**PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZADANIA INFO ZADANIA TRUDNE**

1. Niech będzie liczbą naturalną. Ze zbioru liczb losujemy dwie liczby (mogą być równe). Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie większa od .
2. W zbiorze , gdzie jest liczbą naturalną, zmieniono znaki na przeciwne trzem losowo wybranym liczbom. Wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że suma wszystkich liczb w zbiorze nie uległa zmianie wynosi . Wyznacz .
3. W grze liczbowej Express Lotek losowanych jest pięć spośród liczb . Gracz zawarł jeden zakład na najbliższe losowanie (czyli wytypował w kolekturze Totalizatora Sportowego pięć liczb spośród czterdziestu dwóch). Oblicz ile razy prawdopodobieństwo traﬁenia ’trójki’ (czyli wytypowania dokładnie 3 liczb spośród tych, które będą wylosowane) jest większe niż prawdopodobieństwo traﬁenia piątki; czwórki.
4. Wielokąt wypukły ma wierzchołków, , , spośród których losujemy jednocześnie dwa. Wyznacz , wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków wyznaczających przekątną tego wielokąta jest mniejsze od .
5. Ze zbioru losujemy bez zwracania liczby i . Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: jeśli: A – suma wylosowanych liczb jest nieparzysta; B – wylosowane liczby spełniają warunek: .
6. Jedenastu panów, wśród których są , i , ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że pan będzie stał obok pana i pan nie będzie stał obok pana .
7. Rozmieszczamy różnych listów w rozróżnialnych, ponumerowanych skrytkach. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego rozmieszczenia, że:
– co najmniej jedna skrytka jest pusta?
– co najmniej dwie skrytki są puste?
8. Wiadomo, że zdarzenia i są niezależne oraz , . Oblicz .
9. Rozmieszczamy różnych listów w rozróżnialnych, ponumerowanych skrytkach. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego rozmieszczenia, że dwa ustalone listy znalazły się w różnych skrytkach?
10. Uzasadnij, że  jeżeli i .
11. Pogotowie ratunkowe dysponuje pewną liczbą karetek. W ciągu kilku miesięcy pracy stwierdzono, że w ciągu doby dana karetka będzie na miejscu w bazie z prawdopodobieństwem 0,4 jednakowym dla każdej karetki. Oblicz, ile karetek musi mieć do dyspozycji pogotowie, aby w razie wypadku, prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna karetka jest na miejscu w bazie, było większe od 0,9.
12. Danych jest 5 pudełek ponumerowanych liczbami od 1 do 5. W każdym pudełku znajduje się 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20. Z każdego pudełka wybieramy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że każda z wylosowanych liczb jest mniejsza od wszystkich liczb wylosowanych z pudełek o większych numerach. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
13. Do 12 ponumerowanych szuﬂad wkładamy losowo 13 pojedynczych skarpetek, przy czym dokładnie dwie z nich tworzą parę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania konﬁguracji, w której żadna szuﬂada nie jest pusta oraz skarpetki tworzące parę znajdują się w różnych szuﬂadach.
14. Liczby kul białych, niebieskich i czerwonych tworzą - w podanej kolejności - ciąg arytmetyczny o różnicy 2. Spośród tych kul losujemy jednocześnie trzy. Prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul, z których każda jest innego koloru wynosi . Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny trzech kul, wśród których dwie są tego samego koloru, jeśli wiadomo, że liczba wszystkich kul w urnie jest nieparzysta.
15. Oblicz prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 4.
16. Z talii 52 kart wylosowano dwie karty i, nie oglądając ich, włożono do drugiej talii. W ten sposób powstała talia złożona z 54 kart. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania asa z tak utworzonej talii kart.
17. Przy okrągłym stole zasiada losowo 8 osób, a wśród nich rodzice z dwojgiem dzieci. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzieci usiądą bezpośrednio między rodzicami?
18. Do woreczka wrzucono 3 monety 5 złotowe, 4 monety 2 złotowe, 2 monety 1 złotowe oraz 8 monet 50 groszowych. Karol losowo wyjmuje z woreczka 10 monet. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosuje w ten sposób co najmniej 10 zł? Wynik podaj z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.
