

TEORIA

Działania arytmetyczne

Dodawanie $a + b = s$, gdzie a, b – składniki, s – suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Jeżeli $a < 0$ i $b < 0$, to $a + b < 0$.

Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to $a + b > 0$.

Odejmowanie $a - b = r$, gdzie a – odjemna, b – odjemnik, r – różnica

$$a - b = r \Leftrightarrow r + b = a$$

$$a - b = a + (-b)$$

$$0 - a = -a$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Mnożenie $a \cdot b = i$, gdzie a, b – czynniki, i – iloczyn

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ lub } b = 0$$

$$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ i } b > 0 \text{ lub } a > 0 \text{ i } b < 0$$

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ i } b < 0 \text{ lub } a > 0 \text{ i } b > 0$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$ab = ba$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

$$-(-a) = a$$

$$(-a)b = -(ab) = a(-b)$$

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

Dzielenie $a : b = q$, $b \neq 0$, gdzie a – dzielna, b – dzielnik, q – iloraz

Jeżeli $b \neq 0$, to $a : b = q \Leftrightarrow b \cdot q = a$.

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Jeżeli $b \neq 0$ i $a = 0$, to $\frac{a}{b} = 0$.

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Dzielenie przez zero jest niewykonalne.

Kolejność działań arytmetycznych

Przy obliczaniu wartości wyrażeń niezawierających nawiasów wykonujemy najpierw mnożenia i dzielenia w kolejności ich występowania, a następnie dodawania i odejmowania w kolejności ich występowania.

Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych.

Zbiór liczb naturalnych $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Jeżeli dla liczb naturalnych dodatnich w, d, n zachodzi równość $w = d \cdot n$, to liczbę d nazywamy **dzielnikiem** liczby w , natomiast w jest **wielokrotnością** liczby d . Liczby d i n nazywamy też **czynnikami** liczby w .

Mówimy też, że liczba w jest podzielna przez d .

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę naturalną większą od jednośc, która ma dokładnie dwa dzielniki (jeden i siebie samą).

Liczbą złożoną nazywamy liczbę naturalną większą od jednośc niebędącą liczbą pierwszą.

Liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Każda liczba naturalna większa od 2 albo jest liczbą pierwszą, albo można ją przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki iloczyn nazywamy **rozkładem na czynniki pierwsze**. Ten rozkład jest jednoznaczny.

Jeżeli a, b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich **największym wspólnym dzielnikiem** ($NWD(a, b)$) nazywamy największą z liczb naturalnych, przez którą dzieli się bez reszty każda z liczb a, b .

Liczyby naturalne a, b nazywamy **względnie pierwszymi**, jeśli $NWD(a, b) = 1$.

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWD(224, 1890) = 2 \cdot 7 = 14$	Rozkładamy liczby a, b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy czynniki wspólne i mnożymy je. Otrzymany iloczyn to $NWD(a, b)$.

Jeżeli a, b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich **najmniejszą wspólną wielokrotnością** ($NWW(a, b)$) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, która dzieli się bez reszty przez a i przez b .

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWW(224, 1890) =$ $= 2^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^3 = 30\,240$	Rozkładamy liczby a, b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy wszystkie czynniki jednej liczby i dopisujemy do nich te czynniki z rozkładu drugiej liczby, których nie było w rozkładzie pierwszej. Iloczyn tak wybranych czynników to $NWW(a, b)$.

Cechy podzielności przez niektóre liczby

Dzielnik	Przykład	Cechy podzielności
2	$76\,548 = 2 \cdot 38\,274$	Ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.
3	$571\,215 = 3 \cdot 190\,405$ $5 + 7 + 1 + 2 + 1 + 5 = 21 = 3 \cdot 7$	Suma cyfr dzieli się przez 3.
4	$1\,547\,584\,964 = 4 \cdot 386\,896\,241$ $64 = 4 \cdot 16$	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 4.
5	$67\,334\,215 = 5 \cdot 13\,466\,843$	Ostatnią cyfrą jest 0 albo 5.

7	$164\ 207\ 393 = 7 \cdot 23\ 458\ 199$ $(393 + 164) - 207 = 350 = 7 \cdot 50$	Zaczynając od prawej strony, łączymy kolejno cyfry w grupy trzycyfrowe.
13	$7\ 636\ 878\ 405 = 13 \cdot 587\ 452\ 185$ $(405 + 636) - (878 + 7) =$ $= 1041 - 885 = 156 = 13 \cdot 12$	Od sumy liczb utworzonych z grup stojących na miejscach nieparzystych odejmujemy sumę liczb z grup stojących na miejscach parzystych. Jeżeli różnica dzieli się przez 7 (13), to badana liczba też dzieli się przez 7 (13).
8	$4\ 502\ 744 = 8 \cdot 562\ 843$ $744 = 8 \cdot 93$	Liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr dzieli się przez 8.
9	$51\ 118\ 884 = 9 \cdot 5\ 679\ 876$ $5 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8 + 8 + 4 = 36$	Suma cyfr dzieli się przez 9.
10	$2\ 788\ 890 = 10 \cdot 278\ 889$	Ostatnia cyfra jest zerem.
11	$5\ 773\ 581 = 11 \cdot 524\ 871$ $(8 + 3 + 7) - (1 + 5 + 7 + 5) =$ $= 18 - 18 = 0 = 11 \cdot 0$	Różnica między sumą cyfr stojących na miejscach parzystych i sumą cyfr stojących na miejscach nieparzystych jest liczbą podzieloną przez 11.
25	$76\ 508\ 475 = 25 \cdot 3\ 060\ 339$ $75 = 25 \cdot 3$	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 25.

Zbiór liczb całkowitych $C = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}$

Dla dowolnych liczb całkowitych w i d ($d > 0$) istnieją takie liczby całkowite n i r , że $w = nd + r$, $r < d$.

Liczbę r nazywamy **resztą** z dzielenia liczby w przez d .

Liczby całkowite podzielne przez dwa nazywamy liczbami **parzystymi**, zaś niepodzielne przez dwa nazywamy liczbami **nieparzystymi**.

Zbiór liczb wymiernych W

Liczbami **wymiernymi** nazywamy liczby, które można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne, okresowe lub skończone.

Działania na ułamkach

Niech a i b będą dowolnymi liczbami całkowitymi i $b \neq 0$, wtedy $a : b = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, k \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$$

Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{N}$

Liczbami niewymiernymi nazywamy liczby, których nie można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.

Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie dziesiętne, które jest nieskończone i nieokresowe.

Przykłady liczb niewymiernych: $\sqrt{2}$; π ; e ; 0,101001000100001...

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

Liczyby wymierne i liczby niewymierne razem tworzą zbiór **liczb rzeczywistych**.

Zbiór Z zawarty w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m nie większa od dowolnej liczby zbioru Z . O liczbie m mówimy wówczas, że ogranicza zbiór Z z dołu. Największą z liczb ograniczających zbiór Z z dołu nazywamy *kresem dolnym* tego zbioru.

Zbiór Z zawarty w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m nie mniejsza od dowolnej liczby zbioru Z . O liczbie m mówimy wówczas, że ogranicza zbiór Z z góry. Najmniejszą z liczb ograniczających zbiór Z z góry nazywamy *kresem górnym* tego zbioru.

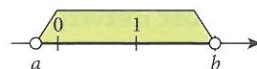
Każdej liczbie rzeczywistej jest przyporządkowany dokładnie jeden punkt na osi liczbowej.

Każdemu punktowi na osi liczbowej jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista.

Przedziały liczbowe

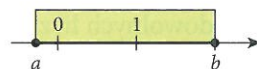
Przedział otwarty $(a; b)$

$$a < x < b$$



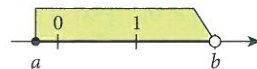
Przedział domknięty $\langle a; b \rangle$

$$a \leq x \leq b$$



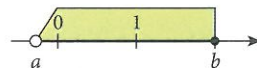
Przedział lewostronnie domknięty (prawostronnie otwarty) $\langle a; b \rangle$

$$a \leq x < b$$



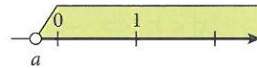
Przedział prawostronnie domknięty (lewostronnie otwarty) $(a; b]$

$$a < x \leq b$$



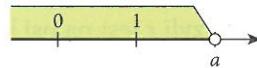
Przedział lewostronnie otwarty nieograniczony $(a; +\infty)$

$$x > a$$



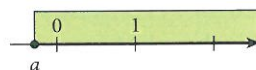
Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony $(-\infty; a)$

$$x < a$$



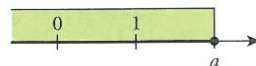
Przedział lewostronnie domknięty
nieograniczony $\langle a; +\infty \rangle$

$$x \geq a$$



Przedział prawostronnie domknięty
nieograniczony $(-\infty; a]$

$$x \leq a$$



Własności równości w zbiorze R

$$a = a$$

a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

Jeżeli $a = b$, to $b = a$.

Jeżeli $a = b$ i $b = c$, to $a = c$.

Jeżeli $a = b$, to $a + c = b + c$.

Jeżeli $a = b$ i $c = d$, to $a + c = b + d$.

Jeżeli $c \neq 0$, to $\left(a = b \Leftrightarrow ac = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \right)$.

Własności nierówności w zbiorze R

Jeżeli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

Jeżeli $a < b$, to $a + c < b + c$.

Jeżeli $a < b$, to $a - c < b - c$.

Jeżeli $c > 0$, to $\left(a < b \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \right)$.

Jeżeli $c < 0$, to $\left(a < b \Leftrightarrow ac > bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \right)$.

Jeżeli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem: $|x| = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -x, & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$.
Dla dowolnych liczb x, y :

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad |x - y| = |y - x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \quad \text{Dla } y \neq 0 \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Dla $r \geq 0$ $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ lub $x = -r$,

czyli liczba r jest na osi liczbowej odległością punktu x od punktu 0.

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r, \quad |x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ lub } x > r$$

Dla dowolnej liczby a i dla $r \geq 0$ $|x - a| = r \Leftrightarrow x = a - r$ lub $x = a + r$,

czyli r jest na osi liczbowej odległością punktu x od punktu a .

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r, \quad |x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$

Przy wykonywaniu działań posługujemy się często wartościami przybliżonymi. Wartość bezwzględną różnicy między wartością dokładną (r) a przybliżoną (p) nazywamy **błędem bezwzględnym** ($b_p = |r - p|$). Stosunek błędu bezwzględnego do wartości

$|r|$ nazywamy **błędem względnym** $b_w = \frac{|r - p|}{|r|}$. Wyrażamy go często w procentach (błąd procentowy).

*bł. z miedziem
z niechmiarem*

Działania na potęgach i pierwiastkach

Potęga o wykładniku naturalnym $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, gdzie a – podstawa, n – wykładnik
 $a^0 = 1, a^1 = a$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym, gdy $n \in \mathbb{N}$ i $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Pierwiastek arytmetyczny stopnia $n \geq 1$ z liczby $a \geq 0$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ i $b \geq 0$

W szczególności pierwiastek kwadratowy $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow (b^2 = a$ i $b \geq 0)$

Pierwiastek nieparzystego stopnia n z liczby ujemnej a

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ (w tym wypadku liczba b jest też ujemna)

Pierwiastek parzystego stopnia z liczby ujemnej nie istnieje.

Potęga o wykładniku dodatnim postaci $\frac{1}{n}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a \geq 0$

Potęga o wykładniku wymiernym $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a > 0,$
 $n, m \in \mathbb{N}$ i $n > 0$

Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, m, n \in \mathbb{N}, a > 0$

Działania na potęgach o wykładniku wymiernym

Niech m i n będą dowolnymi liczbami wymiernymi, $a > 0$ i $b > 0$.

Iloczyn potęg o tej samej podstawie

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Iloraz potęg o tej samej podstawie

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Potęga potęgi

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Potęga iloczynu

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Potęga ilorazu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Działania na pierwiastkach arytmetycznych

Niech n, m będą liczbami naturalnymi większymi od 1.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

Pierwiastki kwadratowe

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ dla } a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla dowolnego } a$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{ dla } a > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \text{ dla } a \neq b$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ dla } a^2 - b^2 = c^2$$

Logarytmy

Logarytmem dodatniej liczby x przy podstawie a dodatniej i różnej od jednościny nazywamy wykładnik y potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną x .

x – liczba logarytmowana

a – podstawa logarytmu

y – logarytm liczby x przy podstawie a

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \text{ gdzie } x > 0, a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy **logarytmem dziesiętnym**.

$$\log x = \log_{10} x$$

Logarytm naturalny to logarytm o podstawie e , gdzie

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2,71828...$$

$$\ln x = \log_e x$$

Działania na logarytmach

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$$

$$a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\text{Logarytm iloczynu } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{Logarytm ilorazu } \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{Logarytm potęgi } \log_a(x^r) = r \log_a x, \quad r \in \mathbb{R}$$

Zmiana podstawy logarytmu

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Procenty

Procent to setna część pewnej wielkości.

$$p\%W = \frac{p}{100}W$$

Procent prosty to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego, polegający na tym, że roczny dochód od wkładu w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu na następny rok i nie bierze

udziału w oprocentowaniu w następnym roku. $K_n = K \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$

Procent składany to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K , polegający na tym, że odsetki od wkładu są doliczane do wkładu (kapitalizowane) i biorą wraz

z nim udział w oprocentowaniu w następnym roku. $K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Gdy odsetki są kapitalizowane k razy w ciągu roku, to wzór przyjmie postać:

$$K_{k \cdot n} = K \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{p}{100}\right)^{kn}$$

p – procent

W – podstawa

K – kapitał początkowy,

$p\%$ – roczna stopa procentowa,

K_n – wartość kapitału K po upływie n lat

$p\%$ – roczna stopa procentowa,

k – liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku

TEORIA

Wyrażenia algebraiczne

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą lub iloczyn liczb zapisanych cyframi lub literami, np.: 7, -3, 5a, $7x^2y^3$, x^6 .

Sumą algebraiczną nazywamy jednomiany połączone znakiem „+” lub „-”.

Jednomiany występujące w sumie algebraicznej nazywają się **wyrazami** tej sumy.

Wyrazy podobne to takie wyrazy, które różnią się **tylko** współczynnikiem liczbowym.

Zredukować wyrazy podobne, to znaczy wykonać na nich wskazane działania.

Jeśli do danego wyrażenia algebraicznego w miejsce liter wstawimy określone liczby i wykonamy wskazane działania, to otrzymamy **wartość** liczbową **wyrażenia algebraicznego**.

Wzory skróconego mnożenia to reguły pozwalające uprościć działania na liczbach, sumach algebraicznych i elementach, dla których obowiązują prawa przemienności, łączności i prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Oto wybrane wzory skróconego mnożenia:

$$\text{różnica kwadratów} \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$\text{kwadrat sumy} \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\text{kwadrat różnicy} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\text{różnica sześcianów} \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\text{suma sześcianów} \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{sześcian sumy} \quad (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\text{sześcian różnicy} \quad (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Wielomiany

Wyrażenie postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a_n \neq 0$, nazywamy **wielomianem stopnia n** .

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.

Wyrażenie $W(x) = a_0, a_0 \neq 0$, jest **wielomianem stopnia zerowego**.

Wielomian $W(x) = 0$ dla wszystkich x nazywamy **zerowym**, nie określamy dla niego stopnia.

Równość dwóch wielomianów

Wielomiany są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tej samej potęgze zmiennej lub są to wielomiany zerowe.

Działania na wielomianach

Aby dodać dwa wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, dodajemy ich wyrazy podobne, a następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, do wielomianu $W(x)$ dodajemy wielomian, którego współczynniki są liczbami przeciwnymi do współczynników wielomianu $P(x)$, a następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Aby pomnożyć wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, mnożymy każdy wyraz wielomianu $W(x)$ przez każdy wyraz wielomianu $P(x)$, wykonujemy redukcję wyrazów podobnych i porządkujemy otrzymany wielomian. Stopień iloczynu niezerowych wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Podzielność wielomianu

Wielomian $W(x)$ jest **podzielny** przez niezerowy wielomian $D(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = D(x) \cdot Q(x)$.

Wielomian $Q(x)$ nazywamy wtedy **ilorazem** powstałym z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $D(x)$. Wielomian $D(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$ lub jego **czynnikiem**.

Dzielenie z resztą

Dla dowolnych wielomianów $W(x)$ i $D(x)$, gdzie $D(x) \neq 0$, istnieje dokładnie jeden wielomian $Q(x)$ i dokładnie jeden wielomian $R(x)$ takie, że $W(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ oraz stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $D(x)$ lub $R(x) = 0$. Wielomian $R(x)$ nazywamy **resztą** z dzielenia $W(x)$ przez $D(x)$.

Można to również zapisać: $\frac{W(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - r$ jest równa $W(r)$.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $ax - b$ jest równa wartości tego

wielomianu dla $x = \frac{b}{a}$, czyli $W\left(\frac{b}{a}\right)$.

Algorytm dzielenia

Przykład	Sposób postępowania
$ \begin{array}{r} 2x^2 \quad -x \quad -5 \\ (2x^3 - 5x^2 - 3x + 10) : (x - 2) \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \\ = -x^2 - 3x + 10 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ = -5x + 10 \\ \underline{5x - 10} \\ = 0 \end{array} $	Pierwszy wyraz dzielnej podziel przez pierwszy wyraz dzielnika. Otrzymany jednomian pomnóż przez każdy wyraz dzielnika, a otrzymany iloczyn odejmij od dzielnej. Pierwszy wyraz otrzymanej różnicy (pierwszej reszty) podziel przez pierwszy wyraz dzielnika. Kolejny otrzymany jednomian pomnóż przez każdy wyraz dzielnika i odejmij od reszty z poprzedniego dzielenia. Algorytm kontynuuj aż do uzyskania reszty równej zero lub takiej, której stopień będzie mniejszy od stopnia dzielnika.

Schemat Hornera

Schemat Hornera jest algorytmem znajdowania ilorazu $Q(x)$ i reszty R z dzielenia wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ przez dwumian $(x - r)$.

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - r) + R.$$

Niech $W(x)$ będzie wielomianem piątego stopnia.

$W(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Iloraz $Q(x) = b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ jest wielomianem czwartego stopnia.

W pierwszym wierszu wpisujemy współczynniki wielomianu $W(x)$. W pierwszej kolumnie wpisujemy r i uzupełniamy kolumnę drugą. Następnie uzupełniamy kolejne kolumny zgodnie z zasadą: $b_{n-k} = a_{n-k+1} + r \cdot b_{n-k+1}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
+		$r \cdot b_4$	$r \cdot b_3$	$r \cdot b_2$	$r \cdot b_1$	$r \cdot b_0$
r	$b_4 = a_5$	$b_3 = a_4 + r \cdot b_4$	$b_2 = a_3 + r \cdot b_3$	$b_1 = a_2 + r \cdot b_2$	$b_0 = a_1 + r \cdot b_1$	$a_0 + r \cdot b_0 = R$

W ostatnim wierszu tabeli otrzymujemy współczynniki wielomianu $Q(x)$ i resztę R .

Przykład

Znajdź iloraz $Q(x)$ i resztę R z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 24x + 9$ przez dwumian $(x + 5)$.

$W(x) = Q(x)(x + 5) + R$, gdzie iloraz $Q(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$.

W pierwszym wierszu wpisujemy współczynniki wielomianu $W(x)$, zaczynając od współczynnika przy najwyższej potęgde.

W pierwszej kolumnie wpisujemy $r = -5$ i uzupełniamy drugą kolumnę.

Następnie uzupełniamy kolejne kolumny zgodnie z zasadą: $b_{n-k} = a_{n-k+1} + r \cdot b_{n-k+1}$, gdzie k jest liczbą ze zbioru $\{1, \dots, n\}$.

	1	7	5	-24	9
+		$(-5) \cdot 1 = -5$	$(-5) \cdot 2 = -10$	$(-5) \cdot (-5) = 25$	$(-5) \cdot 1$
-5	1	$7 + (-5) = 2$	$5 + (-10) = -5$	$-24 + 25 = 1$	$9 + (-5) = 4$

Otrzymaliśmy $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ i resztę $R = 4$.

Rozkład wielomianu na czynniki

Rozłożyć wielomian na czynniki, to znaczy przedstawić go w postaci iloczynu wielomianów.

Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można w jednoznaczny sposób rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia postaci $(x - r)$ lub drugiego stopnia postaci $x^2 + bx + c$ o ujemnym wyróżniku. Suma stopni wszystkich czynników w takim rozkładzie jest równa stopniowi wielomianu. $\Delta < 0$

Przy rozkładzie wielomianu na czynniki zastosować możemy następujące metody:

- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias
- wzory skróconego mnożenia
- grupowanie wyrazów i po odpowiednim pogrupowaniu wyłączanie wspólnych czynników lub zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.

TW. BEZOUTE'a $W(a) = R \mid W(a) = 0$

W konkretnych przykładach na ogół stosujemy kombinację podanych metod oraz twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki stopnia pierwszego lub drugiego o wyróżniku mniejszym od zera.

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, ..., $(x - x_n)$, to jest podzielny przez ich iloczyn $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.

Jeżeli wielomian $W(x)$ stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to można go przedstawić w postaci iloczynowej: W

$$(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Jeżeli w wielomianie $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ współczynnik a_n przy najwyższej potęgde jest różny od jedności, to można wyłączyć go przed nawias, a następnie rozłożyć na czynniki wielomian w nawiasie.

Wyrażenia wymierne

Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{W}{D}$, gdzie W i D są wielomianami i D nie jest wielomianem zerowym.

Zbiór wszystkich liczb, dla których można obliczyć wartość wyrażenia, nazywamy **dziedziną** tego wyrażenia. Dziedzinę wyrażenia wymiernego ustalamy, rozkładając jego mianownik na czynniki i wykluczając sytuacje, kiedy którykolwiek z nich jest zerem.

Na wyrażeniach wymiernych można wykonywać te same operacje co na ułamkach zwykłych, tzn. skracanie, rozszerzanie, sprowadzanie do wspólnego mianownika, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie. Różnica polega na tym, że wszystkie operacje wykonujemy na wielomianach, a nie na liczbach.

