

Działania na zbiorach

Moc zbioru skończonego A to liczba jego elementów. Oznaczamy $|A|$.

Suma

Element x należy do **sumy** dwóch zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy należy do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ lub $x \in B$.

Jeżeli mamy dane dwa zbiory rozłączne A i B , tzn. takie zbiory, które nie mają żadnego elementu wspólnego (symbolicznie piszemy: $A \cap B = \emptyset$), to zachodzi równość $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Jeśli zbiory A i B nie są rozłączne, to $|A \cup B| \leq |A| + |B|$.

Jeśli znamy liczbę elementów części wspólnej, to możemy obliczyć liczbę elementów sumy zbiorów: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Element x należy do sumy zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy: x należy do sumy, oznaczanej symbolem $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, wtedy i tylko wtedy, gdy należy do zbioru A_1 lub należy do zbioru A_2 lub należy do zbioru A_3 i tak dalej, aż do zbioru A_n , co zapisujemy:

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \Leftrightarrow x \in A_1 \text{ lub } x \in A_2 \text{ lub } \dots \text{ lub } x \in A_n.$$

Iloczyn

Element x należy do **iloczynu** dwóch zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy należy do obu tych zbiorów. Zapisujemy: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ i $x \in B$.

Element x należy do iloczynu zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$, oznaczanego symbolem $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, wtedy i tylko wtedy, gdy należy do każdego z tych zbiorów: $x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \Leftrightarrow x \in A_1$ i $x \in A_2$ i $\dots$ i $x \in A_n$.

Jeśli każde dwa zbiory spośród zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ są rozłączne, to mówimy, że te zbiory są **parami rozłączne**.

Elementy kombinatoryki

Kombinatoryka zajmuje się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. Jeśli elementy zbioru są wypisane, to łatwo możemy znaleźć ich liczbę. Kiedy zbiór jest podany w formie bardziej skomplikowanej, to nie jest oczywiste, ile ten zbiór ma elementów. Zadaniem kombinatoryki jest konstruowanie – spełniających pewne określone warunki – odwzorowań jednego zbioru skończonego w drugi oraz znajdowanie wzorów na liczbę tych odwzorowań.

Podstawowe pojęcia, którymi posługuje się kombinatoryka

Zbiór $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oznacza zbiór o elementach $x_1, x_2, \dots, x_n$. Żaden zbiór nie zawiera dwóch identycznych elementów, to znaczy każdy element traktujemy tak, jakby występował tylko jeden raz, a kolejność elementów zbioru nie ma znaczenia.

Zapis $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ oznacza **ciąg** skończony o n wyrazach $a_1, a_2, \dots, a_n$. Kolejność ustawienia wyrazów w ciągu jest bardzo ważna. Jeśli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy inny ciąg. Ciąg może zawierać wyrazy identyczne lub nie.

Silnia $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Reguła dodawania i mnożenia

Elementarnymi metodami kombinatoryki, często stosowanymi intuicyjnie, są tzw. reguły (zasady) mnożenia i dodawania.

Reguła (zasada) mnożenia

Jeżeli wynik wyboru zależy od podjęcia obu spośród dwóch decyzji, przy czym pierwszą można podjąć na n sposobów, a drugą na m sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $m \cdot n$ sposobów.

Jeżeli wynik wyboru zależy od podjęcia wszystkich spośród k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, ..., k -tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ sposobów.

Reguła (zasada) dodawania

Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, ..., k -tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ sposobów.

Zasada włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów

Liczba elementów sumy trzech zbiorów wyraża się wzorem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Wzór ten nosi nazwę **zasady włączeń i wyłączeń** lub wzoru włączeń i wyłączeń. Nazywa ta bierze się stąd, że liczbę po prawej stronie otrzymujemy, „włączając” do niej trzy liczby $|A|$, $|B|$ i $|C|$, potem „wyłączając” z niej liczby $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$ i wreszcie „włączając” do niej liczbę $|A \cap B \cap C|$. Dlaczego trzeba tak zrobić? Licząc elementy sumy $A \cup B \cup C$, policzyliśmy najpierw elementy zbioru A , potem elementy zbioru B i elementy zbioru C . Otrzymane liczby dodaliśmy. Mamy wynik $|A| + |B| + |C|$. Jeżeli zbiory nie są rozłączne, to niektóre elementy liczyliśmy dwukrotnie, np. jeśli $x \in A \cap B$, to element x był policzony raz jako element zbioru A i raz jako element zbioru B . Należy więc odjąć od wyniku każdy iloczyn dwóch zbiorów: $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$. Jeżeli x był elementem wszystkich trzech zbiorów, to najpierw był policzony trzykrotnie: raz jako element zbioru A , raz jako element zbioru B i raz jako element zbioru C . Potem trzykrotnie policzyliśmy go jako element zbiorów $A \cap B$, $A \cap C$ i $B \cap C$, więc go trzykrotnie usunęliśmy. Trzeba więc jeszcze raz go dodać. Stąd wynika, że do wyniku należy dodać liczbę $|A \cap B \cap C|$ i w ten sposób otrzymujemy prawą stronę wzoru.

Zasada włączeń i wyłączeń: przypadek czterech zbiorów

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = & |A| + |B| + |C| + |D| + \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| + \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|.\end{aligned}$$

W tym przypadku, a także w przypadku większej liczby zbiorów zastosowana jest następująca reguła doboru znaków po prawej stronie wzoru włączeń i wyłączeń.

Liczby elementów zbiorów ($|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$) są brane ze znakiem „+”, każdy iloczyn dwóch zbiorów bierzemy ze znakiem „-”, każdy iloczyn trzech zbiorów bierzemy ze

znakiem „+”, każdy iloczyn czterech zbiorów ze znakiem „-” i tak dalej, aż do wy-
czerpania wszystkich możliwości.

Permutacje, wariacje i kombinacje

Kombinatoryka odpowiada na pytanie, ile da się zbudować odwzorowań określone-
go rodzaju z dostępnych elementów. Wyróżniamy trzy rodzaje takich odwzorowań:
permutacje, wariacje i kombinacje.

Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie pewnego zbioru skończonego na siebie
nazywamy **permutacją**.

Liczba sposobów, w jaki można ustawić n elementów w ciąg, jest równa

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Każde takie ustawienie także nazywamy **permutacją**.

Ciąg k -wyrazowy utworzony z różnych elementów n -elementowego zbioru nazywa-
my k -elementową **wariacją bez powtórzeń**. Ważna jest kolejność elementów, a ele-
menty nie mogą się powtarzać.

Liczbę takich ciągów obliczamy ze wzoru $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, gdzie

n i k są dodatnimi liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq n$.

Uwaga: Ponieważ k -wyrazowy ciąg elementów zbioru n -elementowego jest permuta-
cją dowolnego k -elementowego podzbioru tego zbioru, w informatyce (komputery,
kalkulatory) oraz w niektórych krajach UE w ogóle nie używa się nazwy wariacja,
tylko **k -elementowa permutacja zbioru n -elementowego**.

Niech $A_1, A_2, \dots, A_m$ będą zbiorami o odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_m$ elementach.

Liczba ciągów m -elementowych, takich że pierwszy element jest z A_1 , drugi z A_2 , ...,
 m -ty z A_m , jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m$.

Wariacją m -elementową z powtórzeniami zbioru k -elementowego nazywamy każdy m -wyrazowy ciąg elementów tego zbioru. Liczba takich ciągów jest równa

$$\underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_{m \text{ razy}} = k^m.$$

Kombinacją k -elementową zbioru n -elementowego nazywamy każdy k -elementowy podzbiór tego zbioru ($k \leq n$). Liczba wszystkich takich kombinacji jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ gdzie } n \text{ i } k \text{ są dodatnimi liczbami}$$

naturalnymi takimi, że $k \leq n$. W tym przypadku kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia.

Użyty tutaj symbol $\binom{n}{k}$ nazywa się symbolem Newtona.

Rachunek prawdopodobieństwa

Doświadczenie losowe. Zdarzenie losowe

Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, które może być powtarzane w jednakowych lub zbliżonych warunkach i którego wynik nie da się przewidzieć jednoznacznie.

Doświadczenia losowe mogą być **jednoetapowe** (np. rzut monetą, rzut kostką do gry, strzał do celu) lub **wieloetapowe** (np. kilkukrotny rzut monetą, losowanie kolejno kilku kul z urny, losowanie urny, a następnie kuli z wybranej urny).

Wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Najprostsze wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy Ω i nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych**.

Każde **zdarzenie losowe** jest zbiorem pewnej liczby zdarzeń elementarnych. Zdarzenie elementarne, które jest elementem zbioru A , nazywamy zdarzeniem sprzyjającym zdarzeniu A . Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy $|\Omega|$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A oznaczamy $|A|$.

Zbiór Ω jest tzw. **zdarzeniem pewnym**; zbiór pusty jest **zdarzeniem niemożliwym**.

Jeżeli dla doświadczenia losowego $|\Omega| = n$, to liczba wszystkich zdarzeń losowych tego doświadczenia jest równa 2^n .

Działania na zdarzeniach

Mówimy o **sumie zdarzeń** A, B , gdy zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A, B , tzn. gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B (oznaczamy $A \cup B$).

Iloczyn zdarzeń A, B zachodzi wtedy, gdy jednocześnie zachodzi zdarzenie A i zdarzenie B (oznaczamy $A \cap B$).