19. Na jednej kostce sześciennej znajdują się liczby: 2,3,3,6,6,6, a na drugiej: 1,1,4,6,7,7. Gra polega na rzucie wybraną kostką. Wygrywa ten, kto wyrzuci większą liczbę na swojej kostce. Masz prawo wyboru kostki. Którą kostkę należy wybrać, aby mieć większe szanse wygranej?
20. Spośród liczb: -9, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 8 losujemy dwie różne liczby i , a następnie zapisujemy ich iloczyn . Oblicz i porównaj prawdopodobieństwa zdarzeń i , jeśli: oznacza zdarzenie, że iloczyn jest liczbą nieujemną; – zdarzenie, że iloczyn jest liczbą niedodatnią.
21. Ze zbioru losujemy ze zwracaniem dwie liczby: i . Rozważmy zdarzenia :  jest liczbą parzystą; : . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia .
	* zdarzeniach losowych i wiadomo, że i . Oblicz .
22. Z trzech urn, w których jest po 2 kule białe i 3 czarne, wyjmujemy po jednej kuli i wkładamy do czwartej urny, w której była jedna kula biała. Losujemy teraz jedną kulę z czwartej urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że z czwartej urny wyjmiemy białą kulę.
23. Ze zbioru wszystkich trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru losujemy jeden ciąg.
Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ciągu rosnącego lub malejącego.
Dla jakiej liczby naturalnej prawdopodobieństwo to jest równe 0,125?
24. Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
25. Losujemy jedną liczbę spośród liczb: 1, 2, 3,…, 1000. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 lub przez 9.
26. Zestaw tematów egzaminacyjnych składa się z 15 tematów z algebry, 15 z geometrii i tematów z prawdopodobieństwa. Z zestawu usunięto jeden temat, a następnie wylosowano z pozostałych jeden temat. Oblicz , jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania tematu z prawdopodobieństwa wynosi .
27. Rzucamy razy monetą symetryczną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie nieparzystą liczbę razy?
28. Mamy pałek o jednakowej długości. Każdą z nich łamiemy na 2 części: długą i krótką. części połączono losowo w par, z których utworzono nowe pałki. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że:
części zostaną połączone tak, jak przed złamaniem;
wszystkie długie części będą połączone z krótkimi.
29. Ze zbioru liczb losujemy bez zwracania 4 liczby. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 4 otrzymanych liczb jest dokładnie jedna para liczb o sumie równej 14.
30. W urnie jest 2 razy więcej kul czarnych niż białych i 3 razy więcej kul zielonych niż białych. Przy losowaniu 3 kul z tej urny prawdopodobieństwo wylosowania 3 kul różnych kolorów wynosi . Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z urny 3 kul, wśród których dokładnie 2 będą tego samego koloru.
31. W urnie są 3 kule białe, 4 czarne i 5 zielonych. Losujemy ze zwracaniem 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul będą kule biała i czarna.
32. Pięć ponumerowanych kul rozmieszczamy losowo w 5 pudełkach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie dwa pudełka będą puste?
33. W urnie jest 15 kartek, ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Wyciągamy 5 kartek bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że numer trzeciej kartki jest liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie numer piątej kartki jest liczbą podzielną przez 5?
34. Z pudełka, w którym jest 15 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 15, losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest dokładnie jedna para kul z sumą numerów równą 16.
35. Rozważmy zbiór wszystkich czteroelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków pewnego prostopadłościanu. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takiego podzbioru, którego elementy są wierzchołkami prostokąta.
36. Na stacji czekało na pociąg 10 pasażerów. Przyjechał pociąg składający się z 7 wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy pasażerowie wsiedli tylko do dwóch wagonów, jeśli pasażerowie losowo wybierali wagony?
37. Mamy dwie talie kart po 24 karty. Z pierwszej talii losujemy jedną kartę i nie oglądając jej wkładamy do drugiej talii. Następnie z drugiej talii losujemy jedną kartę.
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania króla, jeżeli wiemy, że z pierwszej talii przełożono do drugiej treﬂa?
Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest kierem.
Wylosowana karta okazała się kierem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z pierwszej talii także został wylosowany kier?
38. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków (u osoby chorej daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora?
39. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej dwie „dwójki”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „piątkę”.
40. Wzór funkcji tworzymy w następujący sposób. Ze zbioru  losujemy kolejno 3 liczby (bez zwracania); pierwsza z wylosowanych liczb jest równa współczynnikowi , druga – współczynnikowi , trzecia – współczynnikowi . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
– funkcja jest funkcją malejącą w każdym ze zbiorów oraz ;
– miejscem zerowym funkcji jest 0.