Skracanie wyrażeń wymiernych

Wyrażenia, które mamy skrócić	$\frac{30}{42}$	$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$
Mianownik i licznik rozkładamy na czynniki	$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7}$	$\frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)}$
Ustalamy dziedzinę wyrażenia		$x \neq 3$ i $x \neq -3$
Dzielimy licznik i mianownik przez wspólne dzielniki licznika i mianownika	$\frac{5}{7}$	$\frac{x - 3}{x + 3}$

Mnożenie wyrażeń wymiernych

Wyrażenia, które mamy pomnożyć	$\frac{16}{125} \cdot \frac{75}{64}$	$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x}$
--------------------------------	--------------------------------------	--

Mianowniki i liczniki rozkładamy na czynniki	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}$
Ustalamy dziedzinę wyrażenia		$x \neq 0$ i $x \neq 3$, i $x \neq -5$
Piszemy iloczyn jako jeden ułamek	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+5)(x-3)(x+3)}{x(x-3)x(x+5)}$
Skracamy przez wspólne czynniki licznika i mianownika, o ile istnieją	$\frac{3}{5 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+3)}{x \cdot x}$
Możemy wykonać zaznaczone mnożenia	$\frac{3}{20}$	$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2}$

Dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyrażenia, które mamy podzielić	$\frac{3}{4} : \frac{12}{15}$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x} : \frac{2x(x+1)}{2x^2 + 4x}$
Mianowniki i liczniki rozkładamy na czynniki	$\frac{3}{2 \cdot 2} : \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$	$\frac{x(x-2)}{x(x+2)} : \frac{2x(x+1)}{2x(x+2)}$
Ustalamy dziedzinę wyrażenia		$x \neq 0$ i $x \neq -2$
Mnożymy wyrażenie, które jest dzielną, przez odwrotność dzielnika	$\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{x(x-2)}{x(x+2)} \cdot \frac{2x(x+2)}{2x(x+1)}$
Uzupełniamy założenia o nowe dzielniki, o ile się pojawią		$x \neq -1$
Skracamy przez wspólne czynniki licznika i mianownika, o ile istnieją	$\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{5}{2 \cdot 2}$	$\frac{(x-2)}{1} \cdot \frac{1}{(x+1)}$
Możemy wykonać zaznaczone mnożenia	$\frac{15}{16}$	$\frac{x-2}{x+1}$

Sprawdzanie wyrażeń wymiernych do wspólnego mianownika

Wyrażenia, które mamy sprowadzić do wspólnego mianownika

$$\frac{7}{12}, \frac{11}{34}$$

$$\frac{3}{2x-4}, \frac{5}{x^2-4}$$

Mianowniki rozkładamy na czynniki

$$\frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{11}{2 \cdot 17}$$

$$\frac{3}{2(x-2)},$$

$$\frac{5}{(x-2)(x+2)}$$

Ustalamy dziedzinę wyrażenia

$$x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

Ustalamy wspólny mianownik (WM), biorąc pod uwagę wszystkie czynniki z pierwszego mianownika i te czynniki drugiego, których nie ma w pierwszym mianowniku

$$WM = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$$

$$WM = 2(x-2)(x+2)$$

Rozszerzamy każde wyrażenie przez te dzielniki WM, których nie ma w mianowniku tego wyrażenia

$$\frac{7 \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{119}{204},$$

$$\frac{3(x+2)}{2(x-2)(x+2)},$$

$$\frac{11 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{66}{204}$$

$$\frac{10}{2(x-2)(x+2)}$$

Dodawanie wyrażeń wymiernych

Wyrażenia, które mamy dodać

$$\frac{7}{15} + \frac{2}{21}$$

$$\frac{4}{x^2+2x} + \frac{4x}{x^2-4}$$

Mianowniki rozkładamy na czynniki

$$\frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 7}$$

$$\frac{4}{x(x+2)} + \frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

Ustalamy dziedzinę wyrażenia

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq -2, \text{ i } x \neq 2$$

Ustalamy WM, biorąc pod uwagę wszystkie czynniki jednego mianownika i te z drugiego, których nie ma w pierwszym

$$WM = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$WM = x(x-2)(x+2)$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Wykonujemy mnożenia w każdym liczniku

$$\frac{49}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{10}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Piszemy ułamki na jednej kresce ułamkowej i wykonujemy dodawanie w liczniku

$$\frac{49 + 10}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{59}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Ewentualnie rozkładamy licznik na czynniki i skracamy ułamki

$$\frac{4(x-2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{4x \cdot x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4x-8}{x(x-2)(x+2)} + \frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4x-8+4x^2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4(x+2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4(x-1)}{x(x-2)}$$

TEORIA

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie $ax + b = 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Równanie liniowe $ax + b = 0$, w którym $a \neq 0$, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**.

Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x nazywamy każdą z nierówności: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Dwie pierwsze nierówności nazywamy ostrymi, dwie ostatnie – nieostrymi.

Rozwiązaniem równania (nierówności) z jedną niewiadomą jest każda liczba, która podstawiona w miejsce niewiadomej daje równość (nierówność) prawdziwą. Rozwiązanie równania nazywamy też **pierwiastkiem** tego równania.

Rozwiązanie równania (nierówności) oznacza znalezienie wszystkich rozwiązań tego równania (nierówności).

Zbiór utworzony ze wszystkich rozwiązań równania lub nierówności nazywamy **zbiorem rozwiązań** tego równania (nierówności). Równania (nierówności) nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Rozwiązywanie równań liniowych

Metoda analizy
starożytnych

Przekształcamy równanie wyjściowe tak, że każda liczba spełniająca to równanie spełnia przekształcone (wynikowe). Obydwa równania, wyjściowe i wynikowe, mogą nie być równoważne.

Wśród pierwiastków równania wynikowego, poza pierwiastkami równania wyjściowego, mogą znaleźć się **pierwiastki obce** (liczby, które nie spełniają równania wyjściowego, choć spełniają równanie wynikowe).

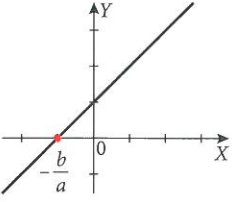
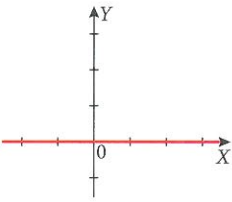
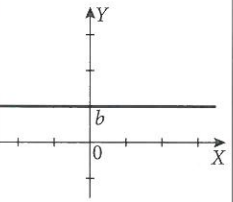
Po zastosowaniu tej metody trzeba sprawdzić otrzymane pierwiastki i wyeliminować pierwiastki obce.

Metoda równań
równoważnych

Tak przekształcamy dane równanie, by otrzymać równanie mu równoważne (mające ten sam zbiór rozwiązań).

Metoda graficzna

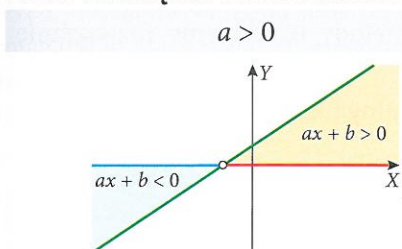
Rysujemy wykres równania i z wykresu odczytujemy rozwiązanie. Metoda prowadzi do uzyskania rozwiązań przybliżonych.

Równanie	pierwszego stopnia	tożsamościowe	sprzeczne
Warunki	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b = 0$	$a = 0$ i $b \neq 0$
Liczba rozwiązań	jedno $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$	nieskończenie wiele (wszystkie liczby rzeczywiste)	zero
Interpretacja geometryczna			

Rozwiązanie nierówności liniowych

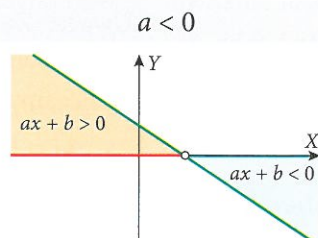
Nierówność	pierwszego stopnia	tożsamościowa	sprzeczna
mocna (ostra) $ax + b > 0$	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b > 0$	$a = 0$ i $b \leq 0$
słaba (nieostra) $ax + b \geq 0$	$a \neq 0$	$a = 0$ i $b \geq 0$	$a = 0$ i $b < 0$

Zbiór rozwiązań nierówności liniowej



$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$$

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$$



$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$$

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$$

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Równanie $Ax + By + C = 0$, w którym A, B, C oznaczają liczby takie, że $A^2 + B^2 > 0$, zaś x i y są zmiennymi, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** x i y .

Wykresem równania $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$, jest linia prosta.

Układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y \text{ są niewiadomymi, } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \text{ są liczbami danymi,}$$

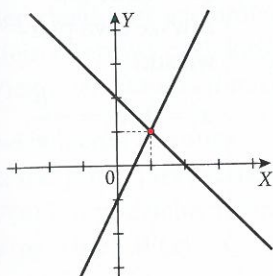
jest każda para liczb x, y , które jednocześnie spełniają oba równania.

Metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Metoda podstawiania	Wyznaczamy jedną z niewiadomych z jednego równania i wyrażamy ją w zależności od drugiej niewiadomej, a następnie podstawiamy do drugiego równania.
Metoda przeciwnych współczynników	Oba równania mnożymy przez tak dobrane liczby, aby w obu otrzymać przy tej samej niewiadomej przeciwne współczynniki, a następnie dodajemy równania stronami i uzyskujemy równanie z jedną niewiadomą.
Metoda porównywania	Przekształcamy oba równania w taki sposób, aby jedna z niewiadomych była wyrażona w zależności od drugiej, a następnie porównujemy odpowiednie strony równań, uzyskując równanie z jedną niewiadomą.
Metoda graficzna	Szkicujemy w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy każdego z równań, a następnie odczytujemy współrzędne punktu przecięcia obu wykresów. Uwaga: Za pomocą tej metody uzyskujemy rozwiązanie przybliżone.
Metoda wyznaczników	Obliczamy wyznacznik ogólny układu: $W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ i wyznaczniki szczegółowe: $W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$ Jeżeli $W \neq 0$, to układ ma rozwiązanie dane wzorami $x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}.$

Graficzna interpretacja liczby rozwiązań układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

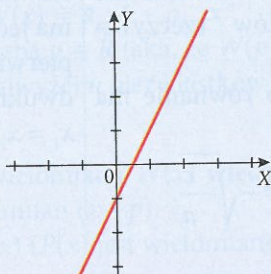
układ oznaczony
układ równań
niezależnych



jedno rozwiązanie

$$W \neq 0$$

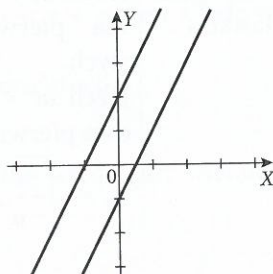
układ nieoznaczony
układ równań zależnych



nieskończenie wiele
rozwiązań

$$W = W_x = W_y = 0$$

układ sprzeczny



brak rozwiązań

$$W = 0 \text{ oraz} \\ W_x \neq 0 \text{ lub } W_y \neq 0$$

3

Równanie kwadratowe

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, w którym x jest niewiadomą, $a \neq 0$, b , c są liczbami danymi, nazywamy **równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą (równaniem drugiego stopnia)**.

Jeżeli przynajmniej jedna spośród liczb b , c jest równa zero, to równanie nazywamy równaniem kwadratowym **niezupełnym**. Jeżeli $b \neq 0$ i $c \neq 0$, to równanie nazywamy **zupełnym**.

Liczba rozwiązań (pierwiastków) równania kwadratowego zależy od znaku wyróżnika: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków.

Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (tzw. podwójny)

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wzory Viète'a

Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, to $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

Jeżeli równanie ma jeden pierwiastek podwójny x_0 , to $x_0^2 = \frac{c}{a}$, $2x_0 = \frac{-b}{a}$.

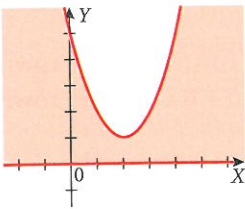
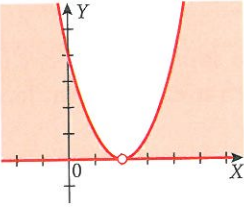
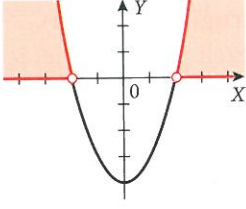
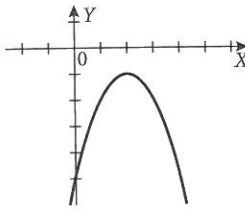
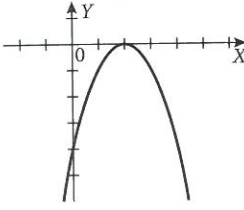
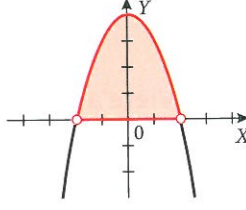
Rozwiązania równania kwadratowego niepełnego

Warunki	$b = 0$ i $c \neq 0$	$b = 0$ i $c = 0$	$b \neq 0$ i $c = 0$
Postać równania	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$	$ax^2 + bx = 0$
Liczba pierwiastków	Jeżeli $ac > 0$, to równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli $ac < 0$ to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Równanie ma jeden pierwiastek dwukrotny $x_1 = x_2 = 0$.	Równanie ma zawsze dwa pierwiastki $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

Nierówności kwadratowe

Każdą z nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, w której x jest niewiadomą, a, b, c są liczbami danymi, $a \neq 0$, nazywamy **nierównością kwadratową z jedną niewiadomą (nierównością drugiego stopnia)**.

 Graficzna metoda rozwiązywania nierówności $ax^2 + bx + c > 0$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
Rozwiązanie nierówności	każda liczba rzeczywista	$x < x_1$ lub $x > x_1$	$x < x_1$ lub $x > x_2$
Zbiór rozwiązań	$\mathbb{R}$	$(-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$a < 0$			
Rozwiązanie nierówności	brak rozwiązań	brak rozwiązań	$x_1 < x < x_2$
Zbiór rozwiązań	$\emptyset$	$\emptyset$	(x_1, x_2)

Równanie wielomianowe n -tego stopnia

Równanie $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0, x \in \mathbf{R}$), czyli $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem n -tego stopnia, nazywamy **równaniem wielomianowym n -tego stopnia**.

Pierwiastki wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ jest każde jego miejsce zerowe, czyli każda liczba $p \in \mathbf{R}$ taka, że $W(p) = 0$.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych.

Twierdzenie Bezouta

Liczba p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - p)$.

$$W(p) = 0 \Leftrightarrow W(x) = (x - p)P(x) \quad (P(x) \text{ jest wielomianem})$$

Liczbę p nazywamy n -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - p)^n$, a nie jest podzielny przez $(x - p)^{n+1}$.

Twierdzenia o pierwiastkach równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych

Jeżeli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem równania $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ o całkowitych współczynnikach $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ i wyrazie wolnym a_0 , to p jest dzielnikiem wyrazu a_0 .

Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q} \neq 0$ jest pierwiastkiem równania

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ o całkowitych współczynnikach } a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \text{ oraz}$$

$\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Każde równanie wielomianowe nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Niektóre metody rozwiązywania równań stopnia wyższego niż 2

Równanie
dwukwadratowe
 $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

Stosujemy podstawienie $x^2 = t$ i sprowadzamy równanie do równania kwadratowego $at^2 + bt + c = 0$.

Równanie zwrotne
czwartego stopnia
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

Dzielimy obie strony równania przez x^2 , wykonujemy podstawienie $x + \frac{1}{x} = t$ i sprowadzamy równanie do równania kwadratowego $t^2 + at + b - 2 = 0$.

Nierówności wielomianowe

Każda z nierówności postaci $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$, $W(x) \geq 0$, w której $W(x)$ jest wielomianem, to nierówność wielomianowa.

Metody rozwiązywania nierówności algebraicznych n -tego stopnia

1. Metoda siatki znaków

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, rozkładamy wielomian $W(x)$ na czynniki, wyznaczamy i porządkujemy jego miejsca zerowe: $x_1, x_2, \dots, x_k$. Wyznaczają one przedziały, w których każdy z czynników przyjmuje określony znak. Sporządzamy tabelkę, w której zaznaczamy znak każdego z czynników oraz znak współczynnika przy najwyższej potęgde zmiennej. Znak wielomianu $W(x)$ w każdym z przedziałów, a zatem zbiór rozwiązań nierówności ustalamy na podstawie tabelki.

Przykład

$2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 \geq 0$, zatem po rozłożeniu na czynniki: $2(x+1)(x-2)(x+2) \geq 0$.

Wielomian $W(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ ma trzy miejsca zerowe $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2$, które wyznaczają przedziały: $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, \infty)$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$(x+2)$	–	+	+	+
$(x+1)$	–	–	+	+
$(x-2)$	–	–	–	+
2	+	+	+	+
$W(x)$	–	+	–	+

Odpowiedź: $x \in \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

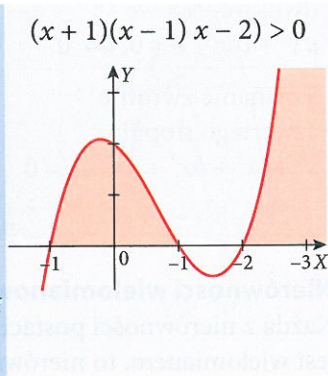
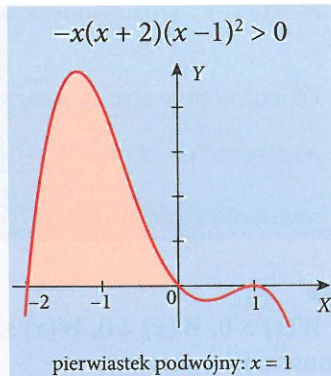
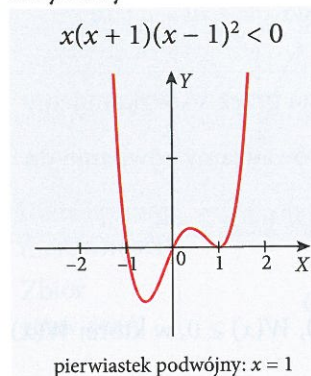
2. Metoda graficzna

Rozkładamy wielomian na czynniki, wyznaczamy jego miejsca zerowe, porządkujemy je i zaznaczamy na osi liczbowej. Następnie sporządzamy wykres wielomianu. Przy sporządzaniu wykresu zwracamy uwagę na:

- stopień wielomianu – czy jest parzysty, czy nieparzysty,
- znak współczynnika przy najwyższej potęgde zmiennej,
- krotność pierwiastków – jeżeli pierwiastek ma krotność nieparzystą, to w jego otoczeniu wielomian zmienia znak, natomiast jeżeli krotność jest parzysta, to w jego otoczeniu wielomian nie zmienia znaku.

Rozwiązanie nierówności odczytujemy na podstawie wykresu.

Przykłady



Równania wymierne

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$, $Q(x) \neq 0$, gdzie $W(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej, przy czym $Q(x) \neq 0$.

Rozwiązywanie równań wymiernych

$$\frac{W(x)}{Q(x)} = 0, Q(x) \neq 0$$

Aby rozwiązać równanie wymierne $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$:

- określamy jego dziedzinę, zakładając, że $Q(x) \neq 0$;
- korzystamy z równoważności $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0$ i $Q(x) \neq 0$;
- ustalamy zbiór rozwiązań równania $W(x) = 0$ i znajdujemy zbiór rozwiązań równania wymiernego, uwzględniając jego dziedzinę.

Nierówności wymierne

Nierównością wymierną nazywamy każdą z nierówności postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} > 0$,

$$\frac{W(x)}{Q(x)} < 0, \frac{W(x)}{Q(x)} \leq 0, \frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0, \text{ gdzie } W(x) \text{ i } Q(x) \text{ są wielomianami zmiennej } x,$$

przy czym $Q(x) \neq 0$.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Aby rozwiązać nierówność: wyznaczamy dziedzinę nierówności, doprowadzamy ją do postaci uporządkowanej, a następnie przekształcamy otrzymaną nierówność do postaci wielomianowej, korzystając ze wzorów.

$$\frac{W(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot Q(x) > 0$$

$$\text{i } Q(x) \neq 0$$

$$\frac{W(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot Q(x) < 0$$

$$\text{i } Q(x) \neq 0$$

$$\frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot Q(x) \geq 0$$

$$\text{i } Q(x) \neq 0$$

$$\frac{W(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot Q(x) \leq 0$$

$$\text{i } Q(x) \neq 0$$

Teraz rozwiązujemy otrzymaną nierówność algebraiczną, np. metodą siatki znaków, i wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności wymiernej, uwzględniając jej dziedzinę.

TEORIA

Dane są zbiory X i Y . Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

Zapisujemy $f: X \rightarrow Y$ lub $y = f(x)$ dla $x \in X$.

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji** f , a jego elementy x – **argumentami**. Argument funkcji to inaczej zmienna niezależna (funkcji). Dziedzinę funkcji oznaczamy często D_f lub D .

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**.

Wartość zmiennej y zależnej od przyjętej wartości zmiennej x nazywamy **wartością funkcji**.

Podzbiór W_f zbioru Y zawierający wszystkie te elementy y zbioru Y , dla których istnieje taki element x zbioru X , że $y = f(x)$, nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f . Możemy zbiór wartości oznaczyć też przez $f(D_f)$.

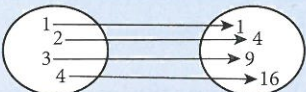
Sposoby określania funkcji

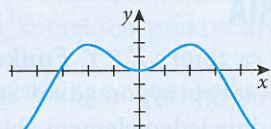
Funkcja jest określona, gdy wskazany jest sposób przyporządkowania argumentom x wartości y . Możemy to zrobić różnymi sposobami: za pomocą opisu słownego, grafu, tabeli wartości, zbioru uporządkowanych par $(x, f(x))$, wzoru przyporządkowującego argumentom wartości f lub wykresu.

Jeżeli X i Y są zbiorami podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to funkcję nazywamy funkcją rzeczywistą. **Wykresem** funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem funkcji, a y wartością funkcji dla argumentu x .

Asymptota wykresu funkcji to prosta, do której coraz bardziej zbliża się dany wykres, gdy się wzdłuż niego przemieszczamy.

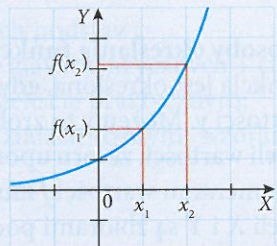
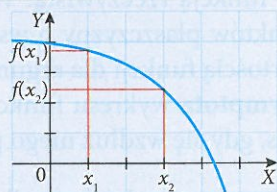
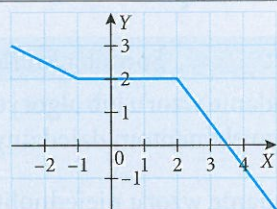
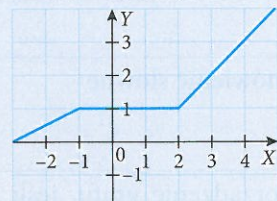
Jest wiele sposobów określenia funkcji. W tabeli przedstawionych jest kilka z nich.

Sposób określenia funkcji	Przykład
podanie wzoru lub algorytmu przyporządkowującego elementom dziedziny wartości funkcji	$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \neq -1 \text{ i } x \neq 1$
podanie wzoru niejednolitego	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -x, & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$
omówienie słowne	każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej kwadrat
sporządzenie grafu, jeśli dziedzina jest zbiorem skończonym	

sporządzenie wykresu											
podanie zbioru par uporządkowanych, gdzie pierwsza liczba oznacza argument funkcji, a druga – wartość funkcji dla tego argumentu	$\{(-1, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 3)\}$										
zestawienie tabeli wartości, jeśli dziedzina jest zbiorem skończonym	<table data-bbox="810 407 1132 498"><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	x	-1	0	1	2	y	2	3	2	3
x	-1	0	1	2							
y	2	3	2	3							

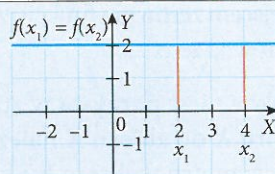
Własności funkcji

Niech X i Y będą podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych.

Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.	
Funkcję f nazywamy malejącą w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.	
Funkcję f nazywamy nierosnącą w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geq f(x_2)$.	
Funkcję f nazywamy niemalejącą w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leq f(x_2)$.	

Funkcja **monotoniczna** to funkcja, która jest albo funkcją rosnącą, albo malejącą, albo niemalejącą, albo nierosnącą.

Funkcję f nazywamy **stałą** w zbiorze X , gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 zachodzi równość: $f(x_1) = f(x_2)$.



Funkcje ograniczone

Funkcję liczbową $f: D_f \rightarrow Y$ nazywamy **ograniczoną z dołu** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z dołu, czyli istnieje taka liczba k , że dla dowolnego argumentu x zachodzi $f(x) \geq k$.

Funkcję liczbową $f: D_f \rightarrow Y$ nazywamy **ograniczoną z góry** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z góry, czyli istnieje taka liczba m , że dla dowolnego argumentu x zachodzi $f(x) \leq m$.

Funkcję liczbową $f: D_f \rightarrow Y$ nazywamy **ograniczoną** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z góry i z dołu, czyli istnieją takie liczby k i m , że dla dowolnego argumentu x zachodzi $k \leq f(x) \leq m$.

Funkcja liczbową f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y przyjmuje **największą wartość** $y_{\max}$ dla pewnego argumentu x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_{\max}$ oraz dla każdego innego argumentu x funkcji f wartość $f(x) \leq y_{\max}$.