Mówimy o **różnicy zdarzeń** A, B , gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B (oznaczamy $A - B$).

Zdarzenie przeciwne do A zachodzi, gdy nie zachodzi zdarzenie A (oznaczamy A').

Zdarzenia A, B wykluczają się, gdy zdarzenie $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie A pociąga zdarzenie B , gdy z zajścia zdarzenia A wynika zajście zdarzenia B (oznaczamy $A \subset B$).

Częstość względna zdarzenia A

Jeżeli pewne doświadczenie zostało powtórzone n razy, w wyniku czego zdarzenie A

zaszło k razy, to iloraz $\frac{k}{n}$ nazywamy **częstością względną zdarzenia A** .

Prawdopodobieństwo

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu A tej przestrzeni przyporządkowuje liczbę $P(A)$ spełniającą warunki:

- prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia A jest liczbą nieujemną; $P(A) \geq 0$
- prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń wykluczających się jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń; Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1. $P(\Omega) = 1$

Własności prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A jest liczbą nie większą od jedności.

$$P(A) \leq 1$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zero.

$$P(\emptyset) = 0$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A jest równe różnicy liczby 1 i prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A .

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B , to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest nie większe niż prawdopodobieństwo zdarzenia B .

$$\text{Jeżeli } A \subset B, \text{ to } P(A) \leq P(B).$$

Prawdopodobieństwo sumy dowolnych dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$ jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich iloczynu.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prawdopodobieństwo sumy dowolnych dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$ nie jest większe od sumy tych zdarzeń.

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Twierdzenie o klasycznej definicji prawdopodobieństwa

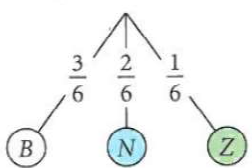
Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa prawdopodobieństwa

Za pomocą drzewa można przedstawiać przestrzeń wyników doświadczenia przebiegającego etapami.

Przykład 1. Doświadczenie jednoetapowe

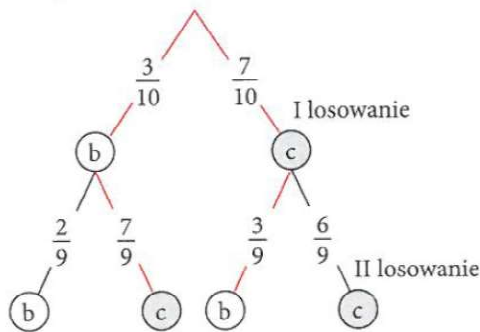


Z urny zawierającej 3 kule białe, 2 niebieskie i jedną zieloną wylosowano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała lub zielona?

Prawdopodobieństwa wszystkich wyników dają w sumie 1. Każdy wynik odpowiada na tym drzewie pewnej gałęzi. Prawdopodobieństwo, że wylosowana będzie kula biała lub zielona, jest równe sumie prawdopodobieństw zaznaczonych na poszczególnych gałęziach.

W tym wypadku $P = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$.

Przykład 2. Doświadczenie wieloetapowe



W woreczku znajdują się ziarna fasoli białe i czarne. Losujemy dwa razy bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane ziarna będą różnych kolorów, jeżeli było 10 ziaren, w tym 3 białe?

Drzewo obok ilustruje przebieg doświadczenia dwuetapowego. Pierwszy etap to losowanie pierwszego ziarna. Drugi etap to losowanie ziarna ze zbioru, w którym jest o jeden element mniej.

Kolorem czerwonym zaznaczono istotne gałęzie drzewa. Prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że wylosowano najpierw ziarno białe, a potem czerwone,

odpowiada iloczyn $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$. Prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że

najpierw wylosowano ziarno czarne, a potem białe, odpowiada iloczyn $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$. Aby

otrzymać prawdopodobieństwo szukanego zdarzenia, musimy obliczyć sumę tych

iloczynów: $P = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i $P(B) > 0$, to **prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy stosunek prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń A i B do prawdopodobieństwa zdarzenia B (oznaczamy $P(A|B)$).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo iloczynu

Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i $P(A) > 0$, to prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa jednego z tych zdarzeń przez prawdopodobieństwo warunkowe drugiego zdarzenia pod warunkiem, że zaszło pierwsze zdarzenie.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zdarzenia $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ są podzbiorami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniającymi warunki:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
2. $P(B_i) > 0$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
3. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

to zachodzi wzór $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ zwany wzorem na prawdopodobieństwo całkowite (zupełne).

Schemat Bernoulliego

Wśród doświadczeń wieloetapowych na szczególną uwagę zasługują te, które polegają na n -krotnym powtórzeniu, w tych samych warunkach i niezależnie od siebie doświadczenia losowego, kończącego się tylko jednym z dwóch możliwych wyników. Takie doświadczenie nazywamy próbą Bernoulliego. Przykładem próby Bernoulliego jest: rzut monetą (orzeł, reszka), kupno losu na loterii (los wygrany, los przegrany).

Wielokrotne powtórzenie próby nazwiemy niezależnymi, jeśli pojawienie się dowolnych wyników w jednej próbie nie zmienia prawdopodobieństwa pojawienia się wyników przy pozostałych próbach.

Jeżeli przeprowadzimy n niezależnych i identycznych doświadczeń, w których są tylko dwa możliwe wyniki, to taki ciąg powtórzeń tego samego doświadczenia nazywamy schematem Bernoulliego. W schemacie tym jedno ze zdarzeń elementarnych nazywamy sukcesem, a drugie porażką.

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ otrzymania dokładnie k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu, zaś $q = 1 - p$ prawdopodobieństwem porażki w próbie Bernoulliego, przy czym $0 < p < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Jeśli $(n + 1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego, jest największa liczba całkowita mniejsza od $(n + 1)p$. Jeśli natomiast $(n + 1)p$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są dwie wartości: $(n + 1)p - 1$ oraz $(n + 1)p$.

Zmienna losowa – funkcja przypisująca zdarzeniom elementarnym liczby. Intuicyjnie: odwzorowanie przenoszące badania prawdopodobieństwa z niewygodnej przestrzeni probabilistycznej do dobrze znanej przestrzeni euklidesowej. Zmienne losowe to funkcje mierzalne względem przestrzeni probabilistycznych.

Zmienną losową jest na przykład funkcja opisująca wagę lub wzrost ciała wylosowanego z pewnej populacji osobnika. Zjawiskom o charakterze losowym, którym nie można w oczywisty sposób przypisać jakiejś miary liczbowej, można przypisywać liczby według pewnego klucza tak, aby możliwe było ich porównywanie w interesującym nas aspekcie. Najprostszymi przykładami są: moneta (np. orłu przypisujemy zero, a reszce jedynkę) i kostka do gry (każdej ścianie przypisujemy liczbę wylosowanych oczek). Innymi przykładami mogą być: stan techniczny urządzenia czy wiedza ucznia (oceniana w skali od 1 do 6).

Rozkład prawdopodobieństwa [edytuj]

Rozkład prawdopodobieństwa – miara probabilistyczna określona na zbiorze wartości pewnej zmiennej losowej (wektora losowego), przypisująca prawdopodobieństwa wartościom tej zmiennej. Formalnie rozkład prawdopodobieństwa można rozpatrywać bez odwołania się zmiennych losowych.

Wartość oczekiwana [edytuj]

Wartość oczekiwana (wartość średnia, przeciętna, dawniej nadzieja matematyczna) – wartość określająca spodziewany wynik doświadczenia losowego. Wartość oczekiwana to inaczej pierwszy moment zwykły. Estymatorem wartości oczekiwanej rozkładu cechy w populacji jest średnia arytmetyczna.

Zmienna dyskretna [edytuj]

Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Wartością oczekiwaną nazywa się sumę iloczynów wartości tej zmiennej losowej oraz prawdopodobieństw z jakimi są one przyjmowane.

Jeżeli dyskretna zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ z prawdopodobieństwami wynoszącymi odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_n$, to wartość oczekiwana $\mathbb{E}X$ zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

ZADANIA

***6.1.** Oblicz:

a) $4! - 2! \cdot 3!$;

c) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$;

e) $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$;

b) $5! - 2! \cdot 4!$;

d) $\frac{12!}{10! \cdot 4!}$;

f) $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$.

***6.2.** Doprowadź do najprostszej postaci, podaj założenia:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$;

e) $\frac{(2n-1)! \cdot (n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!}$;

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$;

f) $\frac{(2n-2)! \cdot (n-3)!}{(2n-5)! \cdot n!}$;

c) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!}$;

g) $\frac{(n-k)! \cdot (n-k+1)!}{(n-k+2)! \cdot (n-k-1)!}$;

d) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!}$;

h) $\frac{(2n-k-2)! \cdot (2n-k-1)!}{(2n-k)! \cdot (2n-k-3)!}$.

***6.3.** Oblicz, korzystając z definicji symbolu Newtona:

a) $\binom{10}{3}$;

b) $\binom{8}{4}$;

c) $\binom{7}{3} - \binom{5}{2}$;

d) $\binom{8}{2} - \binom{6}{4}$;

e) $\frac{\binom{12}{3}}{\binom{14}{4}}$;

f) $\frac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$.