– funkcja jest funkcją malejącą w każdym ze zbiorów oraz ;
41. Ze zbioru losujemy kolejno 3 liczby (mogą się powtarzać). Wyznacz prawdopodobieństwo wyboru takiej trójki liczb, dla której .
42. Ze zbioru losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez: 6 4 lub 6 4 lub 6 lub 10
43. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.
44. Grupę 12 uczniów, wśród których jest 6 dziewczynek i 6 chłopców podzielono na 3 równoliczne grupy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w każdej z utworzonych grup będzie tyle samo dziewcząt.
45. W urnie jest 7 kul czarnych i 3 białe. Losujemy z tej urny pięć razy po jednej kuli i po każdym losowaniu wkładamy wylosowaną kulę z powrotem do urny oraz dokładamy do urny dwie kule w kolorze wylosowanej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwa razy wylosujemy kulę białą.
46. W urnie znajdują się kule czarne, białe i niebieskie, przy czym są co najmniej dwie kule każdego koloru i w sumie jest 15 kul. Losujemy z urny trzy kule. Rozważmy następujące zdarzenia
– wylosowano trzy kule tego samego koloru;
– żadne dwie z wylosowanych kul nie są tego samego koloru.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia jest równe .
47. Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
– na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek,
– suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.
48. Niech i . Oblicz prawdopodobieństwo, że zbiór wartości losowo utworzonej funkcji jest dwuelementowy.
49. Ze zbioru , gdzie losujemy dwie liczby (mogą się powtarzać). Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wartości bezwzględnych wylosowanych liczb jest nie większa niż .
50. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie kostką, 3 kolejne wyniki utworzą ciąg geometryczny.
51. 20 drużyn rozdziela się losowo na 2 grupy po 10 drużyn. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 2 ustalone drużyny znajdą się w różnych grupach.
52. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 czarne losujemy kul. Znajdź najmniejszą wartość , taką przy której prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej kuli czarnej jest większe od .
53. Mamy 10 książek, wśród których są książki i . Ustawiamy je losowo na pustej półce. Oblicz prawdopodobieństwo, że książki i będą stały obok siebie w dowolnym porządku, natomiast nie będzie sąsiadować z żadną z nich.
54. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym , dla każdej liczby naturalnej . Ze zbioru liczb losujemy kolejno, trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – wylosujemy trzy liczby całkowite, które będą kolejnymi wyrazami ciągu malejącego.
55. Liczbę naturalną nazywamy palindromiczną, jeżeli nie zmienia się po zapisaniu jej cyfr w odwrotnej kolejności. Liczbami palindromicznymi są np. liczby 5, 33, 1123211. Liczby 10, 3230 nie są palindromiczne.
Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba siedmiocyfrowa jest liczbą palindromiczną.
Oblicz prawdopodobieństwo, że suma dwóch losowo wybranych liczb dwucyfrowych jest nieparzystą dwucyfrową liczbą palindromiczną.
56. Urzędniczka na 100 klientów kontroluje 15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z 12 jej klientów 3 zostanie skontrolowanych?
57. Listonosz losowo rozmieszcza 7 listów w 5 różnych skrzynkach na listy. Oblicz prawdopodobieństwo, że w każdej skrzynce znajdzie się przynajmniej jeden list.
58. Oblicz prawdopodobieństwo, że w czterech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 5.
59. Sześcian, którego ściany zostały pomalowane czerwoną farbą, dzielimy 6 płaszczyznami równoległymi do jego ścian na 27 identycznych sześcianików. Losujemy 2 spośród nich.
Oblicz prawdopodobieństwo, że łączna liczba czerwonych ścian wylosowanych sześcianików wynosi 3.
Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane sześcianiki mają wspólną ścianę.
60. W urnie znajduje się losów, przy czym z nich to losy wygrywające (). Wybieramy losowo losów z urny () i niech oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie spośród tych losów to losy wygrywające ( oraz ). Uzasadnij, że 
61. W urnie jest 7 kul czarnych i 5 białych. Sześć z nich przekładamy do drugiej urny, początkowo pustej, i z niej losujemy 2 kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga z nich będzie biała.
