

***6.1.** Oblicz:

a) $4! - 2! \cdot 3!$;

c) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$;

e) $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$;

b) $5! - 2! \cdot 4!$;

d) $\frac{12!}{10! \cdot 4!}$;

f) $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$.

***6.2.** Doprowadź do najprostszej postaci, podaj założenia:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$;

e) $\frac{(2n-1)! \cdot (n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!}$;

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$;

f) $\frac{(2n-2)! \cdot (n-3)!}{(2n-5)! \cdot n!}$;

c) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!}$;

g) $\frac{(n-k)! \cdot (n-k+1)!}{(n-k+2)! \cdot (n-k-1)!}$;

d) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!}$;

h) $\frac{(2n-k-2)! \cdot (2n-k-1)!}{(2n-k)! \cdot (2n-k-3)!}$.

***6.3.** Oblicz, korzystając z definicji symbolu Newtona:

a) $\binom{10}{3}$;

b) $\binom{8}{4}$;

c) $\binom{7}{3} - \binom{5}{2}$;

d) $\binom{8}{2} - \binom{6}{4}$;

e) $\frac{\binom{12}{3}}{\binom{14}{4}}$;

f) $\frac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$.

***6.4.** Oblicz:

a) $\binom{18}{2} - \binom{18}{16}$;

b) $\frac{\binom{24}{5}}{\binom{24}{19}}$;

c) $\binom{25}{23} + \binom{25}{24}$;

d) $\binom{23}{21} + \binom{23}{22}$;

e) $\frac{\binom{21}{5} + \binom{21}{16}}{2 \cdot \binom{21}{6}}$;

f) $\frac{\binom{4}{2} \cdot \left[\binom{27}{11} + \binom{27}{12} \right]}{\binom{28}{16}}$;

$$g) \frac{3 \cdot \left[\binom{6}{2} \cdot \binom{15}{13} + \binom{6}{4} \cdot \binom{15}{14} \right]}{\binom{16}{2}};$$

$$h) \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{17}{14} + \binom{17}{15} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{5}{2} \cdot \binom{17}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{17}{3}}.$$

***6.5.** Doprowadź do najprostszej postaci, podaj założenia:

$$a) \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}};$$

$$d) \frac{\binom{2n+1}{2n-1} + \binom{2n+1}{2n}}{\binom{2n+1}{2n-1}};$$

$$b) \frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}};$$

$$e) \frac{\binom{3n+2}{3n-1} + \binom{3n+2}{3n} + \binom{3n+3}{3n+1}}{\binom{3n+3}{3n} + \binom{3n+3}{3n+1}};$$

$$c) \frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}};$$

$$f) \frac{\binom{4n}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}{\binom{4n-1}{4n-3} + \binom{4n-1}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}.$$

***6.6.** Oblicz n , jeśli wiadomo, że:

$$a) n + \binom{n}{2} = 15;$$

$$d) \binom{2n}{3} = 120;$$

$$b) \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{2} = 16;$$

$$e) \binom{3n}{3n-2} + \binom{3n}{3n-1} = 45;$$

$$c) \binom{n}{3} = 56;$$

$$f) \binom{2n-3}{2n-5} + \binom{2n-3}{2n-4} = 15.$$

Dwumian Newtona

***6.7.** Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy:

$$a) (x+2)^6;$$

$$e) (x-1)^8;$$

$$b) (x+3)^5;$$

$$f) (x-2)^7;$$

$$c) (2x+1)^6;$$

$$g) \left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \quad (x \neq 0);$$

$$d) (3x+1)^5;$$

$$h) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^5 \quad (x \neq 0).$$

6.1. a) 12; b) 72; c) 15; d) $\frac{11}{2}$; e) $\frac{49}{10}$; f) $\frac{81}{10}$.

6.2. a) $n(n-1)$; b) $(n-2)(n-1)$; c) $2n(2n-1)(2n-2)$; d) $\frac{1}{3n(3n-1)}$; e) $\frac{n+2}{4n(2n+1)}$;
f) $\frac{4(2n-3)}{n}$; g) $\frac{n-k}{n-k+2}$; h) $\frac{2n-k-2}{2n-k}$.

6.3. a) 120; b) 70; c) 25; d) 13; e) $\frac{10}{91}$; f) $\frac{13}{6}$.

6.4. a) 0; b) 1; c) 325; d) 276; e) $\frac{3}{8}$; f) 6; g) 45; h) $\frac{1}{2}$. Wskazówka: Wykorzystaj własności symbolu Newtona.

6.5. a) $\frac{3}{n+1}$; b) $\frac{n+2}{3}$; c) $\frac{n-1}{3}$; d) $\frac{n+1}{n}$; e) 1; f) 1.