***6.4.** Oblicz:

a) $\binom{18}{2} - \binom{18}{16}$;

b) $\frac{\binom{24}{5}}{\binom{24}{19}}$;

c) $\binom{25}{23} + \binom{25}{24}$;

d) $\binom{23}{21} + \binom{23}{22}$;

e) $\frac{\binom{21}{5} + \binom{21}{16}}{2 \cdot \binom{21}{6}}$;

f) $\frac{\binom{4}{2} \cdot \left[\binom{27}{11} + \binom{27}{12} \right]}{\binom{28}{16}}$;

$$g) \frac{3 \cdot \left[\binom{6}{2} \cdot \binom{15}{13} + \binom{6}{4} \cdot \binom{15}{14} \right]}{\binom{16}{2}};$$

$$h) \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{17}{14} + \binom{17}{15} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{5}{2} \cdot \binom{17}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{17}{3}}.$$

***6.5.** Doprowadź do najprostszej postaci, podaj założenia:

$$a) \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}};$$

$$d) \frac{\binom{2n+1}{2n-1} + \binom{2n+1}{2n}}{\binom{2n+1}{2n-1}};$$

$$b) \frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}};$$

$$e) \frac{\binom{3n+2}{3n-1} + \binom{3n+2}{3n} + \binom{3n+3}{3n+1}}{\binom{3n+3}{3n} + \binom{3n+3}{3n+1}};$$

$$c) \frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}};$$

$$f) \frac{\binom{4n}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}{\binom{4n-1}{4n-3} + \binom{4n-1}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}.$$

***6.6.** Oblicz n , jeśli wiadomo, że:

$$a) n + \binom{n}{2} = 15;$$

$$d) \binom{2n}{3} = 120;$$

$$b) \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{2} = 16;$$

$$e) \binom{3n}{3n-2} + \binom{3n}{3n-1} = 45;$$

$$c) \binom{n}{3} = 56;$$

$$f) \binom{2n-3}{2n-5} + \binom{2n-3}{2n-4} = 15.$$

Dwumian Newtona

***6.7.** Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy:

$$a) (x+2)^6;$$

$$e) (x-1)^8;$$

$$b) (x+3)^5;$$

$$f) (x-2)^7;$$

$$c) (2x+1)^6;$$

$$g) \left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \quad (x \neq 0);$$

$$d) (3x+1)^5;$$

$$h) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^5 \quad (x \neq 0).$$

***6.8.** Wyznacz:

a) trzynasty wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{20}$;

b) siódmy wyraz rozwinięcia $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^{10}$;

c) szósty wyraz rozwinięcia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^{10}$;

d) ósmy wyraz rozwinięcia $\left(3x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{11}$;

e) środkowy wyraz rozwinięcia $\left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{16}$;

f) środkowy wyraz rozwinięcia $\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{18}$.

***6.9.** Wiadomo, że suma współczynników drugiego i trzeciego wyrazu rozwinięcia dwumianu $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ ($x \neq 0$) wynosi 325. Wyznacz siedemnasty wyraz tego rozwinięcia.

***6.10.** Wiadomo, że suma współczynników dwu ostatnich wyrazów rozwinięcia dwumianu $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x \neq 0$) wynosi 19. Wyznacz szósty wyraz tego rozwinięcia.

***6.11.** Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{15}$ ($x \neq 0$), który zawiera x^5 .

***6.12.** Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{20}$ ($x \neq 0$), który nie zawiera x .

***6.13.** Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{20}$ ($x \neq 0$), który zawiera x^4 .

***6.14.** Oblicz:

a) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$; $2^{10} = 1024$

b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$; 2^n

c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$; $0^n = 0$

d) $\frac{\binom{n}{0}}{2^0} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{2^2} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{\binom{n}{n}}{2^n}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

6.1. a) 12; b) 72; c) 15; d) $\frac{11}{2}$; e) $\frac{49}{10}$; f) $\frac{81}{10}$.

6.2. a) $n(n-1)$; b) $(n-2)(n-1)$; c) $2n(2n-1)(2n-2)$; d) $\frac{1}{3n(3n-1)}$; e) $\frac{n+2}{4n(2n+1)}$;
f) $\frac{4(2n-3)}{n}$; g) $\frac{n-k}{n-k+2}$; h) $\frac{2n-k-2}{2n-k}$.

6.3. a) 120; b) 70; c) 25; d) 13; e) $\frac{10}{91}$; f) $\frac{13}{6}$.

6.4. a) 0; b) 1; c) 325; d) 276; e) $\frac{3}{8}$; f) 6; g) 45; h) $\frac{1}{2}$. Wskazówka: Wykorzystaj własności symbolu Newtona.

6.5. a) $\frac{3}{n+1}$; b) $\frac{n+2}{3}$; c) $\frac{n-1}{3}$; d) $\frac{n+1}{n}$; e) 1; f) 1.

6.6. a) 5; b) 6; c) 8; d) 5; e) 3; f) 4.

6.8. a) $c_{13} = 3 \cdot \binom{20}{12}$ lub $c_{13} = 3^4 \binom{20}{12}$; b) $c_7 = \binom{10}{6} \cdot \frac{x^4}{256}$ lub $c_7 = \binom{10}{6} \frac{x^6}{4}$;
c) $c_6 = -\frac{x^5}{32} \cdot \binom{10}{5}$; d) $c_8 = -\sqrt{3} \cdot x^4 \cdot \binom{11}{7}$ lub $c_8 = 3^5 x^7 \binom{11}{7}$; e) $c_9 = \binom{16}{8} \cdot \frac{x^8}{9}$;
f) $c_{10} = -\binom{18}{9} \cdot \frac{x^9}{8}$.

6.9. $c_{17} = \binom{25}{16} \cdot x^2$ lub $c_{17} = \binom{25}{16} x^{23}$.

6.10. $c_6 = \binom{18}{5} \cdot x^3$ lub $c_6 = \binom{18}{5} \frac{1}{x^{21}}$.

6.11. $3003 \cdot x^5$.

6.12. 190.

6.13. $125970 \cdot x^4$.

6.14. a) 1024. Wskazówka: Rozważ wyrażenie $(1+1)^{10}$; b) 2^n ; c) 0; d) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

- 9.1. W turnieju szachowym rozegrano 66 partii, przy czym każdy szachista rozegrał z każdym po jednej partii. Ilu szachistów uczestniczy w turnieju?

Odp. 12.

- 9.2. Ile różnych płaszczyzn można poprowadzić przez 4 punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie?

Odp. 4.

- 9.3. Ile można utworzyć liczb czterocyfrowych, w których na pierwszym i ostatnim miejscu występuje ta sama cyfra, i w której cyfry mogą się powtarzać?

Odp. 900.

- 9.4. Podać definicję prawdopodobieństwa i jego własności.

- 9.5. Zdarzenia A i B wykluczają się. Obliczyć: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \setminus B)$ i $P(A/B)$ jeżeli $P(A) = 0,4$ i $P(B) = 0,6$.

Odp. 1; 0; 0,4; 0.

- 9.6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A jeśli: $16 \cdot P(A) \cdot P(A') = 3$.

Odp. $\frac{1}{4}$ lub $\frac{3}{4}$.

- 9.7. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A jeżeli: $\frac{P(A)}{P(A')} = 5$.

Odp. $\frac{5}{6}$.

- 9.8. Wiadomo, że zdarzenia A i B wykluczają się oraz $P(A') = \frac{2}{3}$ i $P(B') = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A \cup B)$ oraz $P(A/B)$.

Odp. $\frac{5}{6}$; 0.

- 9.9. Wykazać, że jeżeli: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

- 9.10. Wykazać, że: $P(A') = 1 - P(A)$.

- 9.11. Wykazać, że:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$
- 9.12. Niech dany będzie zbiór zdarzeń elementarnych:
 $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_{10}\}$. Obliczyć $P(\{\omega_{10}\})$ wiedząc, że
 $P(\{\omega_9\}) = 0,001$ i $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{2^k}$ dla $k \in \{1; 2; \dots; 8\}$.
 Odp. $\frac{93}{32000}$.
- 9.13. $A \cap B = \emptyset$. Sprawdzić, czy suma $P(A) + P(B)$ może być większa od 1.
 Odp. Nie.
- 9.14. $P(A/B) = 0,6$; $P(B/A) = 0,2$; $P(B) = 0,1$. Oblicz $P(A)$.
 Odp. 0,3.
- 9.15. $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$. Wyznacz α wiedząc, że $P(\{\omega_1\}) = 2\alpha$,
 $P(\{\omega_2\}) = 4\alpha, \dots; P(\{\omega_n\}) = 2n\alpha$.
 Odp. $\alpha = \frac{1}{n(n+1)}$.
- 9.16. Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_9\}$ oraz określona na podzbiorach tego zbioru funkcja P będąca prawdopodobieństwem. Wyznacz liczbę a , wiedząc, że:
 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_8\}) = 2^a$ oraz $P(\{\omega_9\}) = \frac{1}{2}$.
 Odp. $a = -4$.
- 9.17. Podać definicję pary i trójki zdarzeń niezależnych.
- 9.18. Zdarzenia A, B i C są niezależne i jednakowo prawdopodobne:
 $P(A) = P(B) = P(C) = p$. Oblicz: $P(A \cup B)$; $P(A \cap C)$
 i $P(A \cup B \cup C)$.
 Odp. $2p - p^2$; p^2 ; $p^3 - 3p^2 + 3p$.
- 9.19. Prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są równe odpowiednio p i q . Oblicz:
 $P(A \cup B)$ i $P(A/B)$ wiedząc, że zdarzenia A i B są niezależne.
 Odp. $p + q - pq$; p .
- 9.20. Wykazać, że jeżeli A i B są zdarzeniami niezależnymi, to zdarzenia do nich przeciwne A' i B' też są niezależne.

