

I. N. Bronsztejn
K. A. Siemiendiajew

MATEMATYKA

PORADNIK ENCYKLOPEDYCZNY

Tłumaczyli
Stefan Czarnecki
Robert Bartoszyński

Wydanie dwudzieste



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2004

Tytuł oryginału:

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

Государственное Издательство
Физико-математической Литературы

Москва 1965

© Copyright 1965 Fizmatgis

Taschenbuch der Mathematik
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig 1959

Projekt okładki i stron tytułowych *Małgorzata Podziomek*

© Copyright for the Polish edition by
Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985

Copyright © for the Polish edition by
Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o., Warszawa 1995

Copyright © for the Polish edition by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 1998

ISBN 83-01-14261-8

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel.: (0 22) 695 43 21
faks: (0 22) 695 40 31
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie dwudzieste
Arkuszy drukarskich 53,5
Druk ukończono w czerwcu 2004 r.
Druk i oprawa: Toruńskie Zakłady Graiczne „Zapolex” Sp. z o.o.
87-100 Toruń, ul. Gen. Sowińskiego 2/4

PRZEDMOWA

Napisanie poradnika o niewielkiej objętości, w którym byłyby podane podstawowe wiadomości z dziedziny matematyki niezbędne dla studentów szkół wyższych i użytkowników w ich nauce i działalności praktycznej, jest zadaniem niezwykle trudnym. Dążąc do zwiększenia wykładu, Autorzy usiłowali jednak dać poradnik przystępny, wygodny w użyciu i pod względem matematycznym w miarę możliwości ścisły.

Należy zaznaczyć, że książka ta, to nie podręcznik ani skrót podręcznika, lecz poradnik; dlatego nie ma tu takiej systematyczności, jaką powinien cechować się podręcznik. Nie powinno więc dziwić Czytelnika, że na przykład reguła de l'Hospitala znalazła się w paragrafie o obliczaniu granic, który jest częścią rozdziału *Wstęp do analizy*, umieszczonego przed wprowadzeniem pojęcia pochodnej, a informacje o funkcji gamma — w rozdziale *Algebra*, bezpośrednio po pojęciu siłni. Takich „niewłaściwości” jest w poradniku bardzo dużo. Dlatego też Czytelnikowi pragnącemu uzyskać taką czy inną informację radzimy posługiwać się nie tylko spisem rzeczy, ale i skróconym alfabetycznym zamieszczonym na końcu książki. Jeżeli w tekście poradnika jest wzmianka o zagadnieniu wyjaśnionym bardziej szczegółowo w innym miejscu książki, wskazuje się wtedy w odsyłaczu odpowiednią stronicę.

*

W drugim polskim wydaniu *Poradnika* zostały wprowadzone następujące większe zmiany w stosunku do pierwszego wydania. Mianowicie dodano dwa rozdziały: *Rachunek wariacyjny* i *Równania całkowite*, przetłumaczone z niemieckiego wydania tej książki (*Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959), oraz rozdział *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, opracowany przez R. Bartoszyńskiego. Ponadto zostały usunięte zauważone drobne usterki z poprzedniego wydania.

OZNACZENIA MATEMATYCZNE

I. Związki między wielkościami

$=$	równa się
$\equiv$	równa się tożsamościowo
$\neq$	nie równa się
$\approx$	równa się w przybliżeniu
$<$	jest mniejsze
$>$	jest większe
$\leq$	jest mniejsze lub równe
$\geq$	jest większe lub równe

II. Algebra

$ a $	bezwzględna wartość liczby a
$+$	plus (dodawanie)
$-$	minus (odejmowanie)
$\cdot$ lub $\times$	mnożenie, na przykład $a \cdot b$ lub $a \times b$; znak mnożenia bywa często opuszczany, na przykład ab
$:$ lub $-$, lub $/$	dzielenie, na przykład $a : b$ lub $\frac{a}{b}$, lub a/b
a^m	a do potęgi m
$\sqrt{\quad}$	pierwiastek kwadratowy, na przykład $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{\quad}$	pierwiastek stopnia n , na przykład $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	logarytm przy podstawie b , na przykład $5 = \log_2 32$ (str. 163) ⁽¹⁾
$\log$	logarytm dziesiętny, na przykład $2 = \log 100$ (str. 164)
$\ln$	logarytm naturalny, na przykład $1 = \ln e$ (str. 164)
$\exp x$	funkcja wykładnicza e^x
$(\), \langle \rangle, [], \{ \}$	nawiasy (kolejność działań)
$!$	silnia, na przykład $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (str. 203).

⁽¹⁾ W nawiasach podano stronicę *Poradnika*, na których objaśnione zostały odpowiednie pojęcia.

III. Geometria

jest prostopadłe
 jest równoległe
 jest równe i równoległe
 jest podobne, na przykład $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
 trójkąt
 kąt, na przykład $\angle ABC$
 łuk, na przykład $\widehat{AB}$ lub $\smile AB$
 stopień
 minuta
 sekunda

} w mierze katowej, na przykład $32^\circ 14' 11'', 5$

IV. Trygonometria, funkcje hiperboliczne

sin	sinus	} (str. 230)
cos	cosinus	
tg	tangens	
ctg	cotangens	
sec	secans	
cosec	cosecans	} (str. 242)
arcsin	arcus sinus	
arccos	arcus cosinus	
arctg	arcus tangens	
arctg	arcus cotangens	
sinh	sinus hiperboliczny	} (str. 248)
cosh	cosinus hiperboliczny	
tgh	tangens hiperboliczny	
ctgh	cotangens hiperboliczny	
sech	secans hiperboliczny	
cosech	cosecans hiperboliczny	} (str. 252)
arsinh	area sinus hiperboliczny	
arcosh	area cosinus hiperboliczny	
artgh	area tangens hiperboliczny	
arctgh	area cotangens hiperboliczny	

V. Oznaczenia stałych

const wielkość stała (constans)
 $\pi = 3,14159...$ stosunek długości obwodu koła do średnicy (str. 215)
 $e = 2,71828...$ podstawa logarytmów naturalnych (str. 358)
 $\gamma = 0,57722...$ stała Eulera (str. 358)

VI. Analiza matematyczna

lim granica (limes)
 $\rightarrow$ (str. 344, 355)
 ∞ dąży do ...
 nieskończoność

} na przykład $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\sum$
 $\sum_{i=1}^n$
 $f(), \varphi()$

Δ
 d
 d_x, d_y itd.
 $'', ''', (n)$
 $'', ''', \dots$

$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$

D

f'_x, f''_{xx}, f''_{xy}
 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

$\int$

$\int_a^b$
 $\int_a^b$

$\int_K$

$\int_S, \int_V$

$\iint$

$\iiint$

suma

suma, w której i zmienia się od 1 do n

oznaczenia funkcji, na przykład: $y = f(x), u = \varphi(x, y, z)$
 przyrost, na przykład Δx
 różniczka, na przykład dx (str. 390)
 różniczka cząstkowa, na przykład $d_x u$ (str. 391)
 oznaczenia kolejnych pochodnych funkcji jednej zmiennej, na przykład funkcji $y = f(x)$: $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(n)}(x), y', y'', y''', y^{(n)}, y', y'', y''', y^{(n)}$ (str. 388, 390, 393)

pierwsza pochodna, druga pochodna itd., na przykład $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ itd. (str. 388, 393)

znak pochodnej (operator różniczkowania), na przykład $Dy = y', D^2 y = y''$ itd. (str. 388, 393)

pochodne cząstkowe, na przykład

$f'_x(u), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ itd. (390, 393)

całka (str. 425)

całka oznaczona od dolnej granicy a do górnej granicy b (str. 485)

całka krzywoliniowa wzięta po łuku K lub po rzucie łuku K (str. 517, 519)

całka rozciągnięta na płaszczyznę S lub na objętość V (str. 526, 527)

całka podwójna
 całka potrójna

} (str. 526, 527)

VII. Liczby zespolone

i (niekiedy j) jednostka urojona ($i^2 = -1$) (str. 617)
 $\operatorname{re} a$ część rzeczywista liczby zespolonej a (str. 617)
 $\operatorname{im} a$ część urojona liczby zespolonej a (str. 617)
 $|a|$ moduł a liczby zespolonej (str. 618)
 $\arg a$ argument a (str. 618)

$\bar{a}$ liczba sprzężona z a , na przykład $a = 2 + 3i$, $\bar{a} = 2 - 3i$ (str. 619)
 Ln logarytm (naturalny) liczby zespolonej (str. 625)

VIII. Rachunek wektorowy

oznaczenia wektorów (str. 646)

wersor o tym kierunku co wektor a (str. 647)
 wersory w układzie współrzędnych prostokątnych (str. 647)

długość (bezwzględna wartość) wektora a (str. 646)
 równość, dodawanie, odejmowanie wektorów (str. 646, 648)

mnożenie składowe przez wektor (str. 648)

iloczyn skalarny wektorów (str. 650)

iloczyn wektorowy wektorów (str. 650)

iloczyn mieszany trzech wektorów (str. 651)

współrzędne wektora a w układzie współrzędnych prostokątnych (str. 649)

operator różniczkowy Hamiltona (nabla) (str. 677)

operator Laplace'a (str. 678)

gradient pola skalarnego ($\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$) (str. 666)

dywergencja pola wektorowego ($\text{div } V = \nabla V$) (str. 675)

rotacja pola wektorowego ($\text{rot } V = \nabla \times V$) (str. 675)

pochodna pola skalarnego względem wektora c (str. 666)

ALFABET GRECKI

$A \alpha$	alfa	$H \eta$	eta	$N \nu$	ni	$T \tau$	tau
$B \beta$	beta	$\Theta \theta$	teta	$\Xi \xi$	ksi	$Y \upsilon$	ypsilon
$\Gamma \gamma$	gamma	$I \iota$	jota	$O o$	omikron	$\Phi \varphi$	fi
$\Delta \delta$	delta	$K \kappa$	kappa	$\Pi \pi$	pi	$X \chi$	chi
$E \varepsilon$	epsilon	$\Lambda \lambda$	lambda	$\rho \rho$	ro	$\Psi \psi$	psi
$Z \zeta$	dzeta	$M \mu$	mi	$\Sigma \sigma$	sigma	$\Omega \omega$	omega

TABLICE I WYKRESY

I. TABLICE

Interpolacja. Większość zamieszczonych poniżej tablic podaje wartości funkcji o czterech cyfrach wartościowych ⁽¹⁾ dla argumentów o trzech cyfrach wartościowych. W wypadkach gdy argument podany jest z większą dokładnością i szukanej wartości funkcji nie można znaleźć bezpośrednio z tablic, trzeba uciec się do interpolacji. Najprostszą jest interpolacja liniowa, przy której zakłada się, że przyrost funkcji jest proporcjonalny do przyrostu argumentu. Jeżeli szukana wartość argumentu x leży pomiędzy znajdującymi się w tablicy wartościami x_0 i $x_1 = x_0 + h$, i wartościami tym odpowiadają wartości funkcji

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{ i } \quad y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta,$$

to przyjmuje się, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta.$$

Poprawka interpolacyjna $\frac{x - x_0}{h} \Delta$ daje się łatwo obliczyć za po-

mocą tablicy poprawek proporcjonalnych na str. 84 i 85, a także za pomocą wkładki do poradnika podającej iloczyny wartości różnicy Δ (od 11 do 90) przez 0,1, 0,2, ..., 0,9.

Przykład y. 1. Obliczamy $1,6754^2$. W tablicy (str. 17) znajdujemy $1,67^2 = 2,789$, $1,68^2 = 2,822$, $\Delta = 33$ ⁽²⁾. Z tablicy poprawek proporcjonalnych mamy

$$0,5 \cdot 33 = 16,5, \quad 0,04 \cdot 33 = 1,3, \quad \frac{x - x_0}{h} \Delta = 16,5 + 1,3 \approx 18,$$

a więc $1,6754^2 = 2,807$.

2. Obliczamy $\text{tg } 79^\circ 24'$. W tablicach (str. 58 i 85) znajdujemy $\text{tg } 79^\circ 20' = 5,309$, $\text{tg } 79^\circ 30' = 5,396$, $\Delta = 87$; $0,4 \cdot 87 \approx 35$, a więc mamy $\text{tg } 79^\circ 24' = 5,344$.

Błąd w interpolacji liniowej nie przewyższa jednostki ostatniej cyfry wartościowej, jeżeli dwie kolejne różnice Δ_0 i Δ_1 różnią się nie więcej

⁽¹⁾ Określenie cyfr wartościowych patrz str. 139.

⁽²⁾ Różnicę Δ oraz poprawkę wyraża się zazwyczaj w jednostkach ostatniego rzędu wartości funkcji, bez wypisywania początkowych zer oraz przecinka dziesiętnego.

niż o 4 jednostki ostatniego rzędu. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony (jak np. w tablicy $\operatorname{tg} x$ dla $x > 80^\circ$, str. 58), trzeba posłużyć się bardziej skomplikowanymi wzorami interpolacyjnymi. W większości wypadków wystarczy interpolacja kwadratowa według Bessela:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

gdzie

$$k = \frac{x - x_0}{h}, \quad k_1 = \frac{k(1-k)}{4};$$

wartość k_1 znajduje się w tablicy na str. 86.

P r z y k ł a d. Trzeba znaleźć $\operatorname{tg} 85^\circ 33'$ (tablica na str. 58). Znajdujemy ($h = 10'$): $k = 0,3$, $k_1 = 0,052$; poprawka wynosi więc $0,3 \cdot 491 - 0,052 \cdot 75 \approx 143$, zatem $\operatorname{tg} 85^\circ 33' = 12,849$.

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δ_{-1}
x_0	y_0	Δ_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δ_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

x	$\operatorname{tg} x$	k
$85^\circ 20'$	12,251	455
$85^\circ 30'$	12,706	491
$85^\circ 40'$	13,197	530
$85^\circ 50'$	13,727	

A. TABLICE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

1. Niektóre często spotykane stałe

Stała	n	$\log n$	Stała	n	$\log n$
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0 318310	$\overline{1,50285}$
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\overline{1,20182}$
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\overline{1,02573}$
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\overline{2,90079}$
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\overline{1,80388}$
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\overline{1,97997}$
$\pi:4$	0,785398	$\overline{1,89509}$	$4:\pi$	1,273240	$\overline{0,10491}$
$\pi:6$	0,523599	$\overline{1,71900}$	$6:\pi$	1,909859	$\overline{0,28100}$
$\pi:180(=1^\circ)$	0,017453	$\overline{2,24188}$	$180^\circ:\pi$	$57^\circ,295780$	$\overline{1,75812}$
$\pi:10800(=1')$	0,000291	$\overline{4,46373}$	$10800^\circ:\pi$	$3437',7468$	$\overline{3,53627}$
$\pi:648000(=1'')$	0,000005	$\overline{6,68557}$	$648000^\circ:\pi$	$206264'',81$	$\overline{5,31443}$
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\overline{1,00570}$
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\overline{1,75143}$
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\overline{1,60091}$
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\overline{1,90194}$
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\overline{1,83428}$
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\overline{1,79264}$
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\overline{1,56571}$
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\overline{1,13141}$
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\overline{1,78285}$
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\overline{1,85524}$
$e\pi/2$	4,810477	0,68219	$e-\pi/2$	0,207880	$\overline{1,31781}$
$e\pi$	23,140693	1,36438	$e-\pi$	0,043214	$\overline{2,63562}$
$e2\pi$	535,491656	2,72875	$e-2\pi$	0,001867	$\overline{3,27125}$
$\gamma^{(1)}$	0,577216	$\overline{1,76134}$	$\ln \pi$	1,144730	$\overline{0,05870}$
$M = \log e$	0,434294	$\overline{1,63778}$	$1:M = \ln 10$	2,302585	$\overline{0,36222}$
$g^{(2)}$	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\overline{1,00833}$
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\overline{2,70730}$
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi/\sqrt{g}$	9,83976	$\overline{0,99298}$
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi/\sqrt{2g}$	13,91552	$\overline{1,14350}$

⁽¹⁾ γ jest stałą Eulera (oznaczaną również literą C).

⁽²⁾ g jest przyspieszeniem grawitacyjnym w m/sec^2 ; podane tu zostały wartości przyspieszenia na poziomie morza i szerokości $45^\circ - 50^\circ$.

2. Kwadraty, sześciiany, pierwiastki

Tablica ta pozwala znaleźć kwadraty, sześciiany oraz pierwiastki kwadratowe i sześciennie z dokładnością do czterech cyfr wartościowych. Dla argumentów n zawartych pomiędzy 1,00 a 10,00 wartości n^2 i n^3 znajdujemy bezpośrednio z tablic, jeżeli wartość argumentu podana jest z trzema cyframi wartościowymi. Na przykład $1,79^2 = 3,204$ (str. 17). Jeżeli wartość argumentu podana jest dokładniej (tzn. ma więcej niż trzy cyfry wartościowe), należy zastosować interpolację (patrz str. 11). Dla tablicy tej błąd interpolacji liniowej nigdy nie przekracza jednostki ostatniego rzędu.

Przy szukaniu n^2 i n^3 przy $n > 10$ i przy $n < 1$ należy wziąć pod uwagę, że przy pomnożeniu n przez wartość 10^k , wartość n^2 powiększa się 10^{2k} razy, a wartość n^3 powiększa się 10^{3k} razy, tzn. że przesunięcie przecinka w liczbie n o k miejsc dziesiętnych w prawo powoduje przeniesienie przecinka o $2k$ miejsc w prawo w liczbie n^2 i o $3k$ miejsc w liczbie n^3 ; przy tym do wziętej z tablicy liczby dopisuje się w miarę potrzeby zera po prawej stronie lub po lewej. Na przykład $0,179^2 = 0,03204$, $179^3 = 5\,735\,000$ (¹).

Pierwiastki kwadratowe dla wartości argumentu n od 1,00 do 10,00 możemy znaleźć bezpośrednio z tablicy (z zastosowaniem interpolacji liniowej, str. 11), a dla dowolnych n według następujących reguł:

1° Liczbę podpierwiastkową dzieli się na grupy dwucyfrowe po lewej i po prawej stronie przecinka dziesiętnego. 2° Zależnie od ilości cyfr wartościowych w najwyższej grupie niezerowej szuka się w tablicy wartości pierwiastka kwadratowego w kolumnie $\sqrt{n}$ albo w kolumnie $\sqrt{10n}$. 3° W znalezionej wartości pierwiastka kwadratowego kładzie się przecinek dziesiętny opierając się na tym, że każda grupa dwucyfrowa przed przecinkiem liczby podpierwiastkowej daje w wartości pierwiastka jedną cyfrę przed przecinkiem, a dla liczb mniejszych od 1 każda grupa dwucyfrowa leżąca po przecinku składająca się z zer daje w wartości pierwiastka jedno zero po przecinku.

Przykłady. 1. $\sqrt{23,9} = 4,889$. 2. $\sqrt{0,000239} = 0,01546$. 3. $\sqrt{239000} = 488,9$. 4. $\sqrt{0,003} = 0,05477$. (W przykładzie tym należy do liczby podpierwiastkowej dodać w pamięci jeszcze jedno zero na końcu, dla uzupełnienia grupy dwucyfrowej; najwyższa grupa dwucyfrowa 30 ma dwie cyfry wartościowe, a więc pierwiastka kwadratowego należy szukać w kolumnie $\sqrt{10n}$).

Pierwiastki stopnia trzeciego z liczb n , $10n$, $100n$ dla wartości n od 1,00 do 10,00 możemy znaleźć bezpośrednio z tablicy (z zastosowaniem interpolacji liniowej), a dla dowolnych n — według następujących reguł:

1° Liczbę podpierwiastkową rozdzielamy po obu stronach prze-

(¹) Poleca się zapis $179^3 = 5,735 \cdot 10^6$, dzięki któremu unika się pisania zer zamiast cyfr nieznanych (dokładnie $179^3 = 5\,735\,339$).

cinka na grupy trzycyfrowe po prawej i po lewej stronie przecinka dziesiętnego. 2° Zależnie od ilości cyfr wartościowych w najwyższej grupie niezerowej szuka się w tablicy wartości pierwiastka stopnia trzeciego w kolumnie $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$, $\sqrt[3]{100n}$. 3° W znalezionej wartości pierwiastka sześciennego ustala się miejsce przecinka dziesiętnego według podobnych reguł, jak i dla pierwiastków kwadratowych.

Przykłady. 1. $\sqrt[3]{23,9} = 2,880$ (¹). 2. $\sqrt[3]{239000} = 62,06$. 3. $\sqrt[3]{0,00000239} = 0,01337$. 4. $\sqrt[3]{0,0003} = 0,06694$. 5. $\sqrt[3]{0,03} = 0,3107$. (W dwóch ostatnich przykładach należy dodać w pamięci odpowiednio jedno lub dwa zera na końcu dla uzupełnienia ostatniej grupy trzycyfrowej).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000

(¹) Zero na końcu należy zostawić, gdyż jest ono cyfrą wartościową (patrz str. 139) i określa dokładność otrzymanej wartości pierwiastka.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415			1,249	2,692	5,799

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,432
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[10]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[10]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,52	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,9	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,50	42,25	274,9	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2,746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[10]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[10]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1 000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

3. Potęgi liczb całkowitych

(od $n = 1$ do $n = 100$)

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149

n	n^2	n^3	n^4	n^5
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824

n	n^2	n^3	n^4	n^5
65	4 225	274 625	17 850 635	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

4. Odwrotności

W tablicy tej podane są wartości funkcji $10000/n$ z dokładnością do czterech cyfr wartościowych dla argumentów o trzech cyfrach wartościowych zawartych w przedziale od 1,00 do 10,00. Każda wartość funkcji znajduje się w wierszu oznaczonym dwiema początkowymi cyframi argumentu (kolumna n) i w kolumnie, która odpowiada trzeciej cyfrze argumentu. Na przykład $10000/2,26 = 4425$. Jeżeli argument podany jest z czterema cyframi wartościowymi, trzeba zastosować interpolację liniową (patrz str. 11). Należy zwrócić uwagę na to, że poprawki interpolacyjne tutaj odejmuje się, a nie dodaje.

Liczby umieszczone w tablicy możemy uważać za cyfry dziesiętne występujące po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym $1/n$; na przykład $1/2,26 = 0,4425$. Aby znaleźć wartość $1/n$ dla $n > 10$ lub $n < 1$, należy wziąć pod uwagę, że przy mnożeniu n przez 10^k wartość $1/n$ trzeba pomnożyć przez 10^{-k} , tzn. że przesunięcie przecinka dziesiętnego w liczbie n o k cyfr na prawo powoduje przesunięcie przecinka w liczbie $1/n$ o k miejsc w lewo i odwrotnie. Na przykład $1/22,6 = 0,04425$, a $1/0,226 = 44,25$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

5. Silnie i ich odwrotności

Silnie

<i>n</i>	<i>n</i> !	<i>n</i>	<i>n</i> !
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

Odwrotności silni ⁽¹⁾

<i>n</i>	$\frac{1}{n!}$	<i>n</i>	$\frac{1}{n!}$
1	1,000000	16	0,0 ¹³ 47795
2	0,500000	17	0,0 ¹⁴ 28115
3	0,166667	18	0,0 ¹⁵ 15619
4	0,041667	19	0,0 ¹⁷ 82206
5	0,0 ⁸ 3333	20	0,0 ¹⁸ 41103
6	0,0 ² 13889	21	0,0 ¹⁹ 19573
7	0,0 ³ 19841	22	0,0 ²¹ 88968
8	0,0 ⁴ 24802	23	0,0 ²² 38682
9	0,0 ⁵ 27557	24	0,0 ²³ 16117
10	0,0 ⁶ 27557	25	0,0 ²⁵ 64470
11	0,0 ⁷ 25052	26	0,0 ²⁶ 24796
12	0,0 ⁸ 20877	27	0,0 ²⁸ 91837
13	0,0 ⁹ 16059	28	0,0 ²⁹ 32799
14	0,0 ¹⁰ 11471	29	0,0 ³⁰ 11310
15	0,0 ¹² 76472	30	0,0 ³² 37700

⁽¹⁾ Dla $1/n!$ podano skrócony zapis zer po przecinku, np. $1/8! = 0,0⁴24802 = 0,000024802$.

6. Niektóre potęgi liczb 2, 3, 5

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

7. Logarytmy dziesiętne

Tablica ta służy do znajdowania dziesiętnych logarytmów liczb. Dla danej liczby najpierw wyznaczamy cechę logarytmu, według reguł podanych na str. 165, a potem znajdujemy w tablicach mantysę. Dla liczb o trzech cyfrach wartościowych szukamy mantysy w wierszu oznaczonym dwiema początkowymi cyframi wartościowymi (kolumna N) i w kolumnie, która odpowiada trzeciej cyfrze. Mantysy logarytmów w tej tablicy są czterocyfrowe. Jeżeli szukana liczba ma więcej niż trzy cyfry wartościowe, należy zastosować interpolację liniową (patrz str. 11). Przy tym poprawkę interpolacyjną wyznacza się tylko dla czwartej liczby wartościowej; szukanie poprawki dla piątej cyfry ma sens jedynie wtedy, gdy pierwszą cyfrą wartościową jest 1 lub 2.

Przykład. Mamy $\log 254,3 = 2,4053$ (do 4048 dodajemy poprawkę $0,3 \cdot 17 = 5,1$).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6748	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9808	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

8. Antylogarytmy

Tablica antylogarytmów⁽¹⁾ służy do znajdowania liczby według jej logarytmu dziesiętnego. W tablicy tej wartościami argumentu są trzycyfrowe mantysy logarytmów. Antylogarytm, czyli układ cyfr wartościowych, któremu odpowiada dana mantysa logarytmu, znajdujemy w wierszu oznaczonym dwiema początkowymi cyframi mantysy (kolumna *m*) i w kolumnie, która odpowiada trzeciej cyfrze mantysy. Antylogarytmy podane są z czterema cyframi wartościowymi. Aby uwzględnić czwartą cyfrę mantysy, należy dodać do liczby poprawkę interpolacyjną. Cecha logarytmu pozwoli położyć w otrzymanej liczbie przecinek dziesiętny według zasad podanych na str. 165.

⁽¹⁾ Liczba *y*, której logarytm dziesiętny jest równy *x*, nazywa się *antylogarytmem* liczby *x*. W myśl określenia logarytmu (patrz str. 163) funkcja ta pokrywa się z funkcją wykładniczą $y = 10^x$. Liczba ta nosi nazwę *numerus logarithmi*, albo po prostu: *numerus*. Jest to funkcja odwrotna względem funkcji logarytmicznej.

Przykład y: $\log x = 1,2763$, $x = 18,89$ (do liczby 1888 znalezionej w tablicy dodajemy poprawkę $0,3 \cdot 4 = 1,2$); w wyniku odzielamy przecinkiem dwie cyfry początkowe, ponieważ cecha logarytmu równa się jedności. Jeżeli $\log x = 2,2763$, to $x = 0,01889$. Wyniki te można zapisać w następujący sposób: $10^{1,2763} = 18,89$, $10^{-1,7237} = 0,01889$, ponieważ $2,2763 = -1,7237$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

9. Funkcje trygonometryczne

Sinus

Stopnie	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	→
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3063	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3146	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	↑ 44
←	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Stopnie

Cosinus

Sinus

Stopnie	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	→
45 ↓	0,7071	0,7092	0,7112	0,7132	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑ 0
←	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Stopnie

Cosinus

Tangens

Stopnie	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	→
0 ↓	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	↑ 44
←	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Stopnie

Cotangens

Tangens

Stopnie	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	→
45 ↓	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	40
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	1,428	35
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	30
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	25
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	20
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	15
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	10
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	5
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	↑ 0
←	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Stopnie

Cotangens

10. Funkcje wykładnicze i hiperboliczne oraz funkcje trygonometryczne (dla x od 0 do 1,6)

Tablica ta zawiera wartości funkcji wykładniczych e^x i e^{-x} , hiperbolicznych $\sinh x$, $\cosh x$ i $\tanh x$ oraz trygonometrycznych $\sin x$, $\cos x$ i $\tan x$ dla wartości x od 0 do 1,6, przy czym dla funkcji trygonometrycznych argument x wyrażony jest w radianach. W celu wyznaczenia wartości funkcji wykładniczych i hiperbolicznych dla $x > 1,6$ należy posługiwać się tablicą 11. Natomiast przy obliczaniu funkcji trygonometrycznych dla $x > 1,6$ posługujemy się załączoną tabliczką wielokrotności $\frac{1}{2}\pi$ i π .

Przykład y. 1. $\sin 7,5 = \sin(5 \cdot \frac{1}{2}\pi - 0,35398) = \cos 0,35398 = 0,9380$ (interpolacja liniowa).

2. $\sin 29 = \sin(9\pi + 0,72567) = -\sin 0,72567 = -0,6637$ (interpolacja liniowa).