Funkcja liczbową f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y przyjmuje **najmniejszą wartość** $y_{\min}$ dla pewnego argumentu x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_{\min}$ oraz dla każdego innego argumentu $x \neq x_0$ funkcji f wartość $f(x) \geq y_{\min}$.

Jeżeli funkcja liczbową przyjmuje wartość największą, to jest ograniczona z góry.

Jeżeli funkcja liczbową przyjmuje wartość najmniejszą, to jest ograniczona z dołu.

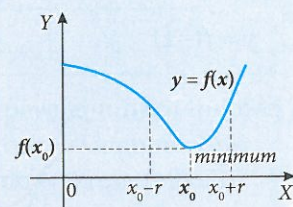
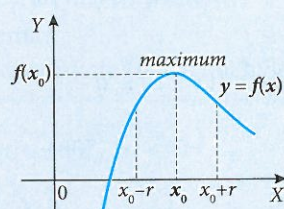
Ekstrema funkcji

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **maksimum lokalne** $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego argumentu funkcji x z przedziału $(x_0 - r, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **maksimum lokalne właściwe** $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **minimum lokalne** $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego argumentu funkcji x z przedziału $(x_0 - r, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(x_0)$.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **minimum lokalne właściwe** $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.



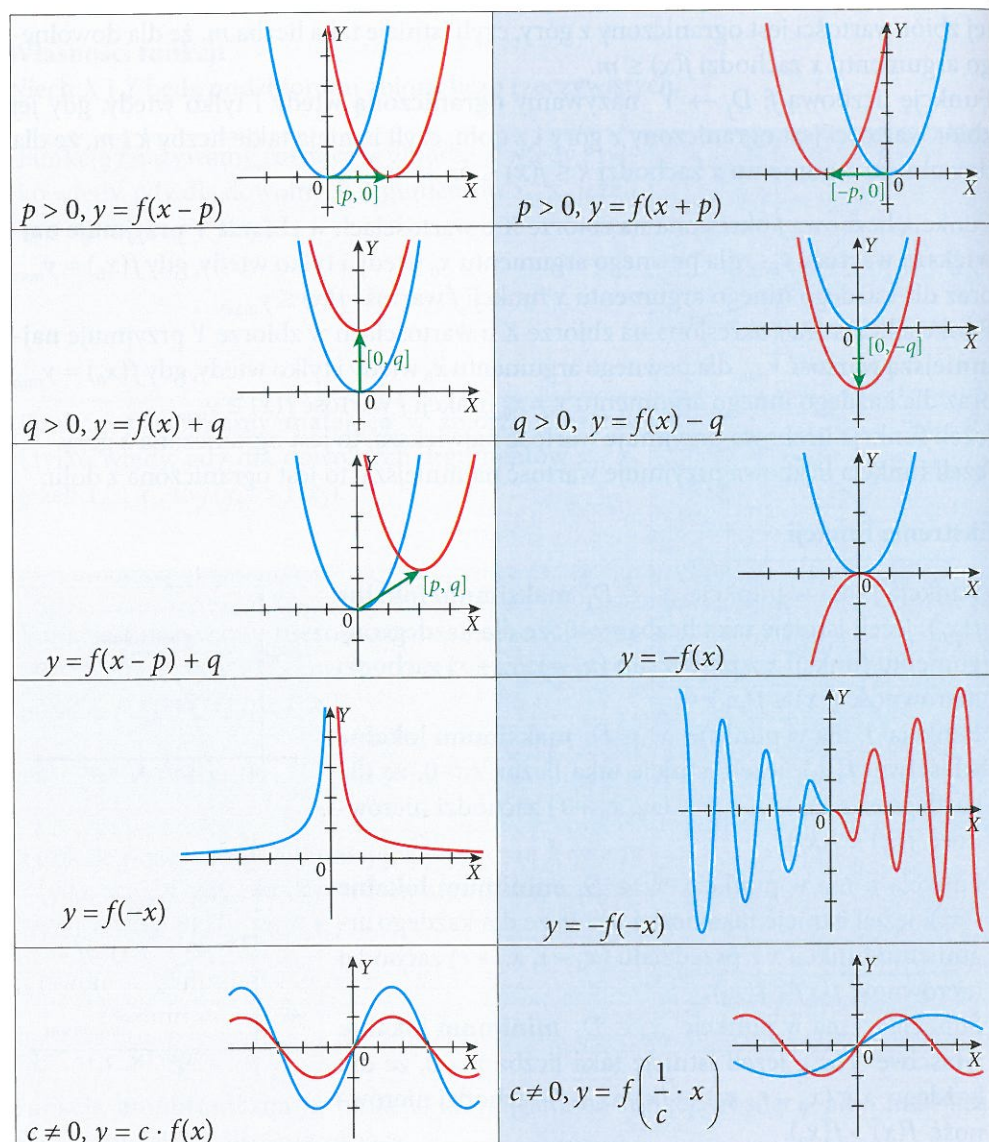
I maksima, i minima nazywamy **ekstremami**.

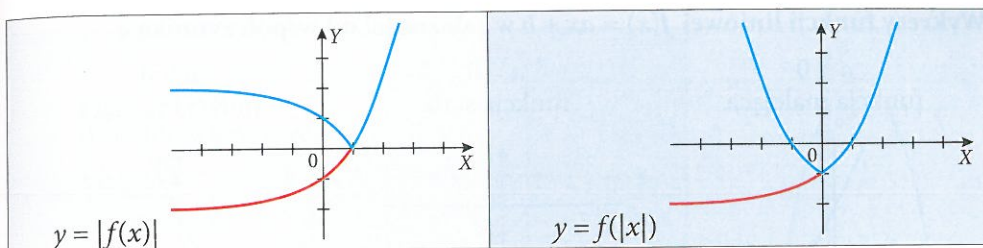
Miejszem zerowym funkcji rzeczywistej nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero.

Funkcja f jest **parzysta** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu x ze zbioru X do zbioru X należy także $(-x)$ i zachodzi równość: $f(-x) = f(x)$. Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji parzystej.

Funkcja f jest **nieparzysta** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu x ze zbioru X do zbioru X należy także $(-x)$ i zachodzi równość: $f(-x) = -f(x)$. Początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji nieparzystej.

Wybrane przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$





Odczytywanie własności funkcji na podstawie wykresu – przykład

	miejsca zerowe	$x_1 = 0, x_2 = 2$
	wartości dodatnie	$f(x) > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ lub $2 < x \leq 3$ $x \in (-4, 0) \cup (2, 3]$
	wartości ujemne	$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ $x \in (0, 2)$
	funkcja rosnąca	$-4 < x \leq -2; 1 \leq x \leq 3$ $x \in (-4, -2]; x \in [1, 3]$
	funkcja malejąca	$-2 \leq x \leq 1$ $x \in [-2, 1]$
	wartość najmniejsza	$y_{\min} = -1$ dla $x = 1$
dziedzina $D = (-4, 3]$ zbiór wartości $f(D) = [-1, 4]$	wartość największa	$y_{\max} = 4$ dla $x = -2$

Funkcja liniowa

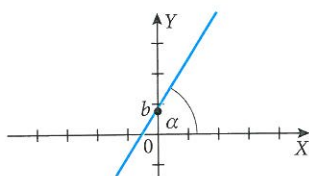
Funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, zaś a i b to ustalone współczynniki, nazywamy **funkcją liniową**.

a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, natomiast b – wyrazem wolnym.

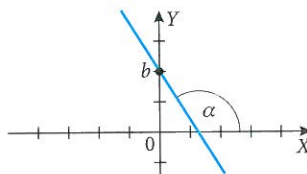
Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa jest funkcją pierwszego stopnia.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta przecinająca oś OY w punkcie $(0, b)$, nachylna do osi OX pod takim kątem α , że $\tan \alpha = a$.

$$0 < \alpha < 90^\circ, \quad a > 0$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ, \quad a < 0$$



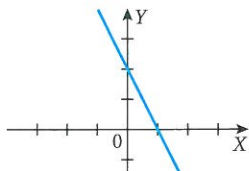
Współczynnik kierunkowy prostej, która jest wykresem pewnej funkcji liniowej f , jest równy stosunkowi przyrostu wartości funkcji do przyrostu jej argumentów.

Jeśli punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ (gdzie $x_1 \neq x_2$) należą do wykresu funkcji

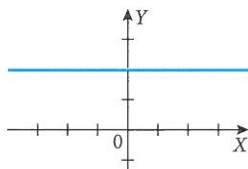
$$y = ax + b, \text{ to } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Wykresy funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ w zależności od współczynnika a

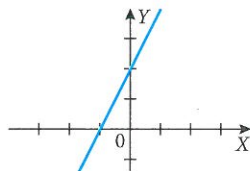
$a < 0$
funkcja malejąca



$a = 0$
funkcja stała



$a > 0$
funkcja rosnąca



Wykresy funkcji liniowych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe.

Funkcja kwadratowa

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, zaś a, b, c to ustalone współczynniki, przy czym $a \neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową.

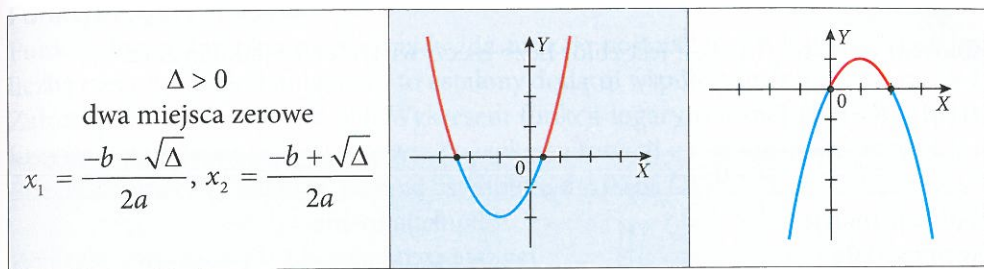
Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem**.

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku

$W = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$. Parabola ma oś symetrii o równaniu $x = \frac{-b}{2a}$.

Szkice wykresów funkcji kwadratowej w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$ brak miejsc zerowych		
$\Delta = 0$ jedno miejsce zerowe $x_0 = \frac{-b}{2a}$		



Różne postacie funkcji kwadratowej

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Postać ogólna

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Postać kanoniczna

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Postać iloczynowa istnieje, jeśli $\Delta \geq 0$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcji nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Wartości maksymalne i minimalne funkcji	wartość minimalna funkcji $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$	wartość maksymalna funkcji $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$
Funkcja malejąca	dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$	$x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$
Funkcja rosnąca	dla $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$	$x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$

Proporcjonalność odwrotna

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy taką zależność między zmiennymi x i y ,

że ich iloczyn jest stały. Można to zapisać: $x \cdot y = a$ lub $y = \frac{a}{x}$.

Wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś a to ustalony współczynnik różny od zera, jest hiperbola, której asymptotami są osie układu współrzędnych.

Własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera: $(D_f = \mathbb{R} - \{0\})$.

Zbiorem wartości $f(x) = \frac{a}{x}$ jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera:

$$(f(D_f) = \mathbb{R} - \{0\}).$$

$a > 0$		$a < 0$	
Funkcja maleje w przedziale $(-\infty, 0)$ i maleje w przedziale $(0, \infty)$. Funkcja nie ma wartości minimalnych ani maksymalnych.		Funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, 0)$ i rośnie w przedziale $(0, \infty)$. Funkcja nie ma wartości minimalnych ani maksymalnych.	

Funkcja wykładnicza

Funkcją **wykładniczą** nazywamy każdą funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś a to ustalony współczynnik, przy czym $a > 0$, $a \neq 1$. Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa wykładnicza, przechodząca przez punkt $(0, 1)$, której asymptotą jest prosta $y = 0$ (oś OX).

Własności i wykresy i funkcji wykładniczej

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych: $(D_f = \mathbb{R})$.

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich: $(f(D_f) = (0, \infty))$.

Brak miejsc zerowych.

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \text{ dla dowolnych liczb rzeczywistych } x_1, x_2.$$

$$\text{Jeśli } a^{x_1} = a^{x_2}, \text{ to } x_1 = x_2.$$

$0 < a < 1$ ($a \in (0, 1)$)	$a > 1$ ($a \in (1, \infty)$)
przykłady: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	przykłady: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = e^x$
funkcja malejąca	funkcja rosnąca

Funkcja logarytmiczna

Funkcją **logarytmiczną** nazywamy każdą funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą dodatnią, zaś a to ustalony dodatni współczynnik, przy czym $a \neq 1$. Załóżmy, że $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Wykresem funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ jest **krzywa logarytmiczna** symetryczna do wykresu funkcji $y = a^x$ względem prostej $y = x$. Przechodzi ona przez punkt $(1, 0)$ i ma asymptotę $x = 0$ (oś OY).

Wykresy i własności funkcji logarytmicznej

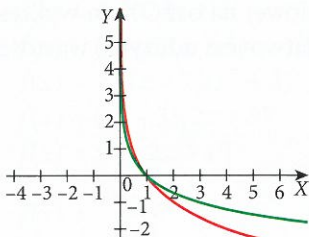
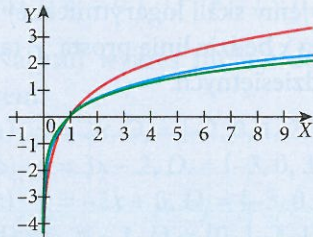
Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich ($D_f = (0, \infty)$).

Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych ($f(D_f) = \mathbb{R}$).

Funkcja ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 1$.

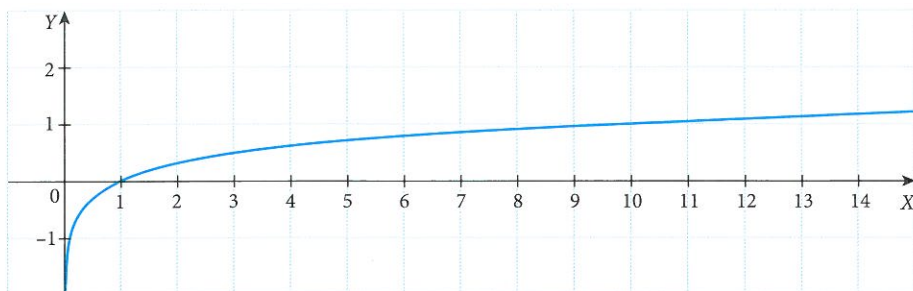
$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$, gdy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Jeśli $\log_a x_1 = \log_a x_2$, to $x_1 = x_2$.

$0 < a < 1$ ($a \in (0, 1)$)	$a > 1$ ($a \in (1, \infty)$)
	
Przykłady: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$	Przykłady: $y = \log_3 x$, $y = \log_2 x$, $y = \ln x$
funkcja malejąca	funkcja rosnąca

Wykresy funkcji $y = \log x$

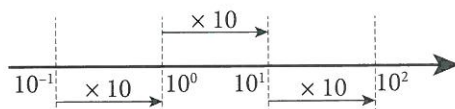
W zadaniach często wykorzystujemy logarytmy dziesiętne. Jednym ze sposobów oszacowania wartości logarytmów jest wykorzystanie wykresu funkcji $y = \log x$. Można użyć tablic, arkusza kalkulacyjnego albo kalkulatora. Nie zawsze jednak mamy do tych narzędzi dostęp.



$y = \log x$

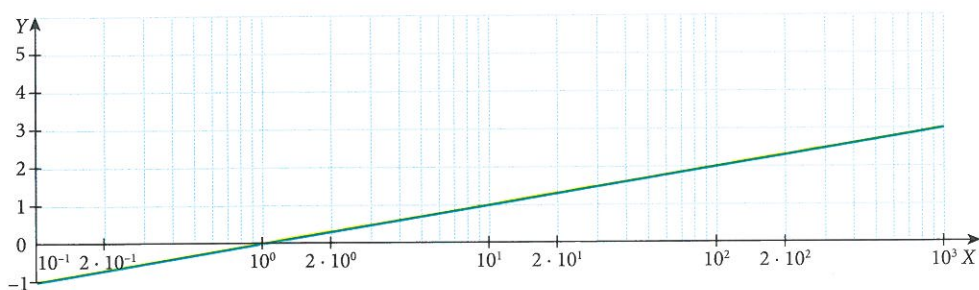
Skala logarytmiczna

W naukach przyrodniczych lub ekonomii zależność między wielkościami bywa przedstawiana na wykresach, w których jedna lub obie osie przedstawione są w skali logarytmicznej, tzn. takiej, w której odległość jest proporcjonalna nie do liczby, a do jej logarytmu. Tej skali używamy najczęściej do zilustrowania zmiany rzędu wielkości jakiejś zmiennej. Jeśli stała jest różnica między kolejnymi wartościami zmiennej, to używamy skali liniowej, a jeśli stały jest iloraz kolejnych wartości tej zmiennej, to używamy skali logarytmicznej. Przy stosowaniu skali logarytmicznej trzeba określić, jaką podstawę logarytmu wybrano. Najczęściej używane są logarytmy dziesiętne lub naturalne. Skala logarytmiczna może być używana jedynie do odwzorowania wielkości dodatnich.



Wykres funkcji $y = \log x$ na skali półlogarytmicznej

Jeżeli użyjemy skali logarytmicznej na osi OX , a liniowej na osi OY , to wykres funkcji $y = \log x$ będzie linią prostą. Z takiego rysunku łatwo jest odczytać wartości logarytmów dziesiętnych.



TEORIA

Pojęcie ciągu liczbowego

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy dowolną funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich, a wartościami są liczby rzeczywiste.

Wartość $f(n)$ tej funkcji dla argumentu n oznaczamy a_n . Jest to n -ty wyraz ciągu (wyraz ogólny).

Ciąg oznaczamy: $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Często zapisujemy po prostu: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Ciąg skończony złożony z n elementów (ciąg n -elementowy) oznaczamy

$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

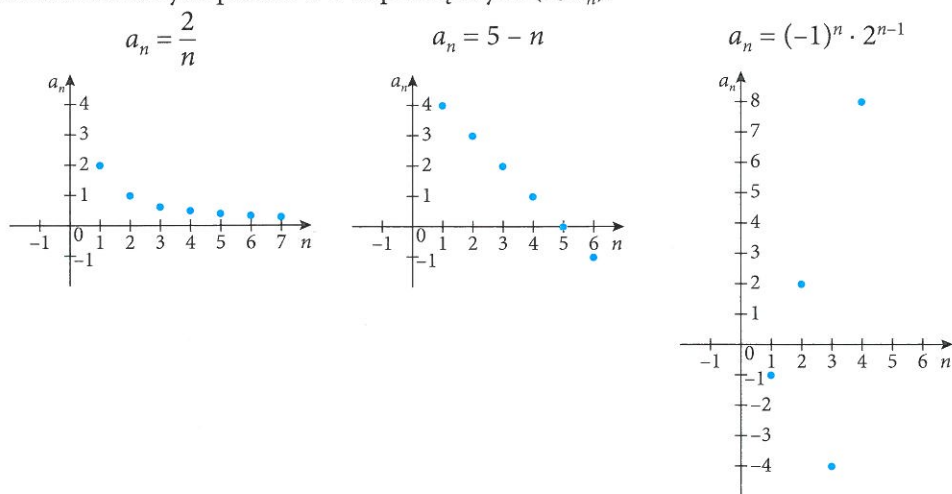
Najczęściej określamy ciąg, podając:

- wzór na jego wyraz ogólny, czyli zależność między n -tym wyrazem ciągu a_n a jego numerem n lub
- wzór rekurencyjny, czyli zależność między n -tym wyrazem ciągu a_n a poprzednimi wyrazami tego ciągu (w tym przypadku trzeba też podać pierwszy wyraz).

Musimy pamiętać, że n to liczba naturalna dodatnia.

Wykres ciągu

Ciąg liczbowy jest funkcją, której argumentami są liczby naturalne, więc można sporządzić jego wykres. W układzie współrzędnych na osi odciętych wybieramy kolejne liczby naturalne (n), a na osi rzędnych – kolejne wyrazy ciągu (a_n). Wykresem jest zbiór izolowanych punktów o współrzędnych (n, a_n) .



Ciągi monotoniczne

Ciąg $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ jest

- **rosnący** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n :
 $a_{n+1} - a_n > 0$;
- **malejący** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n :
 $a_{n+1} - a_n < 0$;
- **niemalejący** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n :
 $a_{n+1} - a_n \geq 0$;

- **nierosnący** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n :
 $a_{n+1} - a_n \leq 0$;
- **stały** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n : $a_{n+1} - a_n = 0$;
- **monotoniczny**, jeżeli jest rosnący, niemalejący, malejący lub nierosnący.

Granice ciągów nieskończonych

Jeżeli dla danego ciągu (a_n) istnieje taka liczba G , że $|a_n| < G$, to ciąg ten nazywamy ciągiem **ograniczonym**, w przeciwnym wypadku ciąg jest **nieograniczony**.

Liczba a jest **granica ciągu nieskończonego** (a_n) , jeżeli dla dowolnie małej liczby dodatniej r można wskazać w danym ciągu taki wyraz a_M , że wszystkie następne wyrazy a_n ($n > M$) różnią się od liczby a mniej niż o r (należą do przedziału $(a - r, a + r)$ lub spełniają warunek $|a_n - a| < r$).

Oznaczamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Inaczej: jeśli prawie wszystkie (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy ciągu należą do przedziału $(a - r, a + r)$, to liczba a jest granicą ciągu (a_n) .

Ciąg (a_n) nazywamy wtedy **ciągami zbieżnym**.

Jeżeli dla dowolnej liczby G można wskazać w ciągu taki wyraz a_M , że wszystkie następne wyrazy a_n ($n > M$):

- będą większe od G , to ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym** do nieskończoności (zapisujemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$);
- będą mniejsze od G , to ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym** do minus nieskończoności (zapisujemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

Twierdzenia o ciągach zbieżnych

Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnie małej liczby $r > 0$ można wskazać w tym ciągu taki wyraz a_M , żeby dwa dowolne wyrazy ciągu $(a_n$ i $a_m)$ następujące po a_M różniły się mniej niż o r , czyli: $|a_n - a_m| < r$.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ oraz dla prawie wszystkich n zachodzi zależność: $a_n \leq b_n$, to $a \leq b$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i istnieje taka liczba M , że dla wszystkich $n > M$ zachodzi zależność $a_n \leq c \leq b_n$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$.

Działania na granicach ciągów

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$,

to: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a$

oraz jeśli $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdego n , to $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$.

Wartości granic niektórych ciągów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\text{Dla } a > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Zakładamy, że n, m, k to liczby naturalne dodatnie.

Ciąg arytmetyczny	Ciąg geometryczny
Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy, złożony co najmniej z trzech wyrazów, w którym różnica między dwoma dowolnymi kolejnymi wyrazami jest stała. $a_{n+1} - a_n = a_{m+1} - a_m = r$	Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy, złożony co najmniej z trzech wyrazów, w którym iloraz dwóch dowolnych kolejnych wyrazów jest stały. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{m+1}}{a_m} = q, \quad a_n \neq 0, \quad a_m \neq 0$
Każdy kolejny wyraz ciągu arytmetycznego (z wyjątkiem pierwszego) powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r zwanej różnicą ciągu arytmetycznego. $a_{n+1} = a_n + r$	Każdy kolejny wyraz ciągu geometrycznego (z wyjątkiem pierwszego) powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q zwaną ilorazem ciągu geometrycznego. $a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad a_n \neq 0, \quad q \neq 0$
Wzór na n-ty wyraz $a_n = a_1 + (n - 1)r$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_1 \neq 0, \quad q \neq 0$
Suma n początkowych wyrazów ciągu $S_n = a_1 + \dots + a_n$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot r] \cdot n}{2}$	$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1, & \text{jeśli } q = 1 \\ a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, & \text{jeśli } q \neq 1 \end{cases}$
Własność ciągu $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},$ jeśli $n > 1, 0 < k < n$	$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_{n-k} \cdot a_{n+k},$ jeśli $n > 1, 0 < k < n$

Ciągi rosnące, malejące, stałe

	Ciąg arytmetyczny	Ciąg geometryczny
Ciąg rosnący	$r > 0$	$q > 1$ i $a_1 > 0$ lub $0 < q < 1$ i $a_1 < 0$
Ciąg malejący	$r < 0$	$0 < q < 1$ i $a_1 > 0$ lub $q > 1$ i $a_1 < 0$
Ciąg stały	$r = 0$	$q = 1$

Szereg geometryczny

Jeżeli dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , to możemy utworzyć nowy ciąg (S_n) , zwany ciągiem sum częściowych, w następujący sposób:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

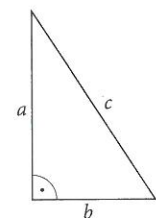
Ciąg ten nazywamy **szeregiem geometrycznym**. Jeżeli ma on granicę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, to szereg nazywamy **zbieżnym**, a liczbę S nazywamy jego **sumą**.