6.6. a) 5; b) 6; c) 8; d) 5; e) 3; f) 4.

6.8. a) $c_{13} = 3 \cdot \binom{20}{12}$ lub $c_{13} = 3^4 \binom{20}{12}$; b) $c_7 = \binom{10}{6} \cdot \frac{x^4}{256}$ lub $c_7 = \binom{10}{6} \frac{x^6}{4}$;
c) $c_6 = -\frac{x^5}{32} \cdot \binom{10}{5}$; d) $c_8 = -\sqrt{3} \cdot x^4 \cdot \binom{11}{7}$ lub $c_8 = 3^5 x^7 \binom{11}{7}$; e) $c_9 = \binom{16}{8} \cdot \frac{x^8}{9}$;
f) $c_{10} = -\binom{18}{9} \cdot \frac{x^9}{8}$.

6.9. $c_{17} = \binom{25}{16} \cdot x^2$ lub $c_{17} = \binom{25}{16} x^{23}$.

6.10. $c_6 = \binom{18}{5} \cdot x^3$ lub $c_6 = \binom{18}{5} \frac{1}{x^{21}}$.

6.11. $3003 \cdot x^5$.

6.12. 190.

6.13. $125970 \cdot x^4$.

6.14. a) 1024. Wskazówka: Rozważ wyrażenie $(1+1)^{10}$; b) 2^n ; c) 0; d) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

2. VI 2012, 4 p. Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.
5. V 2011, 4 p. R Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.
7. V 2012, 4 p. R Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.
8. VI 2012, 3 p. R Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.

- 9.1. W turnieju szachowym rozegrano 66 partii, przy czym każdy szachista rozegrał z każdym po jednej partii. Ilu szachistów uczestniczy w turnieju?

Odp. 12.

- 9.2. Ile różnych płaszczyzn można poprowadzić przez 4 punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie?

Odp. 4.

- 9.3. Ile można utworzyć liczb czterocyfrowych, w których na pierwszym i ostatnim miejscu występuje ta sama cyfra, i w której cyfry mogą się powtarzać?

Odp. 900.

579. Uczniowie klasy matematyczno-informatycznej muszą uczęszczać na fakultety z trzech przedmiotów, w tym z co najmniej dwóch przedmiotów ścisłych. Wyboru dokonują spośród dziesięciu przedmiotów, wśród których są cztery przedmioty ścisłe. Oblicz, na ile sposobów może wybrać fakultety każdy uczeń tej klasy.
580. W turnieju szachowym każdy uczestnik rozegrał z każdym z pozostałych zawodników jedną partię. W całym turnieju rozegrano 66 partii. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?
581. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów.
- Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
 - Ile wielokątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
582. Punkty A, B, C, D, E, F należą do prostej k , a punkty P, Q, R, S należą do prostej l równoległej do k ($k \neq l$).
- Ile można narysować takich odcinków, że jeden koniec odcinka należy do zbioru $\{P, Q, R, S\}$, a drugi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$?
 - Ile można narysować czworokątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?
 - Ile można narysować trójkątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?
583. W przedziale wagonu kolejowego znajduje się 8 ponumerowanych miejsc w dwóch rzędach po 4 miejsca. Do pustego przedziału weszło 5 osób: 3 panie i 2 panów. Panie zajęły miejsca w tym samym rzędzie, a panowie usiedli na miejscach w drugim rzędzie. Oblicz, na ile sposobów osoby te mogły zająć miejsca tak, aby
- panie siedziały zwrócone twarzą do kierunku jazdy;
 - vis-à-vis każdego z panów siedziała pani.