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	0,9999	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6171	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,9874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,011
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+ 0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	- 0,0092	- 108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	- 0,0192	- 52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	- 0,0292	- 34,233

Wielokrotności liczb $\frac{1}{2} \pi$ i π

n	$n \cdot \frac{1}{2} \pi$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{1}{2} \pi$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

11. Funkcje wykładnicze (cd.)

(dla x od 1,6 do 10)

Tablica ta zawiera wartości funkcji wykładniczych e^x i e^{-x} dla x od 1,6 do 10. Można się nią również posługiwać przy obliczaniu wartości funkcji hiperbolicznych; w tym celu należy stosować wzory (str. 248):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	1,90	6,6859	0,1496	2,20	9,0250	0,1108
1,61	5,0028	0,1999	1,91	6,7531	0,1481	2,21	9,1157	0,1097
1,62	5,0531	0,1979	1,92	6,8210	0,1466	2,22	9,2073	0,1086
1,63	5,1039	0,1959	1,93	6,8895	0,1451	2,23	9,2999	0,1075
1,64	5,1552	0,1940	1,94	6,9588	0,1437	2,24	9,3933	0,1065
1,65	5,2070	0,1920	1,95	7,0287	0,1423	2,25	9,4877	0,1054
1,66	5,2593	0,1901	1,96	7,0993	0,1409	2,26	9,5831	0,1044
1,67	5,3122	0,1882	1,97	7,1707	0,1395	2,27	9,6794	0,1033
1,68	5,3656	0,1864	1,98	7,2427	0,1381	2,28	9,7767	0,1023
1,69	5,4195	0,1845	1,99	7,3155	0,1367	2,29	9,8749	0,1013
1,70	5,4739	0,1827	2,00	7,3891	0,1353	2,30	9,9742	0,10026
1,71	5,5290	0,1809	2,01	7,4633	0,1340	2,31	10,074	0,09926
1,72	5,5845	0,1791	2,02	7,5383	0,1327	2,32	10,176	0,09827
1,73	5,6407	0,1773	2,03	7,6141	0,1313	2,33	10,278	0,09730
1,74	5,6973	0,1755	2,04	7,6906	0,1300	2,34	10,381	0,09633
1,75	5,7546	0,1738	2,05	7,7679	0,1287	2,35	10,486	0,09537
1,76	5,8124	0,1720	2,06	7,8466	0,1275	2,36	10,591	0,09442
1,77	5,8709	0,1703	2,07	7,9248	0,1262	2,37	10,697	0,09348
1,78	5,9299	0,1686	2,08	8,0045	0,1249	2,38	10,805	0,09255
1,79	5,9895	0,1670	2,09	8,0849	0,1237	2,39	10,913	0,09163
1,80	6,0496	0,1653	2,10	8,1662	0,1225	2,40	11,023	0,09072
1,81	6,1104	0,1637	2,11	8,2482	0,1212	2,41	11,134	0,08982
1,82	6,1719	0,1620	2,12	8,3311	0,1200	2,42	11,246	0,08892
1,83	6,2339	0,1604	2,13	8,4149	0,1188	2,43	11,359	0,08804
1,84	6,2965	0,1588	2,14	8,4994	0,1177	2,44	11,473	0,08716
1,85	6,3598	0,1572	2,15	8,5849	0,1165	2,45	11,588	0,08629
1,86	6,4237	0,1557	2,16	8,6711	0,1153	2,46	11,705	0,08543
1,87	6,4883	0,1541	2,17	8,7583	0,1142	2,47	11,822	0,08458
1,88	6,5535	0,1526	2,18	8,8463	0,1130	2,48	11,941	0,08374
1,89	6,6194	0,1511	2,19	8,9352	0,1119	2,49	12,061	0,08291
1,90	6,6859	0,1496	2,20	9,0250	0,1108	2,50	12,182	0,08208

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,50	12,182	0,08208	2,85	17,288	0,05784	3,20	24,533	0,04076
2,51	12,305	0,08127	2,86	17,462	0,05727	3,21	24,779	0,04036
2,52	12,429	0,08046	2,87	17,637	0,05670	3,22	25,028	0,03996
2,53	12,554	0,07966	2,88	17,814	0,05613	3,23	25,280	0,03956
2,54	12,680	0,07887	2,89	17,993	0,05558	3,24	25,534	0,03916
2,55	12,807	0,07808	2,90	18,174	0,05502	3,25	25,790	0,03877
2,56	12,936	0,07730	2,91	18,357	0,05448	3,26	26,050	0,03839
2,57	13,066	0,07654	2,92	18,541	0,05393	3,27	26,311	0,03801
2,58	13,197	0,07577	2,93	18,728	0,05340	3,28	26,576	0,03763
2,59	13,330	0,07502	2,94	18,916	0,05287	3,29	26,843	0,03725
2,60	13,464	0,07427	2,95	19,106	0,05234	3,30	27,113	0,03688
2,61	13,599	0,07353	2,96	19,298	0,05182	3,31	27,385	0,03652
2,62	13,736	0,07280	2,97	19,492	0,05130	3,32	27,660	0,03615
2,63	13,874	0,07208	2,98	19,688	0,05079	3,33	27,938	0,03579
2,64	14,013	0,07136	2,99	19,886	0,05029	3,34	28,219	0,03544
2,65	14,154	0,07065	3,00	20,086	0,04979	3,35	28,503	0,03508
2,66	14,296	0,06995	3,01	20,287	0,04929	3,36	28,789	0,03474
2,67	14,440	0,06925	3,02	20,491	0,04880	3,37	29,079	0,03439
2,68	14,585	0,06856	3,03	20,697	0,04832	3,38	29,371	0,03405
2,69	14,732	0,06788	3,04	20,905	0,04783	3,39	29,666	0,03371
2,70	14,880	0,06721	3,05	21,115	0,04736	3,40	29,964	0,03337
2,71	15,029	0,06654	3,06	21,328	0,04689	3,41	30,265	0,03304
2,72	15,180	0,06587	3,07	21,542	0,04642	3,42	30,569	0,03271
2,73	15,333	0,06522	3,08	21,758	0,04596	3,43	30,877	0,03239
2,74	15,487	0,06457	3,09	21,977	0,04550	3,44	31,187	0,03206
2,75	15,643	0,06393	3,10	22,198	0,04505	3,45	31,500	0,03175
2,76	15,800	0,06329	3,11	22,421	0,04460	3,46	31,817	0,03143
2,77	15,959	0,06266	3,12	22,646	0,04416	3,47	32,137	0,03112
2,78	16,119	0,06204	3,13	22,874	0,04372	3,48	32,460	0,03081
2,79	16,281	0,06142	3,14	23,104	0,04328	3,49	32,786	0,03050
2,80	16,445	0,06081	3,15	23,336	0,04285	3,50	33,115	0,03020
2,81	16,610	0,06020	3,16	23,571	0,04243	3,51	33,448	0,02990
2,82	16,777	0,05961	3,17	23,807	0,04200	3,52	33,784	0,02960
2,83	16,945	0,05901	3,18	24,047	0,04159	3,53	34,124	0,02930
2,84	17,116	0,05843	3,19	24,288	0,04117	3,54	34,467	0,02901
2,85	17,288	0,05784	3,20	24,533	0,04076	3,55	34,813	0,02872

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
3,55	34,813	0,02872	3,90	49,402	0,02024	6,5	665,14	0,001503
3,56	35,163	0,02844	3,91	49,899	0,02004	6,6	735,10	0,001360
3,57	35,517	0,02816	3,92	50,400	0,01984	6,7	812,41	0,001231
3,58	35,874	0,02788	3,93	50,907	0,01964	6,8	897,85	0,001114
3,59	36,234	0,02760	3,94	51,419	0,01945	6,9	992,27	0,001008
3,60	36,598	0,02732	3,95	51,935	0,01925	7,0	1096,6	0,000912
3,61	36,966	0,02705	3,96	52,457	0,01906	7,1	1212,0	0,000825
3,62	37,338	0,02678	3,97	52,985	0,01887	7,2	1339,4	0,000747
3,63	37,713	0,02652	3,98	53,517	0,01869	7,3	1480,3	0,000676
3,64	38,092	0,02625	3,99	54,055	0,01850	7,4	1636,0	0,000611
3,65	38,475	0,02599	4,0	54,598	0,01832	7,5	1808,0	0,000553
3,66	38,861	0,02573	4,1	60,340	0,01657	7,6	1998,2	0,000500
3,67	39,252	0,02548	4,2	66,686	0,01500	7,7	2208,3	0,000453
3,68	39,646	0,02522	4,3	73,700	0,01357	7,8	2440,6	0,000410
3,69	40,045	0,02497	4,4	81,451	0,01228	7,9	2697,3	0,000371
3,70	40,447	0,02472	4,5	90,017	0,01111	8,0	2981,0	0,000335
3,71	40,854	0,02448	4,6	99,484	0,01005	8,1	3294,5	0,000304
3,72	41,264	0,02423	4,7	109,95	0,00910	8,2	3641,0	0,000275
3,73	41,679	0,02399	4,8	121,51	0,00823	8,3	4023,9	0,000249
3,74	42,098	0,02375	4,9	134,29	0,00745	8,4	4447,1	0,000225
3,75	42,521	0,02352	5,0	148,41	0,00674	8,5	4914,8	0,000203
3,76	42,948	0,02328	5,1	164,02	0,00610	8,6	5431,7	0,000184
3,77	43,380	0,02305	5,2	181,27	0,00552	8,7	6002,9	0,000167
3,78	43,816	0,02282	5,3	200,34	0,00499	8,8	6634,2	0,000151
3,79	44,256	0,02260	5,4	221,41	0,00452	8,9	7332,0	0,000136
3,80	44,701	0,02237	5,5	244,69	0,00409	9,0	8103,1	0,000123
3,81	45,150	0,02215	5,6	270,43	0,00370	9,1	8955,3	0,000112
3,82	45,604	0,02193	5,7	298,87	0,00335	9,2	9897,1	0,000101
3,83	46,063	0,02171	5,8	330,30	0,00303	9,3	10938	0,000091
3,84	46,525	0,02149	5,9	365,04	0,00274	9,4	12088	0,000083
3,85	46,993	0,02128	6,0	403,43	0,002479	9,5	13360	0,000075
3,86	47,465	0,02107	6,1	445,86	0,002243	9,6	14765	0,000068
3,87	47,942	0,02086	6,2	492,75	0,002029	9,7	16318	0,000061
3,88	48,424	0,02065	6,3	544,57	0,001836	9,8	18034	0,000055
3,89	48,911	0,02045	6,4	601,85	0,001662	9,9	19930	0,000050
3,90	49,402	0,02024	6,5	665,14	0,001503	10,0	22026	0,000045

12. Logarytmy naturalne

W tablicy tej, w odróżnieniu od tablicy logarytmów dziesiętnych, podane są tu zarówno cechy, jak i mantysy. Logarytmy liczb zawartych w przedziale od 1,00 do 9,99 znajdujemy bezpośrednio z tablicy, przy czym dla trzeciej i czwartej cyfry po przecinku w liczbie N należy wprowadzić poprawkę interpolacyjną (patrz str. 11).

Aby obliczyć logarytm naturalny liczby $M < 1$ lub $M \geq 10$, należy napisać daną liczbę w postaci $M = N/10^m$ lub $M = N \cdot 10^m$, gdzie N jest liczbą zawartą w przedziale od 1,00 do 9,99, a następnie skorzystać z zamieszczonej na końcu tabelki wartości $\ln 10^m$.

Przykłady. 1. Obliczamy $\ln 862 = \ln 8,62 + \ln 10^2 = 2,1541 + 4,6052 = 6,7593$.

2. Obliczamy $\ln 0,0862 = \ln 8,62 - \ln 10^2 = 2,1541 - 4,6052 = -2,4511$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8501	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	1	2	3	4	5
ln 10 ^m	2,3026	4,6052	6,9078	9,2103	11,5129

13. Długość okręgu o średnicy d

Tablica ta zawiera z czterema cyframi wartościowymi długości okręgów o średnicy d zawartej w przedziale od 1,00 do 9,99. Dla trzeciej i czwartej cyfry po przecinku w liczbie d należy wprowadzić poprawkę interpolacyjną (patrz str. 11).

Jeżeli średnica

$$d < 1 \quad \text{lub} \quad d > 10,$$

piszemy ją w postaci

$$D = d/10^k \quad \text{lub} \quad D = d \cdot 10^k,$$

gdzie d jest liczbą zawartą w przedziale od 1,00 do 9,99, a następnie znaną w tablicy długość okręgu dzielimy lub mnożymy przez 10^k .

Przykłady. 1. Dla $d = 69,3$ długość okręgu równa się 217,7.

2. Dla $d = 0,693$ długość okręgu równa się 2,177.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,999	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	25,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

14. Pole koła o średnicy d

Tablica ta zawiera z czterema cyframi wartościowymi pola kół o średnicy d zawartej w przedziale od 1,00 do 9,99. Podobnie jak w tablicy 13, dla trzeciej i czwartej cyfry po przecinku w liczbie d należy wprowadzić poprawkę interpolacyjną (patrz str. 11).

Jeżeli

$$d < 1 \quad \text{lub} \quad d > 10,$$

piszemy ją w postaci

$$D = d/10^k \quad \text{lub} \quad D = d \cdot 10^k,$$

gdzie $1,00 \leq d \leq 9,99$, a następnie znalezione w tablicy pole koła dzielimy lub mnożymy przez 10^k .

Przykłady. 1. Dla $d = 69,3$ pole koła równa się 3772.

2. Dla $d = 0,693$ pole koła równa się 0,3772.

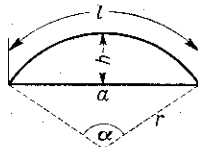
d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022

	d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499	
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992	
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501	
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026	
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566	
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12	
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69	
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28	
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88	
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50	
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14	
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79	
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45	
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14	
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83	
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55	
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28	
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02	
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78	
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56	
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35	
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16	
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98	
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82	
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67	
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54	
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43	
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	25,06	26,15	26,24	26,33	
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25	
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18	
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13	
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09	
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07	
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07	
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08	

<i>d</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

15. Elementy odcinka kołowego ⁽¹⁾

a. Długość łuku l i pole S segmentu dla cięciwy równej jednostki. Tablica ta daje elementy odcinków kołowych o stałej cięciwie $a = 1$ i różnych promieniach r (rys. 1). Argumentem jest strzałka h , która przebiega wartości od 0,00 do 0,50; dla każdej z tych wartości h dana jest w tablicy długość łuku l i pole odcinka S . Jeżeli cięciwa odcinka kołowego wyraża się liczbą $a \neq 1$, należy wartość argumentu h podzielić przez a , otrzymać zaś wartość l pomnożyć przez a , a S pomnożyć przez a^2 . Dla trzeciej i czwartej cyfry po przecinku w liczbie h wprowadza się poprawkę interpolacyjną.



Rys. 1

Przykład. Jeżeli w odcinku kołowym długość cięciwy $a_1 = 40$ cm i strzałka $h_1 = 6$ cm, to dla wyznaczenia długości łuku l_1 korzystamy z tablicy 15a. Z proporcji $h_1/a_1 = h/l$ obliczamy $h = 6/40 = 0,15$ i w tablicy znajdujemy odpowiednią wartość $l = 1,0590$; następnie z proporcji $l_1/l = a_1/l$ znajdujemy $l_1 = la_1 = 1,0590 \cdot 40 = 42,36$ cm.

h	l	S	h	l	S
—	—	—	0,25	1,1591	0,1747
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	0,30	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	0,35	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	0,40	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	0,45	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	0,50	1,5708	0,3927

⁽¹⁾ Wzory dotyczące elementów odcinka kołowego są na str. 215 i 216.

b. Długość łuku l , strzałka h , długość cięciwy a i pole S odcinka koła dla promienia $r=1$. Tablica ta zawiera elementy różnych odcinków kołowych o promieniu równym jednostce (rys. 1). Argumentem jest kąt α wyrażony w stopniach. Dla każdego kąta podana jest długość łuku l (czyli miara łukowa kąta), strzałka h , stosunek l/h , długość cięciwy a , stosunek a/h oraz pole S odcinka. Jeżeli promień koła wyraża się liczbą $r_1 \neq 1$, to tabelaryczne wartości l , h i a należy pomnożyć przez r_1 , pole S odcinka pomnożyć przez r_1^2 , natomiast stosunki l/h i a/h pozostają bez zmiany. Jeżeli mając daną długość łuku l_1 i strzałkę h_1 chcemy znaleźć promień r_1 , to obliczamy stosunek $l_1/h_1 = s$ (wyznaczający kształt odcinka kołowego) i szukając liczby s w rubryce l/h znajdujemy odpowiednią wartość tabelaryczną l ; wtedy z proporcji $l_1/l = r_1/1$ znajdujemy promień $r_1 = l_1/l$. Analogicznie postępujemy mając daną długość cięciwy a_1 i strzałkę h_1 .

Przykład. Jeżeli w odcinku kołowym długość cięciwy $a_1 = 40$ cm i strzałka $h_1 = 6$ cm, to dla obliczenia kąta α i promienia r_1 korzystamy z tablicy 15b; znajdujemy następnie $a_1/h_1 = a/h = 6,67$ i w odpowiednim wierszu mamy (za pomocą interpolacji) $\alpha = 66,8^\circ$, $a = 1,1010$ i $l = 1,1661$; następnie z proporcji $a_1/a = r_1/1$ znajdujemy $r_1 = 40/1,1010 = 36,33$ cm. Podobnie z proporcji $l_1/l = r_1/1$ znajdujemy $l_1 = 1,1661 \cdot 36,33 = 42,36$ cm.

α°	l	h	l/h	a	a/h	S
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352

α°	l	h	$\frac{l}{h}$	a	$\frac{a}{h}$	S
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039

α°	l	h	$\frac{l}{h}$	a	$\frac{a}{h}$	S
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540

α°	l	h	$\frac{l}{h}$	a	$\frac{a}{h}$	S
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125

α°	l	h	$\frac{l}{h}$	a	$\frac{a}{h}$	S
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	2,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525

α°	l	h	$\frac{l}{h}$	a	$\frac{h}{a}$	S
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

16. Zamiana stopni kątowych na radiany

Metodę korzystania z tablicy 16 ilustrują następujące przykłady:

1. $52^\circ 37' 23''$

$$50^\circ = 0,872665$$

$$2^\circ = 0,034907$$

$$30' = 0,008727$$

$$7'' = 0,002036$$

$$20'' = 0,000097$$

$$3'' = 0,000015$$

$$0,918447$$

$$52^\circ 37' 23'' = 0,91845 \text{ rad}$$

2. $5,645 \text{ rad}$

$$5,235988 = 300^\circ$$

$$0,409012$$

$$0,401426 = 23^\circ$$

$$0,007586$$

$$0,005818 = 20'$$

$$0,001768$$

$$0,001745 = 6''$$

$$0,000023 = 5''$$

$$5,645 \text{ rad} = 323^\circ 26' 5''$$

Długość łuku koła o promieniu równym jedności

Kąt	Łuk	Kąt	Łuk	Kąt	Łuk
1''	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1'	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
4	0,001164	19	0,331613	85	1,483530
5	0,001454	20	0,349066	90	1,570796
6	0,001745	21	0,366519	100	1,745329
7	0,002036	22	0,383972	120	2,094395
8	0,002327	23	0,401426	150	2,617994
9	0,002618	24	0,418879	180	3,141593
10	0,002909	25	0,436332	200	3,490659
20	0,005818	26	0,453786	250	4,363323
30	0,008727	27	0,471239	270	4,712389
40	0,011636	28	0,488692	300	5,235988
50	0,014544	29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Łuk równy promieniowi ma $57^\circ 17' 44''$,8 (równa się 1 radian)

17. Poprawki proporcjonalne

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,3	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,6	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

18. Tablica interpolacji kwadratowej

W tablicy tej zawarte są wartości współczynników k_1 potrzebnych przy interpolacji kwadratowej według Bessela (str. 12). Wszystkim wartościom k zawartym pomiędzy dwiema sąsiednimi liczbami zarówno lewej kolumny k jak i prawej kolumny k odpowiada jedna i ta sama wartość k_1 , umieszczona między tymi sąsiednimi wartościami k . Dla wartości k umieszczonej w tablicy bierze się zawsze wyżej leżącą wartość k_1 .

Przykłady. 1. Dla $k = 0,8$ mamy $k_1 = 0,040$ (podobnie jak i dla wszystkich innych wartości k zawartych między 0,797 i 0,804 lub między 0,196 i 0,203). 2. Dla $k = 0,3$ (lub $k = 0,7$) mamy $k_1 = 0,052$.

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

B. TABLICE FUNKCJI SPECJALNYCH

19. Funkcja gamma

W tablicy tej zawarte są wartości funkcji $\Gamma(x)$ (str. 204) dla wartości x od 1 do 2. Wartości funkcji $\Gamma(x)$ dla $x < 1$ i $x > 2$ można obliczyć za pomocą wzorów

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Przykłady. 1. Obliczamy $\Gamma(0,7) = \frac{\Gamma(1,7)}{0,7} = \frac{0,90864}{0,7} = 1,2981$.

2. Obliczamy $\Gamma(3,5) = 2,5 \cdot \Gamma(2,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot \Gamma(1,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,88623 = 3,32336$.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

20. Funkcje walcowe Bessela ⁽¹⁾

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	— ∞	— ∞	1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	-1,5342	-6,4590	1,003	0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	0,9385	+0,2423	-0,4445	-1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	-0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	-0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5696	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	-0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	-0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	-0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	-0,0484	0,4971	0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	-0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016

⁽¹⁾ Okreslenia, wzory i wykresy są na str. 582.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$ ⁽¹⁾	$K_1(x)$
3,0	-0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	-0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	-0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	-0,3971	-0,0660	-0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	-0,3205	-0,2311	-0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521
5,0	-0,1776	-0,3276	-0,3085	+0,1479	27,34	24,34	0,003691	0,004045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	0,003308	0,003619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	0,002966	0,003239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	0,002659	0,002900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	0,002385	0,002597
5,5	-0,0068	-0,3414	-0,3395	-0,0238	42,69	38,59	0,002139	0,002326
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	0,001918	0,002083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	0,001721	0,001866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	0,001544	0,001673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	0,001386	0,001499
6,0	+0,1506	-0,2767	-0,2882	-0,1750	67,23	61,34	0,001244	0,001344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	0,001117	0,001205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	0,001003	0,001081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	0,000901	0,0009691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	0,000803	0,0008693
6,5	+0,2601	-0,1538	-0,1732	-0,2741	106,3	97,74	0,0007259	0,0007799

⁽¹⁾ Tu i dalej przyjęto zapis: 0,009980 = 0,009980.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
6,5	+0,2601	-0,1538	-0,1732	-0,2741	106,3	97,74	0,0 ³ 7259	0,0 ³ 7799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	0,0 ³ 6520	0,0 ³ 6998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	0,0 ³ 5857	0,0 ³ 6280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	0,0 ³ 5262	0,0 ³ 5636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	0,0 ³ 4728	0,0 ³ 5059
7,0	+0,3001	-0,0047	-0,0259	-0,3027	168,6	156,0	0,0 ³ 4248	0,0 ³ 4542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	0,0 ³ 3817	0,0 ³ 4078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	0,0 ³ 3431	0,0 ³ 3662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	0,0 ³ 3084	0,0 ³ 3288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	0,0 ³ 2772	0,0 ³ 2953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	-0,2591	268,2	249,6	0,0 ³ 2492	0,0 ³ 2653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	0,0 ³ 2240	0,0 ³ 2383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	0,0 ³ 2014	0,0 ³ 2141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	0,0 ³ 1811	0,0 ³ 1924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	0,0 ³ 1629	0,0 ³ 1729
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	-0,1581	427,6	399,9	0,0 ³ 1465	0,0 ³ 1554
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	0,0 ³ 1317	0,0 ³ 1396
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	0,0 ³ 1185	0,0 ³ 1255
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	0,0 ³ 1066	0,0 ³ 1128
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	0,0 ³ 9588	0,0 ³ 1014
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	-0,0262	683,2	641,6	0,0 ⁴ 8626	0,0 ⁴ 9120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	0,0 ⁴ 7761	0,0 ⁴ 8200
8,7	-0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	0,0 ⁴ 6983	0,0 ⁴ 7374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	0,0 ⁴ 6283	0,0 ⁴ 6631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	0,0 ⁴ 5654	0,0 ⁴ 5964
9,0	-0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	0,0 ⁴ 5088	0,0 ⁴ 5364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	0,0 ⁴ 4579	0,0 ⁴ 4825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	0,0 ⁴ 4121	0,0 ⁴ 4340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	0,0 ⁴ 3710	0,0 ⁴ 3904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	0,0 ⁴ 3339	0,0 ⁴ 3512
9,5	-0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	0,0 ⁴ 3006	0,0 ⁴ 3160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	0,0 ⁴ 2706	0,0 ⁴ 2843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	0,0 ⁴ 2436	0,0 ⁴ 2559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	0,0 ⁴ 2193	0,0 ⁴ 2302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	0,0 ⁴ 1975	0,0 ⁴ 2072
10,0	-0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	0,0 ⁴ 1778	0,0 ⁴ 1865

21. Wielomiany Legendre'a (¹)

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

$x =$ $P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	-0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	-0,3125	0,0000
0,05	-0,4962	-0,0747	0,3657	0,0927	-0,2962	-0,1069
0,10	-0,4850	-0,1475	0,3379	0,1788	-0,2488	-0,1995
0,15	-0,4662	-0,2166	0,2928	0,2523	-0,1746	-0,2649
0,20	-0,4400	-0,2800	0,2320	0,3075	-0,0806	-0,2935
0,25	-0,4062	-0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	-0,2799
0,30	-0,3650	-0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	-0,2241
0,35	-0,3162	-0,4178	-0,0187	0,3225	0,2225	-0,1318
0,40	-0,2600	-0,4400	-0,1130	0,2706	0,2926	-0,0146
0,45	-0,1962	-0,4472	-0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	-0,1250	-0,4375	-0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	-0,0462	-0,4091	-0,3590	-0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	-0,3600	-0,4080	-0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	-0,2884	-0,4284	-0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	-0,1925	-0,4121	-0,3652	-0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	-0,0703	-0,3501	-0,4164	-0,2808	-0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	-0,2330	-0,3995	-0,3918	-0,2397
0,85	0,5838	0,2603	-0,0506	-0,2857	-0,4030	-0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	-0,0411	-0,2412	-0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

(¹) Określenia i wykresy są na str. 585.

22. Całki eliptyczne ⁽¹⁾

a. Całki eliptyczne pierwszego rodzaju

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad k = \sin \alpha$$

$\alpha^\circ \backslash \varphi^\circ$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3561	0,3564	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

b. Całki eliptyczne drugiego rodzaju

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt, \quad k = \sin \alpha$$

$\alpha^\circ \backslash \varphi^\circ$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

⁽¹⁾ Określenia podane są na str. 437.

c. Całki eliptyczne zupełne

$$K = F(k, \frac{1}{2} \pi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad k = \sin \alpha,$$

$$E = E(k, \frac{1}{2} \pi) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt, \quad k = \sin \alpha$$

α°	K	E	α°	K	E	α°	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

23. Całka prawdopodobieństwa

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad (1)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,25	0,1974	0,50	0,3829	0,75	0,5467
01	0,0080	26	0,2051	51	0,3899	76	0,5527
02	0,0160	27	0,2128	52	0,3969	77	0,5587
03	0,0239	28	0,2205	53	0,4039	78	0,5646
04	0,0319	29	0,2282	54	0,4108	79	0,5705
0,05	0,0399	0,30	0,2358	0,55	0,4177	0,80	0,5763
06	0,0478	31	0,2434	56	0,4245	81	0,5821
07	0,0558	32	0,2510	57	0,4313	82	0,5878
08	0,0638	33	0,2586	58	0,4381	83	0,5935
09	0,0717	34	0,2661	59	0,4448	84	0,5991
0,10	0,0797	0,35	0,2737	0,60	0,4515	0,85	0,6047
11	0,0876	36	0,2812	61	0,4581	86	0,6102
12	0,0955	37	0,2886	62	0,4647	87	0,6157
13	0,1034	38	0,2961	63	0,4713	88	0,6211
14	0,1113	39	0,3035	64	0,4778	89	0,6265
0,15	0,1192	0,40	0,3108	0,65	0,4843	0,90	0,6319
16	0,1271	41	0,3182	66	0,4907	91	0,6372
17	0,1350	42	0,3255	67	0,4971	92	0,6424
18	0,1428	43	0,3328	68	0,5035	93	0,6476
19	0,1507	44	0,3401	69	0,5098	94	0,6528
0,20	0,1585	0,45	0,3473	0,70	0,5161	0,95	0,6579
21	0,1663	46	0,3545	71	0,5223	96	0,6629
22	0,1741	47	0,3616	72	0,5285	97	0,6680
23	0,1819	48	0,3688	73	0,5346	98	0,6729
24	0,1897	49	0,3759	74	0,5407	99	0,6778
0,25	0,1974	0,50	0,3829	0,75	0,5467	1,00	0,6827

(1) Niekiedy całką prawdopodobieństwa nazywa się funkcję

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,00	0,6827	1,35	0,8230	1,70	0,9109	2,25	0,9756
01	0,6875	36	0,8262	71	0,9127	30	0,9786
02	0,6923	37	0,8293	72	0,9146	35	0,9812
03	0,6970	38	0,8324	73	0,9164	40	0,9836
04	0,7017	39	0,8355	74	0,9181	45	0,9857
1,05	0,7063	1,40	0,8385	1,75	0,9199	2,50	0,9876
06	0,7109	41	0,8415	76	0,9216	55	0,9892
07	0,7154	42	0,8444	77	0,9233	60	0,9907
08	0,7199	43	0,8473	78	0,9249	65	0,9920
09	0,7243	44	0,8501	79	0,9265	70	0,9931
1,10	0,7287	1,45	0,8529	1,80	0,9281	2,75	0,9940
11	0,7330	46	0,8557	81	0,9297	80	0,9949
12	0,7373	47	0,8584	82	0,9312	85	0,9956
13	0,7415	48	0,8611	83	0,9328	90	0,9963
14	0,7457	49	0,8638	84	0,9342	95	0,9968
1,15	0,7499	1,50	0,8664	1,85	0,9357	3,00	0,99730
16	0,7540	51	0,8690	86	0,9371	10	0,99806
17	0,7580	52	0,8715	87	0,9385	20	0,99863
18	0,7620	53	0,8740	88	0,9399	30	0,99903
19	0,7660	54	0,8764	89	0,9412	40	0,99933
1,20	0,7699	1,55	0,8789	1,90	0,9426	3,50	0,99953
21	0,7737	56	0,8812	91	0,9439	60	0,99968
22	0,7775	57	0,8836	92	0,9451	70	0,99978
23	0,7813	58	0,8859	93	0,9464	80	0,99986
24	0,7850	59	0,8882	94	0,9476	90	0,99990
1,25	0,7887	1,60	0,8904	1,95	0,9488	4,00	0,99994
26	0,7923	61	0,8926	96	0,9500		
27	0,7959	62	0,8948	97	0,9512	4,417	$1 - 10^{-5}$
28	0,7995	63	0,8969	98	0,9523		
29	0,8029	64	0,8990	99	0,9534	4,892	$1 - 10^{-6}$
1,30	0,8064	1,65	0,9011	2,00	0,9545	5,327	$1 - 10^{-7}$
31	0,8098	66	0,9031	05	0,9596		
32	0,8132	67	0,9051	10	0,9643		
33	0,8165	68	0,9070	15	0,9684		
34	0,8198	69	0,9090	20	0,9722		
1,35	0,8230	1,70	0,9109	2,25	0,9756		

24. Rozkład χ^2 i rozkład t Studenta ⁽¹⁾

$$P(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\chi_{\alpha}^2}^{\infty} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z} dz = \alpha,$$

$$P(|t| \geq t_{\alpha}) = \frac{2}{\sqrt{r} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}r)} \int_{t_{\alpha}}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2/r)^{\frac{1}{2}(r+1)}} dt = \alpha$$

$P(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = \alpha$						$P(t \geq t_{\alpha}) = \alpha$					
α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001	α
n											r
1	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	1
2	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	2
3	6,251	7,815	9,837	11,345	16,268	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941	3
4	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	4
5	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859	5
6	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	6
7	12,017	14,067	16,662	18,475	24,322	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405	7
8	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	8
9	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	9
10	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	10
11	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	11
12	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	12
13	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	13
14	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	14
15	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	15
16	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	16
17	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	17
18	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	18
19	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883	19
20	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850	20
21	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819	21
22	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	22
23	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767	23
24	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	24
25	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725	25

⁽¹⁾ Por. str. 805 i 806.

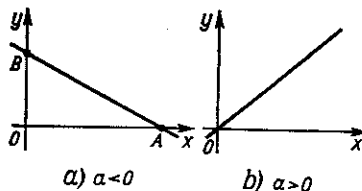
$P(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = \alpha$						$P(t \geq t_{\alpha}) = \alpha$					
α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001	α
n											r
28	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707	26
27	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690	27
28	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674	28
29	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659	29
30	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646	30
						1,684	2,021	2,423	2,704	3,551	40
						1,671	2,000	2,390	2,660	3,460	60
						1,658	1,980	2,358	2,617	3,373	120
						1,645	1,960	2,326	2,576	3,291	∞

II. WYKRESY

A. FUNKCJE ELEMENTARNE

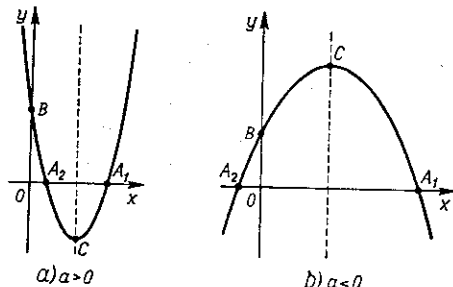
1. Wielomiany

Funkcja liniowa $y = ax + b$. Wykres (rys. 2a): *linia prosta*. Dla $a > 0$ funkcja monotonicznie wzrasta, dla $a < 0$ monotonicznie maleje, dla $a = 0$ jest stała. Przecieście z osią Ox : $A(-b/a, 0)$, jeżeli $a \neq 0$; z osią Oy : $B(0, b)$. Szczegóły — patrz str. 260. Gdy $b = 0$, otrzymujemy *proporcjonalność prostą* $y = ax$; wykres: prosta przechodząca przez początek współrzędnych (rys. 2b).



Rys. 2

Trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Wykres (rys. 3): *parabola* o pionowej osi $x = -b/2a$ (oś symetrii). Dla $a > 0$ funkcja najpierw maleje, osiąga minimum, następnie wzrasta; dla $a < 0$ najpierw wzrasta, osiąga maksimum, następnie maleje. Przecieście z osią Ox :

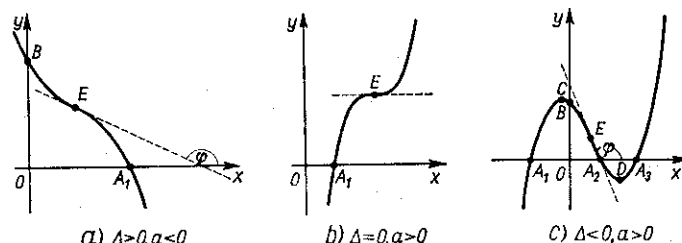


Rys. 3

$A_1, A_2 \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$, jeżeli $b^2 - 4ac > 0$; z osią Oy : $B(0, c)$.

Ekstremum w punkcie $C \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$. O paraboli patrz str. 273 - 275.