- 9.21. Wykazać, że jeżeli A i B są zdarzeniami niezależnymi, to zdarzenia A i B' są też niezależne.

- 9.22. Zbadać, czy zdarzenia wykluczające się o prawdopodobieństwach różnych od zera mogą być niezależne.

Odp. Nie mogą być niezależne.

- 9.23. Wykazać, że jeżeli A , B i C są trójką zdarzeń niezależnych, to zdarzenia $A \cup B$ i C są też niezależne.

- 9.24. Z talii 52 kart wyciągamy losowo kartę. Czy zdarzenia: A - "wyciągnęliśmy asa" i B - "wyciągnęliśmy kartę koloru czerwonego" są niezależne. Odpowiedź uzasadnij.

Odp. Zdarzenia niezależne.

- 9.25. Rzucamy 3 razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie: "co najmniej raz wypadnie reszka", B zdarzenie "wypadły 3 orły lub 3 reszki". Czy zdarzenia A i B' są niezależne?

Odp. Nie.

- 9.26. Rzucono trzema kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek na każdej kostce, zaś B zdarzenie polegające na wyrzuceniu liczby oczek, których suma jest większa od 16. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Odp. Nie.

- 9.27. Wykazać, że jeżeli $A \cup B = \Omega$ i zdarzenia A i B są niezależne, to albo A , albo B jest zdarzeniem pewnym.

- 9.28. Omów schemat Bernoulliego.

- 9.29. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w sześciu rzutach monetą orzeł wypadnie dokładnie sześć razy.

Odp. $\frac{1}{64}$.

- 9.30. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz reszki w siedmiu rzutach monetą?

Odp. $\frac{127}{128}$.

- 9.31. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 10 rzutach monetą co najwyżej dwa razy wypadnie reszka?

Odp. $\frac{7}{128}$.

9.32. Rzucamy kostką do gry 5 razy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej 5 oczek wypadnie dokładnie dwa razy.

b) parzysta liczba oczek wypadnie co najmniej cztery razy.

Odp. $\frac{80}{243} \cdot \frac{3}{16}$.

9.33. Rzucamy 5 razy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwa razy suma oczek wynosić będzie 10.

Odp. $\frac{6655}{124416}$.

9.34. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w pięciu rzutach kostką i monetą co najmniej 4 razy wypadnie orzeł i liczba oczek parzysta.

Odp. $\frac{1}{64}$.

9.35. Rzucamy n razy monetą ($n \in \mathbb{N}^+$). Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że uzyskano co najmniej jednego orła.

Odp. $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

9.36. Obliczyć co jest mniej prawdopodobne: wyrzucenie co najwyżej raz reszki w 4 rzutach monetą, czy co najmniej raz trójki w 2 rzutach kostką.

Odp. Mniej prawdopodobne jest wyrzucenie co najmniej raz trójki.

9.37. Przy ilu rzutach monetą prawdopodobieństwa wyrzucenia dokładnie trzy razy orła i wyrzucenia dokładnie 5 razy reszki są jednakowe?

Odp. $n = 8$.

9.38. Gra polega na rzucie kostką i monetą. Wygrana następuje po łącznym otrzymaniu szóstki i orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trzech grach wygrana nastąpi dokładnie raz?

Odp. $\frac{121}{576}$.

9.39. Ile razy należy rzucać trzema monetami, aby prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej raz trzech orłów jednocześnie było większe od 0,8?

Odp. Co najmniej 13 razy.

9.40. Podaj i udowodnij twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

- 9.41. Z pudełka z nićmi zawierającego 6 szpilek nici białych i 3 szpulki nici czarnych wybrano w sposób losowy jedną, a następnie z pozostałych drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa razy wybrano nici tego samego koloru.

Odp. $\frac{1}{2}$.

- 9.42. W urnie znajdują się 4 kule zielone i 6 białych. Z urny wyjęto jedną kulę i odłożono na bok. Z pozostałych wylosowano trzy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie kule wylosowane za drugim razem są białe.

Odp. $\frac{1}{6}$.

- 9.43. W magazynie znajdują się produkty z fabryk F_1 i F_2 . Wiadomo, że 80% zapasu pochodzi z fabryki F_1 , a 20% z fabryki F_2 . W produkcji fabryki F_1 znajduje się 5% braków, w produkcji fabryki F_2 0,5%. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany z magazynu produkt jest dobry.

Odp. 0,959.

- 9.44. W urnie pierwszej znajdują się trzy kule białe i siedem czarnych, w drugiej pięć białych i dziesięć niebieskich. Rzucono kostką. Jeżeli wynik rzutu będzie większy od 4 to losowanie dwóch kul odbędzie się z urny pierwszej, w przeciwnym przypadku z urny drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul niebieskich?

Odp. $\frac{2}{7}$.

- 9.45. Czujnik wykrywa awarie z prawdopodobieństwem 0,9. Oblicz prawdopodobieństwo wykrycia awarii przy zainstalowaniu trzech czujników działających niezależnie.

Odp. 0,999.

- 9.46. Ile czujników pracujących niezależnie i wykrywających awarię z prawdopodobieństwem 0,8 trzeba zainstalować, aby prawdopodobieństwo wykrycia awarii było równe co najmniej 0,999?

Odp. $n \geq 5$.

- 9.47. Prawdopodobieństwo trafienia w każdym pojedynczym strzale wynosi $\frac{3}{4}$. Ile strzałów należy oddać, aby prawdopodobieństwo trafienia co najmniej raz

było większe od $\frac{127}{128}$.

Odp. $n > 4$.

- 9.48. Prawdopodobieństwo co najmniej jednego trafienia do tarczy przy czterech wystrzałach jest równe $\frac{80}{81}$. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia przy jednym wystrzale.

Odp. $\frac{2}{3}$.

- 9.49. Trzech fotografów wykonuje zdjęcie. Prawdopodobieństwo wykonania poprawnej fotografii jest dla każdego z nich takie samo i wynosi 0,8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna fotografia będzie udana?

Odp. 0,992.

- 9.50. W urnie są 3 kule białe i 4 kule czarne. Losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy dokładnie jedną kulę czarną.

Odp. $\frac{4}{7}$.

- 9.51. W serii 25 znaczków jest 5 uszkodzonych. Losujemy trzy znaczki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa są dobre?

Odp. $\frac{209}{230}$.

- 9.52. W loterii jest 10 losów, wśród których są 2 wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 5 kupionych losów choć jeden jest wygrywający?

Odp. $\frac{7}{9}$.

- 9.53. Z grupy składającej się z 10 kobiet i 5 mężczyzn wybrano w sposób losowy delegację 3-osobową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w skład delegacji wchodzi i mężczyźni i kobiety?

Odp. $\frac{5}{7}$.

- 9.54. Rzucamy pięć razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żaden wynik nie powtórzy się.

Odp. $\frac{5}{54}$.

- 9.55. Czy łatwiej otrzymać co najmniej 9 orłów w 10 rzutach monetą, czy sumę oczek równą 17 w trzech rzutach kostką do gry?

Odp. Łatwiej otrzymać sumę oczek 17.

- 9.56. W szufladzie jest 7 długopisów czarnych i 12 długopisów zielonych. Wybrano losowo 3 długopisy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie będą czarne lub wszystkie będą zielone.

Odp. $\frac{5}{19}$.

- 9.57. Z kolejnych liczb naturalnych 1; 2; 3; ...; 18; 19 losujemy jednocześnie dwie liczby. Jakie będzie prawdopodobieństwo, że ich suma będzie parzysta?

Odp. $\frac{9}{19}$.

- 9.58. Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek jest liczbą z przedziału $\langle 2; 10 \rangle$?

Odp. $\frac{5}{6}$.

- 9.59. Ze zbioru liczb $\{1; 2; 3; \dots; 10\}$ wybieramy w sposób losowy kolejno dwie liczby (bez zwracania) i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że różnica jest większa od 2?

Odp. $\frac{14}{45}$.

- 9.60. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyniki sześciokrotnego rzutu kostką tworzą ciąg arytmetyczny?

Odp. $\frac{1}{5832}$.

- 9.61. W urnie jest n kul, w tym 5 czarnych. Ile co najwyżej może być kul w urnie, aby przy losowaniu 2 kul bez zwracania prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czarnych było większe od $\frac{1}{3}$.

Odp. 8.

- 9.62. $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ są różnymi punktami prostej l . Wybieramy losowo dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo, że nie są to punkty sąsiednie.

Odp. $\frac{3}{5}$.

- 9.63. Na dwóch prostych równoległych obrano punkty, na jednej cztery, na drugiej pięć. Losujemy trzy spośród tych punktów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że są one wierzchołkami pewnego trójkąta?

Odp. $\frac{5}{6}$.

9.64. Siedem kul wrzucono w sposób przypadkowy do dwóch pojemników. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym pojemniku jest co najmniej jedna kula?

Odp. $\frac{63}{64}$.

● 9.65. Trzy kule różnych kolorów wrzucamy do trzech szuflad. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdej szufladzie będzie co najwyżej jedna kula?

Odp. $\frac{1}{10}$.