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q , to szereg geometryczny S_n jest zbieżny i ma sumę $S = \frac{a_1}{1 - q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|q| < 1.$$

TEORIA

Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	brak
$\operatorname{ctg} \alpha$	brak	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \sqrt{3}$	0

Kąt obrotu

Kątem obrotu nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku, z których pierwsza to **ramię początkowe**, a druga – **ramię końcowe**.

Przyjmujemy, że jeśli ramię początkowe kąta będzie nieruchome, a ramię końcowe będzie się obracać wokół wierzchołka, to zwrot dodatni ma kąt odpowiadający obrotowi przeciwnemu do ruchu wskazówek zegara, a zwrot ujemny – kąt odpowiadający obrotowi zgodnemu z ruchem wskazówek zegara.

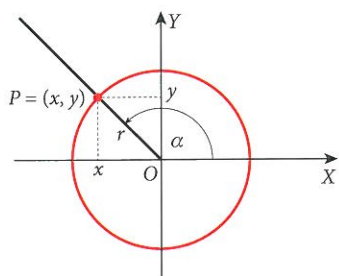
Miarą stopniową niezerowego kąta na płaszczyźnie nazywamy każdą z liczb $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz $0^\circ < \alpha_0 < 360^\circ$.

Miarą stopniową zerowego kąta nazywamy każdą z liczb $k \cdot 360^\circ$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Funkcje trygonometryczne

Niech OXY będzie prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie. Początkowe ramię kąta o mierze α pokrywa się z dodatnią półosią osi OX . Na końcowym ramieniu kąta wybieramy punkt P o współrzędnych (x, y) różny od punktu $O = (0, 0)$. **Sinus α** to stosunek rzędnej y punktu P do długości r promienia wodzącego tego punktu. **Cosinus α** to stosunek odciętej x punktu P do długości r promienia wodzącego tego punktu.

Tangens α to stosunek rzędnej y punktu P do jego odciętej x .



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} \\ \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \end{aligned}$$

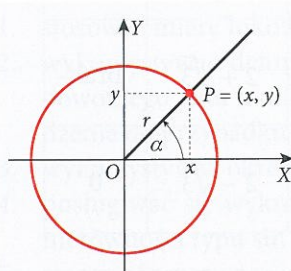
OX – początkowe ramię kąta
 OP – końcowe ramię kąta
 $r = |OP|$ – promień wodzący punktu P
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 x, y – współrzędne punktu P

Między funkcjami trygonometrycznymi kąta α zachodzą związki:

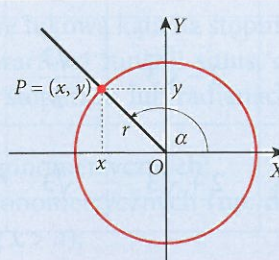
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{C}$$

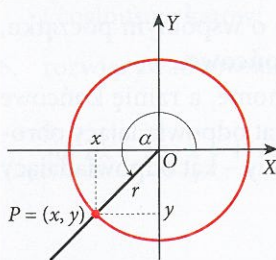
Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu OXY



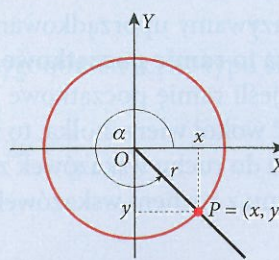
$$\begin{aligned} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ x &> 0 \\ y &> 0 \\ r &> 0 \\ \sin \alpha &> 0 \\ \cos \alpha &> 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 90^\circ < \alpha < 180^\circ \\ x &< 0 \\ y &> 0 \\ r &> 0 \\ \sin \alpha &> 0 \\ \cos \alpha &< 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 180^\circ < \alpha < 270^\circ \\ x &< 0 \\ y &< 0 \\ r &> 0 \\ \sin \alpha &< 0 \\ \cos \alpha &< 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &> 0 \end{aligned}$$



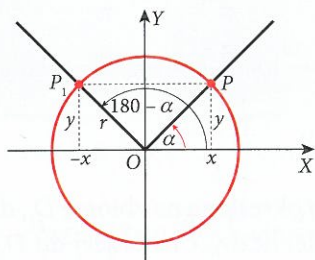
$$\begin{aligned} 270^\circ < \alpha < 360^\circ \\ x &> 0 \\ y &< 0 \\ r &> 0 \\ \sin \alpha &< 0 \\ \cos \alpha &> 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &< 0 \end{aligned}$$

Wzory redukcyjne

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

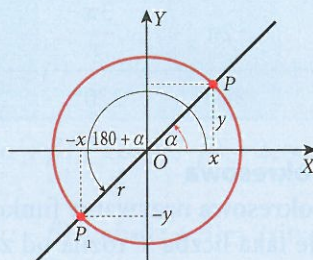
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

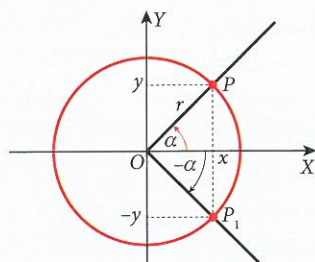
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

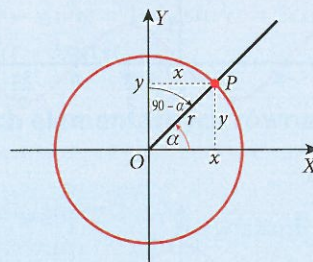
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



Miara łukowa kąta

Miarą łukową kąta nazywamy stosunek długości łuku okręgu zatoczonego przez promień wodzący do długości promienia tego okręgu.

$$x = \frac{l}{r}, \quad x - \text{miara łukowa kąta, } l - \text{długość łuku, } r - \text{długość promienia}$$

Kąt, który na okręgu zatoczonym z jego wierzchołka wyznacza łuk o długości promienia tego okręgu, ma miarę łukową 1 **radian**.

Zamiana stopni na radiany i radianów na stopnie

Zamiana radianów na stopnie				Zamiana stopni na radiany			
$n \text{ radianów} = n \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$				$n^\circ = n \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ radianów}$			
radiany	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
stopnie	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°

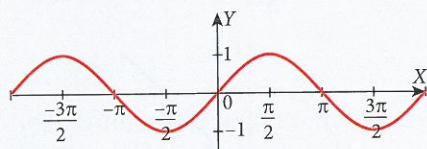
Funkcja okresowa

Funkcją okresową nazywamy funkcję rzeczywistą f określoną na zbiorze D_f , dla której istnieje taka liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do D_f liczba $x + T$ też należy do D_f i $f(x) = f(x + T)$.

Liczba T nazywana jest **okresem** tej funkcji, a najmniejsza istniejąca taka liczba to **okres zasadniczy** (podstawowy).

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej

$$y = \sin x$$



$$\text{dziedzina: } D_f = \mathbf{R}$$

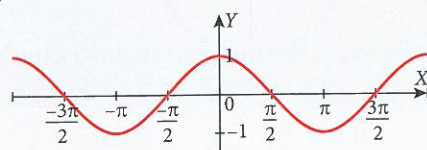
$$\text{zbiór wartości: } f(D_f) = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\text{okres zasadniczy: } T = 2\pi$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{miejsca zerowe: } x_k = k \cdot \pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

$$y = \cos x$$



$$\text{dziedzina: } D_f = \mathbf{R}$$

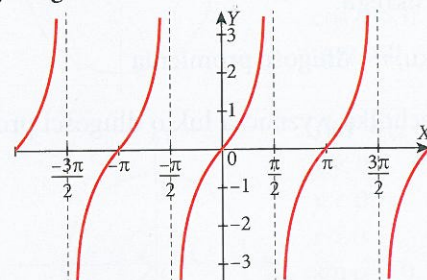
$$\text{zbiór wartości: } f(D_f) = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\text{okres zasadniczy: } T = 2\pi$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\text{miejsca zerowe } x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

$$y = \operatorname{tg} x$$



$$\text{dziedzina:}$$

$$D_f = \mathbf{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C} \right\}$$

$$\text{zbiór wartości: } f(D_f) = \mathbf{R}$$

$$\text{okres zasadniczy: } T = \pi$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\text{miejsca zerowe: } x_k = k \cdot \pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

$$\text{asymptoty } x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

Funkcje połowy kąta

$$\left| \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Funkcje wielokrotności kątów

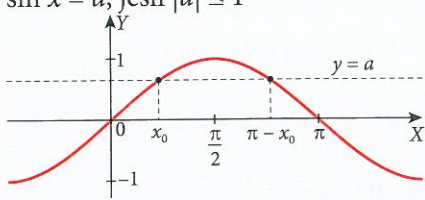
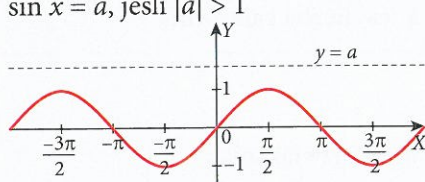
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

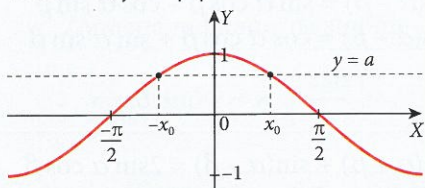
$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Graficzna interpretacja rozwiązań niektórych elementarnych równań trygonometrycznych

równanie, wykres	rozwiązanie podstawowe	rozwiązanie ogólne
$\sin x = a$, jeśli $ a \leq 1$ 	$x = x_0$ lub $x = \pi - x_0$, gdzie $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$x = (-1)^k \cdot x_0 + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
$\sin x = a$, jeśli $ a > 1$ 	brak rozwiązania	brak rozwiązania

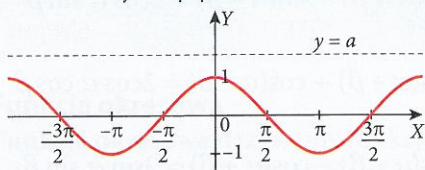
$\cos x = a$, jeśli $|a| \leq 1$



$x = x_0$ lub $x = -x_0$,
gdzie $x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$

$x = \pm x_0 + 2k\pi$, gdzie
 k jest liczbą całkowitą

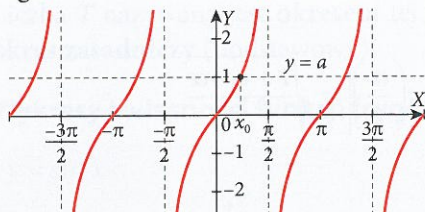
$\cos x = a$, jeśli $|a| > 1$



brak rozwiązania

brak rozwiązania

$\operatorname{tg} x = a$



$x = x_0$,

gdzie $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

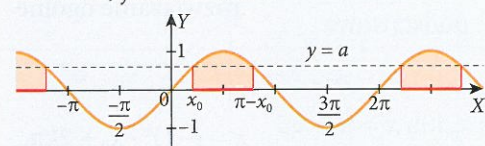
$x = x_0 + k\pi$,
gdzie k jest liczbą
całkowitą

Graficzna interpretacja rozwiązań niektórych elementarnych nierówności trygonometrycznych

nierówność, interpretacja graficzna

rozwiązanie ogólne

$\sin x > a$, jeśli $0 \leq a \leq 1$

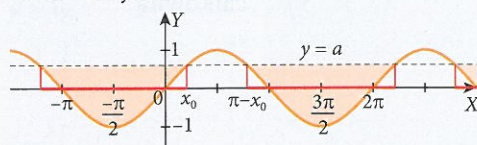


$x_0 + 2k\pi < x < \pi - x_0 + 2k\pi$,

gdzie $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

k jest liczbą całkowitą

$\sin x < a$, jeśli $0 \leq a \leq 1$

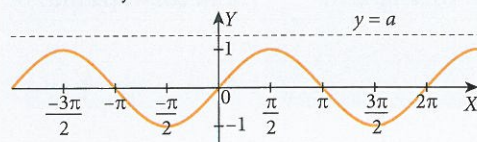


$-\pi - x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$,

gdzie $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

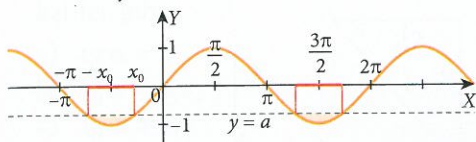
k jest liczbą całkowitą

$\sin x > a$, jeśli $a > 1$



brak rozwiązania

$$\sin x \leq a, \text{ jeśli } -1 < a < 0$$

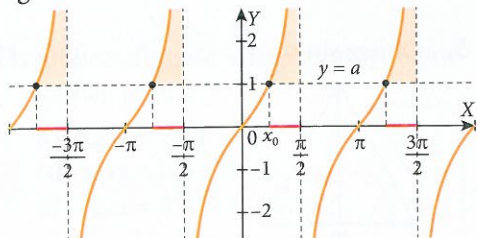


$$-\pi - x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi,$$

$$\text{gdzie } x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

k jest liczbą całkowitą

$$\operatorname{tg} x > a$$



$$x_0 + k\pi < x < x_0 + \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

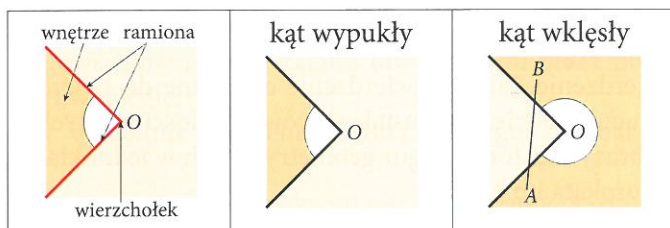
$$\text{gdzie } x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

k jest liczbą całkowitą

TEORIA

Kąty

Kątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną dwiema półprostymi o wspólnym początku. Półproste nazywamy **ramionami kąta**, a początek półprostych nazywamy **wierzchołkiem** kąta O . Sumę ramion nazywamy **brzegiem** kąta, a obszar otwarty wycięty z płaszczyzny przez ramiona kąta nazywamy **wnętrzem** kąta.



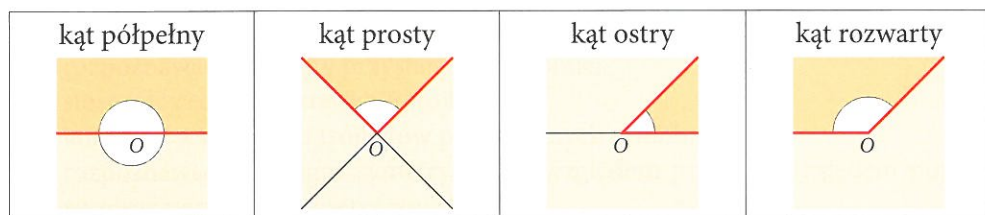
Kąt półpełny, rozwarty, prosty, ostry

Kąt jest kątem **półpełnym**, jeśli jego ramiona są półprostymi dopełniającymi się.

Kąt **prosty** jest to kąt, który jest połową kąta półpełnego. Jeżeli dwie proste przecinające się dzielą płaszczyznę na cztery równe kąty (przystające), to każdy z nich jest kątem prostym.

Kąt mniejszy od kąta prostego nazywamy kątem **ostrym**.

Kąt większy od kąta prostego i mniejszy od kąta półpełnego nazywamy kątem **rozwartym**.



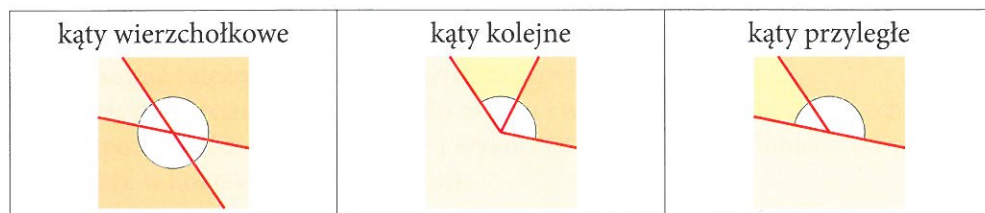
Kąty wierzchołkowe, przyległe, naprzemianległe

Dwie proste przecinające się wyznaczają dwie pary kątów wierzchołkowych.

Dwa kąty wypukłe nazywa się **kątami wierzchołkowymi**, kiedy ramiona jednego z nich są przedłużeniami ramion drugiego.

Dwa kąty są **kątami kolejnymi**, jeśli wspólna część ich obszarów jest ich wspólnym ramieniem.

Dwa kolejne kąty wypukłe, których sumą jest kąt półpełny, nazywa się **kątami przyległymi**.



Dwusieczna kąta

Każdy kąt ma dokładnie jedną oś symetrii. Część osi symetrii, której punkty należą do kąta, nazywamy jego **dwusieczną**.

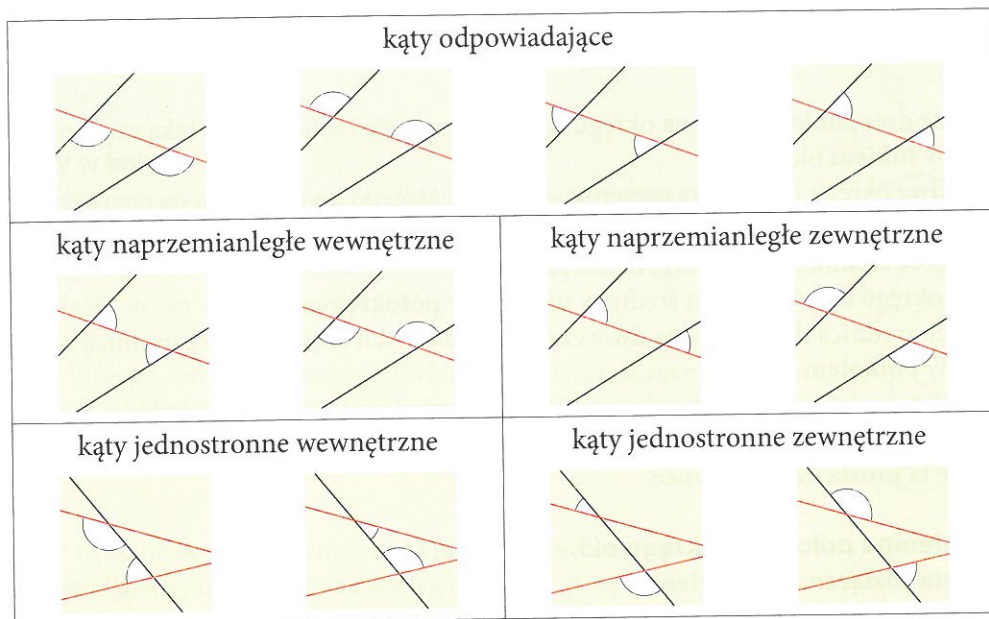
Dwusieczna kąta wypukłego to zbiór punktów równo odległych od ramion tego kąta.

Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

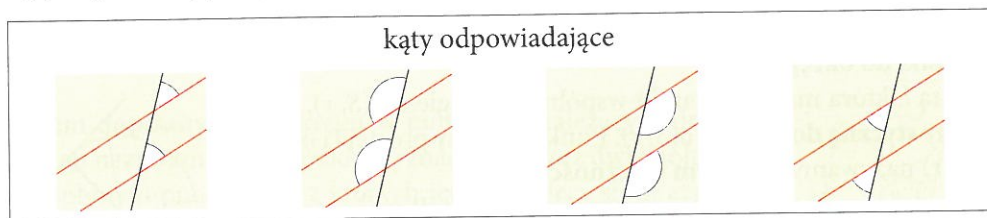
Dwusieczne kątów wierzchołkowych są półprostymi dopełniającymi się do jednej prostej.

Kąty odpowiadające i naprzemianległe

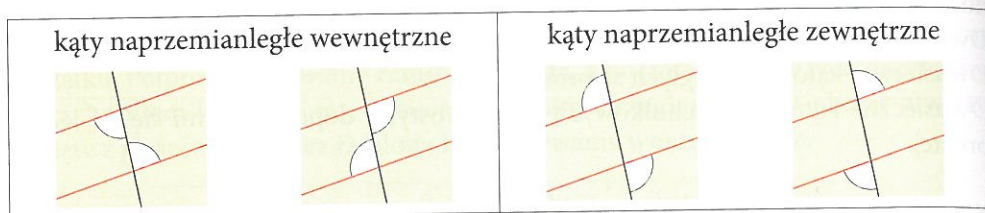
Jeżeli dwie proste przetniemy trzecią prostą, to otrzymamy osiem kątów, wśród których można wyróżnić pary kątów: odpowiadających, naprzemianległych wewnętrznych i zewnętrznych, jednostronnych wewnętrznych i zewnętrznych.

**Twierdzenie o prostych równoległych przeciętych trzecią prostą**

Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to wyznaczone w ten sposób kąty odpowiadające będą równe.



Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to wyznaczone w ten sposób kąty naprzemianległe będą równe.



Okrąg, koło

Okręgiem o środku S i promieniu $r > 0$ ($o(S, r)$) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r ($|SX| = r$).

Kołem o środku S i promieniu $r > 0$ ($k(S, r)$) nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza lub równa r ($|SX| \leq r$).

Każde dwa punkty leżące na okręgu dzielą go na dwie części. Każdą taką część nazywamy **łukiem** okręgu.

Cięciwą okręgu nazywamy niezerowy odcinek, którego końce należą do tego okręgu.

Cięciwę okręgu, do której należy środek okręgu, nazywamy **średnicą** okręgu.

Długość średnicy okręgu $o(S, r)$ jest równa $2r$.

Łuk okręgu oparty na jego średnicy nazywamy **półokręgiem**.

Każda średnica dzieli koło na dwie części. Każdą z tych części wraz ze średnicą nazywamy **półkołem**.

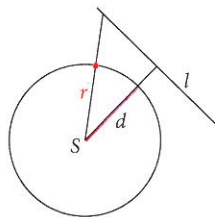
Jeżeli z dowolnego punktu okręgu poprowadzimy prostą do średnicy, to odległość tego punktu od średnicy jest średnią geometryczną długości odcinków, na które ta prosta dzieli średnicę.

Wzajemne położenie okręgu $o(S, r)$ i prostej l

Prosta rozłączna z okręgiem

Prostą l , która nie ma punktów wspólnych z okręgiem $o(S, r)$, nazywamy prostą **rozłączną z okręgiem** $o(S, r)$ albo prostą **zewnątrzną** do okręgu $o(S, r)$.

Odległość środka okręgu od prostej jest większa od długości promienia okręgu ($d(S, l) > r$).

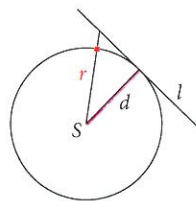


Styczna do okręgu

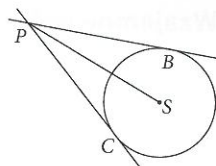
Prostą l , która ma jeden punkt wspólny z okręgiem $o(S, r)$, nazywamy **styczną do okręgu** $o(S, r)$. Punkt wspólny prostej l i okręgu $o(S, r)$ nazywamy **punktem styczności**.