Wielomian stopnia trzeciego $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$. Wykres (rys. 4): *parabola sześcienna* (*parabola stopnia trzeciego*). Przebieg funkcji zależy od znaków a i $\Delta = 3ac - b^2$. Jeżeli $\Delta \geq 0$ (rys. 4a i b) funkcja monotonicznie wzrasta dla $a > 0$ i monotonicznie maleje dla $a < 0$. Jeżeli $\Delta < 0$, funkcja ma dwa ekstrema w punktach



Rys. 4

$C, D \left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \mp (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2} \right)$ (rys. 4c); dla $a > 0$ funkcja rośnie od $-\infty$ do maksimum, potem maleje do minimum, a następnie wzrasta do $+\infty$, dla $a < 0$ funkcja maleje od $+\infty$ do minimum, wzrasta do maksimum, wreszcie maleje do $-\infty$. Punkty przecięcia krzywej z osią Ox mają odcięte równe rzeczywistym pierwiastkom równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ⁽¹⁾; może ich być jeden albo dwa (i wtedy krzywa jest styczna do osi Ox), albo trzy (punkty A_1, A_2 i A_3 na rysunku 4c). Przecieście z osią Oy : $B(0, d)$.

Punkt przegięcia $E \left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \right)$ jest środkiem symetrii krzywej; styczna w tym punkcie ma współczynnik kątowy $\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{dy}{dx} \right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

Wielomian stopnia n $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, gdzie $a_0 \neq 0$. Wykres (rys. 5): *parabola stopnia n* ⁽²⁾.

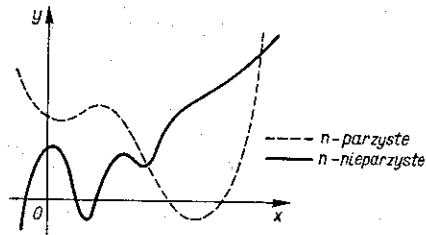
a. n jest nieparzyste. Funkcja zmienia się w sposób ciągły;

⁽¹⁾ O rozwiązywaniu równań stopnia trzeciego patrz str. 171 - 173.

⁽²⁾ O stopniu krzywej patrz str. 260.

gdy $a_0 > 0$, funkcja zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, natomiast gdy $a_0 < 0$, od $+\infty$ do $-\infty$. Krzywa może mieć z osią Ox od 1 do n punktów przecięcia (¹). Funkcja bądź nie ma ekstremów, bądź ma ich ilość parzystą (od 2 do $n-1$), przy czym maksima i minima występują na przemian; ilość punktów przegięcia jest nieparzysta (od 1 do $n-2$).

b. n jest parzyste. Funkcja zmienia się w sposób ciągły, przy czym dla $a_0 > 0$ funkcja najpierw maleje od $+\infty$, przebiega przez nieparzystą ilość ekstremów (od 1 do $n-1$), wśród których maksima i minima występują na przemian, i w końcu wzrasta do $+\infty$, nato-



Rys. 5

miast dla $a_0 < 0$ funkcja najpierw wzrasta od $-\infty$, przebiega przez nieparzystą ilość ekstremów i w końcu maleje do $-\infty$. Krzywa może mieć od 0 do n punktów przecięcia z osią Ox . Ilość punktów przegięcia jest parzysta (od 0 do $n-2$).

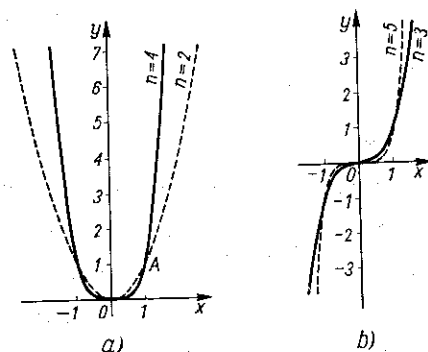
Parabole stopnia n nie mają asymptot i punktów osobliwych.

Przy rysowaniu wykresu poleca się znaleźć najpierw ekstrema, punkty przegięcia oraz wartości pochodnej w tych punktach, nanieść te punkty i ich styczne na wykres, a następnie poprowadzić ciągłą, gładką krzywą.

Przy wykresowaniu wielomianów stopnia czwartego, $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, gdzie $a \neq 0$ i a ma wartość ustaloną, wygodnie jest zrobić wykres funkcji $y = ax^4$ (patrz niżej), a więc przesunąć początek współrzędnych do punktu $(-b/4a, 0)$, sprowadzić równanie do postaci $Y = aX^4 + a'X^2 + b'X + c'$ i zastosować dodawanie rzędnych krzywej $Y = aX^4$ i krzywej $Y = a'X^2 + b'X + c'$.

Funkcja potęgowa $y = ax^n$, gdzie n jest liczbą naturalną > 1 . Wykres (rys. 6): parabola stopnia n . Gdy $a = 1$, krzywa $y = x^n$ przechodzi przez punkty $O(0, 0)$ i $A(1, 1)$ i jest styczna do osi Ox w początku współrzędnych. Dla n parzystego (rys. 6a) krzywa jest symetryczna względem osi Oy i osiąga minimum w początku współrzędnych; dla n nieparzystego (rys. 6b) krzywa jest symetryczna względem początku współrzędnych, który jest punktem przegięcia krzywej.

(¹) O rozwiązywaniu równań algebraicznych stopnia n patrz str. 174-177 i 180-182.



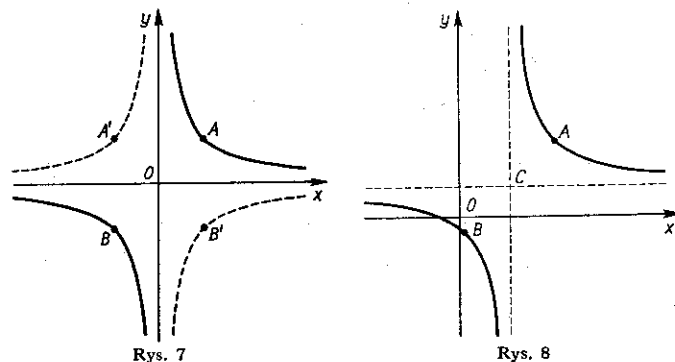
Rys. 6

Asymptot nie ma. Gdy $a > 0$, krzywą $y = ax^n$ otrzymuje się z krzywej $y = x^n$ mnożąc wszystkie jej rzędne przez a . Gdy $a < 0$, krzywa jest zwierciadlanym odbiciem krzywej $y = |a|x^n$ względem osi Ox .

2. Funkcje wymierne ułamkowe

Proporcjonalność odwrotna $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$. Wykres (rys. 7):

hiperbola równoramienna, której asymptotami są osie współrzędnych. Nieciągłość w punkcie $x = 0$. Gdy $a > 0$, funkcja maleje od 0 do $-\infty$ i maleje od $+\infty$ do 0; wierzchołki $A(\sqrt{a}, \sqrt{a})$, $B(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$.

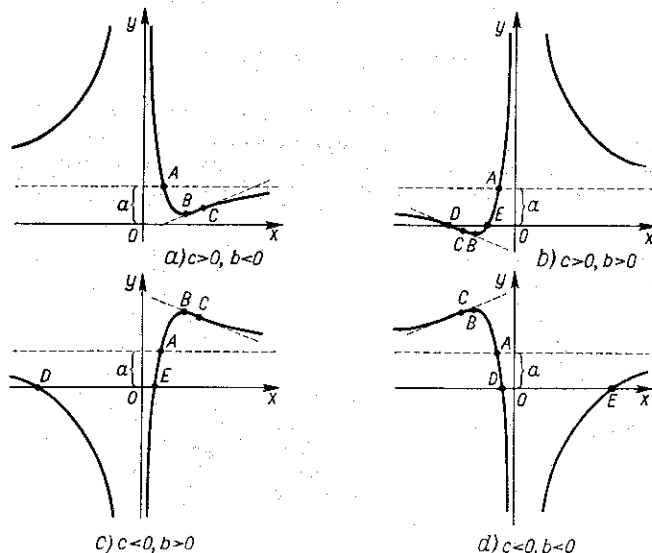


Rys. 7

Rys. 8

Gdy $a < 0$, funkcja wzrasta od 0 do $+\infty$ i dalej wzrasta od $-\infty$ do 0; wierzchołki $A'(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$ i $B'(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$. Ekstremów nie ma. O hiperboli patrz str. 269–272.

Funkcja homograficzna $y = \frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$, gdzie $a_2 \neq 0$ i $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Wykres (rys. 8): hiperbola równoramienna o asymptotach $y = a_1/a_2$ i $x = -b_2/a_2$ (równoległych do osi współrzędnych); środek $C(-b_2/a_2, a_1/a_2)$. Współczynniki a w równaniu proporcjonalności odwrotnej $y = a/x$ odpowiada wartość $a = -D/a_2^2$; wierzchołki hiperboli $A, B\left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$; znaki są jednakowe przy $D < 0$ i różne przy $D > 0$. Nieciągłość w punkcie $x = -b_2/a_2$. Gdy $D < 0$, funkcja maleje od a_1/a_2 do $-\infty$ i dalej maleje od $+\infty$ do a_1/a_2 . Gdy $D > 0$, funkcja wzrasta od a_1/a_2 do $+\infty$ i dalej wzrasta od $-\infty$ do a_1/a_2 . Ekstremów nie ma.

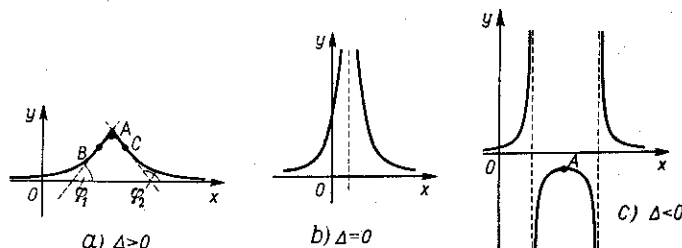


Rys. 9

Funkcja $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^2}$, gdzie $b \neq 0, c \neq 0$ (1).

Wykres (rys. 9): krzywa stopnia trzeciego o dwóch asymptotach $x = 0, y = a$. Wykres składa się z dwóch gałęzi: jednej, odpowiadającej monotonicznej zmianie y od a do $+\infty$ lub do $-\infty$ i drugiej, przechodzącej przez trzy charakterystyczne punkty: przecięcie z asymptotą $A(-c/b, a)$, ekstremum $B(-2c/b, a-b^2/4c)$ i punkt przegięcia $C(-3c/b, a-2b^2/9c)$. Zależnie od znaków b i c możliwe są cztery przypadki położenia tych gałęzi (rys. 9a, b, c, d). Gdy $a = 0$, oś Ox jest asymptotą. Gdy $a \neq 0$ i $b^2-4ac > 0$, oś Ox przecina krzywą w punktach $D, E\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$; gdy $b^2-4ac = 0$, oś Ox jest styczna do krzywej; gdy $b^2-4ac < 0$, oś Ox nie przecina krzywej.

Funkcja $y = \frac{1}{ax^2+bx+c}$, gdzie $a \neq 0$. Wykres (rys. 10): krzywa stopnia trzeciego, symetryczna względem prostej $x = -b/2a$ (równoległej do osi Oy) i mająca oś Ox za asymptotę. Przebieg funkcji zależy od znaków a i $\Delta = 4ac-b^2$. Rozważymy przypadek, gdy $a > 0$.



Rys. 10

a. $\Delta > 0$ (rys. 10a). Funkcja jest ciągła i dodatnia dla każdego x . Funkcja wzrasta od 0 do maksimum i dalej maleje do 0. Maksimum: $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$; punkty przegięcia $B, C\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \frac{3a}{\Delta}\right)$ nachylenie stycznych określone jest przez $\operatorname{tg} \varphi = \mp a^2(3/\Delta)^{3/2}$.

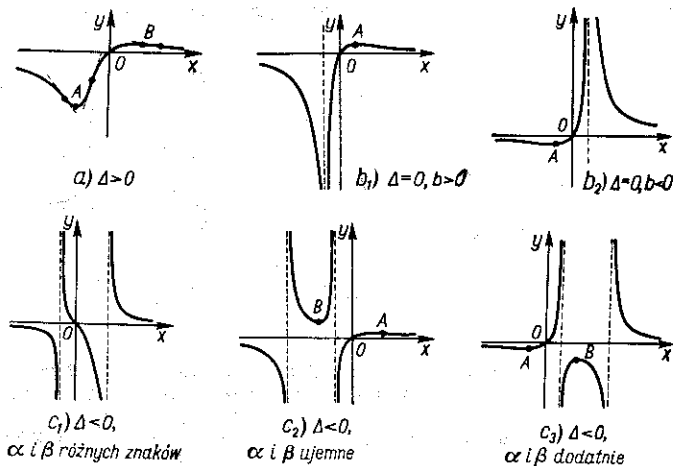
b. $\Delta = 0$ (rys. 10b). Funkcja jest dodatnia dla każdego x . Funkcja wzrasta od 0 do $+\infty$, ma asymptotę przy $x = -b/2a$ i maleje od $+\infty$ do 0.

(1) Gdy $b = 0$, patrz funkcję $y = ax^{-n}$ na str. 105; gdy $c = 0$, patrz funkcję homograficzną na str. 101.

c. $\Delta < 0$ (rys. 10c). Funkcja wzrasta od 0 do $+\infty$, ma asymptotę $x = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a}$, dalej wzrasta od $-\infty$ do maksimum $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, maleje do $-\infty$, ma asymptotę $x = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a}$, wreszcie maleje od $+\infty$ do 0.

Gdy $a < 0$, należy rozpatrzyć krzywą $y = \frac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ i odwzorować ją symetrycznie względem osi Ox .

Funkcja $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$. Wykres (rys. 11): krzywa stopnia trzeciego przechodząca przez początek współrzędnych i mająca za asymptotę oś Ox . Przebieg funkcji zależy od znaków a i $\Delta = 4ac - b^2$, a także od znaków pierwiastków α i β równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $\Delta < 0$, i od znaku b , gdy $\Delta = 0$. Rozważymy przypadek, gdy $a > 0$.



Rys. 11

a. $\Delta > 0$ (rys. 11a). Funkcja jest ciągła, maleje od 0 do minimum $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, wzrasta do maksimum $B\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ i dalej maleje do 0. Krzywa ma trzy punkty przecięcia.

b. $\Delta = 0$. Przebieg funkcji zależy od znaku b : 1° Gdy $b > 0$ (rys. 11b₁), funkcja maleje od 0 do $-\infty$, ma asymptotę $x = -b/2a$, wzrasta od $-\infty$ do maksimum $A\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ac}+b}\right)$ i dalej maleje od 0. 2° Gdy $b < 0$ (rys. 11b₂), funkcja maleje od 0 do minimum $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{2\sqrt{ac}-b}\right)$, wzrasta do $+\infty$, ma asymptotę $x = -b/2a$, wreszcie maleje od $+\infty$ do 0. W obu przypadkach krzywa ma jeden punkt przecięcia. 3° Gdy $b = 0$, wówczas również $c = 0$ i mamy proporcjonalność odwrotną (patrz str. 101).

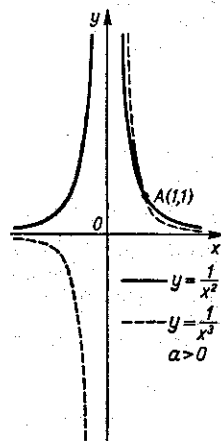
c. $\Delta < 0$. Funkcja ma postać $y = \frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$. Przebieg funkcji zależy od znaków α i β : 1° Gdy α i β są różnych znaków, np. $\alpha < 0 < \beta$ (rys. 11c₁), funkcja maleje od 0 do $-\infty$, ma asymptotę $x = \alpha$, maleje od $+\infty$ do $-\infty$, ma drugą asymptotę $x = \beta$ i dalej maleje od $+\infty$ do 0. Ekstremów nie ma. 2° Gdy α i β są ujemne, np. $\alpha < \beta < 0$ (rys. 11c₂), funkcja maleje od 0 do $-\infty$, ma asymptotę $x = \alpha$, maleje od $+\infty$ do minimum $B\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, następnie wzrasta do $+\infty$, ma drugą asymptotę $x = \beta$, wzrasta od $-\infty$ do maksimum $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ i wreszcie maleje do 0. 3° Gdy α i β są dodatnie, np. $0 < \alpha < \beta$ (rys. 11c₃), funkcja maleje od 0 do minimum $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, potem wzrasta do $+\infty$, ma asymptotę $x = \alpha$, następnie wzrasta od $-\infty$ do maksimum $B\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, maleje do $-\infty$, ma drugą asymptotę $x = \beta$ i wreszcie maleje od $+\infty$ do 0. W powyższych przypadkach funkcja ma jeden punkt przecięcia. 4° Gdy jeden z pierwiastków α lub β jest równy 0, mamy funkcję homograficzną $y = \frac{1}{ax+b}$ (patrz str. 102).

Gdy $a < 0$, należy rozpatrzyć krzywą $y = \frac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ i odwzorować ją symetrycznie względem osi Ox .

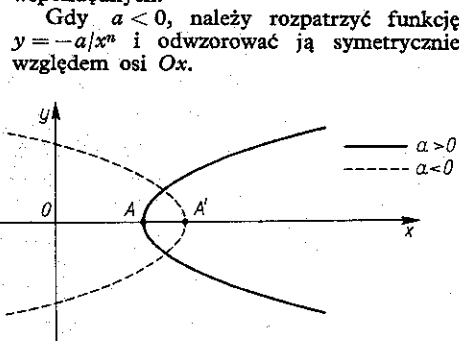
Funkcja $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, $a \neq 0$. Wykres (rys. 12): krzywa typu hiperbolicznego, której asymptotami są osie współrzędnych. Funkcja jest nieciągła przy $x = 0$.

Gdy $a > 0$, to dla n parzystego (rys. 12, $n = 2$) funkcja różnie od 0 do $+\infty$, a następnie maleje od $+\infty$ do 0, pozostając stale

dodatnia, natomiast dla n nieparzystego (rys. 12, $n=3$), funkcja maleje od 0 do $-\infty$ i dalej maleje od $+\infty$ do 0 . Ekstremów nie ma. Im większe jest n , tym szybciej krzywa zbliża się asymptotycznie do osi Ox i tym wolniej do osi Oy . Gdy n jest parzyste, krzywa jest symetryczna względem osi Oy , gdy n jest nieparzyste, krzywa jest symetryczna względem początku współrzędnych.



Rys. 12



Rys. 13

3. Funkcje niewymierne

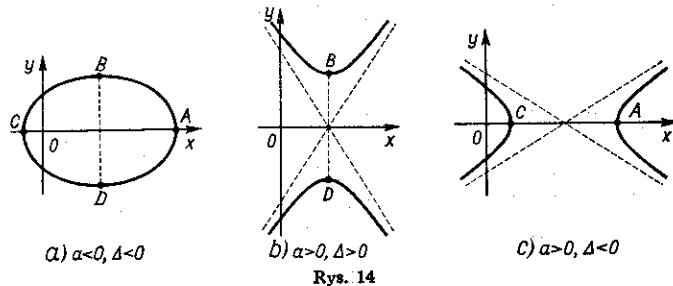
Pierwiastek kwadratowy z funkcji liniowej $y = \sqrt{ax+b}$, $a \neq 0$. Wykres (rys. 13): górna połowa paraboli, o osi $y=0$, wierzchołku $A(-b/a, 0)$ i parametrze $p = \frac{1}{2a}$. Obszar oznaczoności i przebieg funkcji zależy od znaku a (rys. 13, linia ciągła dla $a > 0$, linia przerywana dla $a < 0$). Ekstremów nie ma. Szczegóły o paraboli patrz str. 273 - 275.

Pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$.

a. $a < 0$. $1^\circ \Delta = 4ac - b^2 < 0$. Wykres (rys. 14a): górna połowa elipsy o osiach $y=0$ i $x = -b/2a$ oraz o wierzchołkach A , $C(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0)$ i B , $D(-\frac{b}{2a}, \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a}})$. Szczegóły o elipsie patrz str. 266 - 269. $2^\circ \Delta = 0$. Wzór wyznacza jeden punkt o współrzędnych $x = -b/2a$, $y = 0$. $3^\circ \Delta < 0$. Krzywa nie istnieje.

b. $a > 0$. $1^\circ \Delta > 0$. Wykres (rys. 14b): górna gałąź hiperboli

o osi rzeczywistej $x = -b/2a$ i urojonej $y = 0$ oraz o wierzchołkach B , $D(-\frac{b}{2a}, \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a}})$. $2^\circ \Delta = 0$ (bez rysunku). Funkcja ma postać $y = \sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2}$. Wykres: górne półproste o wspólnym początku. $S(-b/2a, 0)$. $3^\circ \Delta < 0$. Wykres (rys. 14c): górna połowa hiperboli



Rys. 14

o osi rzeczywistej $y=0$ i urojonej $x = -b/2a$ oraz wierzchołkach A , $C(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0)$. Szczegóły o hiperboli patrz str. 269 - 272.

Funkcja $y = ax^{m/n}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi, pierwszymi względem siebie. Rozważmy przypadek, gdy $a=1$, czyli

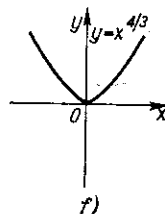
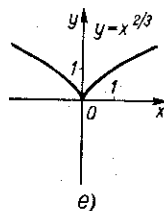
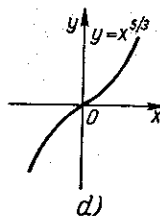
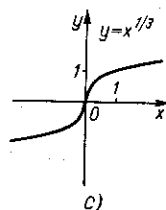
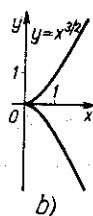
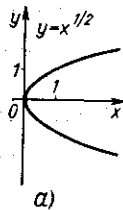
$$y = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

a. n parzyste. Krzywa przechodzi przez punkt $(1,1)$ i jest styczna do osi Oy , gdy $m/n < 1$ (rys. 15a), a do osi Ox , gdy $m/n > 1$ (rys. 15b).

b. n nieparzyste, m nieparzyste. Krzywa ma środek symetrii i punkt przegięcia w początku współrzędnych, przechodzi przez punkty $(1,1)$ i $(-1,-1)$ i jest styczna do osi Oy , gdy $m/n < 1$ (rys. 15c), a do osi Ox , gdy $m/n > 1$ (rys. 15d).

c. n nieparzyste, m parzyste. Krzywa jest symetryczna względem osi Oy i przechodzi przez punkty $(1,1)$ i $(-1,1)$. Gdy $m/n < 1$, krzywa ma ostrze w początku współrzędnych i jej gałęzie są styczne do osi Oy (rys. 15e), a gdy $m/n > 1$, krzywa ma wierzchołek w początku współrzędnych i jest styczna do osi Ox (rys. 15f).

Gdy $a > 0$, należy wszystkie rzędne krzywej $y = x^{m/n}$ pomnożyć przez a . Gdy $a < 0$, należy pomnożyć wszystkie rzędne przez $|a|$ i przekształcić otrzymaną krzywą symetrycznie względem osi Ox .



Rys. 15

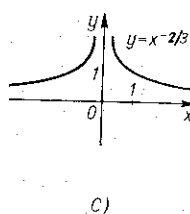
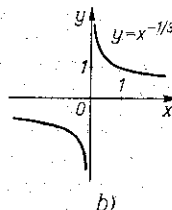
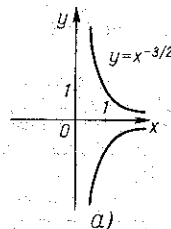
Funkcja $y = ax^{-m/n}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi pierwszymi względem siebie. Rozważmy przypadek, gdy $a = 1$, czyli

$$y = x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}.$$

Gdy $a \neq 1$, postępujemy jak w poprzednim przypadku.

a. n parzyste. Krzywa jest symetryczna względem osi Ox , przechodzi przez punkty $(1,1)$ i $(1, -1)$, ma asymptoty $x = 0$ i $y = 0$ (rys. 16a).

b. n nieparzyste, m nieparzyste. Krzywa ma środek



Rys. 16

symetrii w początku współrzędnych, przechodzi przez punkty $(1,1)$ i $(-1, -1)$ i ma asymptoty $x = 0$ i $y = 0$ (rys. 16b).

c. n nieparzyste, m parzyste. Krzywa jest symetryczna względem osi Oy , przechodzi przez punkty $(1,1)$ i $(-1,1)$, ma asymptoty $x = 0$ i $y = 0$ (rys. 16c).

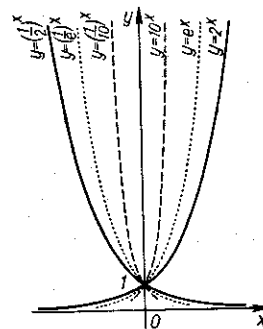
We wszystkich trzech przypadkach funkcja nie ma ekstremów.

4. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

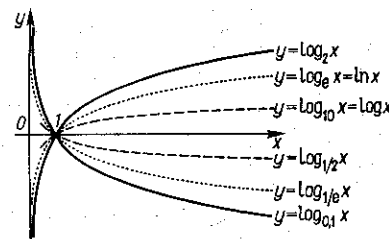
Funkcja wykładnicza $y = a^x = e^{bx}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b = \ln a$. Wykres (rys. 17): *krzywa wykładnicza*. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie, zawsze przechodzi przez punkt $(0,1)$ i ma asymptotę $y = 0$, do której zbliża się tym szybciej, im większa jest wartość $|\ln a|$.

Przy $a > 1$ (czyli $b > 0$) funkcja wzrasta od 0 do $+\infty$, natomiast przy $a < 1$ (czyli $b < 0$) funkcja maleje od $+\infty$ do 0. Funkcja $y = a^{-x} = (1/a)^x$ wzrasta przy $a < 1$ i maleje przy $a > 1$.

Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Wykres (rys. 18): *krzywa logarytmiczna*, która jest zwierciadlanym odbiciem krzywej wykładniczej względem prostej $y = x$.



Rys. 17



Rys. 18

Funkcja istnieje tylko przy $x > 0$, zawsze przechodzi przez punkt $(1,0)$, ma asymptotę $x = 0$, do której zbliża się tym szybciej, im większa jest wartość $|\ln a|$. Przy $a > 1$ funkcja wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, a przy $a < 1$ maleje od $+\infty$ do $-\infty$, tym szybciej, im większa jest wartość $|\ln a|$.

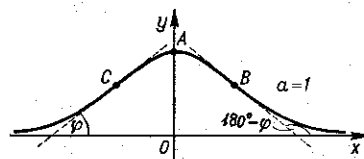
Funkcja $y = e^{-(ax)^2}$. Wykres (rys. 19): krzywa wzrasta od 0 do 1, osiąga maksimum w punkcie $A(0,1)$, a następnie maleje od 1 do 0.

Krzywa jest symetryczna względem osi Oy i po obu stronach zbliża się asymptotycznie do osi Ox tym szybciej, im większe jest a . Punkty przegięcia B , $C(\pm 1/a\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, w których nachylenie stycznych wynosi odpowiednio: $\operatorname{tg} \varphi = \mp a\sqrt{2/e}$. Ważnym zastosowaniem tej

funkcji jest krzywa rozkładu normalnego w teorii błędów (krzywa Gaussa):

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

(wykres tej funkcji omówiony jest w teorii prawdopodobieństwa na str. 783).



Rys. 19

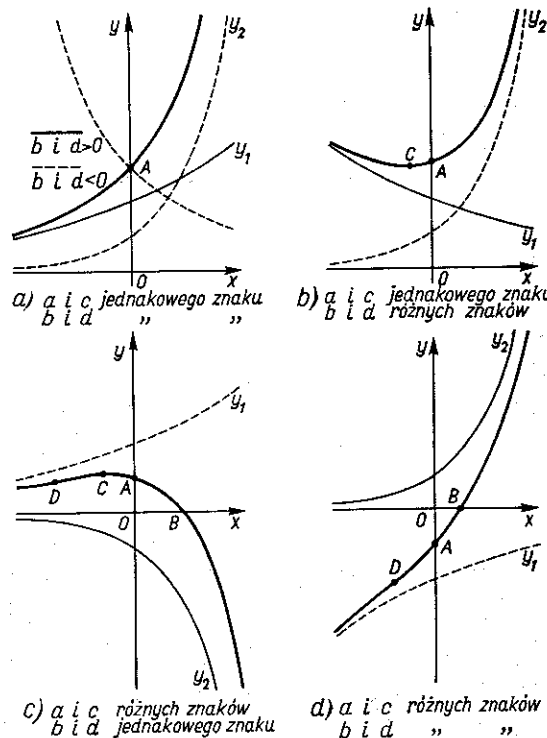
Funkcja $y = ae^{bx} + ce^{dx}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Krzywą (rys. 20) najwygodniej jest wykreślić przez graficzne sumowanie rzędnych krzywej $y_1 = ae^{bx}$ i krzywej $y_2 = ce^{dx}$ (patrz str. 109) przedstawionych na rysunku 20 linią cienką (y_1) i przerywaną (y_2). Funkcja ta jest ciągła. W zależności od znaków parametrów krzywa ma jedną z czterech podanych postaci (przy czym wykresy przedstawione na rysunku 20 mogą być symetrycznie przekształcone względem osi współrzędnych).

a. a i c mają jednakowe znaki oraz b i d mają jednakowe znaki. Jeżeli $a > 0$ i $c > 0$ oraz $b > 0$ i $d > 0$, funkcja przebiega jak na rysunku 20a: funkcja wzrasta monotonicznie od 0 do $+\infty$ i ma asymptotę $y = 0$; punktów przegięcia i ekstremów nie ma. Odzworowanie krzywych symetrycznie względem osi Oy odpowiada przypadkowi, gdy $a > 0$ i $c > 0$ oraz $b < 0$ i $d < 0$; odzworowanie symetryczne względem osi Ox odpowiada przypadkowi, gdy $a < 0$ i $c < 0$ oraz $b > 0$ i $d > 0$, wreszcie odzworowanie symetryczne względem początku współrzędnych odpowiada przypadkowi, gdy $a < 0$ i $c < 0$ oraz $b < 0$ i $d < 0$.

b. a i c mają jednakowe znaki, b i d są różnych znaków. Gdy $a > 0$ i $c > 0$, krzywa ma przebieg jak na rysunku 20b: funkcja jest stale dodatnia, maleje od $+\infty$ do minimum C , a następnie wzrasta do $+\infty$; punktów przegięcia nie ma. Gdy $a < 0$ i $c < 0$, należy odzworować krzywą symetrycznie względem osi Ox .

c. a i c mają różne znaki, b i d są jednakowych znaków. 1° Gdy $a > 0$ i $c < 0$, przy czym $b \neq d$, krzywa ma przebieg jak na rysunku 20c: funkcja rośnie od 0 do maksimum C , a następnie przecinając oś Ox w punkcie B maleje do $-\infty$; funkcja ma jeden punkt przegięcia D i asymptotę $y = 0$. W zależności od znaków parametrów i spełnienia odpowiednich nierówności należy krzywą odzworować symetrycznie względem osi Oy , Ox lub względem początku współrzędnych. 2° Jeżeli $a > 0$ i $c < 0$, przy czym $b = d$, krzywa ma przebieg jak

na rysunku 20c: funkcja wzrasta monotonicznie od 0 do $+\infty$ i ma asymptotę $y = 0$; możliwe są tu także symetryczne odzworowania względem osi Oy , Ox i względem początku współrzędnych. 3° Jeżeli $a = c$ i $b = d$, wykresem będzie linia prosta $y = 0$.

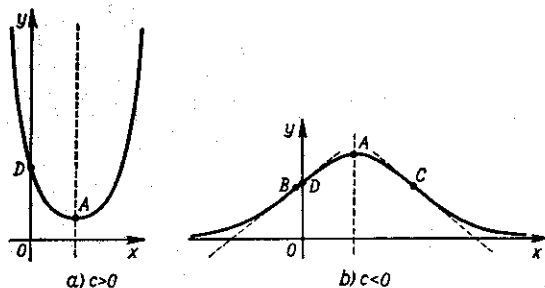


Rys. 20

d. a i c mają różne znaki oraz b i d mają różne znaki. Gdy $a < 0$, $c > 0$ i $b < 0$, $d > 0$ krzywa ma przebieg jak na rysunku 20d: funkcja monotonicznie wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, przecinając oś Oy w punkcie A i oś Ox w punkcie B ; krzywa nie ma ekstremum, ma natomiast punkt przegięcia D . Gdy $a < 0$, $c > 0$ i $b > 0$, $d < 0$, należy krzywą odzworować symetrycznie względem osi Oy .