9.66. Do tramwaju składającego się z 2 wagonów wsiada 5 pasażerów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do pierwszego wagonu wsiądzie dokładnie 3 pasażerów?

Odp. $\frac{5}{16}$.

9.67. Na półce w sposób losowy ustawiono 10 książek, w tym dwie będące pierwszą i drugą częścią tej samej powieści. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że część I i II stoją obok siebie.

Odp. $\frac{1}{5}$.

● 9.68. Przy okrągłym stole posadzono w sposób losowy 8 osób, wśród których są rodzice z dwojgiem dzieci. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że dzieci siedzą bezpośrednio między rodzicami.

Odp. $\frac{2}{105}$.

9.69. Dziecko bawi się klockami oznaczonymi literami: $M, M, A, A, A, T, T, E, K, Y$ układając je w ciąg. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że dziecko ułoży słowo *MATEMATYKA*.

Odp. $\frac{1}{151200}$.

9.70. Ze zbioru $\{1; 2; 3; \dots; 10\}$ wybieramy w sposób losowy kolejno trzy liczby bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania takiej trójki $(x; y; z)$ liczb, dla której $x + y < z$.

Odp. $\frac{5}{36}$.

9.71. Spośród pięciu prętów o długości: 1; 3; 4; 5; i 6m losujemy 3 pręty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z wylosowanych prętów można zbudować:

- a) trójkąt,
b) trójkąt prostokątny?

Odp. a) $\frac{4}{10}$; b) $\frac{1}{10}$.

- 9.72. W pudełku znajdowały się pileczki: m czerwonych i 6 czarnych. Wyciągnięto dwie pileczki. Prawdopodobieństwo tego, że obie są czerwone wynosi $\frac{1}{2}$. Ile pileczek znajdowało się w pudełku?

Odp. 21.

- 9.73. Na loterii jest 15 losów, wśród których jeden los wygrywa całą stawkę, 4 losy wygrywają po $\frac{1}{3}$ stawki a pozostałe są puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując 3 losy wygramy dokładnie całą stawkę.

Odp. $\frac{7}{65}$.

- 9.74. Z ciągu $1; 2; \dots; n$ wybieramy losowo 2 liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jedna z nich jest mniejsza od całkowitej dodatniej liczby k , a druga większa od k , gdzie $1 < k < n$.

Odp. $\frac{2(k-1)(n-k)}{(n-1)n}$.

- 9.75. W urnie znajduje się 20 kul białych i 2 czarne. Losujemy bez zwracania n kul. Wyznacz najmniejszą wartość n taką, że prawdopodobieństwo wylosowania chociaż raz kuli czarnej jest większa od 0,5.

Odp. $n = 7$.

- 9.76. W urnie jest 10 losów, wśród których jeden daje wygraną, dwa uprawnniają do bezpłatnego wyciągnięcia następnego losu, a reszta to losy puste. Kupujemy jeden los i maksymalnie wykorzystujemy swoje uprawnienia. Obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu z wygraną.

Odp. $\frac{1}{8}$.

- 9.77. Dany jest zbiór funkcji:
 $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana funkcja będzie różnowartościowa.

Odp. $\frac{12}{25}$.

- 9.78. W każdej z trzech urn znajduje się 1 kula czarna i 2 białe. Z pierwszej urny przełożono losowo wybraną kulę do urny drugiej, a następnie z drugiej urny losowo wybraną kulę do trzeciej. Znaleźć prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z trzeciej urny.
Odp. $\frac{2}{3}$.
- 9.79. Z urny, w której znajdują się cztery losy z numerami: 110; 101; 211 i 222 wyciągamy trzy losy, po każdym losowaniu wrzucając los do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej raz wyciągniemy los z cyfrą 1 na drugim miejscu.
Odp. $\frac{7}{8}$.
- 9.80. Ze zbioru $\{1; 2; 3; \dots; 222\}$ losujemy jedną liczbę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 3.
Odp. $\frac{2}{3}$.
- 9.81. Rzucono kostką 3 razy. Za pierwszym razem wyrzucono 5 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek w 3 rzutach będzie większa od 9.
Odp. $\frac{5}{6}$.
- 9.82. Rzucamy raz trzema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: iloczyn oczek wyrzuconych na trzech kostkach nie jest liczbą podzielną przez 90 i nie jest liczbą podzielną przez 60.
Odp. $\frac{31}{36}$.
- 9.83. Rzucamy sześciokrotnie kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej jednym rzucie liczba wyrzuconych oczek będzie równa numerowi rzutu.
Odp. $\frac{31028}{46656}$.
- 9.84. Każda z trzech jednakowych urn zawiera 21 kul, z których dokładnie k jest białych. Z każdej urny wyciągamy losowo jedną kulę. Zbadać, dla jakiej wartości k prawdopodobieństwo wyciągnięcia dokładnie dwóch białych kul jest największe.
Odp. 14.
- 9.85. Do 10-cio osobowego klubu tenisowego należy 6 kobiet i 4 mężczyzn. Trzy spośród kobiet i jeden spośród mężczyzn są leworęczni. Losowo

wybrano 2 osobową reprezentację klubu i okazało się, że są to osoby leworęczne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrane osoby są kobietami?

Odp. $\frac{1}{2}$.

- 9.86. Z cyfr: 0; 1; 2; 3; 4 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe, w których cyfry setek, dziesiątek i jedności są różne. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana jedna z tych liczb ma dwie cyfry parzyste i jedną nieparzystą.

Odp. $\frac{7}{12}$.

- 9.87. Z cyfr: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 losujemy kolejno bez zwracania 3 cyfry układając je w kolejności losowania w liczbę. Zakładając, że wszystkie możliwe do otrzymania w ten sposób liczby są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej od 666.

Odp. $\frac{5}{8}$.

- 9.88. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie kostką trzy kolejne wyniki utworzą ciąg geometryczny.

Odp. $\frac{2}{27}$.

- 9.89. W każdej z trzech jednakowych urn znajduje się 15 kul, w tym dokładnie k białych. Losujemy z każdej urny po jednej kuli. Zbadać dla jakiej wartości k prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 2 kul białych jest największa. Oblicz wartość tego prawdopodobieństwa.

Odp. $k = 10$; $P(A) = \frac{4}{9}$.

- 9.90. Ze zbioru n kul ponumerowanych od 1 do n losujemy kolejno bez zwracania 2 kule. Numery wylosowanych kul tworzą parę uporządkowaną $(a; b)$. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb spełniających warunek $|a - b| = 2$ jest większe od $\frac{1}{4}$.

Odp. $n \in \{3; 4; 5; 6\}$.

- 9.91. W urnie jest 15 kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Wyciągamy kolejno pięć kartek (bez zwracania). Obliczyć

prawdopodobieństwo tego, że numer trzeciej kartki jest liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie numer piątej kartki jest liczbą podzielną przez 5.

Odp. $\frac{1}{15}$.

- 9.92. Ze zbioru zawierającego kolejne liczby naturalne od 1 do 1111 włącznie losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę parzystą lub podzielną przez 5?

Odp. $\frac{666}{1111}$.

- 9.93. W dwóch urnach jest po 10 kul czarnych. Jak ułożyć 20 kul białych w tych urnach, aby prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli (w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu urny, a następnie z tej urny wyciągnięcia losowo kuli) było największe.

Odp. Po 10 w każdej urnie.

- 9.94. Połowa ponumerowanych liczbami: 1; 2; ...; 6 urn zawiera po 2 białe i 3 czarne kule, w pozostałych urnach są po 4 białe i 3 czarne kule. Rzucamy kostką, a następnie z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek losujemy bez zwracania 2 kule. Co jest bardziej prawdopodobne - wylosowanie dwóch kul białych, czy dwóch kul czarnych?

Odp. Bardziej prawdopodobne jest wylosowanie kul czarnych.

- 9.95. W każdej z 10 jednakowych urn $U_1; U_2; \dots; U_{10}$ znajduje się 10 kul, przy czym w urnie o numerze n ($1 \leq n \leq 10$) znajduje się n kul białych i $10-n$ kul czarnych. Sięgamy losowo do jednej z urn i losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?

Odp. 0,45.

- 9.96. Do tramwaju składającego się z trzech wagonów wsiada 9 pasażerów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do każdego wagonu wsiądzie po 3 pasażerów.

Odp. $\frac{560}{6561}$.

- 9.97. Autobus, w którym znajduje się 8 pasażerów zatrzymuje się na 10 przystankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy z pasażerów wysiadzie na innym przystanku.

Odp. $\frac{567}{31250}$.

9.98. Do trzech pudełek wrzucono w sposób losowy 9 pileczek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że do pierwszego wrzucono dokładnie cztery pileczki.

Odp. $\frac{448}{2187}$.

- 9.99. Z kolejnych liczb naturalnych od 1 do $2n$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą z przedziału $(1; 2)$.

Odp. $\frac{1}{4}$.

- 9.100. W pokazowym turnieju tenisowym bierze udział 8 seniorów, 6 juniorów i 2 młodzików. Każdy z uczestników miał rozegrać tylko jeden mecz. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że we wszystkich meczach spotkają się zawodnicy z tej samej kategorii wiekowej, jeśli wiadomo, że pary zawodników grających ze sobą ustalono drogą losowania.

Odp. $\frac{1}{1287}$.