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa długości promienia okręgu ($d(S, l) = r$).

Styczna do okręgu tworzy kąt prosty z prostą poprowadzoną przez środek okręgu i punkt styczności. Styczna l do okręgu $o(S, r)$ jest prostopadłą do promienia r tego okręgu poprowadzonego z środka okręgu do punktu styczności.



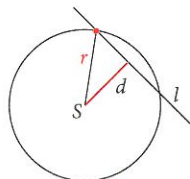
Jeżeli przez punkt P zewnętrzny koła $k(S, r)$ poprowadzimy styczne do okręgu $o(S, r)$, to odcinki łączące ten punkt z punktami styczności są równe ($|PC| = |PB|$).



Sieczna okręgu

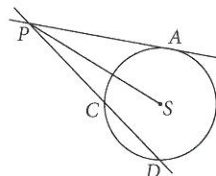
Prostą l , która ma dwa punkty wspólne z okręgiem $o(S, r)$, nazywamy **sieczną okręgu** $o(S, r)$.

Odległość środka okręgu od siecznej l jest mniejsza od długości promienia okręgu ($d(S, l) < r$).



Jeżeli przez punkt P zewnętrzny koła $k(S, r)$ poprowadzimy styczną do okręgu $o(S, r)$ w punkcie A i sieczną wyznaczającą cięciwę CD , to $|CP| \cdot |DP| = |AP|^2 = |PS|^2 - r^2$.

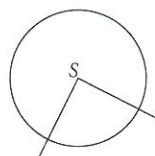
Styczna i sieczna



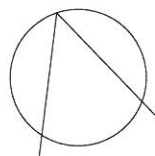
Kąty w kole

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym** tego okręgu.

Kątom środkowym o równych miarach w danym okręgu odpowiadają cięciwy o tej samej długości.

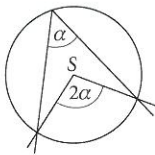


Kąt, którego ramiona zawierają dwie cięciwy wychodzące z jednego punktu okręgu, nazywamy **kątem wpisanym** w ten okrąg.

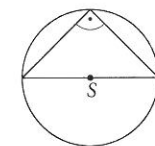


Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Kąt środkowy ma miarę dwa razy większą niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

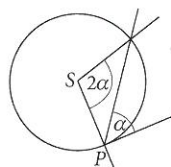


Kąt wpisany w okrąg jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jest oparty na półokręgu.

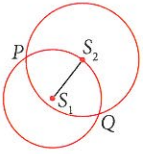
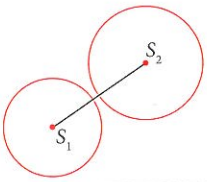
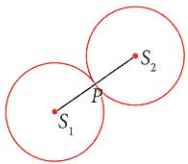
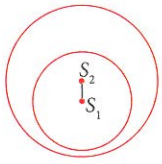
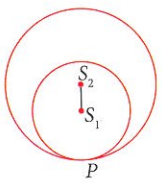
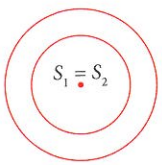


Kątem dopisanym do okręgu w punkcie P należącym do tego okręgu nazywamy kąt wypukły wyznaczony przez dwie półproste o wspólnym początku P , z których jedna zawiera się w stycznej do okręgu w punkcie P , a druga zawiera jedną z cięciw okręgu.

Miara kąta środkowego opartego na łuku okręgu będącym częścią wspólną okręgu i kąta dopisanego jest dwa razy większa od miary kąta dopisanego.



Wzajemne położenie dwóch okręgów $o_1(S_1, r_1)$ i $o_2(S_2, r_2)$

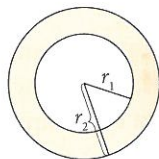
okręgi przecinające się  dwa punkty wspólne $r_2 - r_1 < S_1 S_2 < r_1 + r_2$	okręgi rozłączne zewnętrznie  brak punktów wspólnych $S_1 S_2 > r_1 + r_2$
okręgi styczne zewnętrznie  jeden punkt wspólny $S_1 S_2 = r_1 + r_2$	okręgi rozłączne wewnętrznie  brak punktów wspólnych $S_1 S_2 < r_2 - r_1$
okręgi styczne wewnętrznie  jeden punkt wspólny $S_1 S_2 = r_2 - r_1$	okręgi współśrodkowe  brak punktów wspólnych $S_1 = S_2$ $r_1 \neq r_2$

Środki okręgów stycznych i punkt styczności leżą na jednej prostej.

Części koła
Pierścień kołowy

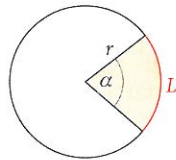
Różnicę koła o promieniu r_2 i współśrodkowego koła otwartego o promieniu r_1 ($r_1 < r_2$) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

$$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$


Wycinek kołowy

Część wspólną koła i jego kąta środkowego nazywamy **wycinkiem koła (wycinkiem kołowym)**.

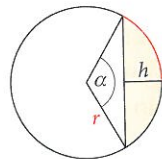
$$P = \frac{Lr}{2}, P = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2, \text{ gdzie } P - \text{pole}, L - \text{długość łuku.}$$


Odcinek kołowy

Część koła ograniczoną cięciwą i łukiem na niej opartym nazywamy **odcinkiem koła (odcinkiem kołowym)**.

$$P = \frac{1}{2} [Lr - a(r - h)], P = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right),$$

gdzie a – długość cięciwy, L – długość łuku.



Wielokąty

Wielokątem (n -kątem) nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zamkniętą zwyczajną o n bokach (gdzie $n \geq 3$) wraz z tą łamaną. Boki i wierzchołki łamanej ograniczającej wielokąt nazywamy odpowiednio bokami i wierzchołkami wielokąta. Wielokąt o n bokach ma n kątów.

Wnętrzem wielokąta nazywamy figurę geometryczną złożoną z punktów wielokąta nieleżących na jego bokach. Punkty płaszczyzny nienależące do obszaru wielokąta nazywamy jego **zewnętrzem**.

Długość łamanej ograniczającej wielokąt nazywamy **obwodem** wielokąta.

Odcinek łączący dwa wierzchołki wielokąta, ale niebędący jego bokiem, nazywamy **przekątną** wielokąta.

Przekątne n -kąta wypukłego poprowadzone z jednego jego wierzchołka dzielą ten wielokąt na $n - 2$ trójkątów.

Liczba przekątnych n -kąta jest równa $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

Kąty wielokąta

Kąt płaski, którego wierzchołek pokrywa się z danym wierzchołkiem wielokąta i którego część wspólna z częścią pewnego otoczenia wierzchołka jest identyczna z częścią wspólną tego otoczenia i wielokąta, nazywamy **kątem wewnętrznym** wielokąta.

Ramiona kąta wewnętrznego wielokąta zawierają oba boki wielokąta wychodzące z danego wierzchołka.

Suma miar kątów wielokąta o n bokach jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

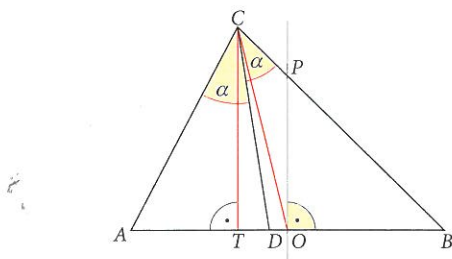
Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy każdy kąt przyległy do jednego z kątów wewnętrznych.

Suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego (licząc po jednym dla każdego wierzchołka) jest niezależna od liczby jego boków i równa 360° .

Trójkąt

Odcinki i proste w trójkącie

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



CO – środkowa boku AB

CD – dwusieczna kąta ACB

pr. PO – symetralna boku AB

CT – wysokość z wierzchołka C

Wysokością trójkąta nazywamy odcinek poprowadzony z wierzchołka trójkąta prostopadłe do przeciwległego boku lub jego przedłużenia. Punkt wspólny wysokości i boku (lub jego przedłużenia) nazywamy **spodkiem** wysokości.

Symetralną boku nazywamy prostą prostopadłą do tego boku przechodzącą przez jego środek.

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i ma długość równą połowie długości tego boku.

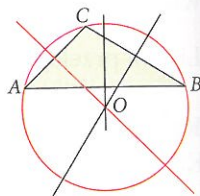
W dowolnym trójkącie ABC wybieramy trzy punkty DEF , należące odpowiednio do boków AB, AC, BC , różne od wierzchołków trójkąta. Proste AF, CD, BE przecinają się

w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BF|}{|CF|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1$.

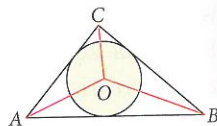
Dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków.

Punkty szczególne w trójkącie

Symetralne boków w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie zwanym **ortocentrum**. Środki w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który każdą z nich dzieli w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta. Punkt przecięcia się trzech środkowych nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**.

Związki miarowe w wybranych trójkątach

Trójkąt dowolny

	$p = \frac{a + b + c}{2}$ $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$	a, b, c – długości boków α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta h_a – wysokość opuszczona na bok BC h_b – wysokość opuszczona na bok AC
--	---	---

Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $P = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ $P = \frac{abc}{4R} \qquad P = r \cdot p$ $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $a = b \cos \beta + c \cos \beta$ <table><tr><td>$a + b > c$$a + c > b$$c + b > a$</td><td>$R = \frac{abc}{4rp}$</td></tr></table> $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$	$a + b > c$ $a + c > b$ $c + b > a$	$R = \frac{abc}{4rp}$	h_c – wysokość opuszczona na bok AB r – promień okręgu wpisanego w trójkąt p – połowa obwodu R – promień okręgu opisanego na trójkącie P – pole trójkąta
$a + b > c$ $a + c > b$ $c + b > a$	$R = \frac{abc}{4rp}$			

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta przeciwległego do tego boku jest wielkością stałą, równą długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

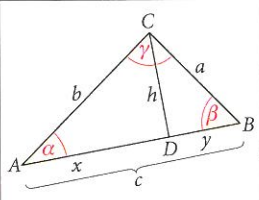
W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków przez cosinus kąta zawartego między tymi bokami.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

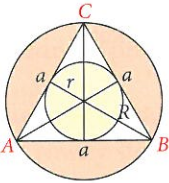
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Trójkąt prostokątny

	$h^2 = x \cdot y$ $a^2 = y \cdot c$ $b^2 = x \cdot c$ $c = 2R$	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = x + y$ $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$	a, b – długości przyprostokątnych c – długość przeciwprostokątnej x – długość rzutu prostokątnego przyprostokątnej AC na przeciwprostokątną y – długość rzutu prostokątnego przyprostokątnej BC na przeciwprostokątną h – wysokość opuszczona na przeciwprostokątną r – promień okręgu wpisanego w trójkąt p – połowa obwodu R – promień okręgu opisanego na trójkącie
	$\gamma = 90^\circ \quad \alpha + \beta = 90^\circ$		
Pole trójkąta $P = \frac{1}{2}c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$ $P = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} \beta$ $P = \frac{1}{2}a \cdot b$	$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$ $b = c \cdot \cos \alpha = c \cdot \sin \beta$ $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$ $h = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ $p = \frac{a + b + c}{2}$		

$P = \frac{1}{2} c \cdot h$ $P = r \cdot p$ $P = h \cdot R$	P – pole trójkąta α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta
---	--

Trójkąt równoboczny

	$r = \frac{1}{3} h \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $\alpha = 60^\circ$	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $R = \frac{2}{3} h = 2r$	a – długość boku α – miara kątów wewnętrznych trójkąta h – wysokość r – promień okręgu wpisanego w trójkąt R – promień okręgu opisanego na trójkącie P – pole trójkąta
	Pole trójkąta $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$		

Czworokąty

Wielokąt, który ma cztery boki, nazywamy **czworokątem**.

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .

Odcinki łączące środki przeciwległych boków dowolnego czworokąta dzielą się wzajemnie na połowy.

Odcinki łączące środki kolejnych boków czworokąta tworzą równoległobok.

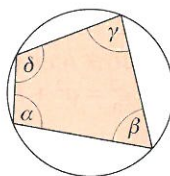
Czworokąt wpisany w okrąg (okrąg opisany na czworokącie)

Na dowolnym czworokącie można opisać okrąg tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe, czyli: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

$$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$



Twierdzenie Ptolemeusza

W czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości par przeciwległych boków.

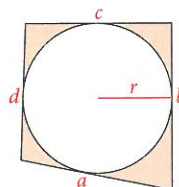
Czworokąt opisany na okręgu (okrąg wpisany w czworokąt)

W dowolny czworokąt można wpisać okrąg tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich jego kątów przecinają się w jednym punkcie.

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$

$$P = \frac{1}{2} r(a+b+c+d)$$



Deltoid

Czworokąt wypukły, którego oś symetrii zawiera jedną z przekątnych, nazywamy **deltoidem**.

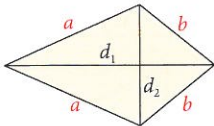
Deltoid ma dwie pary sąsiednich boków równych.

Kąty w wierzchołkach nieleżących na osi symetrii deltoidu są przystające.

Przekątne deltoidu dzielą się pod kątem prostym.

Punkt przecięcia przekątnych deltoidu wyznacza środek przekątnej łączącej wierzchołki przystających kątów.

Jeżeli przystające kąty wewnętrzne są proste, to na deltoidzie można opisać okrąg, a jego średnicą jest przekątna zawarta w osi symetrii deltoidu.

$P = \frac{1}{2} d_1 d_2$ $l = 2a + 2b$		a, b – długości boków d_1, d_2 – długości przekątnych l – obwód P – pole
---	---	---

Trapez

Trapezem nazywamy czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.

Równoległe boki trapezu nazywamy **podstawami** trapezu. Nierównoległe jego boki nazywamy **ramionami** trapezu.

Trapez, w którym boki nierównoległe są równe, nazywamy **trapezem równoramiennym**.

Trapez, w którym jedno ramię jest prostopadłe do podstaw tego trapezu, nazywamy **trapezem prostokątnym**.

Odcinek łączący środki ramion trapezu nazywamy **środkową trapezu**.

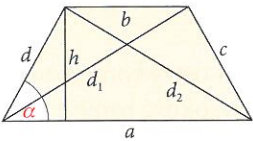
Wysokość trapezu jest równa odległości jego podstaw.

Suma miar kątów wewnętrznych przy każdym ramieniu jest równa 180° .

W trapezie równoramiennym wysokości poprowadzone z końców krótszej podstawy odcinają dwa przystające trójkąty prostokątne.

Długość środkowej trapezu jest średnią arytmetyczną długości obu jego podstaw.

Na trapezie równoramiennym można opisać okrąg.

$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$ $l = a + b + c + d$		a, b, c, d – długości boków d_1, d_2 – długości przekątnych l – obwód P – pole trapezu α – kąt ostry trapezu h – wysokość trapezu
---	---	---

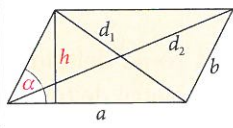
Równoległobok

Równoległobokiem nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Przeciwnie boki równoległoboku są równoległe i równe.

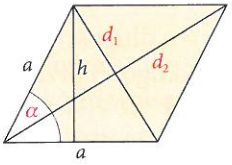
Każde dwa kąty przeciwległe równoległoboku są równe.

Punkt przecięcia przekątnych jest środkiem ciężkości równoległoboku.
 Suma miar każdego dwóch kątów leżących przy tym samym boku jest równa 180° .
 Przekątne równoległoboku dzielą się wzajemnie na połowy.
 Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające.
 Istnieje środek symetrii równoległoboku.

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ $P = ab \sin \alpha$ $P = ah$ $l = 2a + 2b$		a, b – długości boków d_1, d_2 – długości przekątnych l – obwód P – pole α – kąt ostry równoległoboku h – wysokość równoległoboku
---	---	---

Romb

Rombem nazywamy równoległobok, który ma wszystkie boki równej długości.
 Wszystkie boki rombu są równej długości.
 Każde dwa przeciwległe kąty rombu są równe.
 Przeciwnie boki rombu są równoległe.
 Suma miar każdego dwóch kątów leżących przy tym samym boku jest równa 180° .
 Przekątne rombu dzielą się wzajemnie na połowy.
 Przekątne rombu są prostopadłe.
 Przekątna dzieli romb na dwa równoramienne trójkąty przystające.
 Przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów.
 Przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.
 Punkt przecięcia przekątnych wyznacza środek okręgu wpisanego w romb i środek ciężkości rombu.
 Promień okręgu wpisanego w romb jest równy połowie długości wysokości tego rombu.
 Istnieje środek symetrii rombu.
 Przekątne są osiami symetrii rombu.

$P = ah$ $P = a^2 \sin \alpha$ $P = \frac{1}{2} d_1 d_2$ $l = 4a$ $r = \frac{1}{2} h$		a – długość boku d_1, d_2 – długości przekątnych l – obwód P – pole α – kąt ostry rombu h – wysokość rombu r – promień okręgu wpisanego w romb
---	---	---

Prostokąt

Prostokątem nazywamy czworokąt, którego wszystkie kąty są kątami prostymi.
 Wszystkie kąty prostokąta są proste.
 Przekątne prostokąta są równej długości.

Przeciwnie boki prostokąta są równoległe i równe.

Przekątna dzieli prostokąt na dwa prostokątne trójkąty przystające.

Przekątne prostokąta dzielą się wzajemnie na połowy.

Przekątne dzielą prostokąt na cztery trójkąty równoramienne o równych polach.

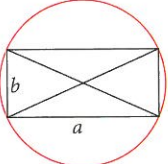
Punkt przecięcia przekątnych wyznacza środek okręgu opisanego na prostokącie.

Promień okręgu opisanego prostokącie jest równy połowie długości przekątnej tego prostokąta.

Istnieje środek symetrii prostokąta.

Symetralne boków są osiami symetrii prostokąta.

W prostokąt, który nie jest kwadratem, nie można wpisać okręgu.

$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ $l = 2a + 2b$ $P = ab$		a, b – długości boków R – promień okręgu opisanego na prostokącie d – długość przekątnej l – obwód P – pole
--	---	---

Kwadrat

Kwadratem nazywamy taki czworokąt, który ma wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

Wszystkie kąty kwadratu są proste.

Wszystkie boki kwadratu są równej długości.

Przeciwnie boki kwadratu są równoległe.

Przekątne kwadratu są równej długości.

Przekątne kwadratu dzielą się na połowy pod kątem prostym.

Przekątne kwadratu zawierają się w dwusiecznych jego kątów.

Punkt przecięcia przekątnych wyznacza środek okręgu wpisanego w kwadrat.

Punkt przecięcia przekątnych wyznacza środek okręgu opisanego na kwadracie.

Przekątne kwadratu zawierają się w dwusiecznych jego kątów.

Każda przekątna dzieli kwadrat na dwa przystające trójkąty prostokątne równoramienne.

Każda przekątna tworzy z bokiem kwadratu kąt 45° .

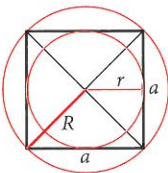
Przekątne kwadratu dzielą go na cztery przystające trójkąty prostokątne równoramienne.

Promień okręgu wpisanego w kwadrat jest równy połowie długości boku tego kwadratu.

Promień okręgu opisanego na kwadracie jest równy połowie długości przekątnej tego kwadratu.

Istnieje środek symetrii kwadratu.

Symetralne boków i przekątne kwadratu są osiami symetrii.

$r = \frac{1}{2}a$ $R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \quad d = a\sqrt{2}$ $P = a^2, \quad P = \frac{1}{2}d^2$ $l = 4a$		a – długość boku r – promień okręgu wpisanego w kwadrat R – promień okręgu opisanego na kwadracie d – długość przekątnej l – obwód P – pole
---	---	--

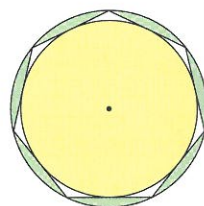
Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, którego boki są równej długości, a kąty przystające.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.

W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg.

Okręgi te są współśrodkowe



Symetralna boku wielokąta foremnego jest jego osią symetrii.

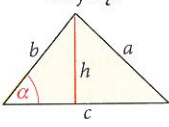
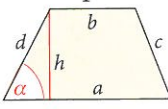
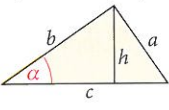
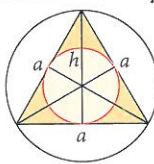
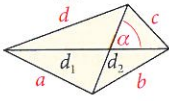
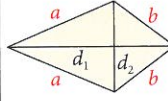
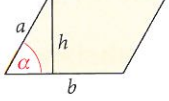
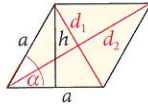
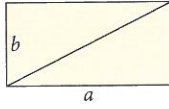
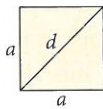
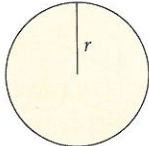
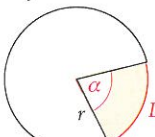
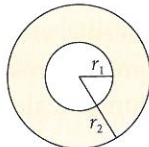
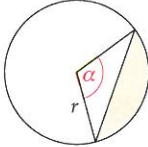
Dwusieczna kąta wielokąta foremnego zawiera się w jego osi symetrii.

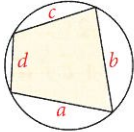
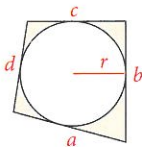
Zależności w wybranych wielokątach foremnych

Liczba boków	Miara kąta wewnętrznego	Promień R okręgu opisanego na wielokącie	Promień r okręgu wpisanego w wielokąt	Pole P wielokąta
3 	$60^\circ \quad \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4 	$90^\circ \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
5 	$108^\circ \quad \left(\frac{3\pi}{5}\right)$	$\frac{a\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$	$\frac{a\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{10}$	$\frac{a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}$
6 	$120^\circ \quad \left(\frac{2\pi}{3}\right)$	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8 	$135^\circ \quad \left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{a\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{2}$	$\frac{a(\sqrt{2}+1)}{2}$	$2a^2(\sqrt{2}+1)$
n	$\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$	$\frac{a}{2\sin \frac{\pi}{n}}$	$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$	$\frac{\pi}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$

Pola i obwody figur płaskich

 P – pole, l – obwód

trójkąt 	$P = \frac{ch}{2}$ $P = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ $l = a + b + c$	trapez 	$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ $l = a + b + c + d$
trójkąt prostokątny 	$P = \frac{ab}{2}$ $l = a + b + c$	trójkąt równoboczny 	$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ $P = \frac{ah}{2}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $l = 3a$
czworokąt wypukły 	$P = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$ $l = a + b + c + d$	deltoid 	$P = \frac{d_1 d_2}{2}$ $l = 2(a + b)$
równoległobok 	$P = ah$ $P = ab \sin \alpha$ $l = 2(a + b)$	romb 	$P = ah$ $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ $P = a^2 \sin \alpha$ $l = 4a$
prostokąt 	$P = ab$ $l = 2(a + b)$	kwadrat 	$P = a^2$ $P = \frac{d^2}{2}$ $l = 4a$
koło 	$P = \pi r^2$ $l = 2\pi r$	wycinek koła 	$P = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$ $P = \frac{Lr}{2}$
pierścień kołowy 	$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$	odcinek koła 	$P = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$

czworokąt wpisany w okrąg 	$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ $p = \frac{a+b+c+d}{2}$	czworokąt opisany na okręgu 	$P = pr$ $p = \frac{a+b+c+d}{2}$
--	---	--	----------------------------------

Przystawianie wielokątów

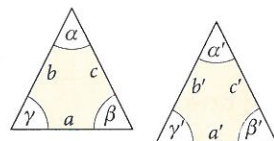
Wielokątami przystającymi nazywamy wszystkie wielokąty, które mają taką samą liczbą boków, o takiej samej długości, w których kąty między tymi bokami mają takie same miary.