Przecięcie z osią Oy : $A(0, a+c)$; przecięcie z osią Ox : $B\left(x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right)$; ekstremum: $C\left(x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right)$; punkt przecięcia $D\left(x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)\right)$

Funkcja $y = ae^{bx+cx^2}$, $c \neq 0$. Krzywa (rys. 21) jest symetryczna względem prostej równoległej do osi Oy o równaniu $x = -b/2a$. Krzywa nie przecina osi Ox , natomiast oś Oy przecina w punkcie



Rys. 21

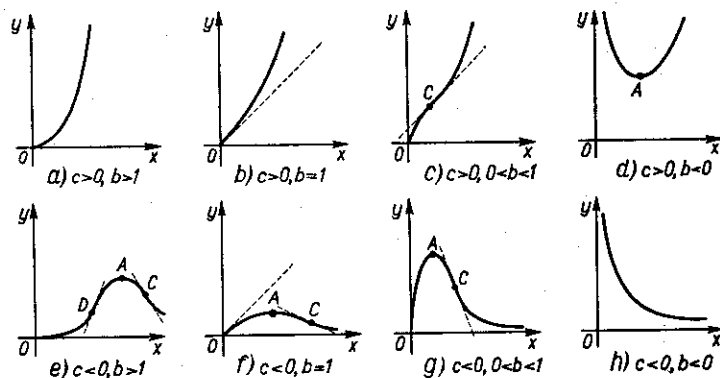
$D(0, a)$. Przebieg funkcji zależy od znaków a i c . Rozpatrzony został tylko przypadek $a > 0$; przy $a < 0$ krzywą należy odwzorować symetrycznie względem osi Ox .

a. $c > 0$ (rys. 21a). Funkcja maleje od $+\infty$ do minimum $A(-b/2c, ae^{-b^2/4c})$ i wzrasta do $+\infty$, przy czym przybiera tylko wartości dodatnie; punktów przecięcia i asymptot nie ma.

b. $c < 0$ (rys. 21b). Funkcja wzrasta od zera do maksimum $A(-b/2c, ae^{-b^2/4c})$ i maleje do zera. Asymptotą jest oś Ox . Punkty przecięcia $B, C\left(\frac{-b \pm \sqrt{-2c}}{2c}, ae^{-(b^2 \pm 2c)/4c}\right)$.

Funkcja $y = ax^b e^{cx}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Rozważony został przypadek (rys. 22), gdy $a > 0$; gdy $a < 0$, krzywą należy odwzorować symetrycznie względem osi Ox . Funkcja przybiera tylko wartości dodatnie. Przy $b > 0$ krzywa przechodzi przez początek współrzędnych i w punkcie tym przy $b > 1$ jest styczna do osi Ox , przy $b = 1$ jest styczna do prostej o równaniu $y = x$, a przy $b < 1$ jest styczna do osi Oy .

Gdy $b < 0$, krzywa ma asymptotę $y = 0$. Przy $c > 0$ funkcja wzrasta nieograniczenie ze wzrostem Ox , a przy $c < 0$ funkcja dąży asymptotycznie do zera. Gdy b i c są różnych znaków, funkcja ma ekstremum A

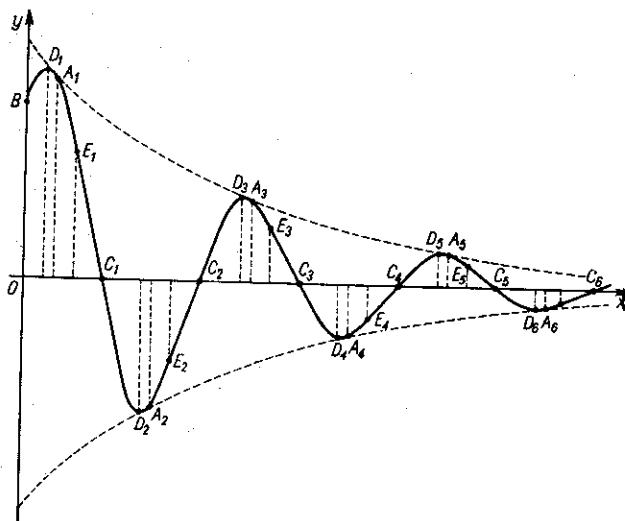


Rys. 22

w punkcie $x = -b/c$. Funkcja może mieć 0, 1 lub 2 punkty przecięcia C, D dla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b}}{c}$ (rys. 22c, e, f, g).

Funkcja $y = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0)$, $a > 0$. Wykres (rys. 23): krzywa drgań tłumionych. Krzywa ma coraz mniejszą amplitudę, przecina okresowo oś Ox , do której zbliża się asymptotycznie. Wykres waha się między dwiema krzywymi wykładniczymi o równaniach $y = Ae^{-ax}$ i $y = -Ae^{-ax}$ stykając się z nimi na przemian w punktach $A_1, A_2, \dots$, $A_k\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0/\omega, (-1)^k Ae^{-ax}\right), \dots$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Krzywa przecina oś Oy w punkcie $B(0, A \sin \varphi_0)$ oraz oś Ox w punktach $C_1, C_2, \dots, C_k\left((k\pi - \varphi_0)/\omega, 0\right), \dots$, ma ekstrema $D_1, D_2, \dots$ dla $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + a}{\omega}$ oraz punkty przecięcia $E_1, E_2, \dots$ dla $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2a}{\omega}$, gdzie $\text{tg } \alpha = \frac{\omega}{a}$.

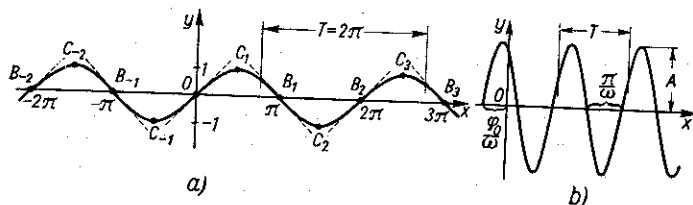
Wielkość $\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = a \frac{\pi}{\omega}$ (gdzie y_i oraz y_{i+1} są współrzędnymi dwóch kolejnych ekstremów) nazywamy *logarytmicznym dekrementem tłumienia*.



Rys. 23

5. Funkcje trygonometryczne ⁽¹⁾

Sinus $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$. Wykres (rys. 24): *sinusoida*. Przy $A = \omega = 1$ i $\varphi_0 = 0$ otrzymujemy zwykłą sinusoidę $y = \sin x$ (rys. 24a), która jest krzywą okresową o okresie $T = 2\pi$. Krzywa przecina oś Ox



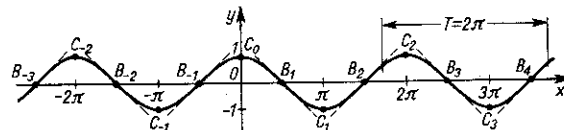
Rys. 24

w punktach $O, B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k(k\pi, 0), \dots$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Punkty przecięcia krzywej z osią Ox są zarazem punktami przecięcia, w których kąt nachylenia stycznych wynosi $\pm \frac{1}{4}\pi$.

⁽¹⁾ Wzory trygonometryczne patrz str. 234 - 237. Tablice funkcji trygonometrycznych patrz str. 55 - 58.

nosi $\pm \frac{1}{4}\pi$. Krzywa ma ekstrema w punktach $C_1, C_2, \dots, C_k\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, (-1)^k\right), \dots$. Aby ze zwykłej sinusoidy $y = \sin x$ utworzyć sinusoidę $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ (rys. 24b), należy podzielić wszystkie odcinki przez pulsację ω , pomnożyć wszystkie rzędne przez amplitudę A (patrz str. 237) i przesunąć cały wykres w lewo wzdłuż osi Ox o odcinek φ_0/ω , zwany przesunięciem fazy. Okres $T = 2\pi/\omega$; punkty przecięcia z osią Ox : $B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k\left((k\pi - \varphi_0)/\omega, 0\right), \dots$; ekstrema $C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, \dots, C_k\left(\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0\right]/\omega, (-1)^k A\right), \dots$ (patrz str. 237).

Cosinus $y = A \cos(\omega x + \varphi_0) = A \sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{1}{2}\pi\right)$. Wykres (rys. 25) *cosinusoida*, czyli sinusoida przesunięta w lewo o odcinek $\frac{1}{2}\pi$.



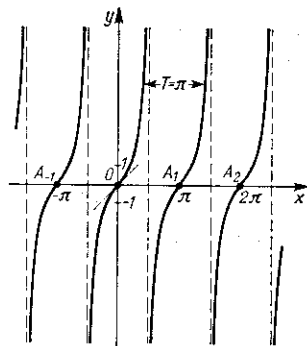
Rys. 25

Cosinusoida zwykła $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$. Punkty przecięcia z osią Ox : $B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right), \dots$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Punkty przecięcia krzywej z osią Ox są zarazem punktami przecięcia, w których kąt nachylenia stycznych wynosi $\pm \frac{1}{4}\pi$. Ekstrema w punktach $C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, \dots, C_k(k\pi, (-1)^k), \dots$.

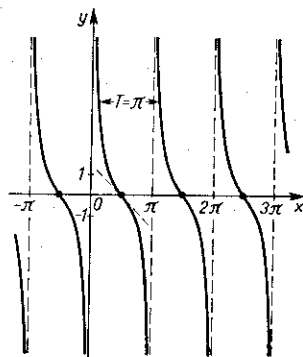
Tangens $y = \operatorname{tg} x$. Wykres (rys. 26): *tangensoida*, krzywa okresowa o okresie $T = \pi$. Krzywa ma asymptoty o równaniu $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Przy zmianie x od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$ funkcja wzrasta monotonicznie od $-\infty$ do $+\infty$, a następnie przy dalszej zmianie x wartości u powtarzają się. Punkty przecięcia z osią Ox : $O, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \dots, A_k(k\pi, 0), \dots$ są równocześnie punktami przecięcia, kąt nachylenia stycznych w punktach przecięcia wynosi $\frac{1}{4}\pi$.

Cotangens $y = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$. Wykres (rys. 27): *cotangen-soida*, krzywa położona symetrycznie do tangensoidy względem osi Ox

i przesunięta w lewo o odcinek $\frac{1}{2}\pi$. Asymptoty: $x = k\pi$. Przy zmianie x od 0 do π funkcja maleje monotonicznie od $+\infty$ do $-\infty$; dla innych wartości x wartości y powtarzają się. Punkty przecięcia z osią Ox :



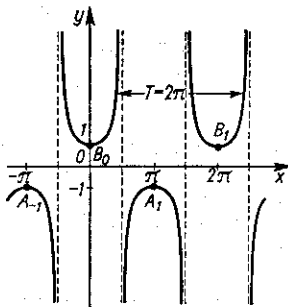
Rys. 26



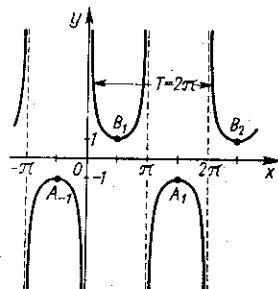
Rys. 27

$A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \dots, A_k\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right), \dots$ są zarazem punktami przecięcia; kąt nachylenia stycznych w punktach przecięcia wynosi $-\frac{1}{4}\pi$.

Secans $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$. Wykres (rys. 28): Krzywa okresowa o okresie $T = 2\pi$ i asymptotach $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; $|y| \geq 1$. Maksima $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \dots, A_k((2k+1)\pi, -1)$, minima $B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k(2k\pi, 1)$, ...



Rys. 28



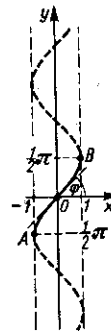
Rys. 29

Cosecans $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \sec\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$. Wykres (rys. 29): Przebieg funkcji jest taki sam jak dla funkcji $y = \sec x$, tylko krzywa jest przesunięta w prawo o odcinek $x = \frac{1}{2}\pi$. Asymptoty: $x = k\pi$. Maksima $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \dots, A_k\left(\frac{1}{2}(4k+3)\pi, -1\right), \dots$, minima $B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k\left(\frac{1}{2}(4k+1)\pi, 1\right), \dots$

6. Funkcje cyklometryczne ⁽¹⁾

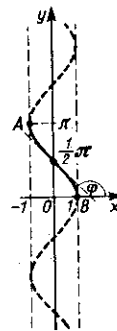
Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne względem trygonometrycznych. Wykresy tych funkcji otrzymuje się z wykresów funkcji trygonometrycznych przez zwierciadlane odwzorowanie względem prostej $y = x$, przy czym bierze się tylko jeden okres funkcji.

Arcus sinus $y = \arcsin x$. Funkcja $\arcsin x$ (rys. 30) istnieje tylko w przedziale $-1 \leq x \leq 1$; funkcja rośnie monotonicznie od $A(-1, -\frac{1}{2}\pi)$ do $B(1, \frac{1}{2}\pi)$ i ma punkt przecięcia w początku współrzędnych, który jest środkiem symetrii krzywej; styczna do krzywej w punkcie przecięcia nachylona jest do osi Ox pod kątem $\frac{1}{4}\pi$.



Rys. 30

Arcus cosinus $y = \arccos x$. Funkcja $\arccos x$ (rys. 31) istnieje tylko w przedziale $-1 \leq x \leq 1$; funkcja maleje monotonicznie od $A(-1, \pi)$ do $B(1, 0)$, ma punkt przecięcia w punkcie $(0, \frac{1}{2}\pi)$, który jest środkiem symetrii krzywej; styczna do krzywej w punkcie przecięcia nachylona jest do osi Ox pod kątem $\frac{3}{4}\pi$.



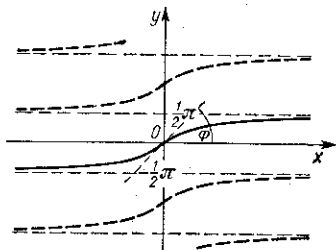
Rys. 31

Arcus tangens $y = \operatorname{arctg} x$. Funkcja $\operatorname{arctg} x$ (rys. 32) wzrasta monotonicznie od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$, ma punkt przecięcia w początku współrzędnych, który jest środkiem symetrii krzywej; styczna do krzywej

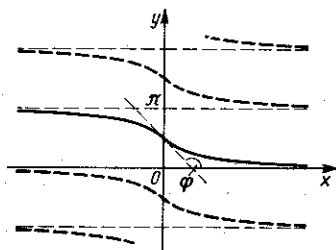
⁽¹⁾ Określenia i wzory patrz str. 242 - 244.

w punkcie przecięcia nachylona jest do osi Ox pod kątem $\frac{1}{4}\pi$. Krzywa ma asymptoty $y = -\frac{1}{2}\pi$ i $y = \frac{1}{2}\pi$.

Arcus cotangens $y = \operatorname{arccotg} x$. Funkcja $\operatorname{arccotg} x$ (rys. 33) maleje monotonicznie od π do 0, ma punkt przecięcia w punkcie $(0, \frac{1}{2}\pi)$,



Rys. 32

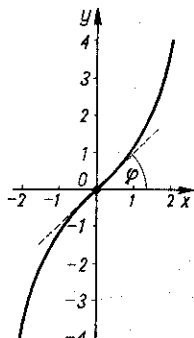


Rys. 33

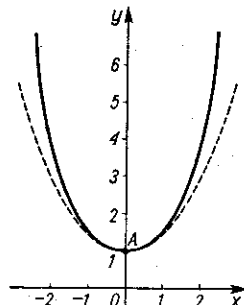
który jest środkiem symetrii krzywej; styczna do krzywej w punkcie przecięcia jest nachylona do osi Ox pod kątem $\frac{3}{4}\pi$. Krzywa ma asymptoty $y = \pi$ i $y = 0$.

7. Funkcje hiperboliczne ⁽¹⁾

Sinus hiperboliczny $y = \sinh x$. Funkcja $\sinh x$ (rys. 34) jest nieparzysta i rośnie monotonicznie od $-\infty$ do $+\infty$. Początek współ-



Rys. 34



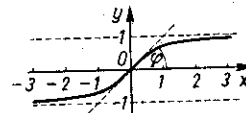
Rys. 35

⁽¹⁾ Wiadomości teoretyczne patrz str. 248; tablice patrz str. 59-63.

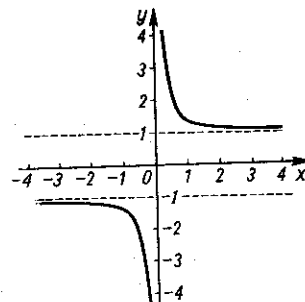
rzędnych jest punktem przecięcia ($\varphi = \frac{1}{4}\pi$) i środkiem symetrii krzywej. Asymptot nie ma.

Cosinus hiperboliczny $y = \cosh x$. Wykres (rys. 35): linia łączowa (patrz str. 136). Funkcja jest parzysta; przy $x < 0$ funkcja maleje od $+\infty$ do 1, przy $x > 0$ wzrasta od 1 do $+\infty$. Funkcja osiąga minimum w punkcie $A(0, 1)$; asymptot nie ma. Krzywa jest położona symetrycznie względem osi Oy i przebiega powyżej paraboli $y = 1 + \frac{1}{2}x^2$ (linia kreskowana na rysunku 35).

Tangens hiperboliczny $y = \operatorname{thg} x$. Funkcja $\operatorname{thg} x$ (rys. 36) jest nieparzysta i rośnie monotonicznie od -1 do $+1$. Początek współ-



Rys. 36



Rys. 37

rzędnych jest punktem przecięcia ($\varphi = \frac{1}{4}\pi$) i środkiem symetrii krzywej. Krzywa ma dwie asymptoty: $y = 1$ i $y = -1$.

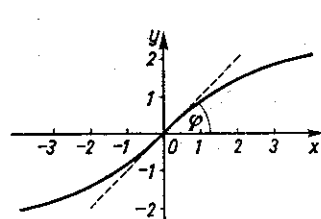
Cotangens hiperboliczny $y = \operatorname{ctgh} x$. Funkcja $\operatorname{ctgh} x$ (rys. 37) jest nieparzysta i nieciągła przy $x = 0$. Przy $x < 0$ funkcja maleje od -1 do $-\infty$, przy $x > 0$ maleje od $+\infty$ do 1. Krzywa nie ma ekstremów i punktów przecięcia. Asymptoty są trzy: $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$.

8. Funkcje odwrotne względem hiperbolicznych ⁽¹⁾

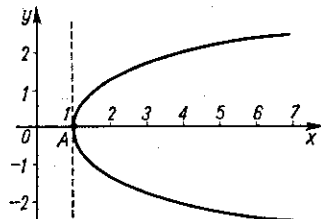
Wykresy tych funkcji są zwierciadlanym odwzorowaniem krzywych hiperbolicznych względem prostej $y = x$.

⁽¹⁾ Wiadomości teoretyczne patrz str. 252.

Area sinus $y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (rys. 38). Funkcja jest nieparzysta i rośnie monotonicznie od $-\infty$ do $+\infty$. Początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej, a także punktem przegięcia ($\varphi = \frac{1}{4}\pi$). Asymptot nie ma.



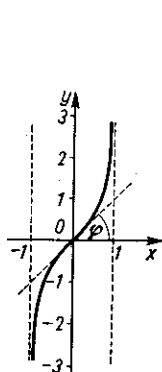
Rys. 38



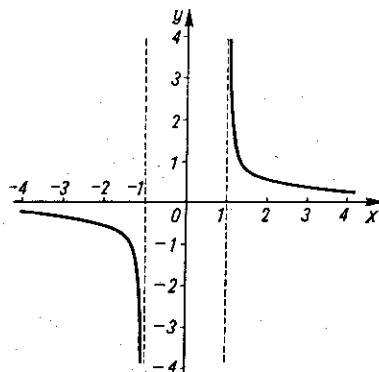
Rys. 39

Area cosinus $y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (rys. 39). Funkcja istnieje tylko przy $x \geq 1$. Funkcja rośnie od 0 do $+\infty$ (górna połowa krzywej na rysunku 39). W punkcie $A(1,0)$ krzywa ma styczną równoległą do osi Oy .

Area tangens $y = \operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (rys. 40). Funkcja jest nieparzysta i istnieje tylko przy $|x| < 1$. Funkcja wzrasta monotonicznie od $-\infty$ do $+\infty$. Początek współrzędnych jest punktem przegięcia i środkiem symetrii krzywej. Krzywa ma dwie asymptoty $x = 1$, $x = -1$.



Rys. 40



Rys. 41

Area cotangens $y = \operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (rys. 41). Funkcja jest nieparzysta i istnieje tylko przy $|x| > 1$. W przedziale $-\infty < x < -1$ funkcja maleje od 0 do $-\infty$, dla $1 < x < +\infty$ funkcja maleje od $+\infty$ do 0. Ekstremów i punktów przegięcia nie ma. Asymptoty są trzy: $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

B. WAŻNIEJSZE KRZYWE

Przytoczono tu pewne dane dotyczące ważniejszych krzywych występujących często w praktyce (poza tymi, które zostały omówione poprzednio jako funkcje elementarne). Dane te stanowią: określenie krzywej jako miejsca geometrycznego punktów, współrzędne charakterystyczne punktów, długość krzywej lub jej części, pole ograniczone krzywą lub jej częścią, punkty nieciągłości krzywej, asymptoty, promień krzywizny.

Ogólne wskazówki o wykreślaniu krzywych na podstawie ich równań podane są na str. 318 i 319. Krzywe stopnia drugiego omówione są na str. 265-278.

9. Krzywe stopnia trzeciego

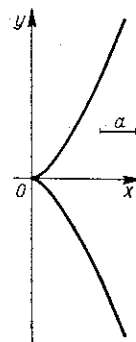
Parabola Neila, czyli parabola półsześcienna (rys. 42). Równanie $ay^2 = x^3$, $a > 0$; w postaci parametrycznej $x = at^3$, $y = at^3$. Początek współrzędnych jest ostrzem krzywej. Asymptot nie ma. Promień krzywizny

$$r = \frac{\sqrt{x(4a+9x)^{3/2}}}{6a}$$

przybiera wszystkie wartości od 0 do ∞ . Długość krzywej od początku współrzędnych do punktu $M^{(1)}$ wynosi

$$L = \frac{(4a+9x)^{3/2} - 8a^{3/2}}{27\sqrt{a}}$$

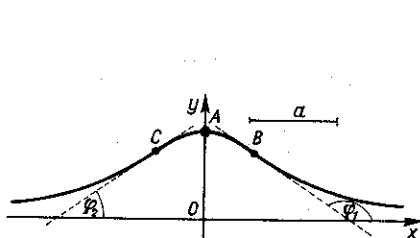
Lok Angesiego (rys. 43). Równanie $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$, $a > 0$. Asymptota $y = 0$. Maksimum $A(0, a)$ o promieniu krzywizny $r = \frac{1}{2}a$. Punkty przegięcia $B, C(\pm \frac{1}{3}a\sqrt{3}, \frac{3}{4}a)$, nachylenie stycznych w tych punktach $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Pole zawarte między krzywą a asymptotami $S = \pi a^2$.



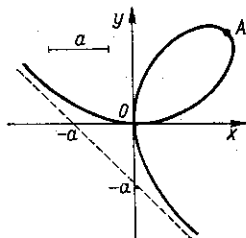
Rys. 42

⁽¹⁾ Przez M oznaczajmy dowolny punkt krzywej o współrzędnych biegnących x, y .

Liść Kartezjusza (rys. 44). Równanie $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$; w postaci parametrycznej $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$). Początek współrzędnych jest punktem rozgałęzienia krzywej, a osie współrzędnych są stycznymi do krzywej w tym punkcie. Promień krzywizny gałęzi w początku współrzędnych $r = \frac{3}{2}a$. Asymptota $x + y + a = 0$. Wierzchołek $A(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$. Pole pętli $S_1 = \frac{3}{2}a^2$, pole między krzywą a asymptotami $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.



Rys. 43



Rys. 44

Cysoida Dioklesa (rys. 45). Jest to miejsce geometryczne punktu M spełniającego warunek $OM = PQ$, gdzie P jest dowolnym punktem położonym na danym okręgu o średnicy a .

Równanie

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \quad a > 0;$$

w postaci parametrycznej ($t = \operatorname{tg} MOx$):

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2};$$

we współrzędnych biegunowych:

$$\varrho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Początek współrzędnych jest ostrzem krzywej. Asymptota $x = a$. Pole między krzywą i asymptotą: $S = \frac{3}{4}\pi a^2$.

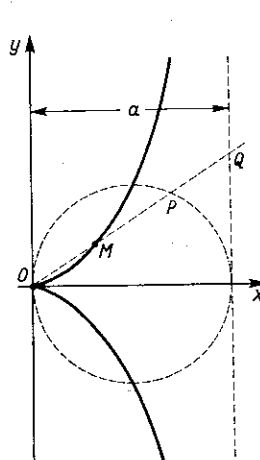
Strofoida (rys. 46). Jest to miejsce geometryczne punktów M_1 i M_2 leżących na ruchomej półprostej wychodzącej z punktu A i spełniających warunek $PM_1 = PM_2 = OP$, gdzie P jest punktem przecięcia ruchomej półprostej z osią Oy .

Równanie

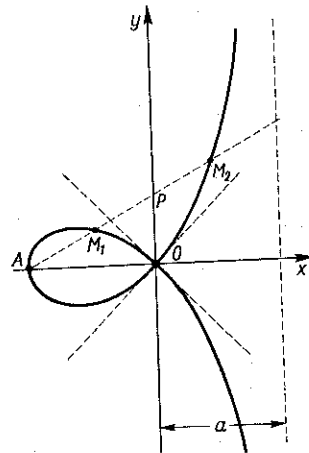
$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x};$$

w postaci parametrycznej ($t = \operatorname{tg} MOx$):

$$x = a \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = at \frac{t^2-1}{t^2+1};$$



Rys. 45



Rys. 46

we współrzędnych biegunowych

$$\varrho = -a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

W początku współrzędnych znajduje się punkt rozgałęzienia krzywej; styczna do krzywej w tym punkcie $y = \pm x$. Asymptota $x = a$. Wierzchołek $A(-a, 0)$. Pole pętli $S_1 = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$, pole między krzywą i asymptotą $S_2 = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2$.

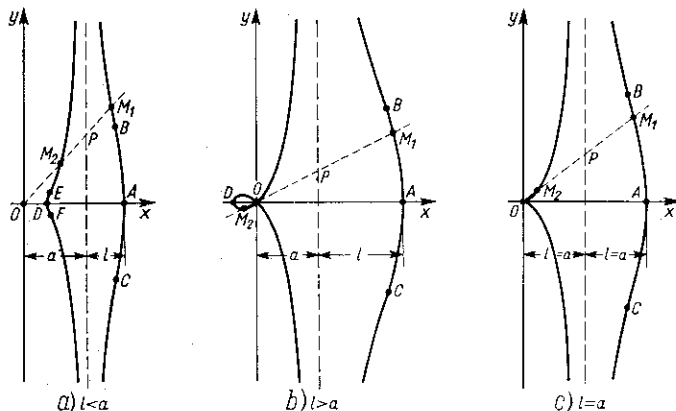
10. Krzywe stopnia czwartego

Konchoida Nikomedesa (rys. 47). Jest to miejsce geometryczne punktu M spełniającego warunek $OM = OP \pm l$ (dla znaku $+$ gałąź zewnętrzna, dla znaku $-$ gałąź wewnętrzna) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ogólnie konchoidą danej krzywej nazywamy krzywą, którą otrzymuje się przy powiększaniu i zmniejszaniu promienia wodzącego każdego punktu danej

Równanie $(x-a)^2(x^2+y^2)-l^2x^2=0$, $a>0$, $l>0$; w postaci parametrycznej $x=a+l\cos\varphi$, $y=atg\varphi+l\sin\varphi$; we współrzędnych biegunowych $\varrho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm l$.

Gałąź zewnętrzna: Asymptota $x=a$. Wierzchołek $A(a+l, 0)$. Dwa punkty przegięcia B, C , których odcięta równa jest największemu z pierwiastków równania $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$ ⁽¹⁾. Pole zawarte między gałęzią zewnętrzną krzywej i asymptotą $S=\infty$.



Rys. 47

Gałąź wewnętrzna: Asymptota $x=a$. Wierzchołek $D(a-l, 0)$. W początku współrzędnych znajduje się punkt osobliwy, którego rodzaj zależy od związku między a i l .

a. Gdy $l < a$ występuje punkt osobliwy O (rys. 47a). Gałąź wewnętrzna ma dwa punkty przegięcia E, F , których odcięta równa jest drugiemu co do wielkości dodatniemu pierwiastkowi równania $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$.

b. Gdy $l > a$, punkt O jest punktem rozgałęzienia (rys. 47b). Krzywa ma maksimum i minimum przy $x=a-\sqrt[3]{al^2}$. Współczynnik kątowy stycznych w początku współrzędnych $tg\alpha=\pm\sqrt{l^2-a^2}/a$; promień krzywizny w tym punkcie $r=\frac{1}{2}l\sqrt{l^2-a^2}$.

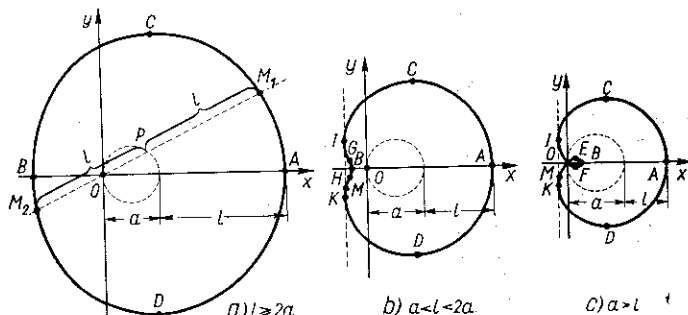
krzywej o dany odcinek l . Jeżeli równanie krzywej we współrzędnych biegunowych ma postać $\varrho=f(\varphi)$, to równanie konchoidy tej krzywej ma postać $\varrho=f(\varphi)\pm l$. Konchoida Nikomedesa jest konchoidą linii prostej.

⁽¹⁾ O sposobach rozwiązywania takich równań patrz str. 171 i 173.

c. Gdy $l=a$, w początku współrzędnych występuje ostrze krzywej (rys. 47c).

Ślimak Pascala (rys. 48). Jest to konchoida okręgu spełniająca warunek $OM=OP\pm l$ (biegun leży na okręgu).

Równanie $(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2)$, $a>0$, $l>0$; w postaci parametrycznej $x=acos\varphi+l\cos\varphi$, $y=acos\varphi\sin\varphi+l\sin\varphi$; we współrzędnych biegunowych $\varrho=acos\varphi+l$, gdzie a jest średnicą danego okręgu. Wierzchołki $A, B(a\pm l, 0)$. Kształt krzywej zależy od stosunku a do l , co pokazane jest na rysunkach 48 i 49. Gdy $a > l$,

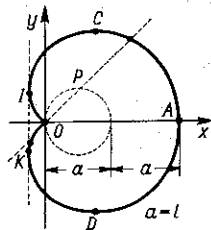


Rys. 48

występują 4 ekstrema: C, D, E, F ($\cos\varphi=(l\pm\sqrt{l^2+8a^2})/4a$); gdy $a\leq l$, z podanych czterech ekstremów istnieją tylko 2, a mianowicie C i D . Gdy $a < l < 2a$, krzywa ma punkty przegięcia G, H ($\cos\varphi=-\frac{(2a^2+l^2)}{3al}$). Gdy $l < 2a$, dwa punkty krzywej I, K ($-\frac{l^2}{4a}, \pm\frac{l\sqrt{4a^2-l^2}}{4a}$) mają wspólną styczną. Początek współrzędnych jest punktem osobliwym: gdy $a < l$ jest to punkt osobliwy, gdy $a > l$ jest to punkt rozgałęzienia (współczynnik kątowy stycznych w tym punkcie $tg\alpha=\pm\sqrt{a^2-l^2}/l$, a promień krzywizny $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-l^2}$; gdy $a=l$, ślimak Pascala nosi nazwę *kardioidy* (patrz niżej) i w punkcie O ma ostrze.

Pole krzywej $S=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi l^2$, przy czym w przypadku $a > l$ (rys. 48c) pole wnętrza pętli liczone jest podwójnie.

Kardioida (rys. 49). Może być określona dwoma sposobami: 1^o jako szczególny przypadek ślimaka Pascala $OM = OP \pm a$, gdzie a jest średnicą danego okręgu; 2^o jako epicykloida (patrz str. 130), której średnice okręgu stałego i ruchomego są równe a .