KOMBINATORYKA. DWUMIAN NEWTONA

silnia, symbol Newtona

560. O ile procent liczba $\frac{15!}{13!+12!}$ jest mniejsza od liczby $\binom{26}{2}$?
561. Dane są liczby $a = 18!$ i $b = 20!$.
a) Ile razy liczba b jest większa niż liczba a ?
b) Liczbę a zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę jedności liczby a .
c) Liczbę b zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę tysięcy liczby b .
d) Uzasadnij, że liczba a jest podzielna przez 119, a nie jest podzielna przez 19.
562. Oblicz wartość wyrażenia $\binom{1}{0} + \binom{3}{2} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{39}{38} + \binom{41}{40}$.
563. 1a **T w i e r d z e n i e.** Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.
Wykorzystując podaną równość, oblicz
a) liczbę wszystkich podzbiorów zbioru pięcioelementowego;
b) liczbę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru sześćelementowego.
564. Rozwiąż równanie $\binom{n+2}{4} = 5 \cdot \binom{n}{3}$.
565. D Wykaż, że jeśli $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ i $k < n$, to $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
566. Oblicz granicę i zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

dwumian Newtona

567. W rozwinięciu dwumianu $(x+1)^n$, gdzie $n > 5$, współczynnik przy x^6 jest równy współczynnikowi przy x^{14} . Znajdź n .
568. Wyznacz ten współczynnik rozwinięcia dwumianu $(x^8 + \frac{1}{x^4})^{12}$, który występuje przy x^{60} .
569. Znajdź ten wyraz dwumianu $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x})^{12}$, w którym nie występuje x .

zadania kombinatoryczne

570. W jadłospisie baru mlecznego „Biedronka” znajduje się 8 zup, 7 drugich dań i 2 kompoty, natomiast konsument chcący zjeść obiad w barze „Gdańskim” ma do wyboru 6 zup, 5 drugich dań i 4 kompoty. Pan Kowalski zamierza zjeść obiad w jednym z tych barów. W którym barze ma większą możliwość wyboru zestawu obiadowego składającego się z zupy, drugiego dania i kompotu?

- 571.** Od domu wczasowego do podnóża góry prowadzą 3 trasy autokarowe, a od podnóża góry na szczyt wiodą 4 szlaki turystyczne. Oblicz, ile różnych tras może zaplanować organizator wycieczki, jeżeli ze względów poznawczych droga powrotna będzie przebiegać
- innym szlakiem turystycznym i tą samą trasą autokarową;
 - innym szlakiem turystycznym i inną trasą autokarową.
- 572. 1b** Wyznaczmy liczbę wszystkich dzielników liczby $a = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.
Zauważmy, że każdy dzielnik liczby a jest liczbą postaci $3^k \cdot 5^m \cdot 7^n$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Zatem liczba dzielników liczby a jest równa liczbie trójwyrazowych ciągów (k, m, n) , gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Wyznaczamy liczbę tych ciągów: $4 \cdot 5 \cdot 3$. Tak więc liczba a ma 60 dzielników.
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, wyznacz liczbę dzielników liczby
- $2^6 \cdot 11^7 \cdot 13$;
 - 5400.
- 573.** W pewnym prostym edytorze tekstów użytkownik może pisać tekst używając tylko czterech typów czcionek: *Arial*, *Courier*, *Impact* i *Times New Roman*. Oblicz, na ile różnych sposobów można napisać w tym programie słowo
- TRON;
 - FOTEL,
- zmieniając tylko typ czcionki.
- 574.** W galerii przygotowywana jest wystawa malarstwa olejnego. Na jednej ze ścian należy zawiesić w jednym rzędzie osiem obrazów. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, jeśli dwa największe płótna
- mają być umieszczone na początku i na końcu ściany,
 - mają sąsiadować ze sobą.
- 575.** W rozgrywkach piłkarskiej pierwszej ligi występuje 14 zespołów. W jednym sezonie każda drużyna rozgrywa z każdą mecz i rewanż. Do ilu pierwszoligowych pojedynków piłkarskich dochodzi w ciągu sezonu?
- 576.** Mając do dyspozycji farby w pięciu kolorach, Tomek ma za zadanie pomalować chorągiewkę składającą się z trzech części (patrz rys.). Każda część po obu stronach ma być pomalowana tym samym kolorem farby. Oblicz, na ile różnych sposobów Tomek może pomalować chorągiewkę, jeżeli
- każda część ma mieć inny kolor;
 - pierwsza i trzecia część chorągiewki ma mieć ten sam kolor, a część środkowa inny.
- | |
|---------|
| Część 1 |
| Część 2 |
| Część 3 |
- 577.** Aby otworzyć furtkę, przez którą wchodzi się na teren posesji pana Nowaka, należy na klawiaturze domofonu wybrać czterocyfrowy kod. Syn pana Nowaka dawno nie był u swojego ojca, ale zapamiętał, że pierwsza i czwarta cyfra kodu jest parzysta, a suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6. Oblicz, ile co najwyżej razy będzie musiał wpisać kod syn pana Nowaka, aby mógł otworzyć furtkę.
- 578.** Przypuśćmy, że w pewnym kraju numer rejestracyjny każdego samochodu ma postać $L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3$, gdzie każdy z symboli L_1, L_2, L_3 oznacza jedną z 22 liter, a każdy z symboli C_1, C_2, C_3 oznacza cyfrę, przy czym litery występujące w numerze nie mogą powtarzać się.
- Zbadaj, czy w tym kraju można zarejestrować 10 mln samochodów.
 - Oblicz, ile można byłoby zarejestrować samochodów, gdyby cyfry występujące w numerze rejestracyjnym również nie mogły powtarzać się. O ile procent zmniejszyłaby się wówczas liczba możliwych do utworzenia numerów rejestracyjnych?

579. Uczniowie klasy matematyczno-informatycznej muszą uczęszczać na fakultety z trzech przedmiotów, w tym z co najmniej dwóch przedmiotów ścisłych. Wyboru dokonują spośród dziesięciu przedmiotów, wśród których są cztery przedmioty ścisłe. Oblicz, na ile sposobów może wybrać fakultety każdy uczeń tej klasy.
580. W turnieju szachowym każdy uczestnik rozegrał z każdym z pozostałych zawodników jedną partię. W całym turnieju rozegrano 66 partii. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?
581. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów.
- Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
 - Ile wielokątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
582. Punkty A, B, C, D, E, F należą do prostej k , a punkty P, Q, R, S należą do prostej l równoległej do k ($k \neq l$).
- Ile można narysować takich odcinków, że jeden koniec odcinka należy do zbioru $\{P, Q, R, S\}$, a drugi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$?
 - Ile można narysować czworokątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?
 - Ile można narysować trójkątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?
583. W przedziale wagonu kolejowego znajduje się 8 ponumerowanych miejsc w dwóch rzędach po 4 miejsca. Do pustego przedziału weszło 5 osób: 3 panie i 2 panów. Panie zajęły miejsca w tym samym rzędzie, a panowie usiedli na miejscach w drugim rzędzie. Oblicz, na ile sposobów osoby te mogły zająć miejsca tak, aby
- panie siedziały zwrócone twarzą do kierunku jazdy;
 - vis-à-vis każdego z panów siedziała pani.
584. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B ?
 - Ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru A w zbiór B ?
 - Ile jest wszystkich funkcji rosnących ze zbioru A w zbiór B ?
585. Ośmiu kolegów postanowiło po lekcjach zagrać w piłkę. Przed rozpoczęciem meczu muszą podzielić się na dwa czteroosobowe zespoły. Na ile sposobów mogą dokonać tego podziału?
586. Każdy z sześciu skazanych ma być osadzony w jednym z trzech zakładów karnych.
- Na ile sposobów można rozmieścić skazanych w tych trzech zakładach karnych?
 - Na ile sposobów można rozmieścić skazanych tak, aby w każdym zakładzie karnym wyrok odsiadywało dwóch z nich?
587. Komendant posterunku policji ma do dyspozycji siedmiu policjantów. Oblicz, na ile sposobów komendant może spośród tych policjantów utworzyć
- dwa trzyosobowe patrole;
 - trzy dwuosobowe patrole.
588. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których liczby 1, 2, 3 występują w porządku rosnącym.

589.* Po płaszczyźnie z układem współrzędnych można wędrować w następujący sposób: z punktu (n, k) można przejść tylko do punktu $(n+1, k)$ albo do punktu $(n, k+1)$. Oblicz liczbę dróg prowadzących z punktu $(0, 0)$ do punktu $(4, 4)$.

590.* Przekątne ośmiokąta wypukłego mają tę własność, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W ilu punktach przecinają się przekątne tego wielokąta?

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

schemat klasyczny

591. Ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
- wylosowana liczba jest rozwiązaniem równania $x^3 + 2 = 2x^2 + x$;
 - wylosowana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{5-x}{x-1} \geq 0$.
592. W torebce jest 7 cukierków owocowych, 12 kawowych, a pozostałe cukierki mają smak miętowy. Wyjmujemy jednego cukierka z torebki. Prawdopodobieństwo tego, że będzie to cukierek kawowy, jest równe 0,4.
- Oblicz, ile cukierków miętowych znajduje się w torebce.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyjmując dwa cukierki, oba wyjęte cukierki będą miały smak owocowy?
593. Badana grupa 250 rodzin podzielona została według dwóch kryteriów: wysokości rocznego dochodu i liczby posiadanych samochodów. Wyniki przedstawione są w tabeli:

Liczba samochodów w rodzinie	Roczny dochód rodziny		
	poniżej 25 tys. zł	od 25 tys. do 60 tys. zł	powyżej 60 tys. zł
0	40	10	0
1	25	65	45
2 i więcej	0	5	60

Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z badanej grupy rodzina

- posiada jeden samochód;
- ma roczny dochód nieprzekraczający 60 tys. zł;
- posiada przynajmniej jeden samochód i dochody nie mniejsze niż 25 tys. zł;
- nie posiada samochodu lub ma dochody niższe niż 25 tys. zł?

