

Zadanie 16. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Zadanie 16a. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że jeśli rzucimy n razy symetryczną sześcienną kostką do gry, to otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Zadanie 16b. Mamy urnę zawierającą m kul ponumerowanych liczbami od 1 do m . Losujemy n razy (ze zwracaniem) kule z tej urny. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wylosujemy co najmniej jeden raz kule z numerem ze zbioru $\{1, \dots, k\}$ pod warunkiem, że wylosujemy co najmniej jeden raz kule z numerem ze zbioru $\{m-l+1, \dots, m\}$.

Zadanie 16c. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że jeśli rzucimy 5 razy symetryczną sześcienną kostką do gry, to otrzymamy co najmniej dwie „jedynki” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej dwie „szóstki”.

Zadanie 16d. Mamy urnę zawierającą m kul ponumerowanych liczbami od 1 do m .

Losujemy n razy (ze zwracaniem) kule z tej urny. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe tego, że co najmniej dwa razy wylosujemy kule z numerem 1 pod warunkiem, że co najmniej dwa razy wylosujemy kule z numerem m .

1. Udowodnij, że liczba ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje parzysta liczba jedynek, jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje nieparzysta liczba jedynek.

2. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 102\}$ losujemy 2 różne liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3?

3. W urnie jest 15 kartek, ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Wyciągamy 5 kartek bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że numer trzeciej kartki jest liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie numer piątej kartki jest liczbą podzielną przez 5?

4. W pudełku są cztery kartki, na których wypisano liczby – 1, 1, 2, 3 (na każdej kartce jedną liczbę). Losujemy jedną kartkę, zapisujemy liczbę i zwracamy kartkę do pudełka. Następnie losujemy drugą kartkę i zapisujemy liczbę. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b) , gdzie a jest liczbą wylosowaną za pierwszym razem, zaś b liczbą wylosowaną za drugim razem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą pierwszą;

B – różnica wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

5. Losujemy jedną liczbę spośród liczb: 1, 2, 3, ..., 1000. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 lub przez 9.

6. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

7. Ze zbioru liczb trzycyfrowych, które nie mają dwóch takich samych cyfr losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby, której iloczyn cyfr jest liczbą niezerową podzielną przez 7?

8. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 1996\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez: a. 6 b. 4 lub 6 c. 4 lub 6 lub 10

9. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 7 wybieramy losowo 5 różnych liczb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jedną z tych liczb jest 546, a wśród pozostałych 4 liczb jest dokładnie jedna liczba mniejsza od 546. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

10. Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 15.

11. Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 \leq 9x$ losujemy dwie różne liczby. Wylosowanie każdej liczby z tego zbioru jest jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

45. **R** Na stole stoją dwa pełne pudełka zapalek. Sięgamy do losowo wybranego pudełka i wydajemy z niego jedną zapalną. Czynność tę wykonujemy 10 razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że z każdego pudełka zostanie wyjętych pięć zapalek.

46. **R** W konkursie znajomości języka obcego jedno z zadań polega na przyporządkowaniu sześciu obcym słowom ich polskich tłumaczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba nieznająca tego języka, czyli wypełniająca arkusz odpowiedzi w sposób losowy, przyporządkuje poprawne tłumaczenia dokładnie trzem słowom.

47. Po krawędziach sześciianu wędruje mrówka. Zaczyna z jednego z wierzchołków. Kiedy dojdzie do kolejnego wierzchołka, kontynuuje wędrówkę, ale nigdy nie wraca krawędzią, którą przyszła. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że po przejściu czterech krawędzi wróci do punktu wyjścia. Przyjmujemy, że wybór każdej krawędzi jest losowy i jednakowo prawdopodobny.

48. Michał ma w kieszeni trzy identyczne z zewnątrz długopisy. Postanowił używać do pisania przez 5 kolejnych lekcji losowo wyjętego z kieszeni długopisu, a następnie wkładać go z powrotem do kieszeni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jeden z jego długopisów nie zostanie wyjęty z kieszeni ani razu.

49. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba wybrana losowo ze zbioru $\{100, 101, 102, \dots, 399\}$ jest podzielna przez 7 lub przez 11.

50. **R** Rzucamy parą symetrycznych kostek sześciennych do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest liczbą nieparzystą pod warunkiem, że na każdej kostce wypadnie inna liczba oczek.

51. **R** Rzucamy sześciokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie trzy razy orła pod warunkiem wyrzucenia co najwyżej jeden raz reszki.

52. **R** Z pudełka, w którym jest 5 kul białych i 7 czarnych, losujemy 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednej kuli białej pod warunkiem wylosowania co najmniej jednej kuli czarnej.

53. **R** Z pudełka, w którym są 3 kule białe, 3 czarne i 2 zielone, losujemy 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 2 kul białych pod warunkiem wylosowania dokładnie 2 kul czarnych.

54. **R** W pierwszym pudełku jest 1 kula biała i 2 czarne, a w drugim – 2 białe i 3 czarne. Z pierwszego pudełka przekładamy jedną kulę do drugiego, a następnie losujemy dwie kule z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z drugiego pudełka dwóch kul czarnych.

55. **R** Pewna linia autobusowa jest obsługiwana przez dwóch przewoźników. Częstotliwość kursowania autobusów pierwszego przewoźnika jest dwukrotnie większa niż drugiego. Wśród autobusów pierwszego przewoźnika autobusy niskopodłogowe stanowią 20%, a wśród autobusów drugiego – 30%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowy autobus tej linii, który zatrzymuje się na przystanku, jest niskopodłogowy.