Rys. 49

Równanie

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2, \quad a > 0;$$

w postaci parametrycznej

$$x = a \cos \varphi (1 + \cos \varphi), \quad y = a \sin \varphi (1 + \cos \varphi);$$

we współrzędnych biegunowych

$$\varrho = a(1 + \cos \varphi).$$

W początku współrzędnych jest ostrze krzywej. Wierzchołek $A(2a, 0)$. Ekstrema $C, D\left(\frac{3}{4}a, \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}a\right)$, o argumentach $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Pole $S = \frac{3}{2}\pi a^2$ (jest to sześciokrotne pole koła o średnicy a). Długość krzywej $L = 8a$.

Ował Cassiniego (rys. 50). Jest to miejsce geometryczne punktu M , dla którego iloczyn odległości od ognisk F_1 i F_2 jest stały: $F_1M \cdot F_2M = a^2$, gdzie a jest pewną stałą.

Równanie w odniesieniu do ognisk $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4, \quad \text{gdzie } a > 0, \quad c > 0;$$

we współrzędnych biegunowych

$$\varrho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + a^4 - c^4}.$$

Promień krzywizny w punkcie M wynosi

$$r = \frac{2a^2\varrho^3}{c^4 - a^4 + 3\varrho^4}.$$

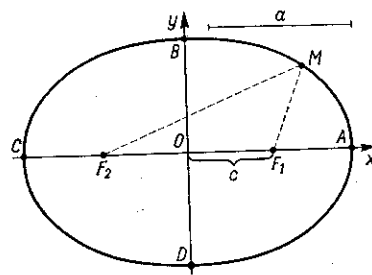
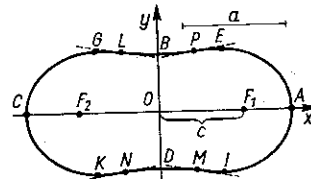
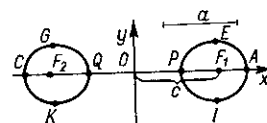
Kształt krzywej zależy od stosunku a do c :

a. Gdy $a > c\sqrt{2}$, wykresem jest owal przypominający elipsę (rys. 50a). Punkty przecięcia z osią Ox : $A, C(\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$; punkty przecięcia z osią Oy : $B, D(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2})$.

b. Gdy $a = c\sqrt{2}$, krzywa jest tego samego typu co w przypadku a; przecięcie z osią Ox : $A, C(\pm c\sqrt{3}, 0)$; przecięcie z osią Oy : $B, D(0, \pm c)$. W punktach B i D krzywizna równa jest zeru (ściska styczną do prostych $y = \pm c$).

c. Gdy $c < a < c\sqrt{2}$, owal ma talię (rys. 50b). Przecięcia z osiami

współrzędnych jak w przypadku a. Ekstrema $B, D(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2})$, $E, G, K, I(\pm\sqrt{4c^4 - a^4}/2c, \pm a^2/2c)$. Krzywa ma 4 punkty przecięcia

a) $a > c\sqrt{2}$ b) $c < a < c\sqrt{2}$ c) $a < c$

Rys. 50

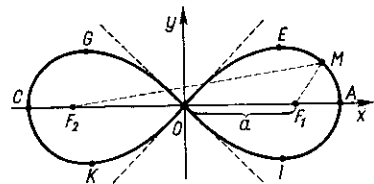
$P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m+n)}\right)$, gdzie $n = (a^4 - c^4)/3c^2$, $m = \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 - c^4)}$.

d. Gdy $a = c$, lemniskata (rys. 51).

e. Gdy $a < c$, owal składa się z dwóch krzywych zamkniętych (rys. 50c). Punkty przecięcia z osią Ox : $A, C(\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ i $P, Q(\pm\sqrt{c^2 - a^2}, 0)$; ekstrema $E, G, K, I(\pm\sqrt{4c^4 - a^4}/2c, \pm a^2/2c)$.

Lemniskata (rys. 51). Jest szczególnym przypadkiem owalu Cassiniego, gdy $a = c$: $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{1}{2}F_1F_2\right)^2$, gdzie $F_1, F_2(\pm a, 0)$.

Równanie $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$, $a > 0$; we współrzędnych biegunowych $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Początek współrzędnych jest punktem rozgałęzienia. W punkcie tym są punkty przegięcia; równanie stycznych w tym punkcie: $y = \pm x$. Przecięcie z osią Ox : $A, C(\pm a\sqrt{2}, 0)$; ekstrema: $E, G, K, I(\pm \frac{1}{2}a\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2}a)$ o argumentach $\varphi = \pm \frac{1}{6}\pi$. Promień krzywizny $r = 2a^2/3\rho$. Pole każdej pętli $S = a^2$.

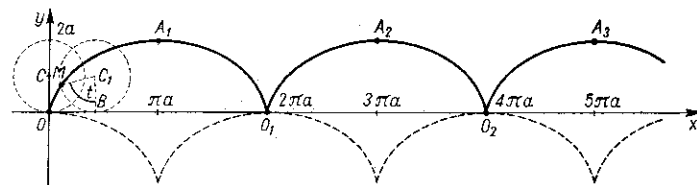


Rys. 51

11. Cykloidy

Cykloida zwykła (rys. 52). Jest to krzywa zakreślona przez punkt okręgu koła toczącego się bez poślizgu po prostej.

Równanie w postaci parametrycznej: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, gdzie a jest promieniem toczącego się koła, $t = \angle MC_1B$; równanie



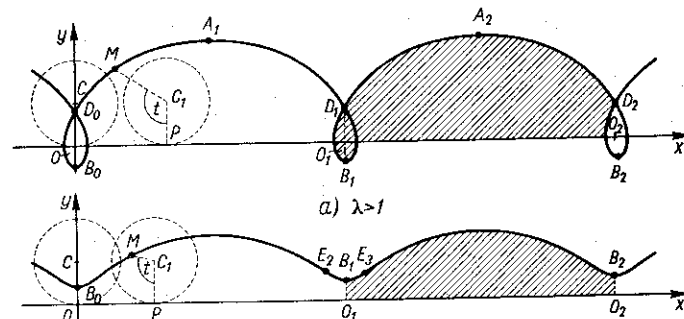
Rys. 52

we współrzędnych prostokątnych $x + \sqrt{y(2a-y)} = a \arccos \frac{a-y}{a}$ wyznacza część cykloidy w przedziale $0 \leq x \leq \pi a$. Krzywa jest okresowa o okresie $OO_1 = 2\pi a$ (podstawa cykloidy). Ostrza cykloidy $O, O_1, O_2, \dots, O_k(2k\pi a, 0), \dots$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Wierzchołki: $A_1, A_2, \dots, A_k((2k+1)\pi a, 2a), \dots$. Długość łuku $L = 8a \sin^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$; długość krzywej dla jednego okresu $LO_1A_1O_1 = 8a$; pole OA_1O_1O : $S = 3\pi a^2$. Promień krzywizny $r = 4a \sin \frac{1}{2}t$, dla wierzchołków

$r_A = 4a$. Ewoluta ⁽¹⁾ cykloidy jest też cykloidą (na rysunku 52 zaznaczona linią kreskowaną).

Cykloida wydłużona (rys. 53a) i **skrócona** (rys. 53b) (**trochoidy**). Są to krzywe zakreślone przez punkt M związany z kołem toczącym się bez poślizgu po prostej i leżący na zewnątrz lub wewnątrz okręgu tego koła.

Równanie w postaci parametrycznej: $x = a(t - \lambda \sin t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, gdzie a jest promieniem toczącego się koła, $t = \angle MC_1P$, $\lambda a = C_1M$; dla cykloidy wydłużonej $\lambda > 1$, dla skróconej $\lambda < 1$.



Rys. 53

Krzywe są okresowe o okresie $OO_1 = 2\pi a$. Maksima: $A_1, A_2, \dots, A_k((2k+1)\pi a, (1+\lambda)a), \dots$, minima: $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k(2k\pi a, (1-\lambda)a), \dots$. Punkty rozgałęzienia cykloidy wydłużonej: $D_0, D_1, \dots, D_k(2k\pi a, a(1-\sqrt{\lambda^2-t_0^2})), \dots$, gdzie t_0 jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $t = \lambda \sin t$ ⁽²⁾.

Punkt przegięcia cykloidy skróconej: $E_1, E_2, \dots, E_k(a(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}), a(1-\lambda^2)), \dots$. Długość łuku dla jednego okresu $L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda \cos t} dt$; pole zakreślane na rysunku 53: $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. Promień krzywizny $r = a \frac{(1+\lambda^2-2\lambda \cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t - \lambda)}$. Pro-

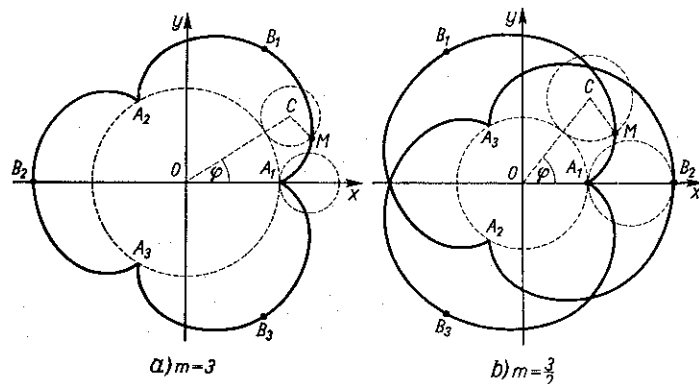
⁽¹⁾ O ewolutach patrz str. 319.

⁽²⁾ O rozwiązywaniu takich równań patrz str. 179 - 182.

mięń krzywizny dla maksimum: $r_A = -a(1+\lambda)^2/\lambda$, dla minimum: $r_B = a(1-\lambda)^2/\lambda$.

Epicykloida (rys. 54). Jest to krzywa zakreślona przez punkt okręgu koła tocącego się bez poślizgu po zewnętrznej stronie okręgu stałego koła.

Równanie w postaci parametrycznej: $x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\frac{A+a}{a}\varphi$, $y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\frac{A+a}{a}\varphi$, gdzie A jest pro-



Rys. 54

mieniem stałego koła, a jest promieniem ruchomego koła, $\varphi = \angle COx$. Kształt krzywej zależy od stosunku $A/a = m$. Przy $m = 1$ otrzymujemy kardioidę (patrz str. 126).

a. Gdy m jest liczbą całkowitą, epicykloida jest krzywą zamkniętą składającą się ze skończonej ilości łuków (rys. 54a); ostra krzywej:

$$A_1, A_2, \dots, A_m \left(\varphi = A, \varphi = \frac{2k\pi}{m} \right), \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$\text{wierzchołki: } B_1, B_2, \dots, B_m \left(\varphi = A + 2a, \varphi = \frac{2\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right).$$

b. Gdy m jest ułamkiem, epicykloida składa się ze skończonej ilości krzyżujących się łuków (rys. 54b), przy czym punkt biegnący M wraca do punktu wyjściowego.

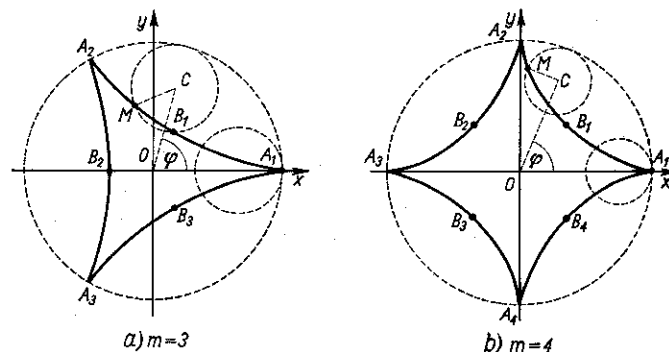
c. Gdy m jest liczbą niewymierną, łuków jest nieskończenie wiele i punkt M nie wraca do położenia wyjściowego.

Długość jednego łuku epicykloidy $L_{A_1B_1A_2} = 8(A+a)/m$; przy m całkowitym długość całej krzywej $L = 8(A+a)$. Pole między łukiem epicykloidy a stałym kołem $A_1B_1A_2A_1$: $S = \pi a^2 \left(\frac{3A+2a}{A} \right)$. Promień

$$\text{krzywizny } r = \frac{4a(A+a)}{2a+A} \sin \frac{A\varphi}{2a}; \text{ w wierzchołkach } r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}.$$

Hipocykloida (rys. 55). Jest to krzywa zakreślona przez punkt okręgu koła tocącego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie okręgu stałego koła.

Równanie hipocykloidy, współrzędne wierzchołków i ostrz, wzory na długość łuku, pole i promień krzywizny otrzymujemy ze wzorów dla epicykloidy z zamianą „ a ” na „ $-a$ ”. Ilość ostrz, gdy m jest liczbą całkowitą, ułamkową lub niewymierną, jest taka sama jak dla epi-

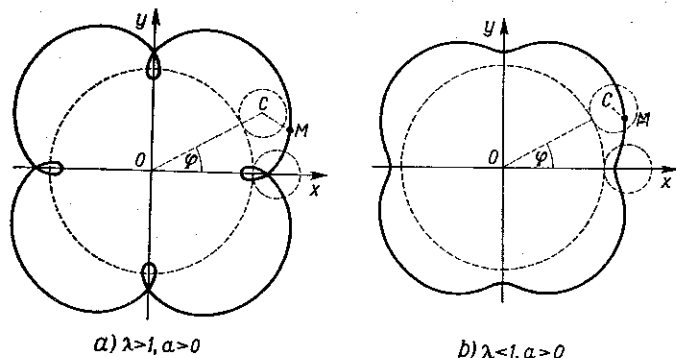


Rys. 55

cykloidy. Gdy $m = 2$, krzywa degeneruje się do średnicy stałego koła⁽¹⁾. Gdy $m = 3$, otrzymujemy hipocykloidę o trzech ostrzach (rys. 55a); równanie w postaci parametrycznej: $x = a(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$; $L = 16a$, $S = 2\pi a^2$. Gdy $m = 4$, otrzymujemy hipocykloidę o czterech ostrzach, tak zwaną *asteroidę* (rys. 55b): $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$; we współrzędnych prostokątnych $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$, $S = \frac{3}{8}\pi A^2$.

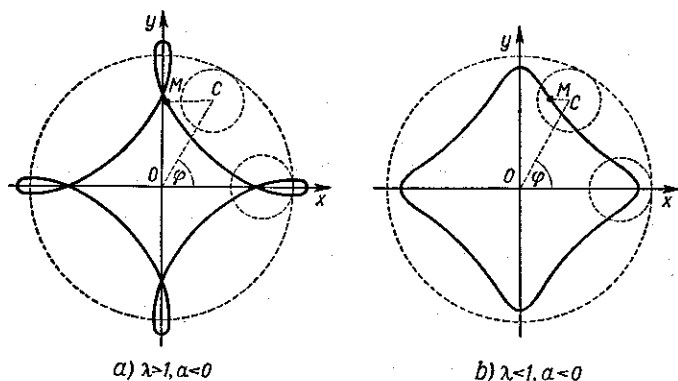
⁽¹⁾ Jeżeli koło toczy się po wewnętrznej stronie okręgu stałego koła mającego dwukrotnie większą średnicę, to każdy punkt okręgu tocącego się koła zakreśla średnicę stałego koła.

Epicykloida wydłużona i skrócona (epitrochoidy) (rys. 56) oraz hipocykloida wydłużona i skrócona (hipotrochoidy) (rys. 57). Są to krzywe zakreślone przez punkt związany z kołem,



Rys. 56

toczącym się bez poślizgu po zewnętrznej lub wewnętrznej stronie okręgu stałego koła i leżący na zewnątrz lub wewnątrz okręgu toczącego się koła. Przykłady (wszystkie dla $m = 4$): epicykloida wydłużona (rys. 56a), epicykloida skrócona (rys. 56b), hipocykloida wydłużona (rys. 57a), hipocykloida skrócona (rys. 57b).



Rys. 57

Równania epitrochoid w postaci parametrycznej:

$$x = (A+a)\cos\varphi - \lambda a \cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A+a)\sin\varphi - \lambda a \sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

gdzie A jest promieniem stałego koła, a jest promieniem ruchomego koła $\lambda a = CM$. Gdy $\lambda > 1$, otrzymujemy epicykloidę wydłużoną, gdy $\lambda < 1$ — epicykloidę skróconą. Dla otrzymania hipotrochoid należy w równaniach zamienić „ a ” na „ $-a$ ”.

Gdy $A = 2a$, równania parametryczne hipotrochoid mają postać $x = a(1+\lambda)\cos\varphi$, $y = a(1-\lambda)\sin\varphi$ i krzywa staje się elipsą o osiach $a(1+\lambda)$ i $a(1-\lambda)$.

Gdy $A = a$, otrzymujemy ślimak Pascala (patrz str. 125) ⁽¹⁾:

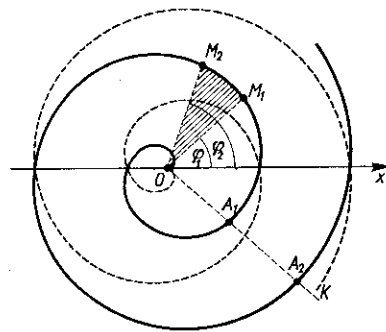
$$x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi),$$

$$y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi).$$

12. Spirale

Spirala Archimedesza (rys. 58). Jest to krzywa zakreślona przez punkt M poruszający się ze stałą prędkością v po półprostej mającej początek w punkcie O i obracającej się dookoła niego ze stałą prędkością kątową ω .

Równanie we współrzędnych biegunowych: $\varrho = a\varphi$, gdzie $a = v/\omega > 0$. Krzywa składa się z dwóch krzyżujących się gałęzi (rys. 58): linia ciągła odpowiada dodatnim wartościom argumentu φ , przerywana — ujemnym. Gałęzie te są symetryczne względem osi Ox . Każda półprosta OK przecina krzywą w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ w równych odstępach, tak że $A_i A_{i+1} = 2\pi a = \text{const.}$ Długość łuku OM : $L = \frac{1}{2}a(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \text{arsinh}\varphi)$; dla wielkich wartości φ iloraz $2L/a\varphi^2 \rightarrow 1$.

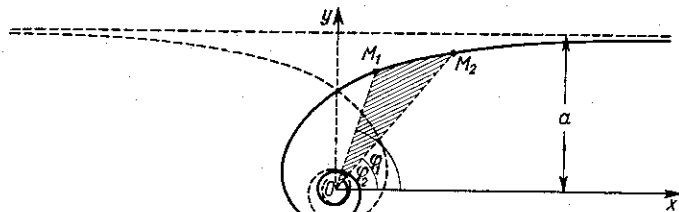


Rys. 58

⁽¹⁾ We wzorach na str. 125 przez a oznaczona była wielkość, która tu jest oznaczona przez $2\lambda a$, a l zastąpione zostało przez średnicę $2a$. Zmieniony został również układ współrzędnych.

Pole wycinka M_1OM_2 : $S = \frac{1}{6} a^2 (\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$. Promień krzywizny $r = a(\varphi^3 + 1)^{3/2} / (\varphi^3 + 2)$, w początku współrzędnych $r = \frac{1}{2}a$.

Spirala hiperboliczna (rys. 59). Równanie we współrzędnych biegunowych: $\varrho = a/\varphi$, $a > 0$. Krzywa składa się z dwóch gałęzi położonych symetrycznie względem osi Oy ; gałęzie te mają asymptotę

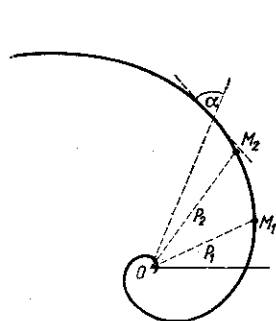


Rys. 59

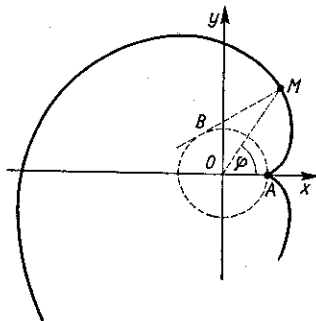
totę $y = a$ i punkt asymptotyczny w biegunie O . Pole wycinka M_1OM_2 : $S = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right)$; $\lim_{\varphi_2 \rightarrow \infty} S = \frac{a^2}{2\varphi}$. Promień krzywizny: $r = \frac{a}{\varphi} \left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} \right)^3$.

Spirala logarytmiczna (rys. 60). Jest to krzywa przecinająca pod stałym kątem α wszystkie półproste wychodzące z bieguna.

Równanie we współrzędnych biegunowych: $\varrho = ae^{k\varphi}$, $a > 0$, $k > 0$, przy czym $k = \operatorname{ctg} \alpha$. Gdy $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, krzywa jest okręgiem.



Rys. 60



Rys. 61

Biegun O jest punktem asymptotycznym krzywej, gdy $\varphi \rightarrow -\infty$.

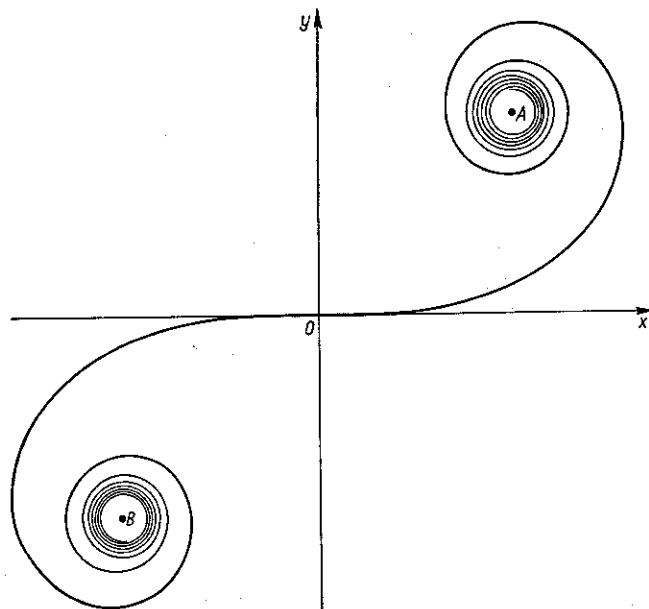
Długość łuku M_1M_2 : $L = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (\varrho_2 - \varrho_1)$; granica długości łuku

M_1M_2 , gdy M_1 dąży do bieguna O : $L_0 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \varrho$. Promień krzywizny $r = \varrho \sqrt{1+k^2} = L_0 k$.

Ewolwenta ⁽¹⁾ **okręgu (rozwijająca okręgu)** (rys. 61). Jest to krzywa, którą zakreśla koniec naciągniętej nici rozwijającej się z okręgu stałego koła (łuk AB równa się odcinkowi BM).

Równanie w postaci parametrycznej:

$$x = a \cos \varphi + a\varphi \sin \varphi, \quad y = a \sin \varphi - a\varphi \cos \varphi,$$



Rys. 62

⁽¹⁾ O ewolwencie patrz str. 319.

gdzie a jest promieniem stałego koła, $\varphi = \angle MOx$. Krzywa ma dwie gałęzie położone symetrycznie względem osi Ox ; ostrze krzywej $A(a, 0)$; punkty przecięcia krzywej z osią Ox : $x = \frac{a}{\cos \varphi_i}$, gdzie φ_i jest to kąt III, V, VII, ... ćwiartki spełniający równanie $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ ⁽¹⁾. Długość łuku AM : $L = \frac{1}{2}a\varphi^2$. Promień krzywizny BM : $r = a\varphi = \sqrt{2aL}$. Środek krzywizny B leży na okręgu stałego koła.

Kłotoida (rys. 62). Jest to krzywa, której promień krzywizny jest odwrotnie proporcjonalny do długości łuku: $r = a^2/s$, $a > 0$.

Równanie w postaci parametrycznej:

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{1}{2}\pi t^2 dt, \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{1}{2}\pi t^2 dt \quad (2),$$

gdzie $t = s/a\sqrt{\pi}$, $s = \widehat{OM}$. Krzywa jest symetryczna względem początku współrzędnych i ma w nim punkt przegięcia (styczną jest oś Ox). Istnieją dwa punkty asymptotyczne: $A(\frac{1}{2}a\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}a\sqrt{\pi})$ i $B(-\frac{1}{2}a\sqrt{\pi}, -\frac{1}{2}a\sqrt{\pi})$.

13. Niektóre inne krzywe

Linia łańcuchowa (rys. 63). Kształt linii łańcuchowej przybiera elastyczna, nierozciągliwa, wałka nie zawieszona w dwóch punktach. Równanie

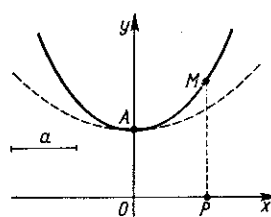
$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

Krzywa jest symetryczna względem osi Oy i leży powyżej paraboli $y = a + x^2/2a$, zaznaczonej na rysunku 63 linią przerywaną. Wierzchołek $A(0, a)$. Długość łuku AM : $L = a \sinh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$.

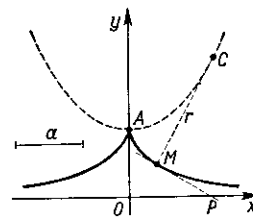
Pole $OAMP$: $S = aL = a^2 \sinh \frac{x}{a}$. Promień krzywizny $r = \frac{y^2}{a} = a \cosh^2 \frac{x}{a}$.

Traktoria (traktrysa) (rys. 64). Jest to krzywa, dla której długość odcinka stycznej liczonej od punktu styczności M do punktu przecięcia tej stycznej z daną prostą P jest wielkością stałą, $PM =$

$= OA = \text{const}$; na rysunku 64 daną prostą jest oś Ox ⁽¹⁾. Traktoria jest ewolwentą (patrz str. 319) linii łańcuchowej, przy czym rozwijanie łańcuchowej zaczyna się od jej wierzchołka A .



Rys. 63



Rys. 64

Równanie traktorii

$$x = a \operatorname{arccosh} \frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2} = \\ = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Asymptotą jest oś Ox . Ostrze krzywej $A(0, a)$ (styczną jest oś Oy). Długość łuku AM : $L = a \ln(a/y)$; przy wzrastaniu łuku AM różnica $L - x \approx a(1 - \ln 2) \approx 0,307a$. Promień krzywizny $r = a \operatorname{ctg}(x/y)$.

⁽¹⁾ Innymi słowy: Jeżeli do punktu materialnego M , leżącego na płaszczyźnie poziomej przyczepiony jest jeden koniec nierozciągliwej nici o długości a , a drugi jej koniec będziemy przesuwali po danej prostej P leżącej na tejże płaszczyźnie, to wleczony przez nitkę punkt M zakreśli traktorię (stąd łacińska nazwa *tractoria* — od łacińskiego słowa *tractus* = wleczony).

⁽¹⁾ O rozwiązywaniu takich równań patrz str. 179 - 182.

⁽²⁾ Całki te nie wyrażają się przez funkcje elementarne.

CZEŚĆ DRUGA
MATEMATYKA ELEMENTARNA

I. OBLICZENIA PRZYBLIŻONE

1. Zasady rachunku przybliżeń

Obliczenia przybliżone. Przy wykonywaniu obliczeń należy zawsze pamiętać o dokładności, jaką trzeba uzyskać i jaką można uzyskać. Absolutnie niemożliwe jest wykonywanie obliczeń z większą dokładnością niż pozwalają na to dane, niecelowe jest też wykonywanie obliczeń z dokładnością większą niż wymaga tego potrzeba (np. nie należy posługiwać się logarytmami siedmiocyfrowymi, gdy dane mają tylko 5 cyfr dokładnych). Dobre opanowanie reguł rachunku przybliżeń potrzebne jest każdemu, kto musi obliczać.

Błędy. Różnicę między dokładną wartością x a jej przybliżeniem a nazywamy *błędem* tego przybliżenia. Jeżeli wiadomo, że $|x - a| < \Delta a$, to wielkość Δa nazywamy *górnym kresem błędu* przybliżenia a ; stosunek $\Delta a/a = \delta a$ nazywamy *górnym kresem błędu względnego* dla przybliżenia a i wyrażamy go najczęściej w procentach.

Przykład. Liczba 3,14 jest przybliżeniem liczby π z błędem 0,00159... Za górny kres błędu można przyjąć 0,0016, a za górny kres błędu względnego iloraz $\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051\%$.

Dla skrótu opuszczamy zazwyczaj słowa „górny kres” i mówimy po prostu: *błąd przybliżenia* i *błąd względny przybliżenia*.

O błędach obserwacji patrz str. 823.

Cyfry wartościowe. Zazwyczaj przybliżenia wielkości podaje się w postaci liczb dziesiętnych; nazywamy je wtedy *przybliżeniami dziesiętnymi*. Jeżeli błąd przybliżenia a nie przekracza jednostki ostatniego rzędu dziesiętnego liczby a , to mówimy, że w liczbie a wszystkie liczby są pewne. (W określeniu powyższym niekiedy żąda się by błąd przybliżenia nie przekraczał połowy jednostki ostatniego rzędu dziesiętnego; w związku z tym patrz str. 134, zaokrąglenie). Przybliżenia dziesiętne należy pisać z zachowaniem jedynie cyfr pewnych.

Jeżeli na przykład błąd przybliżenia liczby 52 400 wynosi 100, to liczbę tę należy napisać w postaci $524 \cdot 10^3$ lub $5,24 \cdot 10^4$.

Im mniejszy jest błąd przybliżenia Δa w stosunku do samego przybliżenia a , tym dokładniejsze jest przybliżenie; np. przybliżenie 1609,3 z błędem nie przekraczającym 0,1 jest lepsze, dokładniejsze, niż przybliżenie 0,432 z błędem nie przekraczającym 0,001. Oszacować dokładność przybliżenia można przez podanie ilości jego cyfr wartościowych, tzn. ilości jego cyfr pewnych z pominięciem zer stojących po lewej stronie przybliżenia (natomiast zera wewnętrzne, a także zera końcowe, jeżeli należą do pewnych — zaliczamy do cyfr wartościowych). Ilość cyfr wartościowych w danym przybliżeniu dziesiętnym nazywamy *stopniem dokładności tego przybliżenia*.

Przykłady. 1. 1 stopa sześcienna = $0,0283 \text{ m}^3$; mamy tu 3 cyfry wartościowe, więc jest to przybliżenie w trzecim stopniu dokładności.

2. 1 cal = $2,5400 \text{ cm}$; mamy tu 5 cyfr wartościowych, więc przybliżenie jest w piątym stopniu dokładności.

Jeżeli przybliżenie a ma n cyfr wartościowych, to jego błąd względny $\delta a \leq \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, gdzie z jest pierwszą cyfrą wartościową danego przybliżenia a . Przybliżenie a z błędem względnym δa ma n cyfr wartościowych, gdzie n jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $(1+z)\delta a \leq 10^{1-n}$.

Przykład. Jeżeli liczba $a = 47,542$ jest wynikiem działań na liczbach przybliżonych (patrz niżej) i wiadomo, że $\delta a = 0,1\%$, to otrzymujemy $n = 3$, gdyż $(4+1) \cdot 0,001 < 10^{-2}$; dane przybliżenie ma więc tylko 3 cyfry wartościowe i należy a napisać w postaci 47,5.

Zaokrąglanie. Jeżeli przybliżenie dziesiętne zawiera zbędne lub niepewne cyfry, należy to przybliżenie *zaokrąglić*. Przy zaokrąglaniu należy zachować tylko cyfry pewne, a zbędne cyfry należy odrzucić, przy czym jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr jest większa od 4, to do ostatniej z cyfr zachowanych należy dodać 1. Jeżeli część odrzucona składa się z jednej tylko cyfry 5, to zazwyczaj zaokrąglenia dokonujemy w taki sposób, by ostatnia cyfra była parzysta.

Przy zaokrąglaniu powstaje dodatkowy błąd, który może sięgać połowy jednostki ostatniej cyfry znaczącej. Aby więc po zaokrągleniu przybliżenia wszystkie cyfry były pewne, błąd przed zaokrągleniem nie powinien przekraczać połowy jednostki ostatniej cyfry pewnej.

Działania na liczbach przybliżonych. Wynik działań na liczbach przybliżonych jest także liczbą przybliżoną. Błąd wyniku może być wyrażony przez błędy poszczególnych danych za pomocą następujących twierdzeń.