Cechy przystawiania trójkątów

bbb

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta mają długości odpowiednio równe długościom trzech boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.

$$a = a', b = b' \text{ i } c = c'$$



bkb

Jeżeli kąt i dwa boki zawarte w ramionach tego kąta w jednym trójkącie mają miary równe miarom odpowiednich boków i kąta drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.

$$a = a', b = b' \text{ i } \gamma = \gamma' \text{ lub } a = a', c = c' \text{ i } \beta = \beta' \text{ lub } b = b', c = c' \text{ i } \alpha = \alpha'$$

kbk

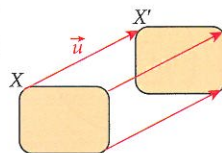
Jeżeli bok jednego trójkąta i dwa kąty leżące przy tym boku mają miary równe miarom odpowiednich kątów i boku drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.

$$a = a', \gamma = \gamma' \text{ i } \beta = \beta' \text{ lub } b = b', \alpha = \alpha' \text{ i } \gamma = \gamma' \text{ lub } c = c', \alpha = \alpha' \text{ i } \beta = \beta'$$

Przesunięcie równoległe o wektor (translacja)

Przesunięciem równoległym (translacją) o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie, w którym obrazem punktu X płaszczyzny jest taki punkt X' , że $\overrightarrow{XX'} = \vec{u}$.

Obrazem prostej w przesunięciu o wektor jest prosta równoległa. Przesunięcie o wektor nie zmienia odległości między punktami.

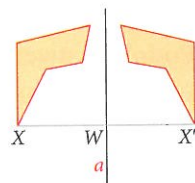


Symetria osiowa S_a

Symetrią względem prostej a (symetrią osiową) nazywamy przekształcenie, w którym każdemu punktowi X przyporządkowany jest punkt X' leżący na prostej prostopadłej przechodzącej przez punkt W , w tej samej odległości od W co punkt X , ale po drugiej stronie prostej a .

Punkty X i X' są punktami symetrycznymi względem prostej a wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równocześnie następujące warunki:

- prosta a jest prostopadła do odcinka XX' ,
- punkty X i X' leżą po różnych stronach prostej a ,
- środek odcinka XX' leży na prostej a .



Jeśli punkt należy do prostej a , to punktem symetrycznym do niego względem tej prostej jest ten sam punkt.

Symetria względem prostej a nie zmienia odległości między punktami.

O prostej mówimy, że jest **osią symetrii figury**, gdy ta figura i figura do niej symetryczna względem prostej pokrywają się.

Figurę mającą oś symetrii nazywamy figurą osiowosymetryczną.

Symetria środkowa S_A

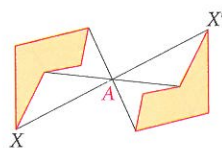
Symetrią względem punktu A (symetrią środkową) nazywamy przekształcenie, w którym obrazem punktu X jest taki punkt X' , że punkt A jest środkiem odcinka XX' .

Punkty X i X' nazywa się punktami symetrycznymi względem środka symetrii A . Symetria środkowa względem punktu A jest obrotem dookoła punktu A o kąt półpełny.

Obrazem punktu A jest ten sam punkt.

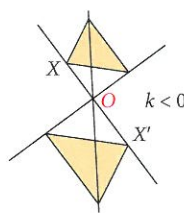
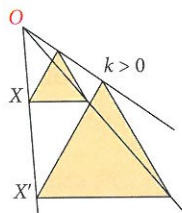
Obrazem prostej jest prosta do niej równoległa.

Figurę f nazywamy **środkowosymetryczną**, jeżeli istnieje punkt O taki, że obrazem tej figury w symetrii środkowej względem punktu O jest ta sama figura.



Jednokładność i podobieństwo

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi X płaszczyzny przyporządkowuje punkt X' taki, że $\vec{OX'} = k \cdot \vec{OX}$.



Obrazem wektora $\vec{u}$ w jednokładności o skali k jest wektor $k\vec{u}$.

Jednokładność zachowuje współliniowość i uporządkowanie punktów.

Jednokładność zachowuje równoległość prostych.

Jednokładność przekształca kąt w kąt przystający.

Jednokładność o skali k , gdzie $|k| \neq 1$, zmienia odległość punktów, ale zachowuje stosunek długości odcinków.

Jednokładność przekształca okrąg w okrąg.

Figury f_1, f_2 nazywamy **jednokładnymi**, jeśli istnieje jednokładność przekształcająca jedną z tych figur na drugą.

Podobieństwo

Podobieństwem w skali k ($k > 0$) nazywamy przekształcenie płaszczyzny zmieniające odległość dowolnych dwóch punktów w skali k , (przyporządkowujące punktom X, Y płaszczyzny punkty X', Y' w taki sposób, aby $|X'Y'| = k|XY|$).

Przekształcenie odwrotne do podobieństwa w skali k jest podobieństwem w skali $\frac{1}{k}$.

Dwie figury f i f' nazywamy **podobnymi**, co zapisujemy $f \sim f'$, gdy istnieje podobieństwo przekształcające jedną z tych figur na drugą.

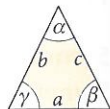
Pola figur podobnych w skali k są podobne w skali k^2 .

Cechy podobieństwa trójkątów

bbb

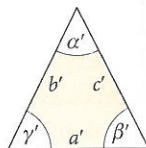
Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



bkb

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego i kąty zawarte między tymi bokami mają równe miary, to te trójkąty są podobne.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ i } \gamma = \gamma' \quad \text{lub} \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \text{ i } \beta = \beta' \quad \text{lub} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \text{ i } \alpha = \alpha'$$

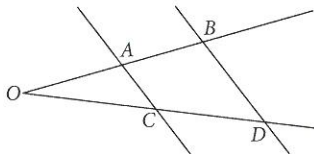
kk

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta mają miary równe miarom dwóch kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

$$\alpha = \alpha' \text{ i } \beta = \beta' \quad \text{lub} \quad \gamma = \gamma' \text{ i } \alpha = \alpha' \quad \text{lub} \quad \beta = \beta' \text{ i } \gamma = \gamma'$$

Twierdzenie Talesa

Twierdzenie



Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu tego kąta.

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli stosunek długości odcinków OA i OB , leżących na jednym ramieniu kąta, jest równy stosunkowi długości odcinków OC i OD leżących na drugim ramieniu kąta, to proste AC i BD są równoległe.

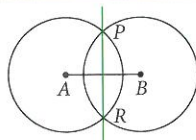
Wnioski z twierdzenia Talesa

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia Talesa, to

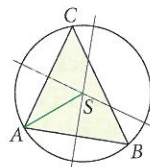
$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}, \quad \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|AB|}{|CD|}, \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

Najprostsze konstrukcje geometryczne**Symetralna odcinka AB**

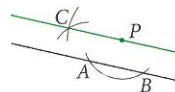
1. Zakreślamy łuki o środkach w punktach A i B i promieniach tak dużych, aby się te łuki przecięły. Punkty przecięcia łuków oznaczamy, np. P i R .
2. Prowadzimy prostą PR .

**Okrąg opisany na trójkącie ABC**

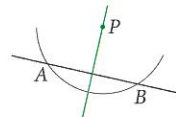
1. Wyznaczamy symetralne dwóch boków trójkąta ABC . Punkt przecięcia tych symetralnych oznaczamy, np. S .
2. Zakreślamy okrąg o środku w punkcie S i promieniu równym odległości tego punktu od dowolnego z punktów A, B, C .

**Prosta równoległa do danej prostej przechodząca przez dany punkt P**

1. Zakreślamy łuk o środku w punkcie P i promieniu tak dużym, aby ten łuk przeciął daną prostą w dwóch punktach. Oznaczamy punkty przecięcia, np. A i B .
2. Zakreślamy dwa łuki: o środku w punkcie P i promieniu równym $|AB|$ i łuk o środku w punkcie A i promieniu $|PB|$ tak, aby się przecięły. Oznaczamy punkt przecięcia tych łuków, np. C .
3. Prowadzimy prostą PC .

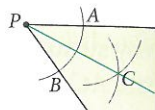
**Prosta prostopadła do danej prostej przechodząca przez dany punkt P**

1. Zakreślamy łuk o środku w punkcie P i promieniu tak dużym, aby łuk ten przeciął daną prostą w dwóch punktach. Oznaczamy punkty przecięcia, np. A i B .
2. Wyznaczamy symetralną odcinka AB . Jest ona prostopadła do danej prostej i przechodzi przez punkt P .

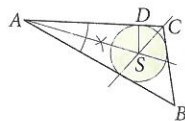


Dwusieczna kąta o wierzchołku P

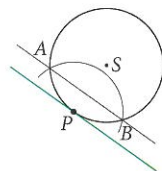
1. Zakreślamy łuk o środku w punkcie P i dowolnym promieniu tak, aby przeciął oba ramiona kąta. Oznaczamy punkty przecięcia, np. A i B .
2. Zakreślamy dwa łuki o środkach w punktach A i B i promieniu tak dużym, aby łuki te się przecięły. Oznaczamy punkt przecięcia tych łuków, np. C .
3. Prowadzimy prostą PC .

**Okrąg wpisany w trójkąt ABC**

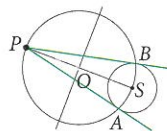
1. Wyznaczamy dwusieczne dwóch kątów trójkąta ABC . Punkt przecięcia tych dwusiecznych oznaczamy np. S .
2. Wyznaczamy prostą prostopadłą do dowolnego boku przechodzącą przez punkt S . Oznaczamy punkt przecięcia tej prostej z bokiem, do którego jest prostopadła, np. D .
3. Kreślimy okrąg o środku w punkcie S i promieniu równym $|SD|$.

**Prosta styczna do okręgu w danym punkcie P**

1. Zakreślamy łuk o środku w punkcie P i takim promieniu, aby przeciął się z okręgiem w dwóch punktach. Oznaczamy je, np. A i B .
2. Prowadzimy prostą równoległą do AB przechodzącą przez punkt P .

**Prosta styczna do okręgu przechodząca przez dany punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu**

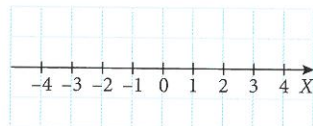
1. Wyznaczamy symetralną odcinka SP , gdzie S jest środkiem okręgu. Środek odcinka SP oznaczamy np. O .
2. Zakreślamy okrąg o środku w punkcie O i promieniu $|OP|$. Oznaczamy punkty przecięcia tego okręgu z okręgiem danym, np. A i B .
3. Prowadzimy proste AP i BP . To szukane styczne.



TEORIA

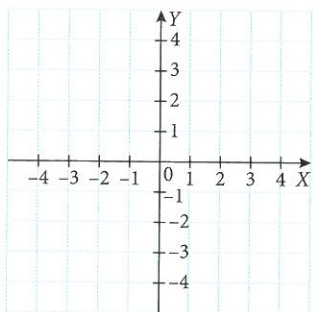
Oś liczbowa. Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie

Oś liczbową wyznaczamy na prostej poprzez wybór punktu zerowego i jednostki oraz ustalenie dodatniego zwrotu.



Liczbę x przyporządkowaną punktowi P na osi liczbowej nazywamy **współrzedną** punktu P na tej osi.

Prostokątny (kartezjański) układ współrzędnych na płaszczyźnie to para prostopadłych osi o wspólnym początku (O), nazywanym początkiem układu współrzędnych, oraz jednakowych jednostkach.



Punkt

	Na osi liczbowej	Na płaszczyźnie
Współrzedne punktu	$A = (x_A), B = (x_B)$	$A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$
Odległość między punktami A i B	$ AB = x_B - x_A = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$	$ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Współrzedne środka S odcinka AB	$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \right)$	$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Prosta

Równanie prostej na płaszczyźnie

Nazwa postaci	Równanie	Założenie	Uwagi
ogólna	$Ax + By + C = 0$	$A^2 + B^2 > 0$	
kierunkowa	$y = ax + b, a = \operatorname{tg} \alpha$	$\alpha \neq 90^\circ$	dotyczy prostej nachylonej pod kątem α do osi OX

Przypadki szczególne równania prostej w postaci ogólnej

Warunek	Postać równania	Położenie prostej
$B = 0$	$x = -\frac{C}{A}$	prosta równoległa do osi OY
$A = 0$	$y = -\frac{C}{B}$	prosta równoległa do osi OX
$B = C = 0$	$Ax = 0, x = 0$	oś OY
$A = C = 0$	$By = 0, y = 0$	oś OX

Sposób wyznaczania równania prostej

Dane	Równanie	Założenia
- punkt $P = (x_0, y_0)$ należący do prostej - miara kąta nachylenia prostej do osi OX	$y - y_0 = a(x - x_0),$ $a = \operatorname{tg} \alpha$	$\alpha \neq (2k + 1)90^\circ,$ $k \in \mathbb{C}$
- punkty $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ należące do prostej	$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$	$x_1 \neq x_2$
- punkt $P(x_0, y_0)$ należący do prostej - wektor $[A, B]$ do niej prostopadły	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$A^2 + B^2 > 0$

Punkt i prosta

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $l: Ax + By + C = 0$.

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu kierunkowym $l: y = ax + b$.

$$d(P, l) = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Proste równoległe i prostopadłe

	Postać kierunkowa	Postać ogólna
Równania prostych	$l_1: y = a_1x + b_1$ $l_2: y = a_2x + b_2$	$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$
Warunek równoległości prostych	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$
Warunek prostopadłości prostych	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 = -1$	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Odległość dwóch prostych równoległych to odległość dowolnego punktu jednej prostej od drugiej prostej. Jeśli te proste są dane w postaci kierunkowej, to odległość

dwóch prostych równoległych można obliczyć ze wzoru $d(l_1, l_2) = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{1 + a_1^2}}$.

Jeśli proste dane są w postaci ogólnej $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $l_2: A_1x + B_1y + C_2 = 0$,

to $d(l_1, l_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$.

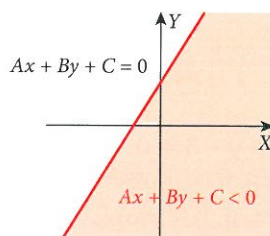
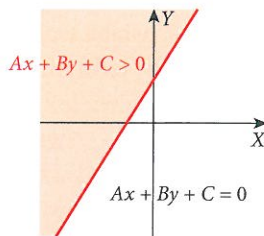
Nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Nierównością pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy każdą z nierówności:

$Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$, $Ax + By + C \geq 0$, $Ax + By + C \leq 0$, gdzie A, B, C oznaczają ustalone liczby takie, że $A^2 + B^2 > 0$, zaś x i y są zmiennymi.

Wykresem nierówności $Ax + By + C \geq 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$ jest jedna z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą $Ax + By + C = 0$ wraz z tą prostą.

Wykresem nierówności $Ax + By + C \leq 0$ jest druga z tych półpłaszczyzn wraz z prostą. W przypadku nierówności ostrych rozwiązaniem jest odpowiednia półpłaszczyzna bez punktów należących do prostej, która ją wyznacza.

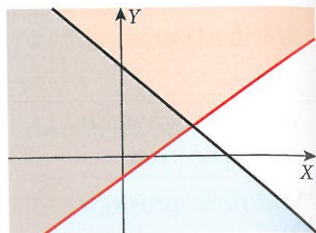


Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Każdy z układów $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 > 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \geq 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 > 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 \geq 0 \end{cases}$,

w których $A_i, B_i, C_i, i \in \{1, 2\}$ oznaczają liczby dane takie, że $A_i^2 + B_i^2 > 0$, zaś x i y są zmiennymi, nazywamy **układem dwóch nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y** .

Zbiorem rozwiązań układu dwóch nierówności pierwszego stopnia jest część wspólna półpłaszczyzn będących wykresem każdej z nierówności.



Zastosowanie graficznej metody rozwiązywania układu nierówności liniowych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (programowanie liniowe)

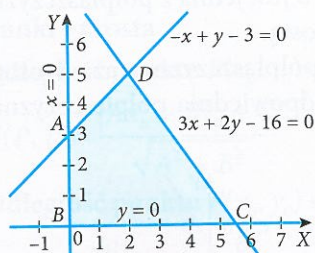
Metodę można wykorzystać do wyznaczenia minimum lub maksimum pewnej funkcji liniowej dwóch zmiennych x, y , kiedy mamy do czynienia z układem nierówności liniowych określającym warunki, które powinny spełniać te zmienne.

Przykład

Zmaksymalizuj zysk opisany funkcją $Z(x, y) = 2x + 3y$ przy zadanych warunkach:

$$\begin{cases} -x + y \leq 3 \\ 3x + 2y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie graficzne



$$A: \begin{cases} -x + y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} 3x + 2y - 16 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad D: \begin{cases} -x + y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

W jednym układzie współrzędnych sporządzamy wykres każdej z nierówności układu.

Częścią wspólną jest wielokąt $ABCD$.

Funkcja Z osiąga wartość maksymalną w jednym z wierzchołków tego wielokąta.

Wyznaczamy współrzędne punktów A, B, C, D , jako rozwiązania układów równań, a następnie obliczamy wartość funkcji $Z(x, y) = 2x + 3y$ w każdym z tych punktów.

Punkt	$Z(x, y) = 2x + 3y$
$A = (0, 3)$	$Z(0, 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$
$B = (0, 0)$	$Z(0, 0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
$C = \left(\frac{16}{3}, 0\right)$	$Z(2, 5) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$
$D = (2, 5)$	$Z\left(\frac{16}{3}, 0\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} + 3 \cdot 0 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$
	$Z_{\max} = 19$ dla $x = 2$ i $y = 5$

Maksymalny zysk możemy uzyskać dla $x = 2$ i $y = 5$.

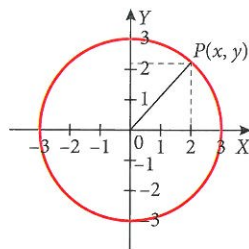
Okrąg i koło

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu r (postać kanoniczna równania):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Nierówność opisująca koło o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu r :

$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

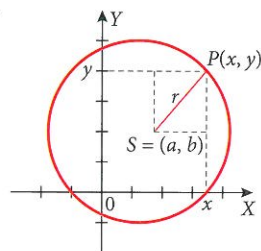


Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r (postać kanoniczna równania):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Równanie ogólne okręgu:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$



Nierówność opisująca koło o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2.$$

Wektory

Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów to **początek** wektora, a drugi – **koniec** wektora. Początek A wektora $\vec{AB}$ jest **punktem zaczepienia** tego wektora.

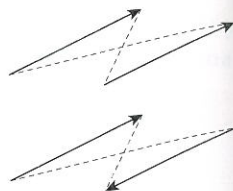
Wektor zerowy to wektor, w którym początek i koniec się pokrywają.

Każdemu niezerowemu wektorowi przypisujemy kierunek, zwrot i długość.

Kierunek wektora to kierunek prostej, na której ten wektor leży. **Zwrot wektora** $\vec{AB}$ to ten zwrot prostej AB , w którym A poprzedza B . **Długość wektora** to odległość między początkiem i końcem tego wektora.

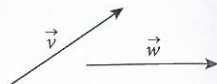
Dwa wektory są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i długość.

Wektory nazywamy **przeciwnymi**, gdy mają ten sam kierunek i długość, ale przeciwne zwroty.



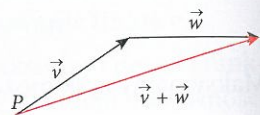
Działania na wektorach

Dane są wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$.



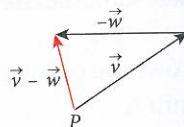
Jeżeli chcesz skonstruować **sumę** wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, to:

- wybierz na płaszczyźnie początkowy punkt konstrukcji P ;
- w punkcie P zacznij wektor $\vec{v}$;
- w końcu wektora $\vec{v}$ zacznij wektor $\vec{w}$;
- poprowadź wektor o początku w punkcie P , którego końcem jest koniec wektora $\vec{w}$.



Jeżeli chcesz skonstruować **różnicę** wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, to:

- wybierz na płaszczyźnie początkowy punkt konstrukcji P ;
- zacznij w punkcie P wektor $\vec{v}$;
- w końcu wektora $\vec{v}$ zacznij wektor przeciwny do $\vec{w}$;
- poprowadź wektor o początku w punkcie P , którego końcem jest koniec wektora $-\vec{w}$.



Jeśli chcesz skonstruować wektor będący **iloczynem** liczby k przez niezerowy wektor $\vec{v}$, to narysuj wektor o długości równej iloczynowi liczby $|k|$ i długości wektora $\vec{v}$ i o zwrocie wektora $\vec{v}$, jeśli $k > 0$ lub wektor o zwrocie przeciwnym do $\vec{v}$, jeśli $k < 0$.

Wektory w układzie współrzędnych

Współrzędne (składowe) wektora $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A], \vec{u} = [u_x, u_y]$$

Długość wektora $|\vec{AB}|$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Długość wektora $|\vec{u}|$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$\vec{u} = [u_x, u_y] \text{ i } \vec{v} = [v_x, v_y]$$

Wektor zerowy

$$\vec{O} = [0, 0]$$

Suma wektorów

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y]$$

Różnica wektorów

$$\vec{u} - \vec{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y]$$

Iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę k

$$k \cdot \vec{u} = [ku_x, ku_y]$$

Wektory przeciwne to wektory, które mają ten sam kierunek i równe długości, ale przeciwne zwroty.

$$-\vec{u} = [-u_x, -u_y]$$

Dwa **wektory** są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, długość i zwrot.

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_x = v_x \text{ i } u_y = v_y$$

Wzajemne położenie wektorów na płaszczyźnie

Oznaczmy: $\vec{u} = [u_x, u_y]$, $\vec{v} = [v_x, v_y]$

Wektory równoległe $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow u_x v_y - u_y v_x = 0$

Wektory prostopadłe $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0$

Przekształcenia

Przekształcenie	Zapis symboliczny
Przesunięcie $T_{[p, q]}$	$T_{[p, q]}(x, y) = (x + p, y + q)$
Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych S_{Ox}	$S_{Ox}(x, y) = (x, -y)$
S_{Oy}	$S_{Oy}(x, y) = (-x, y)$
Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych S_O	$S_O(x, y) = (-x, -y)$, gdzie $O = (0, 0)$

TEORIA

Oznaczenia występujące w tym rozdziale:

h – wysokość (lub długość wysokości) figury płaskiej
 d – przekątna (lub długość przekątnej) figury płaskiej lub bryły
 r – promień koła (podstawy walca lub stożka)
 H – wysokość (lub długość wysokości) bryły
 l – tworząca stożka
 P_p – pole podstawy bryły
 P_b – pole powierzchni bocznej bryły
 P_c – pole powierzchni całkowitej bryły
 R – promień kuli
 V – objętość bryły

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Jeżeli α jest płaszczyzną i β jest płaszczyzną, to:

płaszczyzny α i β są **równoległe**, gdy nie mają punktu wspólnego;
 płaszczyzny α i β **przecinają się**, gdy ich częścią wspólną jest prosta;
 płaszczyzny α i β **pokrywają się** (są identyczne), gdy mają trzy punkty wspólne nieleżące na jednej prostej.

Płaszczyzna α jest **prostopadła** do płaszczyzny β , jeżeli na płaszczyźnie α leży prosta prostopadła do płaszczyzny β .

Wzajemne położenie dwóch prostych

Jeżeli a i b są prostymi, to zachodzi jedna z możliwości:

istnieje płaszczyzna zawierająca obie proste
 proste a , b nie mają punktu wspólnego (są równoległe i różne)
 proste a i b mają jeden punkt wspólny (przecinają się)
 proste a i b pokrywają się
 lub nie istnieje płaszczyzna zawierająca obie proste i proste a i b są **skośne**.

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Jeżeli α jest płaszczyzną i a jest prostą, to zachodzi jedna z możliwości:

prosta a **jest równoległa do płaszczyzny α** , gdy płaszczyzna α i prosta a nie mają punktu wspólnego;
 prosta a **przecina** płaszczyznę α , gdy ich częścią wspólną jest punkt;
 prosta a leży na płaszczyźnie α (prosta a **zawiera się w płaszczyźnie α**), gdy ich częścią wspólną jest prosta a .