594. Na wykresie przedstawiono informacje dotyczące znajomości języka angielskiego oraz języka niemieckiego w pewnej 200-osobowej grupie studentów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany z tej grupy student

- zna język niemiecki i nie zna języka angielskiego;
- nie zna języka angielskiego i nie zna języka niemieckiego.

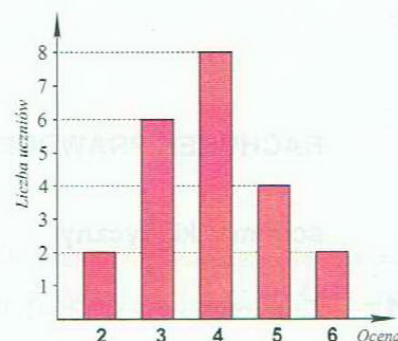


595. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Rozważmy zdarzenia losowe: A – liczba oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie jest dzielnikiem liczby oczek wyrzuconych w drugim rzucie, B – liczby oczek otrzymane w obu rzutach są liczbami pierwszymi.

- Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.
- Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .
- Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B .

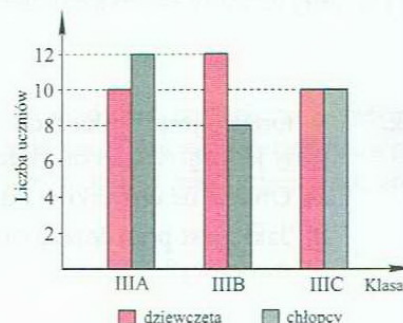
596. Na wykresie przedstawiono dane o ocenach z matematyki uzyskanych na koniec I semestru przez uczniów jednej z klas trzecich. Spośród uczniów tej klasy wybrano losowo dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że

- wylosowano uczniów, z których każdy miał na koniec semestru ocenę co najmniej bardzo dobrą;
- wylosowano uczniów, którzy mieli na koniec semestru różne oceny, przy czym były to oceny co najmniej dobre.



597. Na wykresie przedstawiono skład trzecich klas pewnego liceum. Z listy zawierającej spis wszystkich uczniów klas trzecich wybrano losowo dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że

- wylosowano dwóch chłopców;
- wylosowano dwie dziewczyny z klasy IIIa;
- jedna z wylosowanych osób jest dziewczyną z klasy IIIb, a druga chłopcem z klasy IIIc.



598. Spośród 20 różnych punktów leżących na prostej wybieramy losowo dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania sąsiednich punktów.

599. Wzór funkcji $f(x) = ax + b$ tworzymy w następujący sposób: ze zbioru $Z = \{x \in \mathbb{C} : x^2 + x - 6 \leq 0\}$ losujemy kolejno dwie liczby (bez zwracania), pierwsza z wylosowanych liczb jest równa współczynnikowi a , a druga jest równa współczynnikowi b . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

- A – otrzymana funkcja jest rosnąca;
- B – otrzymana funkcja nie ma miejsca zerowego.

600. Uczniowie zorganizowali dwie loterie. W pierwszej loterii pozostało 40 losów, w tym tylko jeden wygrywający, a w drugiej loterii 80 losów, w tym dwa wygrywające. W której z tych loterii osoba kupująca dwa losy ma większe szanse wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego?

601. W każdym z dwóch koszyków znajduje się 5 klocków czerwonych, 10 zielonych i 6 białych. Wyjmujemy losowo po jednym klocku z każdego koszyka. Oblicz prawdopodobieństwo, że

- wylosujemy dwa klocki białe;
- wylosujemy klocki tego samego koloru.

602. Spośród liczb $-10, -8, -6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ losujemy dwie różne liczby x i y , a następnie tworzymy iloczyn xy . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

- A – iloczyn xy jest liczbą niedodatnią;
- B – iloczyn xy jest liczbą większą od 60.

603. Każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 namalowana jest na innym z pięciu klocków. Dziecko bawiąc się tymi klockami, ustawiło je obok siebie, tworząc liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dziecko utworzyło liczbę podzielną
- a) przez 2; b) przez 3; c) przez 5; d) przez 9.
604. Spośród liczb 1, 2, ..., 9 losujemy jedną liczbę, zwracamy ją i losujemy po raz drugi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
- a) różnica wylosowanych liczb jest liczbą parzystą;
b) wartość bezwzględna różnicy wylosowanych liczb jest większa od 1.
605. Liczby 1, 2, 3, ..., 20 przestawiamy w dowolny sposób. Oblicz prawdopodobieństwo, że
- a) liczby 1 i 2 będą ustawione jedna obok drugiej;
b) liczby 1, 2 i 3 będą ustawione jedna obok drugiej w kolejności wzrastania.
606. Każda litera należąca do zbioru $Z = \{A, B, M, R, S, Y\}$ napisana jest na jednej z sześciu kartek. Wybrano losowo cztery kartki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
- a) wylosowano tylko kartki ze spółgłoskami;
b) wybrano kartki zawierające wszystkie samogłoski należące do zbioru Z ;
c) z liter na wylosowanych kartkach nie będzie można utworzyć słowa *RYBA*.
607. W loterii przygotowano 100 losów, wśród których 10 losów daje wygraną 10 zł, 5 losów wygraną 20 zł, 1 los wygraną 50 zł, zaś pozostałe są puste. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kupując 3 losy wygramy co najmniej 40 zł.
608. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
- a) A – wyniki rzutów utworzą ciąg arytmetyczny,
b) B – wyniki rzutów utworzą ciąg geometryczny.
609. Ze zbiorów $X = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy po jednej liczbie. Rozpatrzmy zdarzenia: A – iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, B – obie wylosowane liczby są parzyste.
- a) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B .
b) Wyznacz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B .
610. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane wierzchołki sześcianu wyznaczają trójkąt równoboczny.
611. Sześciu znajomych opala się na plaży, każdy na swoim kocu. W pewnym momencie wszyscy wstają, biegną do wody, a po kąpieli wracają i kładą się na losowo wybranym kocu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że
- a) każda osoba położy się na swoim kocu;
b) dokładnie dwie osoby nie położą się na swoich kocach.
- * * * * *
612. Z koszyka, w którym jest n piłeczek zielonych i 6 białych, losujemy dwie piłeczki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch piłeczek zielonych jest równe 0,5. Oblicz, ile piłeczek znajduje się w koszyku.

613. Z urny zawierającej n kul, w tym 6 białych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul będzie większe od 0,25?
614. Z pudełka, w którym jest 6 kul czarnych i n kul białych losujemy dwie kule. Zbadaj, dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul jest mniejsze od 0,5;
615. Z pudełka, w którym znajduje się dwa razy więcej kul czarnych niż białych, wylosowano dwie kule. Oblicz, ile kul każdego koloru znajduje się w pudełku, jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych jest równe prawdopodobieństwu wylosowania kul tego samego koloru.
616. Z urny, w której jest dwa razy więcej kul czarnych niż białych i trzy razy więcej kul zielonych niż białych, losujemy trzy kule. Prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul różnokolorowych wynosi $\frac{27}{136}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul, wśród których dokładnie dwie będą tego samego koloru.
- * * * * *
617. Ze zbioru punktów o współrzędnych (x, y) , gdzie $x \in \{1, 2, 3\}$, zaś $y \in \{2, 4\}$, wybrano losowo dwa różne punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
 a) A – wylosowane punkty należą do prostej o równaniu $y=2x$;
 b) B – wylosowane punkty są końcami odcinka równoległego do osi OX .
618. W szufladzie znajduje się 15 kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Losujemy kolejno 5 kartek bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer trzeciej z wylosowanych kartek jest liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie numer piątej jest liczbą podzielną przez 5.
619. W grze liczbowej *Express Lotek* losowanych jest pięć spośród liczb 1, 2, 3, ..., 41, 42. Gracz zawarł jeden zakład na najbliższe losowanie (czyli wytypował w kolekturze Totalizatora Sportowego pięć liczb spośród czterdziestu dwóch). Oblicz, ile razy prawdopodobieństwo trafienia „trójki” (czyli wytypowania dokładnie trzech liczb spośród tych, które będą wylosowane) jest większe niż prawdopodobieństwo trafienia
 a) „piątki”; b) „czwórki”.
620. Gracz A rzuca raz sześcienną kostką z liczbami 2, 4 i 9 na ściankach, a gracz B rzuca raz kostką z liczbami 3, 5 i 7, przy czym każda liczba znajduje się na dwóch ściankach kostki. Wygrywa ten gracz, na którego kostce wypadnie większa liczba. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania gracza A .
621. Ze zbioru $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno bez zwracania współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 a) A – otrzymana funkcja jest malejąca w zbiorze $\mathbf{R}$;
 b) B – otrzymana funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$ i rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$;
 c) C – otrzymana funkcja jest parzysta.
622. Z grupy 8 chłopców i 4 dziewcząt wybrano losowo 5 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców w tej grupie uległ zwiększeniu?
623. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