1° Górny kres błędu sumy lub różnicy przybliżeń równa się sumie górnych kresów błędów poszczególnych składników, np.

$$\Delta(a-b+c-d) = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \Delta d.$$

2° Błąd względny sumy przybliżeń zawarty jest między najmniejszym i największym z błędów względnych poszczególnych składników, np. jeżeli

$$\delta a < \delta b < \delta c < \delta d, \quad \text{to} \quad \frac{\Delta a}{a} < \frac{\Delta(a+b+c+d)}{a+b+c+d} < \frac{\Delta d}{d}.$$

3° Błąd względny iloczynu lub ilorazu przybliżeń równy jest sumie błędów względnych tych przybliżeń, np.

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b \quad \text{i} \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b.$$

4° Błąd względny n -tej potęgi liczby przybliżonej jest n razy większy niż błąd względny podstawy potęgi: $\delta(a^n) = n\delta a$.

5° Błąd względny pierwiastka stopnia n z liczby przybliżonej równa się $1/n$ błędowi względnemu liczby podpierwiastkowej

$$\delta(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \delta a.$$

Posługując się tymi twierdzeniami można określić błąd wyniku dowolnej kombinacji działań arytmetycznych na liczbach przybliżonych.

Przykłady.

$$1. V = r^2 h; \quad \delta V = 2\delta r + \delta h, \quad \Delta V = V\delta V = V\left(2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}\right).$$

$$2. z = \sqrt{\frac{x}{1+y}}; \quad \Delta z = z\delta z = \frac{z}{2}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{1+y}\right),$$

$$\delta z = \frac{1}{2}[\delta x + \delta(1+y)].$$

Błąd funkcji. Oprócz podanych powyżej reguł można do szacowania błędów funkcji obliczonej na podstawie przybliżonych wartości jej argumentów zastosować również różniczkę funkcji. Błąd funkcji to nie jest to samo co przyrost funkcji, gdy jej argumenty otrzymują przyrosty równe błędom tych argumentów. Ponieważ jednak błędy są zazwyczaj dostatecznie małe, w praktyce dopuszczalne jest zastępowanie błędów różniczkami (str. 390). Jeżeli znane są tylko górne kresy błędów argumentów, to przy obliczaniu różniczek należy pochodne zastępować ich wartościami bezwzględnymi.

Przykłady. 1. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$; $(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi = \frac{b da - a db}{b^2}$,

$$d\varphi = \frac{b da - a db}{a^2 + b^2}, \text{ a stąd } \Delta\varphi = \frac{b \Delta a + a \Delta b}{a^2 + b^2}.$$

$$2. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$

$$\text{a stąd } \frac{\Delta z}{z} = \frac{x \Delta x + y \Delta y}{x^2 + y^2}.$$

Dla funkcji, której wartości znajdujemy za pomocą tablic, oszacowanie błędu jest bardzo proste. Jeżeli argument jest dany z błędem Δx , to dla określenia błędu funkcji $f(x)$ należy zastosować interpolację liniową (patrz str. 11) dla przyrostu funkcji odpowiadającego Δx lub $-\Delta x$, zależnie od tego czy funkcja wzrasta, czy maleje.

Przykłady. 1. Jeżeli średnica koła $D = 5,92$ cm ma błąd $\Delta D = 0,005$, błędy długości okręgu i pola koła (patrz str. 71 i 74) wynoszą odpowiednio: $0,015$ cm i $0,05$ cm².

2. Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 0,818 \pm 0,002$, to (patrz str. 57) $\alpha = 39^\circ 17'$ z błędem $4'$.

Zagadnienie odwrotne rachunku przybliżeń. Jeżeli chcemy otrzymać wynik z określoną dokładnością, to szukamy najpierw wzoru na obliczenie błędu wyniku i posługując się jedną z podanych powyżej metod obliczamy, jakie mogą być dopuszczalne błędy pierwotnych danych. Rozwiązanie tego zagadnienia jest niejednoznaczne i wymaga dodatkowych założeń.

Przykład. Z jaką dokładnością powinny być zmierzone przyprostokątne trójkąta prostokątnego, z których jedna jest około trzy razy mniejsza od drugiej, aby błąd kąta wyznaczonego za pośrednictwem tangensa nie przekraczał $1'$.

Ze związku $\operatorname{tg} \varphi = a/b$ otrzymujemy (jak wykazano wyżej) błąd

$$\Delta\varphi = \frac{b \Delta a + a \Delta b}{a^2 + b^2};$$

podstawiając $b = 3a$ i zakładając dodatkowo, że $\Delta a = \Delta b$, otrzymujemy $\Delta\varphi = 0,4 \Delta a/a$, a ponieważ $\Delta\varphi = 1' = 0,00029$, więc $\Delta a = \Delta a/a = 0,0007$. Tak więc przy założeniu jednakowych błędów pomiaru obu przyprostokątnych otrzymaliśmy dla mniejszej przyprostokątnej błąd względny $0,07\%$.

Rachunki przybliżone bez dokładnego uwzględniania błędów. Metodą podaną powyżej można określić kres górny błędu, który z pewnością przekracza bezwzględną wartość prawdziwego błędu. Przez cały czas zakłada się przy tym, że poszczególne błędy wciąż się kumulują,

gdy tymczasem w praktyce zdarza się to nader rzadko. Przy rachunkach masowych, w których nie oblicza się błędów każdego wyniku z osobna, korzystając się z niżej podanych prawideł obliczania cyfr wartościowych. Przy zachowaniu tych prawideł można liczyć na to, że otrzymane wyniki będą miały na ogół wszystkie cyfry pewne, chociaż w poszczególnych przypadkach możliwe są błędy wynoszące kilka jednostek ostatniego rzędu.

1° Przy dodawaniu i odejmowaniu przybliżeń dziesiętnych należy zachować w wyniku tyle cyfr po przecinku dziesiętnym, ile ich jest w tym przybliżeniu, które ma najmniejszą ilość cyfr po przecinku.

2° Przy mnożeniu i dzieleniu przybliżeń dziesiętnych należy zachować w wyniku tyle cyfr wartościowych, ile ich jest w tym przybliżeniu, które ma najmniejszą ilość cyfr wartościowych. (Innymi słowy: o stopniu dokładności wyniku mnożeń lub dzielenia decyduje to przybliżenie, którego stopień dokładności jest najmniejszy).

3° Przy podnoszeniu przybliżenia dziesiętnego do kwadratu lub sześciannu należy wziąć w wyniku tyle cyfr wartościowych, ile ma ich dane przybliżenie (czyli zachować jego stopień dokładności), przy czym jednak błąd względny kwadratu i sześciannu przybliżenia dziesiętnego jest około 2 i 3 razy większy niż błąd względny samego przybliżenia, a więc błąd wyniku potęgowania może przekraczać jednostkę ostatniego zachowanego w nim rzędu.

4° Przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego lub sześciennego z przybliżenia dziesiętnego należy dać w wyniku tyle cyfr wartościowych, ile ma ich dane przybliżenie (czyli zachować jego stopień dokładności), przy czym błąd względny jest około 2 i 3 razy mniejszy niż błąd względny samego przybliżenia.

5° We wszystkich obliczeniach pośrednich należy zachować o jedną cyfrę więcej niż to wynika z poprzednio podanych prawideł; w końcowym wyniku tę zapasową cyfrę należy odrzucić.

6° Jeśli pewne przybliżenia dziesiętne mają w dodawaniu i odejmowaniu więcej cyfr po przecinku, a w mnożeniu i dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu więcej cyfr wartościowych niż inne przybliżenia, to przed wykonaniem rachunków należy je zaokrąglić z zachowaniem dodatkowej cyfry zapasowej; w końcowym wyniku tę zapasową cyfrę należy odrzucić.

7° Jeżeli można brać dane z dowolną dokładnością, to dla otrzymania wyniku o k cyfrach należy brać te dane z taką ilością cyfr, która zgodnie z prawidłami 1°-4° daje w wyniku $k+1$ cyfr.

8° Przy obliczaniu wartości jednomianów za pomocą logarytmów należy spośród danych wybrać liczbę o najmniejszej ilości cyfr wartościowych, obliczyć ich ilość i wziąć tablice logarytmów z ilością znaków dziesiętnych o jedną większą. W wyniku końcowym ostatnią cyfrę wartościową należy odrzucić.

Mnożenie i dzielenie przybliżeń dziesiętnych. Aby uniknąć zbędnych cyfr w mnożeniu i dzieleniu przybliżeń dziesiętnych, wykonuje się te działania w sposób następujący:

Przy mnożeniu bierze się za mnożnik przybliżenie o mniejszym stopniu dokładności. Mnożenie zaczynamy od najwyższego rzędu mnożnika i po otrzymaniu każdego iloczynu cząstkowego skreśla się ostatnią cyfrę mnożnej, przy czym przedostatnią cyfrę powiększa się w razie potrzeby o jedność. Iloczyn cząstkowy zapisuje się jak w niżej podanym przykładzie.

Przy dzieleniu, zgodnie z prawidłem 6° zachowuje się w dzielnicy jedną cyfrę wartościową więcej niż w dzielniku (o ile jest to możliwe). Przy wykonywaniu dzielenia zamiast dopisywania zera w kolejnych etapach dzielenia należy skreślać ostatnią cyfrę dzielnika wprowadzając w razie potrzeby poprawkę do przedostatniej cyfry.

Przykład

Pomnożyć 4,128 przez 2,953.

$$\begin{array}{r} 4,128 \\ \times 2,953 \\ \hline 8,256 \\ 3,715 \\ + 206 \\ \hline 12 \\ \hline 12,189 \approx 12,19 \end{array}$$

Podzielić 12,189 przez 4,128.

$$\begin{array}{r} 12,189 : 4,128 \\ \hline 2,953 \\ \hline 3,933 \\ \hline 3,715 \\ \hline 218 \\ \hline 206 \\ \hline 12 \\ \hline 12 \end{array}$$

2. Wzory przybliżone

W wielu wypadkach możemy dość skomplikowane funkcje zastąpić prostszymi, dającymi wyniki z dopuszczalnym błędem. W tym celu można posłużyć się kilkoma początkowymi wyrazami rozwinięcia funkcji w szereg Taylora (patrz str. 413) lub wykorzystać metodę najmniejszych kwadratów (patrz str. 816). W ostatnim przypadku wzór będzie w sposób istotny zależeć od przedziału, dla którego jest przeznaczony. W tabelce podano kilka najczęściej stosowanych wzorów, otrzymanych z szeregu Taylora z podaniem ich błędów, przy czym przy każdym wzorze podane są granice, w których powinno zawierać się x , by nie przekroczyć podanego błędu.

Wzór	Błąd względny nie przekracza		
	0,1 %	1 %	10 %
	gdy x zmienia się w granicach		
$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$\mp 0,077 = \mp 4^\circ,4$	$\mp 0,245 = \mp 14^\circ,0$	$\mp 0,786 = \mp 45^\circ,0$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$\mp 0,580 = \mp 33^\circ,2$	$\mp 1,005 = \mp 57^\circ,6$	$\mp 1,632 = \mp 93^\circ,5$
$\tan x = x + \frac{x^3}{3}$	$\mp 0,045 = \mp 2^\circ,6$	$\mp 0,141 = \mp 8^\circ,1$	$\mp 0,451 = \mp 25^\circ,8$
$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$	$\mp 0,386 = \mp 22^\circ,1$	$\mp 0,662 = \mp 37^\circ,9$	$\mp 1,036 = \mp 59^\circ,3$
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$\mp 0,054 = \mp 3^\circ,1$	$\mp 0,172 = \mp 9^\circ,8$	$\mp 0,517 = \mp 29^\circ,6$
$e^x = 1 + x$	$\mp 0,293 = \mp 16^\circ,8$	$\mp 0,519 = \mp 29^\circ,7$	$\mp 0,895 = \mp 51^\circ,3$
$\ln(1+x) = x$	$-0,085a^2$ $0,093a^2$	$-0,247a^2$ $0,328a^2$	$-0,607a^2$ $1,545a^2$
	$-0,051a^2$ $0,052a^2$	$-0,157a^2$ $0,166a^2$	$-0,448a^2$ $0,530a^2$
	$\mp 0,031a$	$\mp 0,099a$	$\mp 0,301a$
	$\mp 0,045$	$-0,134$ $0,148$	$-0,375$ $0,502$
	$\mp 0,002$	$\mp 0,020$	$-0,176$ $0,230$

3. Suwak logarytmiczny

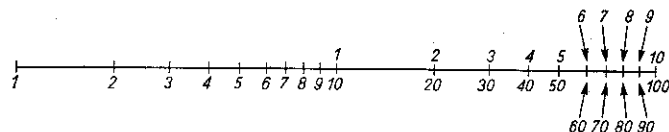
Przeznaczenie suwaka. Elementarne obliczenia zawierające mnożenie, dzielenie, podnoszenie do kwadratu lub sześciannu, wyciąganie kwadratowego lub sześciennego pierwiastka i logarytmowanie danych liczb oraz działania na funkcjach trygonometrycznych danych kątów mogą być w przybliżeniu wykonane na suwaku logarytmicznym. Dokładność obliczeń jest różna w poszczególnych przypadkach, przecięt-

(1) Wzór ten można napisać w postaci $\sqrt{a^2 + x} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a^2 + x}{a} \right)$, używanej w praktyce. Ponieważ a jest przybliżoną wartością pierwiastka (pierwsze przybliżenie), to z tego wzoru wynika, że dla otrzymania wartości pierwiastka należy wziąć średnią arytmetyczną pierwszego przybliżenia i ilorazu z dzielenia liczby podpierwiastkowej przez pierwsze przybliżenie; można przy tym przyjąć, że liczba cyfr pewnych będzie dwukrotnie większa od liczby cyfr pewnych w pierwszym przybliżeniu.

Należy także zaznaczyć, że wzór $\sqrt{a^2 + b^2} = 0,960a + 0,398b$, gdy $a > b > 0$, który otrzymuje się na podstawie aproksymacji jednostajnej (patrz str. 815), daje błąd nie przekraczający 4%.

nie jednak wyniki otrzymane za pomocą suwaka logarytmicznego o długości 25 cm odpowiadają obliczeniom w trzecim stopniu dokładności, tzn. błąd względny zawiera się między 0,1% a 1%. W przypadkach gdy taka dokładność jest wystarczająca, można posługiwać się suwakiem logarytmicznym.

Skala logarytmiczna. Zasada działania suwaka logarytmicznego opiera się na skali logarytmicznej. Konstrukcja tej skali jest następująca: obierając pewien odcinek za jednostkę długości, np. 25 cm, odmierzamy od początkowego punktu skali odcinki (rys. 65), których miary przy przyjętej jednostce długości są równe logarytmom dziesiętnym pewnego ciągu liczb, przy czym odmierzając odcinek $\log a$ piszemy przy jego końcu liczbę a (rys. 66). Przy punkcie początkowym należy umieścić liczbę 1, gdyż $\log 1 = 0$. W ten sposób na skali logarytmicz-



Rys. 65

nej odległość od punktu 1 do punktu a wynosi w obranej skali $\log a$. Ponieważ $\log 10a = 1 + \log a$, przeto każdej liczbie z przedziału od 10 do 100 odpowiada na skali logarytmicznej liczba 10 razy od niej mniejsza. Rozumowanie to może być przeprowadzone także dla każdego przedziału od 10^na do $10^{n+1}a$. Dlatego też odcinek równy przyjętej jednostce długości i odpowiadający przedziałowi liczb od 1 do 10 może reprezentować całą nieskończoną skalę logarytmiczną. Liczbom o jednakowym układzie cyfr, lecz różniącym się tylko o czynnik 10^n (np. 7,05, 0,0705, 70 500), odpowiada na skali ten sam punkt 7,05.

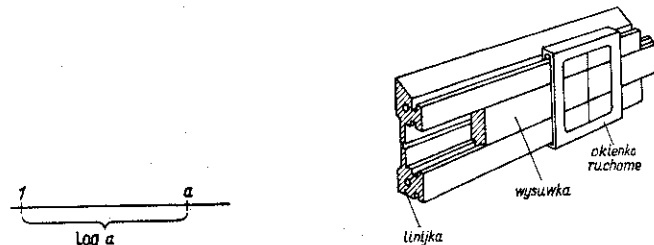
Skale suwaka. Suwak logarytmiczny składa się z części stałej w postaci linijki, wysuwki poruszającej się w wyżłobieniach linijki oraz okienka ruchomego ze szkiełkiem, na którym zaznaczone są jedna lub trzy rysy (rys. 67). Na górnej powierzchni linijki i na obu powierzchniach wysuwki znajdują się różne skale, które oznaczmy literami A, B, C, D, I, K, L (rys. 68.). W niektórych typach suwaków nie ma skal I i K , a skala L umieszczona jest na odwrotnej stronie wysuwki. Przed omówieniem sposobów wykonania obliczeń na suwaku logarytmicznym należy zapoznać się z jego skalami.

Skale A, B, C, D, I, K są to skale logarytmiczne. Dla skal C, D oraz I przyjęto za jednostkę miary 25 cm, przy czym dla skali I (w przeciwieństwie do skal pozostałych) za kierunek dodatni obrano kierunek w lewo. Dla skal A i B jednostka skali wynosi 12,5 cm, a dla skali

K jest równa $8\frac{1}{3}$ cm, w związku z czym skale A i B składają się z dwóch, a skala K z trzech jednakowych odcinków. Podziałki na wszelkich skalach logarytmicznych są nierównomierne i różnie zagęszczone w różnych miejscach. Dla ustalenia na skali logarytmicznej miejsca liczby niecechowanej na tej skali przyjmuje się, że między dwiema sąsiednimi kreskami skala jest równomierna, np. że liczba 235 leży po środku między znakami 234 i 236.

Skala L jest równomierna; najmniejsza podziałka wynosi 0,002 jednostki długości wynoszącej 25 cm.

Na odwrotnej stronie wysuwki (rys. 69) umieszczona jest skala logarytmiczna dla funkcji trygonometrycznych: T lub Tg (tangens),



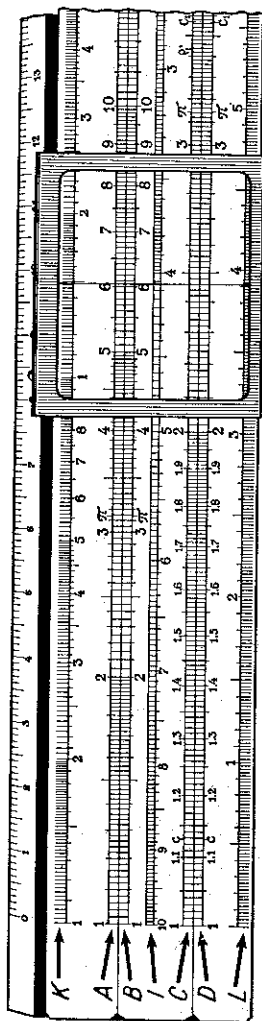
Rys. 66

Rys. 67

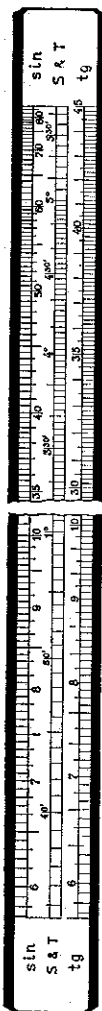
S lub $\sin$ (sinus) i $S \& T$ (sinus et tangens), gdzie skrót $\&$ oznacza łaciński spójnik *et* równy polskiemu *i*. Na skali T punkt początkowy umieszczony jest na prawym końcu; odpowiada mu kąt 45° , gdyż $\log tg 45^\circ = 0$. Punktom skali odpowiadają kąty T° mniejsze od 45° , a więc $\log tg T^\circ < 0$. Odległość punktu T° od punktu początkowego wynosi $|\log tg T^\circ|$ przy obranej jednostce długości (rys. 70). Na lewym końcu skali leży taki punkt T_1° , dla którego $\log tg T_1^\circ = -1$, a więc $tg T_1^\circ = 0,1$ i $T_1^\circ \approx 5^\circ 43'$.

Na skali S punktowi początkowemu umieszczonemu na końcu skali odpowiada kąt 90° , gdyż $\log \sin 90^\circ = 0$. Odległość S° od punktu początkowego wynosi $|\log \sin S^\circ|$ przy obranej jednostce długości (rys. 71). Na lewym końcu skali leży punkt S_1° , dla którego $\log \sin S_1^\circ = -1$, a więc $\sin S_1^\circ = 0,1$ i $S_1^\circ \approx 5^\circ 44'$.

Dla kątów mniejszych od $5^\circ 44'$ wartości sinusa i tangensa pokrywają się (w granicach dokładności suwaka); dlatego utworzona została wspólna skala $S \& T$ mająca na prawym końcu punkt $T_1^\circ \approx S_1^\circ$, dla którego $\log \sin S_1^\circ = -1$, skąd $\sin S_1^\circ = 0,1$ i $S_1^\circ \approx 5^\circ 43'$, a na lewym końcu punkt $T_2^\circ \approx S_2^\circ$, dla którego $\log \sin S_2^\circ = -2$, skąd $\sin S_2^\circ = 0,01$ i $S_2^\circ \approx 0^\circ 35'$. (W niektórych typach suwaków jednostka miary skali S wynosi 12,5 cm i wówczas cała skala zawiera kąty od $0^\circ 35'$

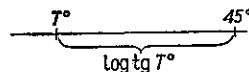


Rys. 68

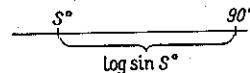


Rys. 69

do 90° ; podane niżej zasady posługiwania się skalą S powinny być w tym przypadku odpowiednio zmienione).



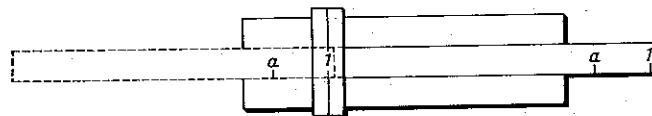
Rys. 70



Rys. 71

Zasady rachowania na suwaku. Sposób rachowania na suwaku polega na ustawieniu dwóch liczb jednej naprzeciw drugiej na dwóch różnych skalach i odczytaniu wyniku w określonym punkcie jednej skali położonym naprzeciw określonej liczby drugiej skali. Czynności tych dokonuje się za pomocą okienka. Poniżej podane są schematy, według których wykonuje się elementarne obliczenia.

Ogólne zasady: 1° Suwak daje tylko układ cyfr wartościowych i za każdym razem trzeba dobrać odpowiedni czynnik 10^n (gdzie



Rys. 72

n jest liczbą całkowitą), czyli ustalić miejsce przecinka dziesiętnego. W tym celu najlepiej jest oszacować w pamięci wynik z grubszą, aby oszacować rząd wielkości wyniku.

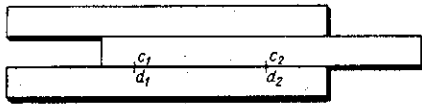
2° Przy obliczeniach złożonych nie odczytuje się pośrednich wyników, ale tylko nastawia się na nie każdorazowo środkową rysę ruchomego okienka. Dlatego należy tak dobierać porządek obliczeń, aby wyniki kolejnych działań lub grupy działań były odczytywane na skalach nieruchomych, a nie na wysuwce.

3° W przypadku gdy punkt a wysuwki, naprzeciw którego ma się znaleźć wynik na skali nieruchomej, wychodzi poza granicę tej skali, należy nastawić rysę okienka na jeden z końców skali wysuwki, a następnie przetrzucić wysuwkę w taki sposób, aby pod rysą okienka znalazł się drugi koniec skali wysuwki (rys. 72). Wówczas szukany wynik, który ma być na wprost punktu a podziałki, okaże się w granicach skali nieruchomej i będzie mógł być odczytany.

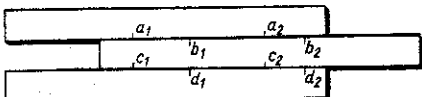
Schematy. W każdym schemacie rachunkowym podstawowe znaczenie ma ustawienie pary liczb, jednej naprzeciwko drugiej, na dwóch

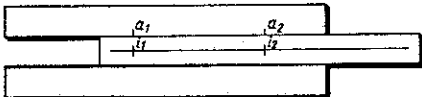
skalach, a wówczas w każdym innym miejscu suwaka będzie ustalona wzajemna odpowiedniość pewnej pary liczb. Gdy danej liczbie skali nieruchomej ma być podporządkowana na wysuwce liczba 1, można w razie potrzeby przetrząsnąć wysuwkę na lewo w taki sposób, aby danej liczbie skali nieruchomej odpowiadała na wysuwce liczba 10.

Mnożenie, dzielenie, proporcje

I  $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$;
jeżeli $c_1 = 1$,
to $d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

II  $i_1 d_1 = i_2 d_2$;
jeżeli $i_1 = 1$,
to $d_1 = \frac{i_2 d_2}{i_1}$.

III  $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2}$.

IV  $a_1 i_1^3 = a_2 i_2^3$.

V  $\frac{k_1}{c_1^2} = \frac{k_2}{c_2^2}$.

VI  $k_1 i_1^3 = k_2 i_2^3$.

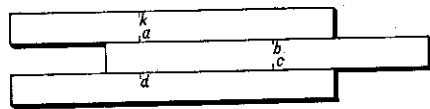
VII  $d = abc$, $a = \frac{d}{bc}$.

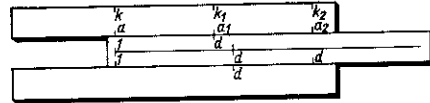
VIII  $d = \frac{ac}{b}$.

Przy mnożeniu i dzieleniu posługujemy się zazwyczaj schematami I i II. Schematy III-VI pozwalają wykonywać mnożenie i dzielenie przez drugą i trzecią potęgę danej liczby. W obliczeniach zawierających zespoły mnożeń i dzieleni należy wielokrotnie stosować schematy VII i VIII. Na przykład obliczenie wyrażenia $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f \cdot g}$ wykonujemy w trzech etapach: dwukrotnie według schematu VIII i raz według schematu VII:

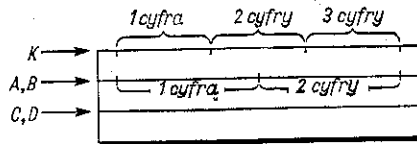
$$\frac{a \cdot b}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{1}{f \cdot g}.$$

Podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastków

IX  $a = d^2$, $b = c^2$,
 $k = d^3$, $d = \sqrt{a}$,
 $d = \sqrt[3]{k}$, $k = \sqrt{a^3}$.

X  $a = d^3$, $a_1 = d^5$,
 $k = d^6$, $a_2 = d^6$,
 $k_1 = d^{15}$, $k_2 = d^9$.

Obliczenia według schematu IX wykonuje się przy pomocy okienka bez użycia wysuwki. Według tego samego schematu IX można wyciągnąć pierwiastki stopnia drugiego i trzeciego, przy czym liczbę podpierwiastkową należy podzielić na grupy dwucyfrowe lub trzy-cyfrowe leżące na prawo i na lewo od przecinka dziesiętnego (patrz str. 14). Wówczas w zależności od liczby cyfr wartościowych w najwyższej grupie niezerowej ustala się, w której części skali A lub K należy szukać liczby podpierwiastkowej (rys. 73). Na przykład przy obliczaniu pierwiastka kwadratowego z liczby 37/50 albo 0,00|37/5 najwyższa

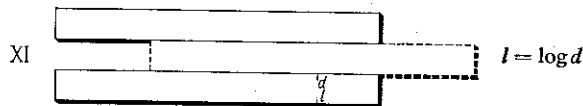


Rys. 73

grupa dwucyfrowa 37 ma dwie cyfry wartościowe, a więc liczby 3,75 należy szukać w drugiej części skali A, a przy obliczaniu pierwiastka kwadratowego z liczb 3|75 albo 0,03|75 najwyższa grupa dwucyfrowa 03 ma jedną cyfrę wartościową, więc liczby 3,75 należy szukać w pierwszej części skali A.

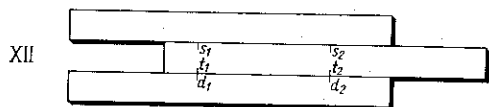
Podobnie przy wyciąganiu pierwiastka stopnia trzeciego z liczb 375 lub 0,375 szukamy liczby 3,75 w trzeciej części skali K; dla pierwiastków sześciennych z 37,5 lub 0,375|5 szukamy 3,75 w drugiej części skali K, a w przypadku 3|750 lub 0,003|75 szukamy jej w pierwszej części skali K.

Logarytmowanie

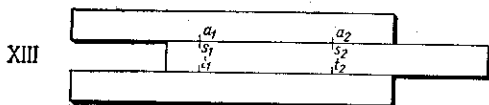


Obliczenia według schematu XI wykonuje się tylko za pomocą okienka bez użycia wysuwki. Skala L daje tylko mantysę logarytmu. Cechę oblicza się według znanych prawideł (patrz str. 165).

Obliczenia trygonometryczne

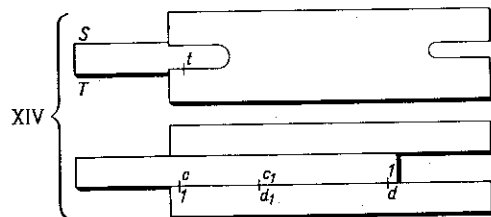


a) $\frac{\operatorname{tg} t_1^\circ}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} t_2^\circ}{d_2}$, b) $\frac{\sin s_1^\circ}{d_1} = \frac{\sin s_2^\circ}{d_2} (^1)$.

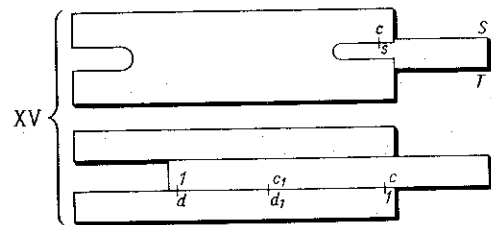


a) $\frac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1^\circ} = \frac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2^\circ}$, b) $\frac{a_1}{\sin^2 s_1^\circ} = \frac{a_2}{\sin^2 s_2^\circ} (^1)$.

(¹) Schemat ten musi być zmieniony dla suwaków o długości skali S wynoszącej 12,5 cm (patrz str. 147).



$$c = \operatorname{tg} t^\circ, \quad d = c \operatorname{tg} t^\circ, \quad \frac{c_1}{p_1} = \operatorname{tg} t^\circ.$$

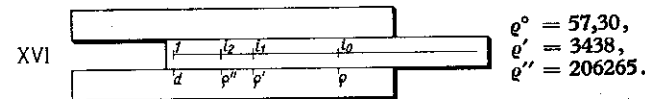


$$c = \sin s^\circ, \quad d = \frac{1}{\sin s^\circ} (^1), \quad \frac{c_1}{d_1} = \sin s^\circ (^1).$$

Obliczenia według schematów XII i XIII wykonuje się przy użyciu odwrotnej strony wysuwki. Niektóre działania na wielkościach trygonometrycznych można wykonać bez odwracania wysuwki; wówczas punkty na skalach S i T wyznacza się za pomocą kreseczek znajdujących się w wycięciach na odwrotnej stronie suwaka (schematy XIV i XV).

Znaki specjalne

Zamiana stopni na radiany i na odwrot



$$\begin{aligned} \varphi^\circ &= 57,30, \\ \varphi' &= 3438, \\ \varphi'' &= 206265. \end{aligned}$$

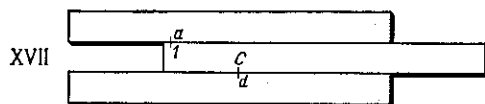
$$d^\circ = i_0 \operatorname{rad} \left(= \frac{d^\circ}{\varphi^\circ} \operatorname{rad} \right), \quad d' = i_1 \operatorname{rad} \left(= \frac{d'}{\varphi'} \operatorname{rad} \right), \quad d'' = i_2 \operatorname{rad} \left(= \frac{d''}{\varphi''} \operatorname{rad} \right),$$

(na przykład $15^\circ = 0,262 \operatorname{rad}$, $15' = 0,00436 \operatorname{rad}$, $15'' = 0,0000727 \operatorname{rad}$).

Zamiast schematu XVI możemy wykorzystać także schemat I.

(¹) Schemat ten musi być zmieniony dla suwaków o długości skali S wynoszącej 12,5 cm (patrz str. 147).