571. Od domu wczasowego do podnóża góry prowadzą 3 trasy autokarowe, a od podnóża góry na szczyt wiodą 4 szlaki turystyczne. Oblicz, ile różnych tras może zaplanować organizator wycieczki, jeżeli ze względów poznawczych droga powrotna będzie przebiegać
- innym szlakiem turystycznym i tą samą trasą autokarową;
 - innym szlakiem turystycznym i inną trasą autokarową.
572. 1b Wyznaczmy liczbę wszystkich dzielników liczby $a = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.
Zauważmy, że każdy dzielnik liczby a jest liczbą postaci $3^k \cdot 5^m \cdot 7^n$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Zatem liczba dzielników liczby a jest równa liczbie trójwyrazowych ciągów (k, m, n) , gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Wyznaczamy liczbę tych ciągów: $4 \cdot 5 \cdot 3$. Tak więc liczba a ma 60 dzielników.
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, wyznacz liczbę dzielników liczby
- $2^6 \cdot 11^7 \cdot 13$;
 - 5400.
573. W pewnym prostym edytorze tekstów użytkownik może pisać tekst używając tylko czterech typów czcionek: *Arial*, *Courier*, *Impact* i *Times New Roman*. Oblicz, na ile różnych sposobów można napisać w tym programie słowo
- TRON;
 - FOTEL,
- zmieniając tylko typ czcionki.
574. W galerii przygotowywana jest wystawa malarstwa olejnego. Na jednej ze ścian należy zawiesić w jednym rzędzie osiem obrazów. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, jeśli dwa największe płótna
- mają być umieszczone na początku i na końcu ściany,
 - mają sąsiadować ze sobą.
575. W rozgrywkach piłkarskiej pierwszej ligi występuje 14 zespołów. W jednym sezonie każda drużyna rozgrywa z każdą mecz i rewanż. Do ilu pierwszoligowych pojedynków piłkarskich dochodzi w ciągu sezonu?
576. Mając do dyspozycji farby w pięciu kolorach, Tomek ma za zadanie pomalować chorągiewkę składającą się z trzech części (patrz rys.). Każda część po obu stronach ma być pomalowana tym samym kolorem farby. Oblicz, na ile różnych sposobów Tomek może pomalować chorągiewkę, jeżeli
- | |
|---------|
| Część 1 |
| Część 2 |
| Część 3 |
- każda część ma mieć inny kolor;
 - pierwsza i trzecia część chorągiewki ma mieć ten sam kolor, a część środkowa inny.
577. Aby otworzyć furtkę, przez którą wchodzi się na teren posesji pana Nowaka, należy na klawiaturze domofonu wybrać czterocyfrowy kod. Syn pana Nowaka dawno nie był u swojego ojca, ale zapamiętał, że pierwsza i czwarta cyfra kodu jest parzysta, a suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6. Oblicz, ile co najwyżej razy będzie musiał wpisać kod syn pana Nowaka, aby mógł otworzyć furtkę.
578. Przypuśćmy, że w pewnym kraju numer rejestracyjny każdego samochodu ma postać $L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3$, gdzie każdy z symboli L_1, L_2, L_3 oznacza jedną z 22 liter, a każdy z symboli C_1, C_2, C_3 oznacza cyfrę, przy czym litery występujące w numerze nie mogą powtarzać się.
- Zbadaj, czy w tym kraju można zarejestrować 10 mln samochodów.
 - Oblicz, ile można byłoby zarejestrować samochodów, gdyby cyfry występujące w numerze rejestracyjnym również nie mogły powtarzać się. O ile procent zmniejszyłaby się wówczas liczba możliwych do utworzenia numerów rejestracyjnych?

570. W jadłospisie baru mlecznego „Biedronka” znajduje się 8 zup, 7 drugich dań i 2 kompoty, natomiast konsument chcący zjeść obiad w barze „Gdańskim” ma do wyboru 6 zup, 5 drugich dań i 4 kompoty. Pan Kowalski zamierza zjeść obiad w jednym z tych barów. W którym barze ma większą możliwość wyboru zestawu obiadowego składającego się z zupy, drugiego dania i kompotu?

584. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B ?
 - Ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru A w zbiór B ?
 - Ile jest wszystkich funkcji rosnących ze zbioru A w zbiór B ?
585. Ośmiu kolegów postanowiło po lekcjach zagrać w piłkę. Przed rozpoczęciem meczu muszą podzielić się na dwa czteroosobowe zespoły. Na ile sposobów mogą dokonać tego podziału?
586. Każdy z sześciu skazanych ma być osadzony w jednym z trzech zakładów karnych.
- Na ile sposobów można rozmieścić skazanych w tych trzech zakładach karnych?
 - Na ile sposobów można rozmieścić skazanych tak, aby w każdym zakładzie karnym wyrok odsiadywało dwóch z nich?
587. Komendant posterunku policji ma do dyspozycji siedmiu policjantów. Oblicz, na ile sposobów komendant może spośród tych policjantów utworzyć
- dwa trzyosobowe patrole;
 - trzy dwuosobowe patrole.
588. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których liczby 1, 2, 3 występują w porządku rosnącym.

589.* Po płaszczyźnie z układem współrzędnych można wędrować w następujący sposób: z punktu (n, k) można przejść tylko do punktu $(n + 1, k)$ albo do punktu $(n, k + 1)$. Oblicz liczbę dróg prowadzących z punktu $(0, 0)$ do punktu $(4, 4)$.

590.* Przekątne ośmiokąta wypukłego mają tę własność, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W ilu punktach przecinają się przekątne tego wielokąta?