62. Ile razy trzeba rzucać trzema monetami, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz jednocześnie trzech orłów było większe od 0,8?
63. Z szuﬂady, w której znajduje się 10 różnych par rękawiczek wybieramy losowo cztery rękawiczki. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary,
B – wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie jedna para.
64. Liczby ze zbioru ustawiamy w przypadkowej kolejności (bez powtórzeń) tworząc liczbę ośmiocyfrową. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby, w której jednocześnie:
– cyfra 1 stoi na lewo od cyfry 2, – cyfra 3 stoi na lewo od cyfry 4,
– cyfra 5 stoi na lewo od cyfry 6, – cyfra 7 stoi na lewo od cyfry 8?
Uwaga, w powyższych warunkach nie zakładamy, że odpowiednie cyfry stoją obok siebie, np. liczba 13275846 spełnia wszystkie powyższe warunki.
65. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z nich będzie starsza od 10, jeśli wiadomo, że żadna z nich nie jest karem.
66. Ze zbioru losujemy kolejno bez zwracania 2 liczby i . Dla jakich wartości prawdopodobieństwo tego, że jest większe od ?
67. Ze zbioru liczb losujemy jednocześnie siedem liczb i ustawiamy je w kolejności rosnącej . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia .
68. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których żadne dwie spośród cyfr: 1,3,5,7,9 nie sąsiadują ze sobą?
69. Ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4?
70. Cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo w liczbę siedmiocyfrową o różnych cyfrach. Ile jest możliwych ustawień, w których otrzymamy liczbę siedmiocyfrową
podzielną przez 4
parzystą.
71. W pewnym budynku biurowym przydzielono pracownikom pięciocyfrowe kody bezpieczeństwa, przy czym każdy kod musiał spełniać następujące dwa warunki:
(1) kod musi zawierać co najmniej 3 różne cyfry
(2) kod musi zawierać co najmniej jedną cyfrę parzystą i co najmniej jedną cyfrę nieparzystą.
Ile jest kodów spełniających powyższe warunki?
72. Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których suma każdych trzech kolejnych cyfr jest równa 10?
73. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, których zapis dziesiętny składa się z trzech różnych cyfr?
74. W urnie znajduje się 27 kul w dwóch kolorach. Wiadomo, że wśród każdych 13 kul wybranych z urny jest co najmniej jedna czarna, a wśród każdych 16 kul jest co najmniej jedna biała. Ile białych kul znajduje się w urnie?
75. Wyznacz liczbę , wiedząc że .
76. Ile jest takich czwórek liczb całkowitych i dodatnich , które spełniają równanie .
77. Oblicz, ile jest dziewięciocyfrowych liczb naturalnych parzystych, w zapisie których każda z cyfr: 5 i 3 występuje dokładnie 3 razy.
78. Ze zbioru liczb wybieramy jednocześnie dwie liczby (nie uwzględniamy kolejności). Na ile sposobów możemy to zrobić, tak aby otrzymać dwie liczby takie, że:
ich różnica będzie liczbą parzystą,
suma ich kwadratów będzie liczbą podzielną przez cztery?
79. Z liter 26 literowego alfabetu łacińskiego tworzymy czteroliterowe kody, przy czym każdy kod składa się z czterech różnych liter, które zostały wybrane z pewnych 6 kolejnych liter alfabetu. Ile jest takich kodów?
80. Ile jest permutacji zbioru takich, w których mała litera stoi przed dużą (niekoniecznie obok) np. ?
81. Okrąg podzielono dwudziestoma punktami na dwadzieścia łuków tej samej długości. Ile można zbudować łamanych zamkniętych z wierzchołkami w tych punktach i z odcinkami równej długości? (Odcinki mogą się przecinać, ale nie mogą się pokrywać.)
82. Proste są parami różne i równoległe. Na prostych tych wybrano zbiór składający się z punktów (), przy czym na każdej z prostych wybrano punktów. Wiadomo ponadto, że jeżeli trzy punkty zbioru leżą na jednej prostej, to prostą tą jest lub . Oblicz ile jest trójkątów o wierzchołkach należących do zbioru .
83. Na ile sposobów można rozmieścić sześć ponumerowanych kul w pięciu ponumerowanych szuﬂadach tak, aby w każdej szuﬂadzie była przynajmniej jedna kula.
84. Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 0, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.