Jeżeli dwie płaszczyzny są równoległe, to każda prosta leżąca na jednej z tych płaszczyzn jest równoległa do drugiej płaszczyzny.

Jeżeli dwie proste są równoległe, to każda płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych prostych jest równoległa do drugiej prostej.

Jeżeli prosta a jest równoległa do płaszczyzny α , to przez każdy punkt płaszczyzny α przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do a należąca do α .

Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej.

Jeżeli płaszczyzna i prosta są równoległe do pewnej płaszczyzny, to są równoległe

między sobą.

Prosta a jest prostopadła do płaszczyzny α , jeżeli przecina ją i jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie α i przechodzącej przez punkt przecięcia a i α .

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzutem równoległym punktu A na płaszczyznę α w kierunku prostej a nazywamy punkt przecięcia płaszczyzny α przez prostą równoległą do a przechodzącą przez punkt A .

Przekształcenie przestrzeni przyporządkowujące każdemu jej punktowi jego rzut równoległy nazywamy **rzutem równoległym**.

Rzutem prostokątnym nazywamy rzut równoległy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutowania.

Odległość

Odległością punktu od płaszczyzny nazywamy odległość tego punktu od jego rzutu prostokątnego na tę płaszczyznę.

Odległością prostej a od płaszczyzny α do niej równoległej nazywamy odległość dowolnego punktu tej prostej od płaszczyzny α .

Odległością dwóch płaszczyzn równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z tych płaszczyzn od drugiej płaszczyzny.

Kąt między prostą i płaszczyzną

Kąt między prostą a i płaszczyzną α to:

- kąt prosty, jeśli a jest prostopadła do α ,
- kąt ostry utworzony przez prostą a i jej rzut prostokątny na płaszczyznę α , jeśli a przecina α ,
- kąt zerowy, jeśli a zawiera się w α .

Kąt dwuścienny

Zbiór punktów przestrzeni utworzony przez dwie różne półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi i jedną z dwóch części wyciętych z przestrzeni przez te półpłaszczyzny nazywamy **kątem dwuściennym**. Półpłaszczyzny nazywamy **ścianami** kąta dwuściennego, ich wspólną krawędź – **krawędzią** kąta dwuściennego, figurę wyciętą z przestrzeni przez ściany kąta – **wnętrzem** kąta dwuściennego, a sumę ścian i wnętrza – **obszarem** kąta dwuściennego.

Kąt płaski otrzymany przez przecięcie kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi nazywamy **kątem liniowym** kąta dwuściennego. **Miarą kąta dwuściennego** jest miara jego kąta liniowego.

Przekroje brył

Przekrój bryły płaszczyzną jest to część wspólna płaszczyzny i bryły. W niektórych bryłach można wyróżnić szczególne przekroje, na przykład:

- 1) **przekrój poprzeczny** graniastostupa lub ostrosłupa to przekrój danego graniastostupa lub ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy;
- 2) **przekrój osiowy** walca lub stożka to przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś symetrii walca lub stożka;
- 3) **przekrój przekątny** graniastostupa lub ostrosłupa to przekrój płaszczyzną przechodzącą przez dwie krawędzie nienależące do jednej ściany.

Graniastostup

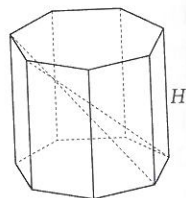
Graniastostup jest to wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch płaszczyznach równoległych, zwanych płaszczyznami podstaw, i którego wszystkie krawędzie nieleżące w płaszczyznach podstawy są równoległe.

W graniastostupie podstawy są wielokątami przystającymi o bokach odpowiednio równoległych, a ściany boczne są równoległobokami.

Wysokość graniastostupa jest to odcinek prostopadły do płaszczyzny podstaw zawarty między tymi płaszczyznami.

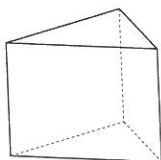
Przekątna graniastostupa to odcinek łączący dwa wierzchołki nieleżące na jednej ścianie.

$$P_c = 2P_p + P_b \quad V = P_p \cdot H$$

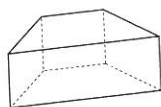


Graniastostup, którego podstawa jest n -kątem, nazywamy **graniastostupem n -kątnym**.

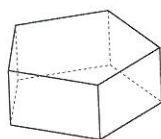
Graniastostup
trójkątny



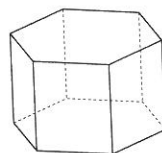
Graniastostup
czworokątny



Graniastostup
pięciokątny



Graniastostup
sześciokątny



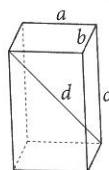
Graniastostup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.

Ściany boczne graniastostupa prostego są prostokątami.

Graniastostup prosty nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jego podstawa jest wielokątem foremnym. Ściany boczne graniastostupa prawidłowego są przystające.

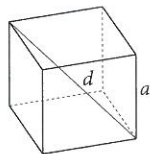
Prostopadłościan jest graniastostupem, którego wszystkie ściany są prostokątami.

$$V = abc \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad P_c = 2(ab + ac + bc)$$



Sześcian jest to prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe.

$$V = a^3 \quad P_c = 6a^2 \quad d = a\sqrt{3}$$



Ostrosłup

Ostrosłup jest to wielościan, którego jedna ściana – zwana **podstawą ostrosłupa** – jest wielokątem, a pozostałe ściany – zwane ścianami bocznymi – są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wśród krawędzi ostrosłupa rozróżniamy krawędzie podstawy i krawędzie boczne.

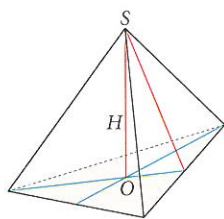
Wysokość ostrosłupa jest to odcinek poprowadzony z wierzchołka ostrosłupa prostopadłe do płaszczyzny podstawy.

Spodkiem wysokości ostrosłupa nazywamy rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

Spodek wysokości może leżeć w obrębie podstawy lub poza nią.

Wszystkie ściany boczne ostrosłupa razem wzięte tworzą **powierzchnię boczną** ostrosłupa.

Całkowita powierzchnia ostrosłupa składa się z powierzchni bocznej i podstawy ostrosłupa.



$$P_c = P_p + P_b \quad V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym itd., zależnie od liczby boków jego podstawy.

Ostrosłup nazywamy **prawidłowym**, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny, a spodek wysokości leży w środku koła opisanego na podstawie.

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi, przystającymi jeden do drugiego.

Piramida jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny.

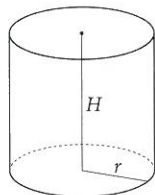
Czworościan foremny to ostrosłup trójkątny, prawidłowy, którego wszystkie krawędzie (zarówno krawędzie boczne, jak i krawędzie podstawy) są równe.

Bryły obrotowe

Bryłą obrotową nazywamy bryłę utworzoną przez obrót figury płaskiej dokoła osi leżącej w płaszczyźnie tej figury.

Walec

Walcem nazywamy bryłę powstałą przez obrót prostokąta dokoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta. Dwa koła powstałe przez obrót tych boków prostokąta, które są prostopadłe do osi obrotu nazywamy **podstawami** walca.



Powierzchnia powstała przez obrót odcinka równoległego do osi obrotu i niezawartej w niej nazywa się **powierzchnią boczną walca**. Promień podstawy walca nazywamy **promieniem walca**.

Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca i łączący obie podstawy nazywamy **tworzącą** walca. Tworząca walca jest prostopadła do obu podstaw i równa **wysokości** walca.

Przekrój osiowy walca jest prostokątem. Przekrój poprzeczny jest kołem.

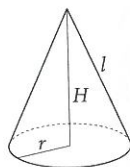
$$V = \pi r^2 \cdot H \quad P_c = 2\pi r(H + r) \quad P_p = \pi r^2 \quad P_b = 2\pi rH$$

Stożek

Stożkiem nazywamy bryłę powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dokoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. Koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi obrotu nazywamy **podstawą** stożka. Powierzchnia powstała przez obrót przeciwprostokątnej nazywa się **powierzchnią boczną stożka**. Promień podstawy stożka nazywamy **promieniem stożka**.

Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka i łączący wierzchołek z podstawą nazywamy **tworzącą** stożka. Odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy nazywamy **wysokością** stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Przekrój poprzeczny jest kołem.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H \quad l = \sqrt{H^2 + r^2} \quad P_p = \pi r^2 \quad P_b = \pi r l \quad P_c = \pi r(l + r)$$

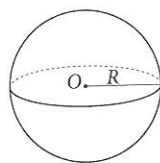
Kula

Kulą o środku O i promieniu $R > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od danego punktu O jest mniejsza lub równa R . Kula powstaje przez obrót półkola dokoła prostej, w której zawarta jest średnica tego półkola.

Sferą (powierzchnią kuli) o środku O i promieniu $R > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od danego punktu O jest równa R .

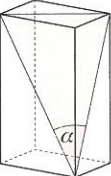
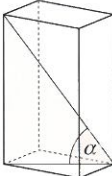
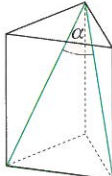
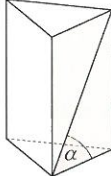
Średnica kuli to każdy odcinek łączący dwa punkty należące do sfery i przechodzący przez środek kuli (lub długość takiego odcinka).

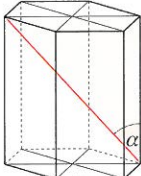
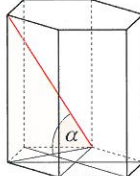
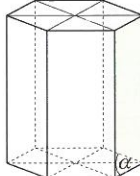
Przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek nazywamy **kołem wielkim** kuli. Inne przekroje kuli nazywamy **kołami małymi**.



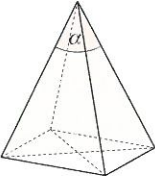
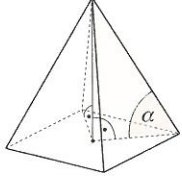
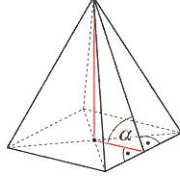
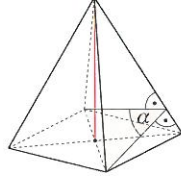
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad P_c = 4\pi R^2$$

Kąty w graniastosłupach

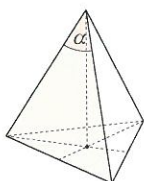
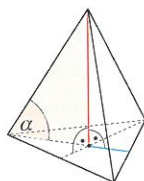
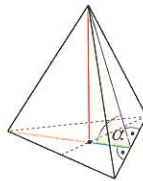
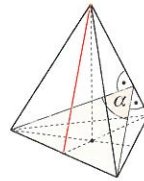
Graniastosłup czworokątny		Graniastosłup trójkątny	
kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka	kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy	kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka	kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy
			

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny		
kąt między najdłuższą przekątną a krawędzią boczną	kąt nachylenia krótszej przekątnej do podstawy	kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi
		

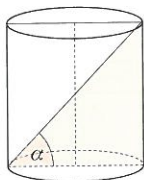
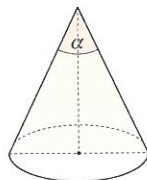
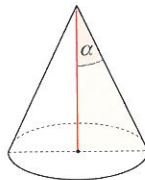
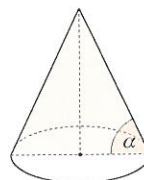
Kąty w ostrosłupach

Ostrosłup czworokątny			
kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi	kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy	kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy	kąt między ścianami bocznymi
			

Ostrosłup trójkątny

 kąt ściany bocznej
przy wierzchołku
ostrosłupa

 kąt nachylenia
krawędzi bocznej
do podstawy

 kąt nachylenia
ściany bocznej do
podstawy ostro-
słupa

 kąt między ściana-
mi bocznymi


Kąty w walcach i stożkach

 kąt nachylenia
przekątnej przekro-
ju osiowego walca
do płaszczyzny
podstawy

 kąt rozwarcia
stożka

 kąt nachylenia two-
rzącej stożka do jego
wysokości

 kąt nachylenia
tworzącej stożka
do płaszczyzny
podstawy


TEORIA

Elementy statystyki

Statystyka opisowa zajmuje się zagadnieniami związanymi z gromadzeniem i prezentacją danych oraz badaniem własności populacji na podstawie własności pobieranych prób losowych.

Statystyka matematyczna zajmuje się modelami matematycznymi używanymi do badania zjawisk masowych, a w szczególności szacowaniem rozkładu (parametrów rozkładu) badanej cechy na podstawie danych z próby losowej oraz weryfikacją hipotez statystycznych.

Podstawowe pojęcia statystyki opisowej

Statystyka jest nauką badającą zjawiska masowo zachodzące w otaczającym nas świecie. Statystyka opisowa zajmuje się zagadnieniami związanymi z gromadzeniem i prezentacją danych oraz badaniem własności całej populacji na podstawie informacji o jej części (próbie losowej).

Statystyka matematyczna zajmuje się tworzeniem modeli matematycznych opisujących badane zjawiska masowe w celu oszacowania rozkładu jakiejś cechy na podstawie pobranych danych lub w celu osądzenia, czy można przyjąć, czy trzeba odrzucić sformułowane wcześniej przypuszczenie.

Dane statystyczne mogą mieć charakter opisowy (jakościowy) lub ilościowy. Mogą też być ciągłe (np. wiek) lub skokowe (np. liczba ocen niedostatecznych).

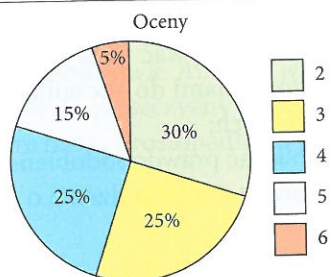
Formy prezentacji danych

Dane statystyczne przedstawia się w postaci tabel, tablic, opisu lub form graficznych prezentujących wielkości – jako pionowe lub poziome odcinki na osiach współrzędnych; za pomocą powierzchni figur płaskich (słupki, koła) z równoczesnym zastosowaniem koloru; za pomocą prostych obrazków lub łatwych do podzielenia znaków graficznych, wyrażających określoną liczbę jednostek lub za pomocą wykresów w układzie współrzędnych, np. histogramy oraz wykresy liniowe.

Przykłady

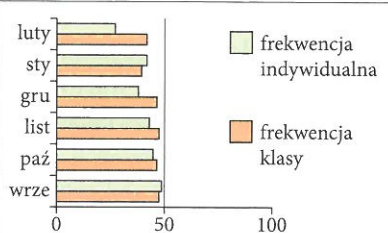
Wykres kołowy

Koło przedstawia 100% danych. Wykres kołowy służy do pokazywania rozmiaru elementów tworzących serię danych proporcjonalnie do sumy elementów. Na wykresie jest uwzględniana zawsze tylko jedna seria danych, a jest on używany, gdy trzeba zwrócić uwagę na istotny element danych.

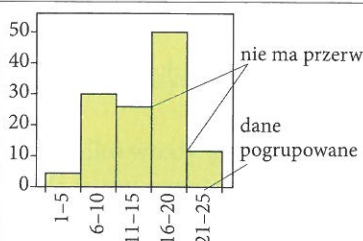


Wykres słupkowy poziomy

Prostokąty ułożone równolegle jeden nad drugim, o bokach pionowych równej długości, a bokach poziomych proporcjonalnych do przedstawianej liczby. Wartości uporządkowane są poziomo, aby ułatwić ich porównywanie. Można w ten sposób przedstawiać kilka serii danych.

**Histogram**

Podobny do wykresu słupkowego pionowego, ale między prostokątami nie ma przerw, a dane są pogrupowane w klasy. Podstawa każdego słupka ma szerokość przedziału danej klasy. Są dobrą metodą przedstawiania danych o charakterze ciągłym, jak wzrost, waga, wiek.

**Średnie**

Jeżeli $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest ciągiem danych surowych (nieuporządkowanych, niepogrupowanych), to możemy obliczyć średnią **arytmetyczną zwykłą**: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Można też obliczyć **średnią harmoniczną zwykłą**: $\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

oraz **średnią geometryczną**: $\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$, gdzie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ są liczbami dodatnimi.

Dla dowolnych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność $\bar{x}_h \leq \bar{x}_g \leq \bar{x}$.

Jeżeli dane uporządkujemy i pogrupujemy w k klas zawierających elementy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, których liczebność wynosi odpowiednio $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, to możemy

obliczyć średnią arytmetyczną ważoną: $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$.

Mediana

Medianą (M) nazywamy liczbę, która rozdziela zbiór danych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ na takie dwie części równe liczebnie, że w pierwszej znajdują się dane mniejsze od mediany, w drugiej zaś większe od niej. Załóżmy, że wartości $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ są uporządkowane tak, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to medianę obliczamy jako średnią arytmetyczną dwóch

liczb środkowych: $M = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}} \right)$.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to mediana jest równa wartości środkowej: $M = x_{\frac{n+1}{2}}$.

Moda (dominanta)

Moda, czyli **dominanta** jest to wartość, którą spotyka się najczęściej w zbiorze danych. Nazywa się ją również wartością modalną. Jeżeli w zbiorze danych występuje więcej takich liczb, to taki rozkład danych nazywamy wielomodalnym.

Odchylenie przeciętne liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest średnią arytmetyczną bezwzględnych wartości odchyień wartości poszczególnych danych x od ich średniej arytmetycznej $\bar{x}$.

$$d(x) = \frac{1}{n}(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)$$

Wariancja

Wariancja σ^2 liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest to średnia kwadratów odchyień od ich średniej arytmetycznej $\bar{x}$.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Jeżeli dane są uporządkowane i pogrupowane w k klas zawierających elementy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, których liczebność wynosi odpowiednio $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, to wariancję obliczamy ze wzoru

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Wariancję często obliczamy jako różnicę między średnią kwadratów danych a kwadratem ich średniej.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \quad \text{lub} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \dots + x_k^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} - (\bar{x})^2$$

(w przypadku danych pogrupowanych)

Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym σ nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji.

Obliczamy ze wzoru

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

lub (dla danych pogrupowanych)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}} = \\ &= \sqrt{\frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \dots + x_k^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} - (\bar{x})^2}. \end{aligned}$$

Działania na zbiorach

Moc zbioru skończonego A to liczba jego elementów. Oznaczamy $|A|$.

Suma

Element x należy do **sumy** dwóch zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy należy do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ lub $x \in B$.

Jeżeli mamy dane dwa zbiory rozłączne A i B , tzn. takie zbiory, które nie mają żadnego elementu wspólnego (symbolicznie piszemy: $A \cap B = \emptyset$), to zachodzi równość $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Jeśli zbiory A i B nie są rozłączne, to $|A \cup B| \leq |A| + |B|$.

Jeśli znamy liczbę elementów części wspólnej, to możemy obliczyć liczbę elementów sumy zbiorów: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Element x należy do sumy zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy: x należy do sumy, oznaczanej symbolem $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, wtedy i tylko wtedy, gdy należy do zbioru A_1 lub należy do zbioru A_2 lub należy do zbioru A_3 i tak dalej, aż do zbioru A_n , co zapisujemy:

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \Leftrightarrow x \in A_1 \text{ lub } x \in A_2 \text{ lub } \dots \text{ lub } x \in A_n.$$

Iloczyn

Element x należy do **iloczynu** dwóch zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy należy do obu tych zbiorów. Zapisujemy: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ i $x \in B$.

Element x należy do iloczynu zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$, oznaczanego symbolem $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, wtedy i tylko wtedy, gdy należy do każdego z tych zbiorów: $x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \Leftrightarrow x \in A_1$ i $x \in A_2$ i $\dots$ i $x \in A_n$.

Jeśli każde dwa zbiory spośród zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ są rozłączne, to mówimy, że te zbiory są **parami rozłączne**.

Elementy kombinatoryki

Kombinatoryka zajmuje się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. Jeśli elementy zbioru są wypisane, to łatwo możemy znaleźć ich liczbę. Kiedy zbiór jest podany w formie bardziej skomplikowanej, to nie jest oczywiste, ile ten zbiór ma elementów. Zadaniem kombinatoryki jest konstruowanie – spełniających pewne określone warunki – odwzorowań jednego zbioru skończonego w drugi oraz znajdowanie wzorów na liczbę tych odwzorowań.

Podstawowe pojęcia, którymi posługuje się kombinatoryka

Zbiór $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oznacza zbiór o elementach $x_1, x_2, \dots, x_n$. Żaden zbiór nie zawiera dwóch identycznych elementów, to znaczy każdy element traktujemy tak, jakby występował tylko jeden raz, a kolejność elementów zbioru nie ma znaczenia.

Zapis $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ oznacza **ciąg** skończony o n wyrazach $a_1, a_2, \dots, a_n$. Kolejność ustawienia wyrazów w ciągu jest bardzo ważna. Jeśli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy inny ciąg. Ciąg może zawierać wyrazy identyczne lub nie.

Silnia $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Reguła dodawania i mnożenia

Elementarnymi metodami kombinatoryki, często stosowanymi intuicyjnie, są tzw. reguły (zasady) mnożenia i dodawania.

Reguła (zasada) mnożenia

Jeżeli wynik wyboru zależy od podjęcia obu spośród dwóch decyzji, przy czym pierwszą można podjąć na n sposobów, a drugą na m sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $m \cdot n$ sposobów.

Jeżeli wynik wyboru zależy od podjęcia wszystkich spośród k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, ..., k -tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ sposobów.

Reguła (zasada) dodawania

Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, ..., k -tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ sposobów.

Zasada włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów

Liczba elementów sumy trzech zbiorów wyraża się wzorem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Wzór ten nosi nazwę **zasady włączeń i wyłączeń** lub wzoru włączeń i wyłączeń. Nazwa ta bierze się stąd, że liczbę po prawej stronie otrzymujemy, „włączając” do niej trzy liczby $|A|$, $|B|$ i $|C|$, potem „wyłączając” z niej liczby $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$ i wreszcie „włączając” do niej liczbę $|A \cap B \cap C|$. Dlaczego trzeba tak zrobić? Licząc elementy sumy $A \cup B \cup C$, policzyliśmy najpierw elementy zbioru A , potem elementy zbioru B i elementy zbioru C . Otrzymane liczby dodaliśmy. Mamy wynik $|A| + |B| + |C|$. Jeżeli zbiory nie są rozłączne, to niektóre elementy liczyliśmy dwukrotnie, np. jeśli $x \in A \cap B$, to element x był policzony raz jako element zbioru A i raz jako element zbioru B . Należy więc odjąć od wyniku każdy iloczyn dwóch zbiorów: $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$. Jeżeli x był elementem wszystkich zbiorów, to najpierw był policzony trzykrotnie: raz jako element zbioru A , raz jako element zbioru B i raz jako element zbioru C . Potem trzykrotnie policzyliśmy go jako element zbiorów $A \cap B$, $A \cap C$ i $B \cap C$, więc go trzykrotnie usunęliśmy. Trzeba więc jeszcze raz go dodać. Stąd wynika, że do wyniku należy dodać liczbę $|A \cap B \cap C|$ i w ten sposób otrzymujemy prawą stronę wzoru.

Zasada włączeń i wyłączeń: przypadek czterech zbiorów

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = & |A| + |B| + |C| + |D| + \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| + \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned}$$

W tym przypadku, a także w przypadku większej liczby zbiorów zastosowana jest następująca reguła doboru znaków po prawej stronie wzoru włączeń i wyłączeń.

Liczby elementów zbiorów ($|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$) są brane ze znakiem „+”, każdy iloczyn dwóch zbiorów bierzemy ze znakiem „-”, każdy iloczyn trzech zbiorów bierzemy ze

znakiem „+”, każdy iloczyn czterech zbiorów ze znakiem „-” i tak dalej, aż do wyczerpania wszystkich możliwości.