56. **R** W pierwszym pudełku są 3 kule białe i 5 czarnych, w drugim – 4 białe i 4 czarne. Z losowo wybranego pudełka losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.
57. **R** Z pudełka, w którym jest 5 kul białych i 2 czarne, losujemy 3 kule. Następnie rzucamy monetą tyle razy, ile kul białych wylosowaliśmy. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania samych orłów.
58. **R** W kubku jest 5 kostek sześciennych do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia 6 oczek na jednej z nich jest równe 0,2. Pozostałe kostki są symetryczne. Rzucamy trzema kostkami wyjętymi losowo z kubka. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki.
59. **R** W pierwszym pudełku są trzy kule żółte i pięć zielonych, w drugim – dwie kule białe i dwie czarne, a w trzecim – trzy białe i jedna czarna. Losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. Jeżeli jest żółta, to losujemy jedną kulę z drugiego pudełka, a jeśli zielona – losujemy jedną kulę z trzeciego pudełka.
- a) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej.
- b) Kula wylosowana za drugim razem okazała się białą. Oblicz prawdopodobieństwo, że z pierwszego pudełka wylosowano kulę żółtą.
60. **R** Spośród dwóch monet jedna jest symetryczna, a na drugiej prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe 0,75. Losowo wybraną monetą wykonano 5 rzutów i otrzymano same orły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucano monetą niesymetryczną.
61. **R** W pudełku jest 100 losów, w tym n wygrywających. Prawdopodobieństwo, że wśród dwóch kupionych losów jest co najmniej jeden wygrywający, jest równe $\frac{46}{165}$. Wyznacz n .
62. **R** W pudełku jest 6 kul białych i pewna liczba kul czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka dwóch kul białych jest równe $\frac{1}{3}$. Oblicz, ile kul czarnych jest w pudełku.
63. **R** **D** Dane są zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ takie, że $P(A') = \frac{5}{6}$, $P(A \cup B') = \frac{7}{12}$ i $P(A \cap B') = \frac{1}{12}$. Wykaż, że $P(B) = \frac{1}{2}$.
64. **R** **D** Dane są zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0,55$ i $P(B) = 0,65$. Wykaż, że $P(A \cap B) \geq 0,2$.
65. **R** **D** Dane są zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0,8$ i $P(B) = 0,6$. Wykaż, że $P(A|B) \geq \frac{2}{3}$.

33. Rzucamy trzema symetrycznymi kostkami sześciennymi do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na dokładnie dwóch kostkach uzyskamy taki sam wynik.
34. Rzucamy czterema symetrycznymi kostkami sześciennymi do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek na wszystkich kostkach będzie mniejsza od 22.
35. **R** Siedmioro dzieci, w tym dwie siostry, ma się ustawić losowo w kółeczko. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że siostry staną obok siebie.
36. **R** Rzucamy pięć razy dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz pary orłów.
37. **R** Z pudełka, w którym jest 5 kul białych i 7 czarnych, losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych i jednej czarnej. Zaokrąglaj wynik do części tysięcznych i zakoduj część ułamkową otrzymanej liczby.
- | | | |
|--|--|--|
| | | |
|--|--|--|
38. Z pudełka, w którym są 4 kule białe, 5 czerwonych i 6 zielonych, losujemy kolejno bez zwracania 4 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania najpierw kuli białej, potem czerwonej, a na końcu dwóch zielonych.
39. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 5 czarnych, losujemy kolejno ze zwracaniem 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wylosujemy kolejno dwie kule tego samego koloru.
40. W pierwszym pudełku są 4 kule białe i 1 czarna, w drugim – 2 białe i 2 czarne. Z każdego pudełka losujemy kolejno ze zwracaniem dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w sumie tylko jeden raz kuli czarnej.
41. **R** W pierwszym pudełku jest 6 kul białych i 4 czarne, a w drugim – 5 białych i 3 czarne. Z każdego pudełka losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w sumie trzech kul białych i jednej czarnej.
42. **R** W pierwszej loterii zawierającej 50 losów jest 1 los wygrywający, a w drugiej zawierającej 100 losów są 2 losy wygrywające. Kupujemy 2 losy z każdej loterii. W której z nich mamy większą szansę, że wśród kupionych losów znajdzie się co najmniej jeden wygrywający?
43. **R** Przy prostokątnym stole jest 10 miejsc – po trzy wzdłuż dłuższego i po dwa wzdłuż krótszego boku. Miejsca przy tym stole przydzielono losowo 10 uczestnikom konferencji, w tym dwojgu z jednej firmy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoby z tej firmy będą siedzieć (niekoniecznie obok siebie) przy tej samej krawędzi stołu.
44. **R** W dziale kadr znajduje się 30 podań o pracę, wśród nich są podania pani Edyty i pani Agaty. Dyrektor przegląda po kolei wszystkie podania. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
- A – podanie pani Edyty zostanie przeczytane na samym końcu,
 B – podanie pani Edyty zostanie przeczytane bezpośrednio przed podaniem pani Agaty,
 C – podanie pani Edyty zostanie przeczytane później niż podanie pani Agaty.

To było na maturze CKE

Odpowiedzi s. 292
Rozwiązania s. 302

1. V 2006, 5 p. Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła (w dag)	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

- a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.
- b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.
2. VI 2012, 4 p. Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.
3. V 2014, 2 p. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.
4. V 2010, 4 p. R Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.
5. V 2011, 4 p. R Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.
6. V 2011, 3 p. R D A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω . Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \leq 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).
7. V 2012, 4 p. R Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.
8. VI 2012, 3 p. R Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.
9. V 2014, 4 p. R Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.
10. V 2015, 4 p. R W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.