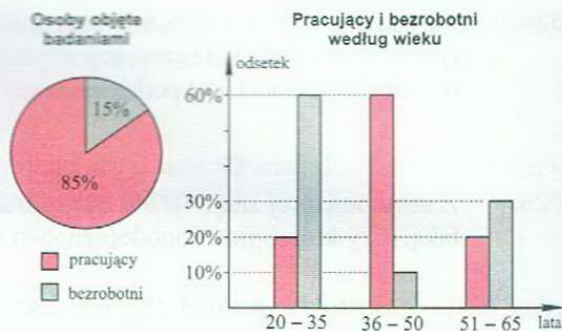
624. Za pomocą cyfr 0, 3, 4, 5, 6, 9 tworzymy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Spośród tych liczb wybieramy losowo trzy różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna spośród wylosowanych liczb jest podzielna przez 45?
625. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 kule czarne, losujemy n kul. Znajdź najmniejszą wartość n taką, przy której prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej kuli czarnej jest większe od 0,5.
- 626.* Zbiór $A = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$ podzielono w sposób losowy na dwa równoliczne podzbiory.
- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w obu zbiorach jest tyle samo liczb podzielnych przez n .
 - Zbadaj, dla jakich n prawdopodobieństwo to jest mniejsze od 0,5.
- 627.* Ze zbioru wszystkich trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ losujemy jeden ciąg.
- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ciągu rosnącego lub malejącego.
 - Dla jakiej liczby naturalnej n prawdopodobieństwo to jest równe 0,125?
- 628.* Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ losujemy dwukrotnie ze zwracaniem po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2)$.

drzewka, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

629. W jednej klatce jest 5 królików, w tym 3 samiczki, w drugiej klatce znajduje się 7 królików, wśród których są 4 samiczki. Z pierwszej klatki wyjęto jednego królika i przeniesiono do drugiej klatki. Po pewnym czasie wyjęto jednego królika z drugiej klatki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
- z drugiej klatki wyjęto samca;
 - po wyjęciu królika z drugiej klatki, w klatce tej pozostało więcej samców niż samiczek.
630. W pewnym technikum są trzy klasy trzecie: IIIA, IIIB, IIIC. Liczbę dziewcząt i chłopców w poszczególnych klasach podano w tabeli. Spośród trzecioklasistów należy wybrać jedną osobę do samorządu szkolnego. Ucznia postanowiono wybrać w następujący sposób: rzucana będzie sześcienna kostka do gry i jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy osobę z klasy IIIA, jeśli wypadnie pięć lub sześć oczek, to losujemy osobę z klasy IIIB, w przeciwnym przypadku losujemy osobę z klasy IIIC. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w ten sposób
- | Klasa | Dziewczęta | Chłopcy |
|-------|------------|---------|
| IIIA | 7 | 18 |
| IIIB | 3 | 27 |
| IIIC | 12 | 28 |
- ucznia klasy IIIC;
 - chłopca;
 - dziewczynę z klasy IIIB.
631. Pewien zawodnik strzelający z pistoletu pneumatycznego przy pierwszym strzale trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0,8. Obserwacje psychologiczne wykazały, że jeżeli zawodnik ten oddaje kolejno trzy strzały, to w przypadku, gdy w poprzednim strzale trafił w tarczę, to prawdopodobieństwo trafienia w następnym strzale wzrasta o 0,05, a w przypadku, gdy nie trafił – maleje o 0,1. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawodnik ten oddając trzy strzały
- trzykrotnie trafi w tarczę;
 - dwukrotnie trafi w tarczę.

632. W pewnej gminie przeprowadzono badania dotyczące wieku osób pracujących i bezrobotnych. Badaniami objęto osoby w wieku od 20 do 65 lat. Wyniki badań przedstawione zostały na wykresach obok. Jedną z objętych badaniami osób trafiła „szóstkę” w Dużym Lotku. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba ta

- jest bezrobotna;
- ma od 36 do 50 lat;
- jest osobą pracującą w wieku od 36 do 65.



633. W fabryce zainstalowano trzy urządzenia wykrywające niezależnie tę samą awarię pewnej maszyny. Prawdopodobieństwo wykrycia awarii przez pierwsze urządzenie wynosi 0,7, przez drugie 0,8, przez trzecie 0,9. Oblicz prawdopodobieństwo wykrycia awarii przez

- dokładnie dwa urządzenia;
- co najmniej jedno urządzenie.

634. Przy produkcji pewnego wyrobu wykonuje się dwie kolejno następujące po sobie operacje technologiczne: cięcie i szlifowanie. Prawdopodobieństwa uszkodzenia obrabianego elementu w każdej z tych operacji są odpowiednio równe $p_C = 0,08$ i $p_S = 0,02$.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że poddany obróbce element zostanie uszkodzony.
- Ile powinno wynosić prawdopodobieństwo p_C , aby prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu w trakcie całej obróbki było mniejsze od 0,069?

635. W dwóch identycznych portfelach znajdują się banknoty. W pierwszym portfelu jest 6 banknotów 100-złotowych i 3 banknoty 50-złotowe, a w drugim są 3 banknoty o nominale 100 zł i 7 banknotów o nominale 50 zł. Z losowo wybranego portfela wyjmujemy z zamkniętymi oczami dwa banknoty. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo wyjęcia z portfela stu pięćdziesięciu złotych jest większe od 0,5.

636. Po upływie 12 godzin bakteria może zginąć, przeżyć lub podzielić się na dwie bakterie. Prawdopodobieństwa wymienionych zdarzeń są odpowiednio równe $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{4}$. Na początku była jedna bakteria. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po upływie doby

- będzie jedna bakteria;
- będą dwie bakterie.

637. W pierwszej urnie są 4 białe i 3 czarne kule, a w drugiej 5 białych i 3 czarne. Z drugiej urny przekładamy dwie kule do pierwszej urny, a następnie z urny pierwszej losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

638. W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli reszka wypadnie trzy razy, losujemy bez zwracania trzy kule, jeżeli wypadnie dwa razy – dwie kule, a w pozostałych przypadkach jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednej kuli białej?

639. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów $A = \{1, 2, \dots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \dots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy liczbę x . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.

640. W urnie U_1 jest 8 kul białych i 10 czarnych, w urnie U_2 jest 12 kul białych i 4 kule czarne, a w urnie U_3 są 4 kule białe i 6 kul czarnych. Z każdej urny losujemy po jednej kuli i wrzucamy do pustej urny U_4 . Z urny U_4 losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule z urny U_4 są białe.
641. W każdym z dziesięciu jednakowych pudełek $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ znajduje się 10 kul, przy czym w pudełku o numerze n ($1 \leq n \leq 10$) znajduje się n kul białych i $10 - n$ czarnych. Sięgamy losowo do jednego pudełka i losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.
642. W pierwszej urnie są tylko kule czarne i białe, w drugiej urnie jest 6 kul niebieskich i 4 zielone, a w trzeciej urnie są 2 kule niebieskie i 8 zielonych. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny. Jeżeli wylosowana kula jest czarna, to losujemy jedną kulę z drugiej urny, a jeżeli białą, to losujemy jedną kulę z trzeciej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli niebieskiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z pierwszej urny kuli czarnej.

prawdopodobieństwo warunkowe

643. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dwa razy nieparzystej liczby oczek, jeżeli wiadomo, że pięć oczek nie wypadło ani razu.
644. Z grupy, w której są 4 kobiety i 6 mężczyzn, losujemy dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowano dwie kobiety, jeżeli wiadomo, że wśród wylosowanych osób jest co najmniej jedna kobieta.
645. Z urny zawierającej 4 kule białe i 5 czarnych usunięto losowo jedną kulę, a następnie wylosowano dwie kule. Zbadaj, co jest bardziej prawdopodobne
 a) wylosowanie dwóch kul białych pod warunkiem, że usunęliśmy kulę czarną,
 b) wylosowanie kul różnokolorowych pod warunkiem, że usunęliśmy kulę białą.
646. Rzucając dziesięć razy kostką do gry otrzymaliśmy trzy szóstki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymaliśmy szóstkę?
- * * * * *
647. Z dwóch zewnętrznie identycznych kostek do gry jedna jest symetryczna, a na drugiej prawdopodobieństwo wypadnięcia szóstki wynosi 0,2. Rzucono dwukrotnie losowo wybraną kostką i wypadły dwie szóstki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucono kostką niesymetryczną?
648. Stwierdzono, że w pewnej populacji ludzi, której 55% stanowiły kobiety, leworęczność występowała u 8% mężczyzn oraz u 5% kobiet. Przypadkowo wybrana osoba z tej populacji okazała się leworęczna. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to mężczyzna?
649. Pewna groźna choroba występuje u 0,5% krów. Opracowana metoda wykrycia tej choroby daje wynik pozytywny u 95% krów chorych, ale także u 8% krów zdrowych.
 a) W przypadku jakiego odsetka krów opracowana metoda daje wynik pozytywny? Wynik zaokrąglij do części dziesiątych procenta.
 b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana krowa jest chora, jeżeli zastosowana metoda wykrycia choroby dała wynik pozytywny? Wynik podaj w postaci ułamka dziesiętnego po zaokrągleniu do części tysięcznych.