Permutacje, wariacje i kombinacje

Kombinatoryka odpowiada na pytanie, ile da się zbudować odwzorowań określonego rodzaju z dostępnych elementów. Wyróżniamy trzy rodzaje takich odwzorowań: permutacje, wariacje i kombinacje.

Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie pewnego zbioru skończonego na siebie nazywamy **permutacją**.

Liczba sposobów, w jaki można ustawić n elementów w ciąg, jest równa

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Każde takie ustawienie także nazywamy **permutacją**.

Ciąg k -wyrazowy utworzony z różnych elementów n -elementowego zbioru nazywamy k -elementową **wariacją bez powtórzeń**. Ważna jest kolejność elementów, a elementy nie mogą się powtarzać.

Liczbę takich ciągów obliczamy ze wzoru $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, gdzie

n i k są dodatnimi liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq n$.

Uwaga: Ponieważ k -wyrazowy ciąg elementów zbioru n -elementowego jest permutacją dowolnego k -elementowego podzbioru tego zbioru, w informatyce (komputery, kalkulatory) oraz w niektórych krajach UE w ogóle nie używa się nazwy wariacja, tylko **k -elementowa permutacja zbioru n -elementowego**.

Niech $A_1, A_2, \dots, A_m$ będą zbiorami o odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_m$ elementach.

Liczba ciągów m -elementowych, takich że pierwszy element jest z A_1 , drugi z A_2 , ..., m -ty z A_m , jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m$.

Wariacją m -elementową z powtórzeniami zbioru k -elementowego nazywamy każdy m -wyrazowy ciąg elementów tego zbioru. Liczba takich ciągów jest równa

$$\underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_{m \text{ razy}} = k^m.$$

Kombinacją k -elementową zbioru n -elementowego nazywamy każdy k -elementowy podzbiór tego zbioru ($k \leq n$). Liczba wszystkich takich kombinacji jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ gdzie } n \text{ i } k \text{ są dodatnimi liczbami}$$

naturalnymi takimi, że $k \leq n$. W tym przypadku kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia.

Użyty tutaj symbol $\binom{n}{k}$ nazywa się symbolem Newtona.

Rachunek prawdopodobieństwa

Doświadczenie losowe. Zdarzenie losowe

Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, które może być powtarzane w jednakowych lub zbliżonych warunkach i którego wynik nie da się przewidzieć jednoznacznie.

Doświadczenia losowe mogą być **jednoetapowe** (np. rzut monetą, rzut kostką do gry, strzał do celu) lub **wieloletapowe** (np. kilkukrotny rzut monetą, losowanie kolejno kilku kul z urny, losowanie urny, a następnie kuli z wybranej urny).

Wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Najprostsze wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy Ω i nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych**.

Każde **zdarzenie losowe** jest zbiorem pewnej liczby zdarzeń elementarnych. Zdarzenie elementarne, które jest elementem zbioru A , nazywamy zdarzeniem sprzyjającym zdarzeniu A . Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy $|\Omega|$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A oznaczamy $|A|$.

Zbiór Ω jest tzw. **zdarzeniem pewnym**; zbiór pusty jest **zdarzeniem niemożliwym**.

Jeżeli dla doświadczenia losowego $|\Omega| = n$, to liczba wszystkich zdarzeń losowych tego doświadczenia jest równa 2^n .

Działania na zdarzeniach

Mówimy o **sumie zdarzeń** A, B , gdy zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A, B , tzn. gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B (oznaczamy $A \cup B$).

Iloczyn zdarzeń A, B zachodzi wtedy, gdy jednocześnie zachodzi zdarzenie A i zdarzenie B (oznaczamy $A \cap B$).

Mówimy o **różnicy zdarzeń** A, B , gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B (oznaczamy $A - B$).

Zdarzenie przeciwne do A zachodzi, gdy nie zachodzi zdarzenie A (oznaczamy A').

Zdarzenia A, B wykluczają się, gdy zdarzenie $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie A pociąga zdarzenie B , gdy z zajścia zdarzenia A wynika zajście zdarzenia B (oznaczamy $A \subset B$).

Częstość względna zdarzenia A

Jeżeli pewne doświadczenie zostało powtórzone n razy, w wyniku czego zdarzenie A

zaszło k razy, to iloraz $\frac{k}{n}$ nazywamy **częstością względną zdarzenia A** .

Prawdopodobieństwo

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu A tej przestrzeni przyporządkowuje liczbę $P(A)$ spełniającą warunki:

- prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia A jest liczbą nieujemną; $P(A) \geq 0$
- prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń wykluczających się jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń; Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1. $P(\Omega) = 1$

Własności prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A jest liczbą nie większą od jedności.

$$P(A) \leq 1$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zero.

$$P(\emptyset) = 0$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A jest równe różnicy liczby 1 i prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A .

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B , to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest nie większe niż prawdopodobieństwo zdarzenia B .

$$\text{Jeżeli } A \subset B, \text{ to } P(A) \leq P(B).$$

Prawdopodobieństwo sumy dowolnych dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$ jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich iloczynu.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prawdopodobieństwo sumy dowolnych dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$ nie jest większe od sumy tych zdarzeń.

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

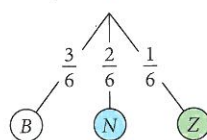
Twierdzenie o klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa prawdopodobieństwa

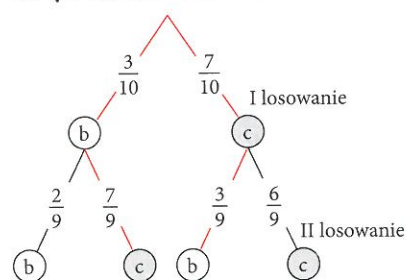
Za pomocą drzewa można przedstawiać przestrzeń wyników doświadczenia przebiegającego etapami.

Przykład 1. Doświadczenie jednoetapowe

Z urny zawierającej 3 kule białe, 2 niebieskie i jedną zieloną wylosowano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała lub zielona?

Prawdopodobieństwa wszystkich wyników dają w sumie 1. Każdy wynik odpowiada na tym drzewie pewnej gałęzi. Prawdopodobieństwo, że wylosowana będzie kula biała lub zielona, jest równe sumie prawdopodobieństw zaznaczonych na poszczególnych gałęziach.

W tym wypadku $P = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$.

Przykład 2. Doświadczenie wieloetapowe

W woreczku znajdują się ziarna fasoli białe i czarne. Losujemy dwa razy bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane ziarna będą różnych kolorów, jeżeli było 10 ziaren, w tym 3 białe?

Drzewo obok ilustruje przebieg doświadczenia dwuetapowego. Pierwszy etap to losowanie pierwszego ziarna. Drugi etap to losowanie ziarna ze zbioru, w którym jest o jeden element mniej.

Kolorem czerwonym zaznaczono istotne gałęzie drzewa. Prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że wylosowano najpierw ziarno białe, a potem czerwone,

odpowiada iloczyn $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$. Prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że

najpierw wylosowano ziarno czarne, a potem białe, odpowiada iloczyn $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$. Aby

otrzymać prawdopodobieństwo szukanego zdarzenia, musimy obliczyć sumę tych

iloczynów: $P = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i $P(B) > 0$, to **prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy stosunek prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń A i B do prawdopodobieństwa zdarzenia B (oznaczamy $P(A|B)$).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo iloczynu

Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i $P(A) > 0$, to prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa jednego z tych zdarzeń przez prawdopodobieństwo warunkowe drugiego zdarzenia pod warunkiem, że zaszło pierwsze zdarzenie.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zdarzenia $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ są podzbiorami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniającymi warunki:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
2. $P(B_i) > 0$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
3. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

to zachodzi wzór $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ zwany wzorem na prawdopodobieństwo całkowite (zupełne).

TEORIA

Granica funkcji

Niech f będzie funkcją określoną na pewnym podzbiórze zbioru liczb rzeczywistych X ($f: X \rightarrow \mathbb{R}$). Rozważać będziemy przeważnie takie funkcje, których dziedziną X będzie przedział liczbowy lub suma przedziałów. Rozpatrzmy ciąg (x_n) , którego każdy wyraz należy do zbioru X , czyli ciąg argumentów funkcji. Obliczając wartości funkcji dla kolejnych argumentów: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, otrzymamy ciąg wartości funkcji.

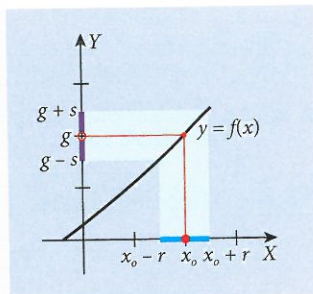
Granica funkcji w punkcie

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granice** g , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , którego wyrazami są argumenty funkcji różne od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g przy n dążącym do nieskończoności.

Gdy badamy istnienie granicy funkcji w punkcie x_0 , nie interesuje nas wartość funkcji w punkcie x_0 . Punkt ten nie musi należeć do dziedziny funkcji f . Interesują nas natomiast wartości funkcji dla argumentów znajdujących się na osi liczbowej na lewo i prawo od punktu x_0 , tzn. w przedziale $(x_0 - r, x_0)$ lub $(x_0, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$ (tzw. sąsiedztwo punktu x_0). Jeżeli to sąsiedztwo jest puste, to nie możemy zdefiniować granicy.

Zapis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ oznacza, że wartości tej funkcji są dowolnie blisko liczby g , o ile argumenty, którym te wartości odpowiadają, są dostatecznie blisko liczby x_0 .

Dla dowolnie małej liczby $s > 0$ istnieje takie $r > 0$, że jeżeli $0 < |x - x_0| < r$, to $|f(x) - g| < s$.



Granice jednostronne

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 **granice lewostronną** g , co zapisujemy

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji o wyrazach mniejszych od x_0 , zbieżnego do x_0 , ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g przy $n \rightarrow \infty$.

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ma w punkcie x_0 **granice prawostronną** g , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji

o wyrazach większych od x_0 , zbieżnego do x_0 , ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli w punkcie x_0 istnieje granica lewostronna i prawostronna funkcji f i obie są równe g , to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g .

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą** $-\infty$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) , zbieżnego do x_0 , którego wyrazami są argumenty funkcji różne od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do $-\infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą** $+\infty$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) , zbieżnego do x_0 , którego wyrazami są argumenty funkcji różne od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do $+\infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Analogicznie można zdefiniować jednostronne granice niewłaściwe.

Granica funkcji w nieskończoności

Funkcja $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbf{R}$ ma w minus nieskończoności granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) , takiego, że $x_n \in (-\infty, a)$ i $x_n \rightarrow -\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$, ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g przy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$$

Funkcja $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ma w plus nieskończoności granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) , takiego, że $x_n \in (a, \infty)$ i $x_n \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$, ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g przy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

Granica niewłaściwa funkcji w nieskończoności

Funkcja $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbf{R}$ ma w minus nieskończoności granicę niewłaściwą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) , takiego, że $x_n \in (-\infty, a)$ i $x_n \rightarrow -\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$, ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do $-\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Funkcja $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbf{R}$ ma w minus nieskończoności granicę niewłaściwą $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) , takiego, że $x_n \in (-\infty, a)$ i $x_n \rightarrow -\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$, ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do $+\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

Analogenicznie można zdefiniować granice niewłaściwe w plus nieskończoności.

Własności granic funkcji

Jeżeli funkcje f i g mają w punkcie x_0 granice, to:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ gdy } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\end{aligned}$$

Symbole nieoznaczone

Jeżeli granice pewnych funkcji są równe: $-\infty$, 0 , 1 , $+\infty$, to może zdarzyć się sytuacja,

w której obliczanie granicy prowadzi do wyrażeń postaci: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 , ∞^0 , $0 \cdot \infty$. Takie

wyrażenia nie są dobrze określone, bo granice w takiej sytuacji mogą być różne. Dlatego nazywamy je **nieoznaczonymi**.

Twierdzenie o trzech funkcjach

Jeżeli $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$.

Wartości granic niektórych funkcji

Dla każdego wielomianu $W(x)$ i każdej liczby rzeczywistej x_0 prawdziwa jest równość: $\lim_{x \rightarrow x_0} W(x) = W(x_0)$.

Niech funkcja f będzie funkcją wymierną taką, że $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, przy czym x_0 należy do dziedziny funkcji f . Wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ i $f(x) > 0$ w zbiorze $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ i $f(x) < 0$ w zbiorze $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $c > 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = \infty$.

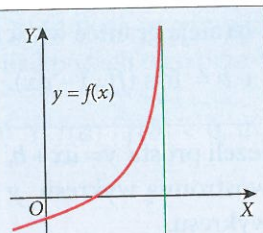
Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $c < 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = -\infty$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $0 < g(x)$ w $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$.

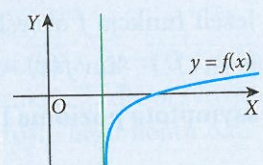
Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $g(x) < 0$ w $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty$.

Asymptoty pionowe

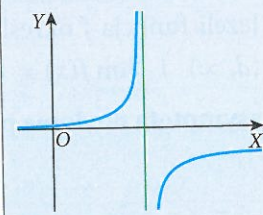
Prostą o równaniu $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a - r, a)$ i $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$.



Prostą o równaniu $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a, a + r)$ i $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.



Jeżeli prosta $x = a$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą pionową obustronną** tego wykresu.

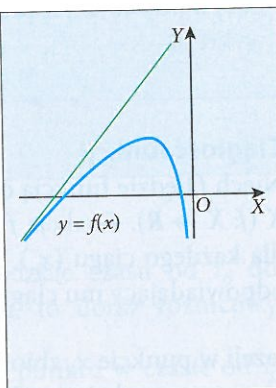


Asymptoty ukośne i poziome

Prostą o równaniu $y = ax + b$, $a \neq 0$, nazywamy **asymptotą ukośną lewostronną** wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f określona jest w pewnym przedziale $(-\infty, c)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

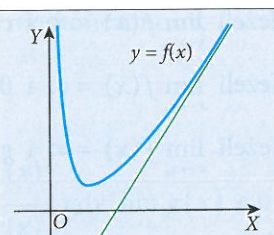
Prosta o równaniu $y = ax + b$, $a \neq 0$, jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice właściwe $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

i $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$.



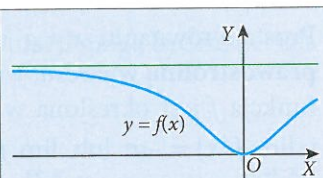
Prostą o równaniu $y = ax + b$, $a \neq 0$, nazywamy **asymptotą ukośną prawostronną** wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f określona jest w pewnym przedziale (d, ∞) i $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Prosta o równaniu $y = ax + b$, $a \neq 0$, jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice właściwe $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

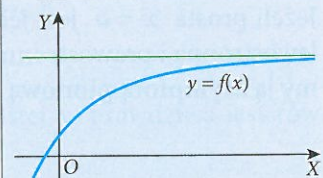


Jeżeli prosta $y = ax + b$, $a \neq 0$, jest jednocześnie asymptotą ukośną prawostronną i lewostronną wykresu $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą ukośną obustronną** tego wykresu.

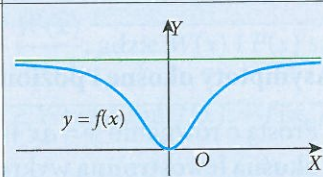
Jeżeli funkcja f określona jest w pewnym przedziale $(-\infty, c)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, to prostą $y = b$ nazywamy **asymptotą poziomą lewostronną** wykresu $y = f(x)$.



Jeżeli funkcja f określona jest w pewnym przedziale (d, ∞) i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, to prostą $y = b$ nazywamy **asymptotą poziomą prawostronną** wykresu $y = f(x)$.



Jeżeli prosta $y = b$ jest jednocześnie asymptotą poziomą prawostronną i lewostronną wykresu $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą poziomą obustronną** tego wykresu.



Ciągłość funkcji

Niech f będzie funkcją określoną na pewnym podziorze zbioru liczb rzeczywistych X ($f: X \rightarrow \mathbb{R}$). Funkcja f jest **ciągła w punkcie** x_0 zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) , zbieżnego do x_0 , którego wyrazami są argumenty funkcji f , odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do $f(x_0)$.

Jeżeli w punkcie x_0 zbioru X istnieje granica, to funkcja jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy granica ta jest równa wartości $f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Każdy punkt, w którym funkcja jest ciągła, nazywamy **punktem ciągłości** funkcji. Funkcja ciągła w każdym punkcie zbioru X nazywamy **funkcją ciągłą w zbiorze** X .

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0 .

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Funkcje wielomianowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, to funkcja przyjmuje każdą wartość pośrednią między wartościami przyjmowanymi na końcach tego przedziału.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Pochodne funkcji

Iloraz różnicowy

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, a $\Delta x \neq 0$ liczbą taką, że $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. **Ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx nazywamy stosunek przyrostu wartości funkcji Δy do przyrostu argumentu Δx .

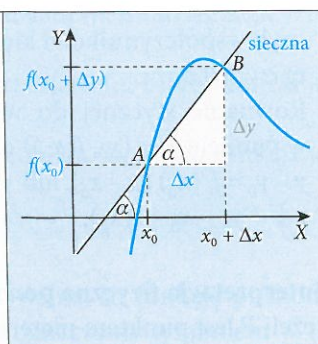
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ jest

równy tangensowi kąta, jaki tworzy z osią OX sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $A = (x_0, f(x_0))$ i $B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, czyli współczynniki kierunkowemu tej siecznej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Interpretacja fizyczna ilorazu różnicowego

Jeżeli P jest punktem materialnym poruszającym się w przedziale czasu od t_0 do $t_0 + \Delta t$, a droga $s(t)$, którą pokonuje, jest funkcją czasu, to iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

przedstawia prędkość średnią tego punktu w czasie od t_0 do $t_0 + \Delta t$.

Pochodna funkcji w punkcie

Granice właściwą ilorazu różnicowego $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, gdy $\Delta x \rightarrow 0$, nazywamy

pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$ lub $\frac{dy}{dx}(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Jeżeli granica $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ istnieje i jest właściwa, to mówimy, że funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 lub że jest **różniczkowalna** w tym punkcie.

Jeżeli granica $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 lub że **nie jest różniczkowalna** w tym punkcie.

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.

Interpretacja geometryczna pochodnej

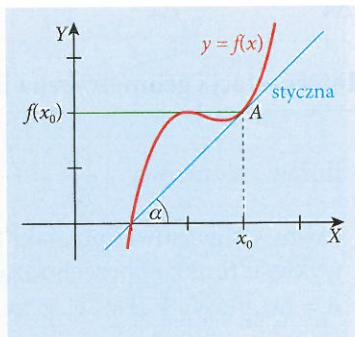
Wartość pochodnej $f'(x_0)$ w pewnym punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji f w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$, czyli współczynnikowi kierunkowemu tej stycznej.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ lub } y = ax + b, \text{ gdzie } a = f'(x_0)$$

$$\text{ i } b = y_0 - x_0 \cdot f'(x_0).$$



Interpretacja fizyczna pochodnej

Jeżeli P jest punktem materialnym poruszającym się w przedziale czasu od t_0 do $t_0 + \Delta t$, a przemieszczenie $s(t)$ jest funkcją czasu, to granica właściwa ilorazu

różnicowego $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ przedstawia prędkość chwilową tego punktu w chwili t_0 .

$$v_0 = s'(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Pochodna jako funkcja

Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie pewnego zbioru X , to funkcję f' , która każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje $f'(x)$, nazywamy **funkcją pochodną funkcji f w zbiorze X** . Funkcję f nazywamy wtedy **funkcją różniczkowalną w zbiorze X** .

Pochodne funkcji elementarnych

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, r dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera.

Funkcja	Pochodna	Funkcja	Pochodna
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = \frac{a}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$f(x) = \sqrt{x}, x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Twierdzenia o działaniach na pochodnych

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze X , to:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \text{ gdy } g(x) \neq 0$$

Zastosowanie pochodnej do badania monotoniczności funkcji

Założmy, że funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ ma pochodną f' wewnątrz tego przedziału. Wtedy:

- jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału (a, b) , to funkcja f jest **stała** w (a, b) ;
- jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału (a, b) , to funkcja jest **rosnąca** w (a, b) ;
- jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału (a, b) , to funkcja jest **malejąca** w (a, b) .

Druga pochodna funkcji

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna i f' jest różniczkowalna, to funkcję pochodną funkcji $f'(x)$ nazywamy **drugą pochodną** funkcji $f(x)$ i oznaczamy symbolem $f''(x)$.
 $f''(x) = (f'(x))'$

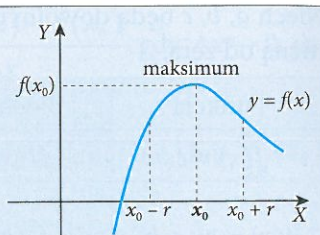
Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej

Jeżeli P jest punktem materialnym poruszającym się w przedziale czasu od t_0 do $t_0 + \Delta t$, a przemieszczenie $s(t)$ jest funkcją czasu oraz prędkość $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$, to przyśpieszenie a tego punktu w chwili t_0 jest równe pochodnej prędkości, czyli drugiej pochodnej funkcji $s(t)$ w chwili t_0 .

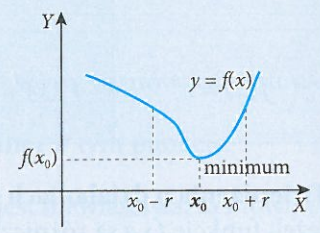
$$a = v'(t_0) = \frac{dv}{dt}(t_0) = \frac{d^2s}{dt^2}(t_0) = s''(t_0)$$

Ekstrema funkcji

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **maksimum lokalne** (właściwe) $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego argumentu funkcji x z przedziału $(x_0 - r, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.



Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **minimum lokalne** (właściwe) $f(x_0)$, jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego argumentu funkcji x z przedziału $(x_0 - r, x_0 + r)$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.



Maksima i minima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi**.

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji

Pierwszy warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji

Jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że funkcja f ma pochodną f' w przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$

$$\text{oraz } \begin{cases} f'(x) < 0, & \text{jeśli } x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) = 0, & \text{jeśli } x = x_0 \\ f'(x) > 0, & \text{jeśli } x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases},$$

to funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne.

Jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że funkcja f ma pochodną f' w przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$

$$\text{oraz } \begin{cases} f'(x) > 0, & \text{jeśli } x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) = 0, & \text{jeśli } x = x_0 \\ f'(x) < 0, & \text{jeśli } x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases},$$

to funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji

Jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że funkcja f ma pochodną f' w przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$ i pochodną f'' w punkcie x_0 oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne.

Jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że funkcja f ma pochodną f' w przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$ i pochodną f'' w punkcie x_0 oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Maksimum (minimum) lokalne nie musi być wartością największą (najmniejszą) funkcji f . Poza pewnym otoczeniem punktu, w którym istnieje maksimum (minimum), funkcja może przyjmować wartości większe (mniejsze).

Etapy badania przebiegu zmienności funkcji

I. Analiza ogólnych własności funkcji

- Wyznaczenie dziedziny D_f funkcji
- Określenie szczególnych własności funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość)
- Wyznaczenie granic funkcji f na końcach przedziałów określoności i ewentualnie asymptot wykresu funkcji
- Wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych

II. Analiza pierwszej pochodnej funkcji

- Wyznaczenie zbioru, w którym f jest różniczkowalna
- Obliczenie pierwszej pochodnej funkcji
- Wyznaczenie miejsc zerowych pierwszej pochodnej i przedziałów, gdzie pochodna jest dodatnia i ujemna (przedziałów monotoniczności funkcji)
- Wyznaczenie ekstremów lokalnych funkcji

III. Ewentualnie analiza drugiej pochodnej funkcji

IV. Sporządzenie tabelki i narysowanie wykresu funkcji.