Pole koła



$$\gamma = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,1248, \quad a = \left(\frac{d}{\gamma}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$



Jeżeli na szybko okienka zaznaczone są trzy rysy, wówczas pole koła znajduje się bez pomocy wysuwki według schematu XVIII.

II. ALGEBRA

A. PRZEKSZTAŁCENIA TOŻSAMOŚCIOWE

1. Pojęcia podstawowe

Określenia. Wyrażeniem algebraicznym nazywamy jedną lub kilka wielkości algebraicznych (liczb albo liter) połączonych znakami działań (+, −, :, √, itp.) z oznaczeniem kolejności wykonywania działań (różnego rodzaju nawiasy).

Tożsamością nazywamy taką równość dwóch wyrażeń algebraicznych, która pozostanie prawdziwa, gdy zamiast występujących w niej liter podstawimy dowolne wartości.

Przekształcenie tożsamościowe, czyli otrzymanie z danego wyrażenia algebraicznego drugiego, tożsamościowo mu równego, można wykonać różnymi sposobami, zależnie od celu przekształcenia, który trzeba zawsze mieć na uwadze, jak na przykład nadając wyrażeniu bardziej zwartą postać, dogodną przy podstawianiu zamiast liter ich wartości liczbowych, albo nadając wyrażeniu postać dogodną przy rozwiązywaniu równań, logarytmowaniu, różniczkowaniu, całkowaniu itp.

Podział wyrażeń algebraicznych. W każdym poszczególnym przypadku w wyrażeniu algebraicznym wyróżniamy pewne podstawowe wielkości literowe, w zależności od których przeprowadzamy podział wyrażeń; natomiast wielkości pomocnicze (pozostałe litery) nazywamy parametrami wyrażenia. Wyrażenie należy do tego lub innego rodzaju w zależności od tego, jakie działania są wykonywane na występujących w nim wielkościach podstawowych. W wyrażeniach całkowitych wymiernych wykonywa się na wielkościach podstawowych jedynie dodawanie, odejmowanie i mnożenie (włączając tu również podnoszenie do potęgi o wykładniku naturalnym). W wyrażeniach ułamkowych wymiernych dochodzi (oprócz wymienionych działań) jeszcze dzielenie przez wyrażenie całkowite wymierne (lub podnoszenie do potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym). W wyrażeniach niewymiernych dołącza się wyciąganie pierwiastka z wyrażeń wymiernych (lub podnoszenie do potęgi o wykładniku ułamkowym).

W wyrażeniach *wykładniczych* występuje podnoszenie do potęg, które wykładnikiem jest wyrażenie (wymiernie lub niewymiernie) zawierające wielkości podstawowe, a w wyrażeniach *logarytmicznych* występuje logarytmowanie wyrażeń (wymiernych lub niewymiernych) zawierających wielkości podstawowe.

We wszystkich umieszczonych poniżej przykładach wielkości podstawowe oznaczone zostały ostatnimi literami alfabetu x, y, z , a parametry początkowymi literami $a, b, c, \dots$ lub środkowymi literami $m, n, p, \dots$, przy czym środkowe litery przybierają tylko wartości naturalne.

2. Wyrażenia całkowite wymierne

Przedstawienie w postaci wielomianu. Każde wyrażenie całkowite wymierne można przedstawić w postaci wielomianu za pomocą elementarnych przekształceń: redukcji wyrazów podobnych, dodawania, odejmowania i mnożenia jednomianów i wielomianów.

Przykład. Mamy

$$\begin{aligned} & (-a^3 + 2a^2x - x^3)(4a^2 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) - \\ & - (a^5 + 4a^3x^2 - 4ax^4) = -4a^5 + 8a^4x - 4a^2x^3 - 8a^4x + 16a^3x^2 - \\ & - 8ax^4 + a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4 - a^5 - 4a^3x^2 + 4ax^4 = \\ & = -5a^5 + 13a^3x^2 - 2a^2x^3 - 8ax^4. \end{aligned}$$

Rozłożenie wielomianu na czynniki. W wielu wypadkach można przedstawić wielomian w postaci iloczynu czynników (jednomianów lub wielomianów) za pomocą wyniesienia poza nawias, metody grupowania, zastosowania wzorów na skrócone mnożenie i dzielenie i wyzyskania własności równań algebraicznych.

Przykłady. 1. Wyniesienie poza nawias:

$$8ax^2y - 6bx^2y^2 + 4cx^5 = 2x^2(4ay - 3bx^2y + 2cx^3).$$

2. Metoda grupowania:

$$\begin{aligned} 6x^2 + xy - y^2 - 10xz - 5yz &= 6x^2 + 3xy - 2xy - y^2 - 10xz - 5yz = \\ &= 3x(2x + y) - y(2x + y) - 5z(2x + y) = (2x + y)(3x - y - 5z). \end{aligned}$$

3. Wyzyskanie własności równań algebraicznych (patrz str. 174):

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2.$$

a. Wynosimy x^2 poza nawias. b. Metodą prób ustalamy, że liczby $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$ są pierwiastkami równania $P(x) = 0$. Dzielimy $P(x)$ przez $x^2(x-1)(x+1)$, czyli przez $x^4 - x^2$, otrzymujemy w ilorazie $x^2 - 2x + 5$. Ostatnie wyrażenie jest trójmianem $x^2 + px + q$, gdzie

$p = -2, q = 5$ i wyróżnik $(\frac{1}{2}p)^2 - q$ jest ujemny, a więc to wyrażenie nie może być już rozłożone na czynniki rzeczywiste. Tak więc

$$x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 5).$$

Wzory na skrócone mnożenie i dzielenie.

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2,$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

$$(x + y + z + \dots + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \dots + t^2 + u^2 + 2xy + 2xz + \dots + 2xu + 2yz + \dots + 2yu + \dots + 2tu,$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3,$$

$(x \pm y)^n$ obliczamy według wzoru Newtona (patrz str. 206).

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

$$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1},$$

$$(x^n + y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}$$

(tylko dla n nieparzystych!),

$$(x^n - y^n) : (x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

(tylko dla n parzystych!).

Odnajdowanie największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów. Wielomian $P(x)$ stopnia n oraz wielomian $Q(x)$ stopnia m , gdzie $n \geq m$, mogą mieć wspólne czynniki zawierające x ; iloczyn wszystkich tych czynników nazywamy *największym wspólnym dzielnikiem* danych wielomianów. Jeżeli $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają takich wspólnych czynników, to nazywamy je *względnie pierwszymi* (ich największy wspólny dzielnik = const).

Największy wspólny dzielnik wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ można znaleźć nie znajdując rozłożenia ich na czynniki w następujący sposób (*algorytm Euklidesa*):

1° Dzielimy $P(x)$ przez $Q(x)$; oznaczamy iloraz przez $T_1(x)$ i resztę przez $R_1(x)$:

$$P(x) = Q(x)T_1(x) + R_1(x).$$

2° Dzielimy $Q(x)$ przez $R_1(x)$; oznaczamy iloraz przez $T_2(x)$ i resztę przez $R_2(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)T_2(x) + R_2(x)$$

itd. Ostatnia reszta $R_k(x)$ różna od zera jest właśnie największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$.

Odnajdowanie największego wspólnego dzielnika stosuje się przy rozwiązywaniu równań (wyłącznie pierwiastków wielokrotnych —

patrz str. 174, zastosowanie metody Sturma — patrz str. 175, przy interpolacji metodą Ostrogradskiego — patrz str. 432 - 434 i w wielu innych zagadnieniach).

3. Wyrażenia ułamkowe wymierne

Sprowadzanie do najprostszej postaci. Każde wyrażenie ułamkowe wymierne można przekształcić na iloraz dwóch wielomianów (nie mających wspólnych czynników) za pomocą podstawowych przekształceń (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia wielomianów i ułamków oraz skracania ułamków).

Przykład. Sprowadzić do najprostszej postaci:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{2x+y}{z} - y^3 + \frac{x+z}{z} &= \frac{(3xz+2x+y)z^2}{(x^3z^2+x)z} + \frac{-y^2z+x+z}{z} = \\ &= \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2+(x^3z^2+x)(-y^2z+x+z)}{x^3z^2+xz} = \\ &= \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2-x^3y^2z^3-xy^2z+x^4z^2+x^3+x^3z^2+xz}{x^3z^2+xz} \end{aligned}$$

Wyłączenie części całkowitej. Iloraz dwóch wielomianów o wspólnej wielkości podstawowej x nazywamy *ułamkiem algebraicznym właściwym*, gdy stopień m najwyższego wyrazu licznika ⁽¹⁾ jest mniejszy od stopnia n najwyższego wyrazu mianownika, a *niewłaściwym*, gdy $m \geq n$. Każdy ułamek niewłaściwy można przekształcić na sumę wielomianu i ułamka właściwego za pomocą wyłączenia części całkowitej (dzielenie wielomianu przez wielomian).

Przykład. Wyłączyć część całkowitą z ułamka:

$$R(x) = \frac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^3 - 2ax + 3a^2}.$$

Mamy

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4ax + 5a^2 \\ (3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4) : (x^3 - 2ax + 3a^2) = \\ -3x^4 + 6ax^3 - 9a^2x^2 \\ \hline -4ax^3 + 13a^2x^2 - 24a^3x \\ +4ax^3 - 8a^2x^2 + 12a^3x \\ \hline +5a^2x^2 - 12a^3x + 10a^4 \\ -5a^2x^2 + 10a^3x - 15a^4 \\ \hline -2a^3x - 5a^4 \end{array}$$

⁽¹⁾ To znaczy wyrazu zawierającego x w najwyższej potęgce.

a więc

$$R(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^3 - 2ax + 3a^2}.$$

Rozkład na ułamki proste. Jeżeli ułamek algebraiczny

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n},$$

gdzie współczynniki $b_0, b_1, \dots, b_m$ oraz $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi ⁽¹⁾, jest ułamkiem właściwym (tzn. $m < n$) i nieskracalnym (tzn. takim ułamkiem, w którym licznik i mianownik nie mają żadnego dzielnika wspólnego zawierającego x), to można go przekształcić na sumę *ułamków prostych*, czyli ułamków o postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}, \quad \text{gdzie} \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Mogą tu zachodzić cztery przypadki ⁽²⁾:

1° Mianownik $P(x)$ jest taki, że równanie $P(x) = 0$ ma tylko rzeczywiste pierwiastki jednokrotne $a_1, a_2, \dots, a_n$ (o krotności pierwiastków patrz str. 174). Rozkład przeprowadza się według wzoru

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + \dots + b_m}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n},$$

gdzie współczynniki $A, B, \dots, C$ są określone wzorami

$$A = \frac{Q(a_1)}{P'(a_1)}, \quad B = \frac{Q(a_2)}{P'(a_2)}, \quad \dots, \quad C = \frac{Q(a_n)}{P'(a_n)},$$

przy czym w mianownikach znajdują się wartości pochodnej dP/dx dla $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$.

Przykład. $\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$

Mamy $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1, Q(x) = 6x^2 - x + 1, P'(x) = 3x^2 - 1$, skąd

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1, \quad B = \frac{Q(1)}{P'(1)} = 3, \quad C = \frac{Q(-1)}{P'(-1)} = 4;$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}.$$

⁽¹⁾ Dzielnik licznik i mianownik ułamka przez współczynnik w najwyższym wyrazie mianownika można zawsze doprowadzić ułamek do postaci, w której najwyższy wyraz mianownika ma współczynnik 1.

⁽²⁾ Jeżeli ograniczymy się do liczb rzeczywistych, to przypadek 3° nie będzie się różnił od przypadku 1°, a przypadek 4° od przypadku 2°. Z tego punktu widzenia każdy ułamek właściwy $R(x)$ można przekształcić na sumę samych tylko ułamków prostych o postaci $A/(x-a)^k$, gdzie A i a są liczbami zespolonymi. Będzie to wyzyskane przy rozwiązywaniu równań różniczkowych liniowych (patrz str. 576).

Drugi sposób wyznaczania współczynników $A, B, \dots, C$ — to metoda współczynników nieoznaczonych stosowana we wszystkich czterech przypadkach.

Przykład.

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach x w licznikach po lewej i po prawej stronie równości otrzymujemy układ równań: $6 = A + B + C$, $-1 = B - C$, $1 = -A$; rozwiązując go odnajdujemy dla A, B, C te same wartości co poprzednio.

2° Pierwiastki mianownika są rzeczywiste, ale są wśród nich wielokrotne. Rozkład przeprowadza się według wzoru

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_l)^{k_l}} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{L_{k_l}}{(x-a_l)^{k_l}}.$$

Przykład.
$$\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Współczynniki A_1, B_1, B_2, B_3 odnajduje się za pomocą metody współczynników nieoznaczonych.

3° Wśród pierwiastków mianownika są pierwiastki zespolone jednokrotne. Rozkład przeprowadza się według wzoru.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{Dx+E}{x^2+p_1 x+q_1} + \frac{Fx+G}{x^2+p_2 x+q_2} + \dots$$

Przykład.
$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Współczynniki A, D, E odnajduje się za pomocą metody współczynników nieoznaczonych.

4° Pomiedzy pierwiastkami mianownika są zespolone wielokrotne. Rozkład przeprowadza się według wzoru

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{D_{l_1} x + E_{l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \frac{F_1 x + G_1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots + \frac{F_{l_2} x + G_{l_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2}} + \dots$$

Przykład.

$$\frac{5x^2 - 4x + 16}{(x-3)(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{D_1 x + E_1}{x^2-x+1} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2-x+1)^2}.$$

Współczynniki A, D_1, E_1, D_2, E_2 odnajduje się za pomocą metody współczynników nieoznaczonych.

Przekształcanie proporcji. Z proporcji $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wynikają równości

$$ad = bc, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

a także tzw. *proporcje pochodne*:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Z równości kilku stosunków $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ wynika wzór

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

4. Wyrażenia niewymierne

Przekształcanie pierwiastków. Pierwiastkiem nazywamy wyrażenie typu $\sqrt[n]{A}$, gdzie A jest dowolnym wyrażeniem wymiernym lub niewymiernym. Na przykład

$$\sqrt[5]{a^2 b x^3}, \quad \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad \sqrt[3]{a^3 - x^3}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Pierwiastniki można przekształcać w sposób następujący:

a. Jeżeli w danym pierwiastniku wyrażenie podpierwiastkowe jest iloczynem, to dzielimy wykładnik pierwiastka i wykładniki wszystkich czynników przez ich największy wspólny dzielnik. Na przykład

$$\sqrt[12]{a^{18} b^6} = \sqrt[2]{a^3 b}, \quad \sqrt[6]{25(a-b)^4(a+b)^2} = \sqrt[3]{5(a-b)^2(a+b)},$$

$$\sqrt[6]{16(x^{12}-2x^{11}+x^{10})} = \sqrt[3]{4^2 \cdot x^{5 \cdot 2} (x-1)^3} = \sqrt[3]{4x^5(x-1)}.$$

(Podobnie upraszcza się pierwiastnik w przypadku, gdy pod znakiem pierwiastka znajduje się ułamek). Na przykład

$$\sqrt[6]{\frac{8a^3}{27b^6}} = \sqrt[3]{\frac{2a}{3b}}, \quad \sqrt[6]{\frac{1}{(a-b)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a-b}}.$$

b. Jeżeli pierwiastnik ma postać $\sqrt[n]{Ax^m}$, gdzie $m \geq n$, to dzielimy m przez n i otrzymujemy $m = np + r$, gdzie liczba naturalna p jest ilorazem, a reszta r spełnia warunek $0 \leq r < n$; wówczas

$$\sqrt[n]{Ax^m} = x^p \sqrt[n]{Ax^r}.$$

Przekształcanie powyższe nazywamy *wyłączeniem czynnika przed znak pierwiastka*.

W przypadku gdy $r = 0$, mamy po prostu $\sqrt[n]{Ax^m} = x^p \sqrt[n]{A}$. Na przykład

$$\sqrt[3]{a^{14}} = a^4 \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}u^2} = 2xy^2z^3 \sqrt[3]{4xzu^2}.$$

Przekształcanie potęg i pierwiastników (o wykładnikach naturalnych). Zauważmy wzory

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad (x^m)^n = x^{mn},$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x}.$$

Uogólnienie pojęcia potęgi. Przyjmujemy następujące umowy:

a. $x^0 = 1$, jeżeli $x \neq 0$; b. $x^{-m} = 1/x^m$, jeżeli $x \neq 0$; c. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, jeżeli n jest liczbą naturalną i $x > 0$ (w szczególności $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$). Ze wzorów tych wynika, że $x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}$, jeżeli n jest liczbą naturalną i $x > 0$.

Dla wykładników zerowych, ujemnych i ułamkowych zachodzą te same, co podane wyżej wzory na przekształcanie potęg i pierwiastków o wykładnikach naturalnych, pozwala to często na uproszczenie obliczenia.

Przykład. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^5})(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}) =$
 $= (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{5/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} - x^{5/12}) =$
 $= x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} +$
 $+ x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x =$
 $= x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3}.$

Przekształcanie ułamków o wyrazach niewymiernych.

a. W wyrażeniu $\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}$, gdzie $m < n$ i $x > 0$, można usunąć niewy-

mierność z mianownika za pomocą wzoru

$$\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{A \sqrt[n]{x^{n-m}}}{x}.$$

Przykład. Mamy

$$\sqrt{\frac{x}{2y}} = \sqrt{\frac{2xy}{4y^2}} = \frac{\sqrt{2xy}}{2y}, \quad \sqrt[3]{\frac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\frac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \frac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}.$$

b. Jeżeli ułamek zawiera w mianowniku sumę lub różnicę pierwiastków stopnia drugiego, można usunąć niewymierność z mianownika stosując wzory

$$1. \frac{A}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{A(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}, \quad \text{gdzie } x > 0, \quad y > 0 \text{ i } x \neq y.$$

$$2. \frac{A}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{A(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}, \quad \text{gdzie } x > 0, \quad y > 0 \text{ i } x \neq y.$$

Przykład. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$

5. Wyrażenia wykładnicze i logarytmiczne

Działania na wyrażeniach wykładniczych typu a^x , gdzie $a > 0$, a x jest dowolną liczbą rzeczywistą, wykonuje się według wzorów:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}.$$

Wyrażenia wykładnicze o różnych podstawach (np. $a^x, b^y, c^z, \dots$) można przekształcić w wyrażenia o wspólnej podstawie korzystając ze wzoru $b = a^{\log_a b}$.

Przykład. Mamy $\frac{a^{xy}}{c^z} = \frac{a^{x \log_a b}}{a^{z \log_a c}} = a^{x \log_a b - z \log_a c}$, przy założeniu, że $a > 0, b > 0, c > 0$.

Do podobnej postaci można sprowadzić każde wyrażenie nie zawierające dodawania ani odejmowania.

Wyrażenie e^x , gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych (patrz niżej), oznacza się niekiedy $\exp x$ (od łacińskiego wyrazu *exponens* — wykładnik).

Logarytmy. Logarytmem liczby dodatniej N przy danej podstawie dodatniej a (różnej od jedności) nazywamy wykładnik potęgi x , do której trzeba podnieść podstawę a , ażeby otrzymać liczbę N . Piszemy $x = \log_a N$, jeżeli $a^x = N$.

Każda liczba dodatnia ma przy dowolnej podstawie dodatniej

(różnej od jedności) swój logarytm. Znając logarytmy liczb przy pewnej podstawie a można wyznaczyć logarytmy tych liczb przy innej podstawie b według wzoru $\log_b N = M \log_a N$, gdzie czynnik $M = \frac{1}{\log_a b}$ nazywamy *modułem przekształcenia logarytmów*.

Wygodnie jest posługiwać się łatwym do zapamiętania wzorem $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, gdzie po prawej stronie są logarytmy przy dowolnej, ale tej samej podstawie.

Podstawowe własności logarytmów. Mamy $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$. Jeżeli N dąży do 0 (poprzez wartości dodatnie), to $\log_a N$ dąży do $+\infty$, gdy $a < 1$, natomiast dąży do $-\infty$, gdy $a > 1$. Ponadto mamy wzory:

$$\log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2,$$

$$\log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2,$$

(*) $\log(N^p) = p \log N$, gdzie p jest dowolną liczbą,

$\log \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log N$, gdzie n jest liczbą naturalną, większą od jedności.

Logarytmowaniem danej liczby nazywamy wyznaczenie jej logarytmu (o logarytmowaniu wyrażeń algebraicznych patrz str. 165).

Wyznaczenie liczby z jej logarytmu nazywamy *delogarytmowaniem* (o delogarytmowaniu wyrażeń logarytmicznego patrz str. 166).

Najczęściej stosowane są *logarytmy dziesiętne*, zwane też *logarytmami Briggsa*, o podstawie $a = 10$, stosowane w obliczeniach praktycznych, przy czym zamiast $\log_{10} N$ pisze się po prostu $\log N$. W badaniach teoretycznych stosowane są *logarytmy naturalne* o podstawie $e = 2,71828$ (*), zwane też *logarytmami Nepera* albo *hiperbolicznymi*. Zamiast $\log_e N$ pisze się $\ln N$.

Moduł przekształcenia logarytmów naturalnych na dziesiętne:

$$M = \log_e e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43429, \quad \text{a więc} \quad \log N = 0,43429 \ln N.$$

Moduł przekształcenia logarytmów dziesiętnych na naturalne:

$$M_1 = \frac{1}{M} \ln 10 = \frac{1}{\log e} \approx 2,30259, \quad \text{a więc} \quad \ln N = 2,30259 \log N.$$

Własności logarytmów dziesiętnych. Logarytmy dziesiętne pisze się w postaci ułamków dziesiętnych z określoną ilością cyfr po przecinku (np. logarytmy pięciocyfrowe są to logarytmy z pięcioma cyframi po przecinku dziesiętnym). Zauważmy,

(*) Określenie liczby e znajduje się na str. 358.

że liczba $N = 10^k$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, ma logarytm całkowity k ; na przykład $\log 10^5 = 5$, $\log 10^{-3} = -3$.

Jeżeli $N > 1$, to $\log N$ jest dodatni. Część całkowitą logarytmu nazywamy jego *cechą*, a część ułamkową — *mantysą*. Na przykład $\log 324 = 2,5105$ ma cechę 2 i mantysę 0,5105. Logarytmy liczb dodatnich mniejszych od jedności są ujemne. Zazwyczaj pisze się je w taki sposób, żeby miały mantysę dodatnią (lub zerową); wówczas cechą logarytmu jest liczba całkowita ujemna (pisana ze znakiem minus ponad cyfrą). Na przykład $\log 0,00324 = 3,5105$, co oznacza, że $\log 0,00324 = -3 + 0,5105 = -2,4895$. Korzystając z symbolu $[x]$, o którym mowa na str. 352, możemy napisać:

$$\text{cecha } \log N = [\log N],$$

$$\text{mantysa } \log N = \log N - [\log N].$$

Liczby, które otrzymujemy z danej liczby N przez pomnożenie jej lub podzielenie przez 10^n , mają logarytmy dziesiętne z jednakową mantysą. Na przykład liczby 32400, 324, 3,24, 0,324 mają logarytmy: 4,5105, 2,5105, 0,5105, 2,5105 o tej samej mantysie. Mantysę odszukuje się w tablicach logarytmów dziesiętnych (*), przy czym nie zważa się ani na położenie przecinka, ani na zera znajdujące się na początku i na końcu liczby. Cechę wyznacza się według reguły: 1° jeżeli dana liczba jest większa od jedności, to cecha jest o jeden mniejsza od ilości cyfr tej liczby stojących przed przecinkiem; 2° jeżeli dana liczba jest mniejsza od jedności, to cecha ma tyle jednostek ujemnych, ile jest zer na początku danej liczby (licząc w tym zero znajdujące się przed przecinkiem). Na przykład $\log 3240 = 3,5105$, $\log 324000 = 5,5105$; $\log 3,24 = 0,5105$, $\log 0,324 = 2,5105$.

Często, zwłaszcza w tablicach, dla uniknięcia cech ujemnych, niewygodnych w druku, dodaje się do ujemnej cechy 10. Na przykład zamiast $\bar{1},324$ pisze się 9,324.

Przekształcanie wyrażeń logarytmicznych (logarytmowanie wyrażeń) wykonuje się według wzorów(*) (str. 164)(*).

Przykład. Zlogarytmujmy wyrażenie $\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\begin{aligned} \log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} &= \log(3x^2\sqrt[3]{y}) - \log(2zu^3) = \\ &= \log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u. \end{aligned}$$

(*) Tablice logarytmów dziesiętnych (ściślej: tablice mantys) patrz str. 49–51; tablice *antylogarytmów* (czyli tablice liczb, których logarytmy mają dane mantysy) patrz str. 52–54; tablice logarytmów naturalnych patrz str. 67–69.

(*) Aby zlogarytmować wyrażenie będące sumą albo różnicą, należy je uprzednio przekształcić w wyrażenie dogodne do logarytmowania, tzn. zawierające iloczyn ilorazy.

Często stosuje się przekształcenie odwrotne, zwane *delogarytmowaniem*, mianowicie przekształcenie sumy algebraicznej logarytmów na logarytm jednego wyrażenia.

Przykład. Mamy

$$\log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

O suwaku logarytmicznym patrz str. 145 - 154.

B. RÓWNANIA

6. Porządkowanie równań algebraicznych

Określenia. Równaniem z jedną niewiadomą nazywamy równość dwóch funkcji jednej i tej samej zmiennej

$$(1) \quad F(x) = f(x).$$

Zmienną występującą w równaniu (1) nazywamy *niewiadomą*. Jeżeli przy pewnej wartości $x = x_1$ równość (1) jest prawdziwa, to mówimy, że liczba x_1 spełnia równanie i nazywamy ją *pierwiastkiem* tego równania. Równanie może mieć wiele pierwiastków: $x_1, x_2, \dots, x_n$; *rozwiązać* równanie to znaczy znaleźć wszystkie jego pierwiastki. Może się okazać, że równanie wcale nie ma pierwiastków; wtedy nazywamy je *równaniem sprzecznym*. Jeżeli równanie (1) jest spełnione dla wszelkich wartości zmiennej x , przy których obie funkcje $F(x)$ i $f(x)$ mają sens liczbowy, to równanie (1) nazywamy *tożsamością*. Dwa równania nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają wszystkie pierwiastki te same.

Równanie nazywamy *algebraicznym*, jeżeli obie występujące w nim funkcje $F(x)$ i $f(x)$ są funkcjami algebraicznymi (wymiernymi lub niewymiernymi), przy czym jedna z tych funkcji może być stała. Z każdego równania algebraicznego można za pomocą przekształceń algebraicznych otrzymać równanie w postaci uporządkowanej

$$(2) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

które ma wszystkie pierwiastki pierwotnego równania algebraicznego ale może też mieć ponadto pierwiastki obce (patrz niżej).

Zarówno tutaj jak i dalej zakładamy, że współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi (z wyjątkiem przypadków specjalnie omówionych), przy czym $a_0 \neq 0$. Równanie (2) można przekształcić dale w taki sposób, żeby było $a_0 = 1$.

Wykładnik potęgi n w najwyższym wyrazie $a_0 x^n$ (gdy $a_0 \neq 0$) nazywamy *stopniem równania algebraicznego* (2). Równanie algebraiczne uporządkowane z jedną zmienną x będziemy oznaczali symbolem

$$P(x) = 0,$$

gdzie $P(x)$ oznacza wielomian zmiennej x .

Przykład. Sprowadźmy do postaci uporządkowanej równanie

$$\frac{x-1+\sqrt{x^2-6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x}.$$

Kolejne przekształcenia dają

$$x(x-1+\sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3),$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18,$$

$$x\sqrt{x^2-6} = 5x^2 - 20x + 18,$$

$$x^2(x^2-6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324,$$

$$24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0,$$

albo inaczej:

$$x^4 - \frac{25}{3}x^3 + \frac{293}{12}x^2 - 30x + \frac{27}{2} = 0.$$

Dane równanie algebraiczne jest stopnia czwartego.

Układ równań algebraicznych. Rozwiązaniem układu n równań algebraicznych z niewiadomymi $x, y, \dots, z$ nazywamy każdy zespół liczb $x_1, y_1, \dots, z_1, x_2, y_2, \dots, z_2, \dots$ który po podstawieniu zamiast niewiadomych $x, y, \dots, z$ spełnia wszystkie równania danego układu. Rozwiązać układ równań to znaczy znaleźć wszystkie jego rozwiązania.

Każdy układ n równań algebraicznych z niewiadomymi $x, y, \dots, z$ można doprowadzić do postaci uporządkowanej:

$$P_1(x, y, \dots, z) = 0, \quad P_2(x, y, \dots, z) = 0, \quad \dots, \quad P_n(x, y, \dots, z) = 0,$$

gdzie P_i dla i równego $1, 2, \dots, n$ oznacza wielomian względem zmiennych $x, y, \dots, z$.

Przykład. Przekształcając do postaci uporządkowanej układ równań

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z}, \quad \frac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}, \quad xy = z$$

otrzymujemy

$$x^2 z^2 - y = 0, \quad x^2 - 2x + 1 - y^2 z + 2yz - z = 0, \quad xy - z = 0.$$

Pierwiastki obce. Przy sprowadzaniu pewnego równania algebraicznego do postaci uporządkowanej $P(x) = 0$ może się zdarzyć że równanie $P(x) = 0$ będzie miało pierwiastki nie spełniające pierwotnego równania. Mogą tu zachodzić przypadki dwóch typów:

1° **Równanie ułamkowe.** Jeżeli równanie ma postać

$$(3) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x , to mnożąc obie strony równania przez mianownik $Q(x)$ otrzymujemy równanie w postaci uporządkowanej

$$(4) \quad P(x) = 0.$$

Równanie to ma wszystkie pierwiastki równania (3), ale może się zdarzyć, że równanie (4) ma też pierwiastki obce dla równania (3). Będzie to wtedy, gdy pewien pierwiastek $x = a$ równania $P(x) = 0$ nadaje mianownikowi $Q(x)$ wartość 0. Wówczas bowiem po podstawieniu $x = a$ lewa strona równania (3) nie ma sensu liczbowego, a więc a nie jest pierwiastkiem równania (3).

Jeżeli ułamek $P(x)/Q(x)$ skróćmy przez $x - a$ tyle razy, ile to będzie możliwe, np. przez $(x - a)^k$, i w wyniku skrócenia otrzymamy równanie

$$(5) \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = 0,$$

to mogą zajść dwa przypadki:

a. Pierwiastek a równania (4) jest pierwiastkiem wielomianu $P_1(x)$, ale nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q_1(x)$; wówczas pierwiastek a równania (4) jest również pierwiastkiem równania (5), ale o mniejszej krotności ⁽¹⁾.

b. Pierwiastek a równania (4) nie jest pierwiastkiem wielomianu $P_1(x)$; wówczas a jest pierwiastkiem obcym równania (5).

Przykłady. 1. Równanie $\frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ sprowadzamy do postaci $\frac{x^3-1}{x-1} = 0$. Mnożąc obie strony tego równania przez $x-1$ otrzymujemy równanie uporządkowane $x^3-1=0$. Liczba $x=1$ jest pierwiastkiem równania uporządkowanego, ale nie jest pierwiastkiem pierwotnego równania, które przy $x=1$ nie ma sensu liczbowego.

Jeżeli lewą stronę równania $\frac{x^3-1}{x-1} = 0$ skróćmy przez $x-1$, to otrzymamy równanie $x^2+x+1=0$, dla którego pierwiastek $x=1$ równania uporządkowanego $x^3-1=0$ jest pierwiastkiem obcym.

2. Mnożąc równanie $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = 0$ przez mianownik x^2-2x+1 otrzymujemy równanie uporządkowane $x^3-3x^2+3x-1=0$, czyli $(x-1)^3=0$. Równanie to ma trzykrotny pierwiastek $x=1$, który nie jest pierwiastkiem równania pierwotnego, gdyż przy $x=1$ równanie to traci sens liczbowy. Jeżeli lewą stronę pierwotnego równania skróćmy przez $(x-1)^2$, to otrzymamy równanie $x-1=0$,

⁽¹⁾ O krotności pierwiastka równania patrz str. 174.

które ma ten sam pierwiastek $x=1$, co równanie $(x-1)^3=0$, ale o krotności mniejszej.

