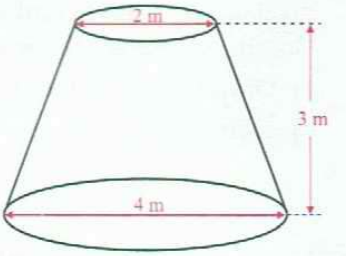
434. Do usztywnienia masztu antenowego użyto 8 odciągów będących stalowymi linami o łącznej długości wynoszącej 2,8 km. Końce lin zakotwiczone zostały w podłożu w czterech punktach stanowiących wierzchołki kwadratu, w środku którego znajduje się podstawa masztu (rysunek obok). Krótsze liny tworzą z podłożem kąt 30°, a dłuższe kąt 60°.



a) Oblicz długości poszczególnych lin.

b) Oblicz wysokość masztu (bez anteny).

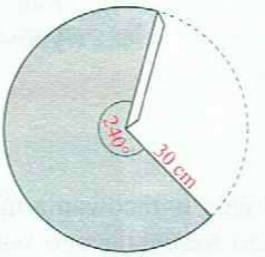
435. Cokół pomnika jest wykonany z granitu i ma kształt stożka ściętego. Na rysunku obok podano wymiary tego cokołu.



a) Oblicz objętość cokołu.

b) Sprawdź, czy będzie można unieść ten cokół za pomocą żurawia o maksymalnym udźwigu 60 ton. Gęstość granitu jest równa 2700 kg/m^3.

436. Po wycięciu i sklejeniu wycinka kołowego wykonanego z kartonu (rysunek obok) otrzymano powierzchnię boczną stożka. Oblicz



a) pole powierzchni bocznej stożka,

b) wysokość stożka.

437. W celu oszacowania ilości przepływającej wody w rzece, zbadano kształt jej koryta. Przyjęto, że przekrój koryta rzeki ma kształt trapezu równoramiennego i wykonano pomiary, których wyniki pokazane są na rysunku. Zmierzono również, że prędkość przepływającej wody wynosi 20 m/s. Oblicz, ile metrów sześciennych wody przepływa przez powierzchnię przekroju koryta rzeki w ciągu jednej minuty.