2^o Równanie niewymierne. Jeżeli dane równanie zawiera niewiadomą pod znakiem pierwiastka, to po sprowadzeniu tego równania do postaci uporządkowanej $P(x)=0$ może się okazać, że pewne pierwiastki równania uporządkowanego są obce dla pierwotnego równania. Dlatego po rozwiązaniu równania uporządkowanego należy sprawdzić, które z jego pierwiastków są pierwiastkami pierwotnego równania.

Przykład. W równaniu $\sqrt{x+7}+1=2x$ izolujemy część niewymierną i otrzymujemy równanie $\sqrt{x+7}=2x-1$. Podnosząc je obustronnie do kwadratu otrzymujemy równanie uporządkowane $4x^2-5x-6=0$. Ostatnie równanie ma pierwiastki $x=2$ i $x=-\frac{3}{4}$, z których pierwszy spełnia dane równanie niewymierne, a drugi jest dla niego pierwiastkiem obcym.

Uwaga. Jeżeli równanie niewymierne $\sqrt{P}=Q$ (gdzie P i Q są wielomianami zmiennej x) podniesiemy do kwadratu, to otrzymamy równanie wymierne $P-Q^2=0$. Pisząc to równanie w postaci $(\sqrt{P}-Q)(\sqrt{P}+Q)=0$ stwierdzamy, że jeżeli którykolwiek pierwiastek a równania $P-Q^2=0$ jest obcy dla równania $\sqrt{P}=Q$, to musi być pierwiastkiem równania $\sqrt{P}+Q=0$ (tzw. równania sprzężonego).

Przykład. Równanie $\sqrt{x+7}=2x-1$ prowadzi do równania uporządkowanego $4x^2-5x-6=0$. Jednym z pierwiastków tego równania jest $x=-\frac{3}{4}$; jest to pierwiastek obcy dla równania $\sqrt{x+7}=2x-1$, a więc musi to być pierwiastek równania sprzężonego $\sqrt{x+7}+2x-1=0$, co łatwo sprawdzić przez podstawienie.

7. Równania stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego

Równanie stopnia pierwszego (liniowe) $ax+b=0$. Jeżeli $a \neq 0$, równanie ma jedno rozwiązanie $x=-b/a$. Gdy $a=0$ i $b=0$, każda wartość x spełnia równanie. Gdy $a=0$, ale $b \neq 0$, równanie nie ma rozwiązań (jest sprzeczne).

Równanie stopnia drugiego (kwadratowe) $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$, lub (po podzieleniu przez a): $x^2+px+q=0$. Wyróżnik równania kwadratowego: $\Delta=b^2-4ac$ lub $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$.

a. Gdy $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

lub

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

W tym przypadku lewą stronę równania można rozłożyć na czynniki rzeczywiste:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{lub} \quad x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta).$$

b. Gdy $\Delta = 0$, równanie ma pierwiastek dwukrotny:

$$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a} \quad \text{lub} \quad \alpha = \beta = -\frac{p}{2}.$$

W tym przypadku lewa strona równania kwadratowego przybiera postać

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{lub} \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

c. Gdy $\Delta < 0$, równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki zespolone ('):

$$\alpha = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

lub

$$\alpha = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

W tym przypadku trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ piszemy w postaci

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

skąd widać, że w nawiasie kwadratowym znajduje się liczba dodatnia, a więc trójmian kwadratowy ma stały znak, równy znakowi współczynnika a . Analogicznie piszemy

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right],$$

skąd widzimy, że trójmian ten jest stale dodatni.

Własności pierwiastków równania kwadratowego. Zachodzą związki

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{lub} \quad \alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q.$$

Korzystając z tych własności można niekiedy łatwo rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + px + q = 0$, pisząc $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$

(') O liczbach zespolonych patrz str. 617.

oraz dobierając α i β w taki sposób, żeby zachodziły związki $\alpha + \beta = -p$ i $\alpha\beta = q$.

Przykład. Rozwiążmy równanie $x^2 + x - 6 = 0$.

Mamy $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -6$, skąd $\alpha = -3$, $\beta = 2$.

Równanie stopnia trzeciego $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$. Dzieląc równanie przez a i podstawiając

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

otrzymujemy równanie

$$(1) \quad y^3 + 3py + 2q = 0,$$

gdzie

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Ilość rozwiązań rzeczywistych równania (1) zależy od znaku wyróżnika $D = q^2 + p^3$.

a. Jeżeli $D > 0$, równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone.

b. Jeżeli $D = 0$, to w przypadku gdy $p = q = 0$, równanie (1) ma jeden pierwiastek trzykrotny równy 0, a w przypadku gdy $p^3 = -q^2 \neq 0$, równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest dwukrotny.

c. Jeżeli $D < 0$, równanie ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Rozwiązanie równań stopnia trzeciego.

Sposób 1. Rozkładamy lewą stronę na czynniki (jeśli się uda):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

gdzie liczby α , β , γ są pierwiastkami równania.

Przykład. $x^3 + x^2 - 6x = 0$, $x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)$, skąd otrzymujemy pierwiastki: 0, -3 i 2.

Sposób 2. Na mocy wzoru Cardana pierwiastki równania (1) mają postać

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

gdzie $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$, a ε_1 i ε_2 są pierwiastkami równania $x^2 + x + 1 = 0$, tzn. $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Przykłady. 1. Rozwiążmy równanie $y^3 + 6y + 2 = 0$.

Mamy tu $p = 2$, $q = 1$, $D = q^2 + p^3 = 9$; stąd

$$u = \sqrt[3]{-1 + 3} = \sqrt[3]{2} = 1,2599, \quad v = \sqrt[3]{-1 - 3} = \sqrt[3]{-4} = -1,5874.$$

Równanie ma pierwiastek rzeczywisty $y_1 = u + v = -0,3275$ oraz dwa pierwiastki zespolone $y_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v) = 0,1638 + i \cdot 2,4659$, $y_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v) = 0,1638 - i \cdot 2,4659$.

2. Rozwiążmy równanie $y^3 - 3y + 2 = 0$.

Mamy tu $p = -1$, $q = 1$, $D = q^3 + p^3 = 0$, $u = \sqrt[3]{-1} = -1$, $v = \sqrt[3]{-1} = -1$ i równanie ma pierwiastki $y_1 = -2$, $y_2 = y_3 = 1$.

U w a g a. W powyższych przykładach rozwiązaliśmy równanie stopnia trzeciego w przypadkach, gdy $D > 0$ lub $D = 0$. W przypadku gdy $D < 0$, należy zamiast wzoru Cardana zastosować trzeci sposób rozwiązywania równania (1).

Sposób 3. Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, którą wyznacza się za pomocą niżej podanej tabelki, przy czym przyjmujemy $r = \eta\sqrt{|p|}$, gdzie η oznacza $+1$ lub -1 , zgodnie ze znakiem q . Wtedy niewiadomą pomocniczą φ , a za jej pomocą również pierwiastki y_1, y_2, y_3 , wyznacza się w zależności od znaku p oraz znaku wyróżnika $D = q^3 + p^3$ według następującej tabelki:

$p < 0$		$p > 0$
$q^3 + p^3 \leq 0$	$q^3 + p^3 > 0$	
$\cos \varphi = \frac{q}{r^3}$	$\cosh \varphi = \frac{q}{r^3}$	$\sinh \varphi = \frac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r \cos \frac{1}{3} \varphi$	$y_1 = -2r \cosh \frac{1}{3} \varphi$	$y_1 = -2r \sinh \frac{1}{3} \varphi$
$y_2 = +2r \cos(60^\circ - \frac{1}{3} \varphi)$	$y_2 = r \cosh \frac{1}{3} \varphi + i\sqrt{3} r \sinh \frac{1}{3} \varphi$	$y_2 = r \sinh \frac{1}{3} \varphi + i\sqrt{3} r \cosh \frac{1}{3} \varphi$
$y_3 = +2r \cos(60^\circ + \frac{1}{3} \varphi)$	$y_3 = r \cosh \frac{1}{3} \varphi - i\sqrt{3} r \sinh \frac{1}{3} \varphi$	$y_3 = r \sinh \frac{1}{3} \varphi - i\sqrt{3} r \cosh \frac{1}{3} \varphi$

Przykład. $y^3 - 9y + 4 = 0$; wtedy

$$\begin{aligned} p &= -3, \quad q = 2, \quad q^3 + p^3 < 0, \\ r &= \sqrt[3]{3} = 1,7321, \quad \cos \varphi = 2:3\sqrt{3} = 0,3849, \quad \varphi = 67^\circ 22', \\ y_1 &= -2\sqrt{3} \cos 22^\circ 27' = -3,4641 \cdot 0,9242 = -3,201, \\ y_2 &= 2\sqrt{3} \cos(60^\circ - 22^\circ 27') = 3,4641 \cdot 0,7929 = 2,747, \\ y_3 &= 2\sqrt{3} \cos(60^\circ + 22^\circ 27') = 3,4641 \cdot 0,1314 = 0,455. \end{aligned}$$

Sprawdzenie (patrz własności pierwiastków):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,001 \text{ zamiast } 0.$$

Sposób 4. Rozwiązywanie w sposób przybliżony (patrz str. 180-182).

Własności pierwiastków równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Jeżeli $d \neq 0$, to zachodzą jeszcze związki:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}, \quad \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{b}{d}, \quad \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{a}{d}.$$

Równanie stopnia czwartego $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, gdzie $a \neq 0$. Równanie stopnia czwartego ma 4 pierwiastki (w tym pierwiastków zespolonych może być 0, 2 lub 4).

Jeżeli $b = d = 0$, mamy równanie **dwukwadratowe** $ax^4 + cx^2 + e = 0$. Podstawiając $x^2 = y$ otrzymujemy równanie kwadratowe $ay^2 + cy + e = 0$, z którego wyznaczamy pierwiastki y_1 i y_2 , a następnie ze wzoru $x^2 = y$ obliczamy odpowiednie wartości niewiadomej x (1).

Jeżeli $a = e$ i $b = d$, to otrzymujemy **równanie zwrotne** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Dzielimy równanie przez x^2 i podstawiając $x + \frac{1}{x} = y$ otrzymujemy równanie kwadratowe $ay^2 + by + (c-2) = 0$, z którego wyznaczamy pierwiastki y_1 i y_2 , a następnie z równań $x^2 - y_1 x + 1 = 0$ i $x^2 - y_2 x + 1 = 0$ znajdujemy wartości niewiadomej x (1).

Rozwiązywanie równań stopnia czwartego w postaci ogólnej.

Sposób 1. Rozkładamy lewą część równania na czynniki (jeśli się uda):

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

gdzie liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są pierwiastkami równania.

Przykład. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$, skąd otrzymujemy $x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0$; a więc równanie ma pierwiastki: 0, 1, -1, 2.

Sposób 2. Pierwiastki równania $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a = 1$) pokrywają się z pierwiastkami dwóch równań kwadratowych

$$x^2 + (b+A)x + \left(y + \frac{by-d}{A}\right) = 0,$$

(1) O obliczaniu pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej patrz str. 622.

gdzie $A = \pm \sqrt{8y + b^2 - 4c}$, a y jest dowolnym pierwiastkiem rzeczywistym równania sześciennego

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Sposób 3. Rozwiązywanie w sposób przybliżony (patrz str. 180 - 182).

Równania stopnia piątego i wyższych nie mogą być w ogólnej postaci rozwiązane za pomocą pierwiastników.

8. Równania stopnia n

Ogólne własności równań algebraicznych. Lewą stronę równania

$$(1) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

oznaczymy przez $P(x)$; pierwiastki równania $P(x) = 0$ nazywamy również *pierwiastkami wielomianu* $P(x)$. Jeżeli a jest pierwiastkiem równania $P(x) = 0$, to $P(x)$ jest podzielne bez reszty przez $x - a$; natomiast w ogólnym przypadku reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x - a$ jest równa $P(a)$. Jeżeli $P(x)$ dzieli się przez $(x - a)^k$, ale nie dzieli się już przez $(x - a)^{k+1}$, to a nazywamy *k-krotnym pierwiastkiem* równania $P(x) = 0$; w takim przypadku a jest wspólnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ i jego pochodnych aż do rzędu $k - 1$ włącznie.

Podstawowe twierdzenie algebry. Każde równanie stopnia n , którego współczynniki są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, ma n pierwiastków, jeżeli pierwiastek k -krotny uważać będziemy za k pierwiastków. Jeżeli pierwiastki wielomianu $P(x)$ są równe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ i odpowiednio krotności ich są $k, l, m, \dots$, to

$$(2) \quad P(x) = (x - \alpha)^k (x - \beta)^l (x - \gamma)^m \dots$$

Odnajdowanie pierwiastków równania $P(x) = 0$ można uprościć, pozbywając się pierwiastków wielokrotnych. Osiąga się to w sposób następujący: znajdujemy pochodną $P'(x)$ wielomianu $P(x)$, następnie znajdujemy najwyższy wspólny dzielnik $Q(x)$ wielomianów $P(x)$ i $P'(x)$, wreszcie dzielimy $P(x)$ przez $Q(x)$, dzielenie to nie daje reszty, a w ilorazie daje wielomian $T(x)$, którego pierwiastki są te same co w wielomianie $P(x)$, ale jednokrotne.

Związki między pierwiastkami równania a jego współczynnikami. Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n$ stanowią

(1) Jeżeli przy najwyższym wyrazie równania jest współczynnik a_0 (różny od 0 i od 1), to dzieląc równanie przez a_0 doprowadzamy do postaci (1).

układ wszystkich n pierwiastków równania (1), to

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = -a_1,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n x_i x_j = a_2,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n x_i x_j x_k = -a_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n.$$

Równanie o współczynnikach rzeczywistych. Pierwiastki zespolone równania (1) o współczynnikach rzeczywistych muszą być parami sprzężone (1), tzn. jeżeli takie równanie ma pierwiastek $\alpha = a + bi$, to ma ono także pierwiastek $\beta = a - bi$ i to o tej samej krotności. Wówczas mamy

$$(3) \quad (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q,$$

gdzie $p = -(\alpha + \beta) = -2a$, $q = \alpha\beta = a^2 + b^2$, z czego wynika, że

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - q < 0.$$

Jeżeli wielomian $P(x)$ ma pierwiastki rzeczywiste a_1 o krotności k_1, a_2 o krotności $k_2, \dots$ oraz pierwiastki zespolone parami sprzężone β_1 i β_1' o krotności l_1, β_2 i β_2' o krotności $l_2, \dots$, to wielomian ten można rozłożyć na czynniki:

$$(4) \quad P(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots,$$

gdzie trójmiany kwadratowe mają wyróżniki ujemne i dają się rozłożyć na czynniki liniowe.

Ilość pierwiastków równania o współczynnikach rzeczywistych. Twierdzenie Sturma. Z powyższych rozważań wynika, że każde równanie stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Ilość pierwiastków rzeczywistych równania $P(x) = 0$ zawartych pomiędzy dowolnymi liczbami a i b ($a < b$), które nie są pierwiastkami tego równania, może być dokładnie wyznaczona w następujący sposób:

(1) O liczbach zespolonych sprzężonych patrz str. 617.

1° Pozbywamy się wielokrotnych pierwiastków równania $P(x) = 0$, tzn. znajdujemy równanie mające te same pierwiastki, ale jednokrotne (1). Dalej zakładamy, że równanie $P(x) = 0$ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

2° Zestawiamy ciąg funkcji Sturma

$$P(x), P'(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_m = \text{const},$$

gdzie $P'(x)$ jest pochodną wielomianu $P(x)$, $P_1(x)$ jest resztą z dzielenia $P(x)$ przez $P'(x)$ wziętą ze znakiem przeciwnym, $P_2(x)$ jest resztą z dzielenia $P'(x)$ przez $P_1(x)$ wziętą ze znakiem przeciwnym, itd. Wreszcie P_m jest ostatnią resztą w ciągu dzielenia, równą pewnej stałej. (Dla uproszczenia obliczeń każdą z odnalezionych reszt można pomnożyć przez dowolne liczby dodatnie, a nie zmieni to wyniku).

3° Oblicza się ilość A zmian znaków (tzn. przejść od „+” do „-” i na odwrót) w ciągu liczbowym

$$P(a), P'(a), P_1(a), P_2(a), \dots, P_m$$

oraz ilość B zmian znaków w ciągu liczbowym

$$P(b), P'(b), P_1(b), P_2(b), \dots, P_m,$$

przy czym jeżeli któraś z liczb w tych ciągach jest zerem, to nie bierze się jej pod uwagę.

Różnica $A - B$ równa się poszukiwanej ilości pierwiastków rzeczywistych równania $P(x) = 0$ w przedziale (a, b) (twierdzenie Sturma).

Przykład. Obliczmy ilość pierwiastków rzeczywistych równania $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ zawartych między liczbami 0 i 2.

Obliczenie funkcji Sturma daje $P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$, $P'(x) = 4x^3 - 10x + 8$, $P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16$, $P_2(x) = -3x + 284$, $P_3 = -1$. Podstawienie $x = 0$ daje ciąg liczb: $-8, +8, +16, +284, -1$ (dwie zmiany), a podstawienie $x = 2$ daje: $+4, +20, +12, +278, -1$ (jedna zmiana). $A - B = 2 - 1 = 1$, a więc między liczbami 0 i 2 leży jeden pierwiastek.

Reguła Kartezjusza. Ilość dodatnich pierwiastków równania $P(x) = 0$ jest nie większa od ilości zmian znaków w ciągu współczynników wielomianu $P(x)$ i może różnić się od niego o pewną liczbę parzystą.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$.

Kolejne współczynniki tego równania mają znaki: $+, +, -, +, -$, tzn. znak zmienia się trzy razy. Zgodnie z regułą Kartezjusza równanie to ma bądź trzy, bądź jeden pierwiastek dodatni. Ponieważ przy zastąpieniu x przez $-x$ pierwiastki równania zmieniają znaki,

(1) Sposób otrzymywania takiego równania podany jest wyżej. W praktyce można nie pozbywać się pierwiastków wielokrotnych danego równania $P(x) = 0$, ale od razu tworzyć ciąg funkcji Sturma. Jeżeli ostatnia reszta P_m nie jest liczbą stałą, to $P(x)$ ma pierwiastki wielokrotne i należy ich się pozbyć.

a przy zastąpieniu x przez $x+h$ pierwiastki zmniejszają się o h , to za pomocą reguły Kartezjusza można również oszacować ilość pierwiastków ujemnych, a także ilość pierwiastków większych od h . W naszym przykładzie zastąpienie x przez $-x$ daje $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$, tzn. równanie ma jeden pierwiastek ujemny, a zastąpienie x przez $x+1$ daje $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$, skąd wniosek, że dane równanie nie ma pierwiastków większych od 1.

Rozwiązywanie równań stopnia n , gdy $n > 4$, w ogólnym przypadku może być dokonane tylko w przybliżeniu; w praktyce przybliżone metody stosuje się również przy rozwiązywaniu równań stopnia trzeciego, a w szczególności czwartego. Aby obliczyć poszczególne pierwiastki rzeczywiste równania algebraicznego, można z powodzeniem zastosować ogólne metody przybliżonych rozwiązań równań przestępnych (patrz str. 180 - 182).

9. Równania przestępne

Określenie. Równanie $F(x) = f(x)$ nazywamy *równaniem przestępnym*, jeżeli przynajmniej jedna z funkcji $F(x)$ lub $f(x)$ nie jest algebraiczna.

Przykłady. 1. $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$, 2. $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$,
3. $2 \log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, 4. $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$,
5. $3 \cosh x = \sinh x + 9$, 6. $x \cos x = \sin x$.

W niektórych przypadkach rozwiązywanie równań przestępnych sprowadza się do równań algebraicznych, przy czym stosuje się tablice, na ogół zaś równania przestępne mogą być rozwiązywane tylko w przybliżeniu.

Niektóre przypadki równań przestępnych sprowadzających się do równań algebraicznych.

Równania wykładnicze. Równaniem wykładniczym nazywamy równanie, w którym niewiadoma x lub wielomian $P(x)$ występuje tylko w wykładnikach potęg o danych podstawach. Takie równania sprowadzają się do równań algebraicznych w następujących przypadkach:

1° Jeżeli na potęgach $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... nie wykonuje się dodawania i odejmowania, to równanie należy logarytmować przy dowolnej podstawie dodatniej, różnej od 1.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$.

Logarytmujemy $x \log 3 = (x-2) \log 4 + x \log 2$. Ale $\log 4 = 2 \log 2$, więc mamy $x \log 3 = (3x-4) \log 2$, skąd

$$x = \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3}.$$

2° Jeżeli $a, b, c, \dots$ są potęgami tej samej liczby k o wykładnikach całkowitych lub ułamkowych (np. $a = k^a$, $b = k^b$, $c = k^c, \dots$), to podstawiając $k^x = y$ otrzymujemy w niektórych przypadkach równanie algebraiczne względem y i po rozwiązaniu tego równania obliczamy $x = \frac{\log y}{\log k}$.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$.

Przekształcamy $\frac{2^x}{2} = \frac{2^{3x}}{64} - \frac{2^{2x}}{16}$; podstawiając $2^x = y$ otrzymujemy $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$, skąd $y = 8, -4$ lub 0 . Mamy więc równania $2^x = 8, 2^x = -4$ i $2^x = 0$; spośród nich pierwsze równanie daje $x = 3$ i innych rozwiązań rzeczywistych nie ma.

Równania logarytmiczne. *Równaniem logarytmicznym* nazywamy równanie, w którym niewiadoma x występuje tylko pod znakiem logarytmów o danych podstawach. Takie równania sprowadzają się do równań algebraicznych w następujących przypadkach:

1° Jeśli w poszczególnych wyrazach równania występuje logarytm jednego tylko wyrażenia przy tej samej podstawie, to przyjmując ten logarytm za nową niewiadomą rozwiązujemy otrzymane równanie algebraiczne, a następnie delogarytmując to rozwiązanie obliczamy pierwotną niewiadomą.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $[\log_2(x-3)]^2 + \log_2(x-3) = 6$.

Podstawienie $\log_2(x-3) = y$ prowadzi do równania $y^2 + y - 6 = 0$, skąd $y = -3$ lub $y = 2$. Z równania $\log_2(x-3) = -3$ otrzymujemy $x-3 = 2^{-3}$, skąd $x = 3\frac{1}{8}$, a z równania $\log_2(x-3) = 2$ otrzymujemy $x-3 = 2^2$, skąd $x = 7$.

Uwaga. Jeżeli w równaniu występują logarytmy jednego tylko wyrażenia, ale przy różnych podstawach, to sprowadzamy te logarytmy do jednej podstawy i dalej postępujemy jak poprzednio.

Przykład. Rozpatrzmy równanie

$$\log_8(x-1) + \log_4(x-1) + \log_2(x-1) = 1.$$

Ponieważ $\log_8 a = \frac{1}{3} \log_2 a$ i $\log_4 a = \frac{1}{2} \log_2 a$, przeto danę równanie można napisać w postaci $\frac{1}{3} \log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) + \log_2(x-1) = 1$, skąd $\log_2(x-1) = \frac{6}{11}$, a więc $x = 2^{6/11} + 1 = \sqrt[11]{64} + 1$.

2° Jeżeli równanie ma postać

$$m_1 \log_a P_1(x) + m_2 \log_a P_2(x) + \dots = 0,$$

gdzie $m_1, m_2, \dots$ są liczbami całkowitymi, a $P_1(x), P_2(x), \dots$ są wielomianami zmiennej x , to delogarytmowanie daje równanie algebraiczne postaci $[P_1(x)]^{m_1} [P_2(x)]^{m_2} \dots = 1$, z którego wyznaczamy x .

Przykład. Rozpatrzmy równanie $2 \log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$.

Delogarytmowanie daje równanie $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, skąd $x = 0$ lub $x = 2$. Ale przy podstawieniu $x = 0$ wyrażenie $\log_5(3x-1)$ nie ma sensu liczbowego w dziedzinie liczb rzeczywistych. Należy więc odrzucić rozwiązanie $x = 0$ i zostaje tylko $x = 2$.

Równania trygonometryczne. *Równaniem trygonometrycznym* nazywamy równanie, w którym niewiadoma x lub dwumian $mx + a$ (gdzie m jest liczbą całkowitą różną od 0) występuje tylko pod znakami funkcji trygonometrycznych. Wówczas posługując się wzorami trygonometrycznymi sprowadzamy wyrażenie do jednej tylko jakiegokolwiek funkcji niewiadomej x i, wyrażając tę funkcję przez y , otrzymujemy równanie algebraiczne. Po rozwiązaniu wyznaczamy x na ogół przy użyciu tablic; należy przy tym mieć na uwadze, że rozwiązania mogą mieć postać jednej lub kilku serii okresowych.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.

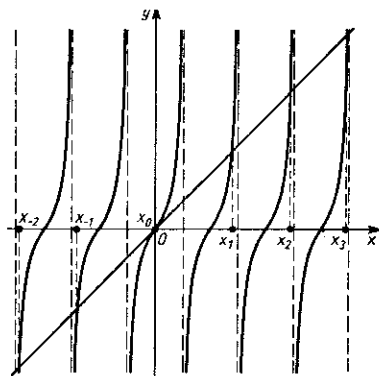
Podstawiając $\sin x = y$ otrzymujemy $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$, skąd $y = \frac{1}{2}$ lub $y = -\frac{3}{2}$. Rozwiązanie $y = -\frac{3}{2}$ należy odrzucić, gdyż $\sin x$ nie może być równy $-\frac{3}{2}$. Rozwiązanie $y = \frac{1}{2}$ daje $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

Równania z funkcjami hiperbolicznymi. Równania te rozwiązuje się wyrażając funkcje hiperboliczne niewiadomej x przez e^x i e^{-x} , a następnie podstawiając $e^x = y$ i $e^{-x} = \frac{1}{y}$. Wartość $x = \ln y$ wyznacza się przy użyciu tablic.

Przykład. Rozpatrzmy równanie $3 \cosh x = \sinh x + 9$.

Mamy $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$, $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$. Podstawiając $e^x = y$ i $e^{-x} = \frac{1}{y}$ otrzymujemy $y^2 - 9y + 2 = 0$, skąd $y = \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 8,772$ lub $y = \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx 0,228$ i ostatecznie $x = \ln 8,772 \approx 2,1716$ lub $x = \ln 0,228 \approx -1,4784$.

Przybliżone rozwiązywanie równań. Podane tu metody przybliżonego rozwiązywania równań odnoszą się zarówno do równań algebraicznych, jak i do przestępnych. Proces obliczania pierwiastków składa się z dwóch części: 1° odnalezienie z grubsza przybliżonej wartości pierwiastków i 2° uściślenie odnalezionych przybliżeń.



Rys. 74

na przedstawić w postaci $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, przy czym wykresy funkcji $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ mogą być łatwo sporządzone. Wtedy pierwiastki równania są równe odciętym punktów przecięcia krzywych $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$.

Przykład. Pierwiastki równania $x \cos x = \sin x$ (z wyjątkiem pierwiastka oczywistego $x = 0$) są bliskie wartości $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ (gdzie $k = \pm 1, \pm 2, \dots$), ponieważ równanie to można napisać w postaci $x = \operatorname{tg} x$, i pierwiastki jego odpowiadać będą punktom przecięcia prostej $y = x$ i tangensoidy $y = \operatorname{tg} x$ (rys. 74).

Metody uściślenia przybliżeń. 1. Metoda Newtona. Jeżeli x_0 jest przybliżoną wartością pierwiastka a równania $f(x) = 0$, to za przybliżenie dokładniejsze przyjmuje się

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Zastępując x_0 przez x_1 można otrzymać następujące przybliżenie x_2 itd. Algorytm kolejnych przybliżeń jest zawsze zbieżny, jeżeli pierwiastek a jest jednokrotny, tzn. jeżeli $f'(a) \neq 0$, i pierwsze przybliżenie wzięte

(1) O ciągłości funkcji patrz str. 362.

jest z wystarczającą dokładnością. Tak więc pierwiastek można obliczyć z dowolnym stopniem dokładności.

Przykład — patrz niżej.

2. Interpolacja liniowa (reguła fałsi, czyli reguła fałszywego założenia). Jeżeli pierwiastek a równania $f(x) = 0$ leży w przedziale $a < x < b$, to za przybliżoną wartość pierwiastka można przyjąć

$$\tilde{x}_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Jeżeli $f''(x)$ w przedziale (a, b) ma stały znak, to wartości przybliżone otrzymane według tej metody i według metody Newtona będą położone po różnych stronach pierwiastka, przy czym w metodzie Newtona należy za x_0 wziąć tę z liczb a i b , dla której $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Dlatego też równoległe stosowanie obu metod pozwoli ocenić osiągniętą dokładność.

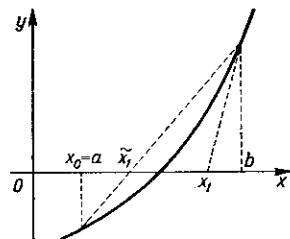
W interpretacji geometrycznej metoda Newtona oznacza zastępowanie wykresu funkcji $f(x)$ styczną do niego w punkcie x_0 , a metoda interpolacji liniowej — cięciwą łączącą punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (rys. 75).

Przykład — patrz niżej.

3. Metoda iteracji. Rozważane równanie sprowadzamy do postaci $x = \varphi(x)$ i mając pierwsze przybliżenie pierwiastka x_0 obliczamy jak najbardziej dokładne przybliżenie pierwiastka x_1 , posługując się wzorem $x_1 = \varphi(x_0)$, potem znajdujemy jeszcze lepsze przybliżenie x_2 , posługując się wzorem $x_2 = \varphi(x_1)$ itd. Powtarzając ten proces, czyli iterując go kilka razy, można otrzymać wartość pierwiastka w dowolnym stopniu dokładności, jeżeli w przedziale zachodzi nierówność $|\varphi'(x)| < 1$. Jeżeli zaś warunek ten nie jest spełniony, to równanie należy przekształcić (choćabyż za pomocą przejścia do funkcji odwrotnej). Na przykład metoda iteracji nie może być zastosowana do równania $x = \operatorname{tg} x$, ale nadaje się do rozwiązania równania $x = \operatorname{arctg} x$.

Jeżeli $\varphi'(x) < 0$, to dwie kolejne wartości przybliżone pierwiastka otrzymane za pomocą iteracji są na przemian to większe, to mniejsze od pierwiastka równania, co pozwala na oszacowanie osiągniętego stopnia dokładności.

Przykład. Znajdźmy najmniejszy dodatni pierwiastek równania $\sin x - x \cos x = 0$.



Rys. 75

Zamieniając to równanie na równoważne mu $x = \operatorname{tg} x$ znajdujemy graficznie, że (patrz str. 180) szukany pierwiastek jest bliski liczby $\frac{3}{2}\pi = 4,71\dots$ Dokładniejszą wartość odnajdujemy za pomocą kolejnych przybliżeń:

a. Metodą Newtona oraz interpolacji liniowej: dla funkcji

$$f(x) = \sin x - x \cos x$$

mamy $f'(x) = x \sin x$. Podstawiając $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ otrzymujemy

$$f(x_0) = -1, \quad f'(x_0) = -4,71 \quad \text{ i } \quad x_1 = 4,71 - \frac{1}{4,71} = 4,50.$$

Ponieważ wartość $f(x_1) = -0,029$ ma taki sam znak, co i $f(x_0)$, interpolacji liniowej zastosować nie można. Obliczenie wykazuje, że $f(4,45) = 0,189$, a więc szukany pierwiastek leży pomiędzy 4,45 a 4,50. Stosując interpolację liniową otrzymujemy następujące przybliżenie:

$$\tilde{x}_1 = 4,50 - \frac{-0,029}{-0,029 - 0,189} (4,50 - 4,45) = 4,4930.$$

Obliczenie według wzoru Newtona następnego po x_1 przybliżenia — przy uwzględnieniu faktu, że znak $f''(x_1)$ jest taki sam jak znak $f(x_1)$ — daje

$$x_2 = 4,50 - \frac{-0,029}{-4,399} = 4,4934.$$

Ponieważ przybliżenia według metody Newtona i metody interpolacji liniowej leżą po różnych stronach pierwiastka, błąd przybliżenia x_2 nie przekracza 0,0004.

b. Metodą iteracji: równanie $x = \operatorname{tg} x$ nie nadaje się do iteracji, gdyż $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 1$; zastępując funkcję $\operatorname{tg} x$ jej funkcją odwrotną otrzymujemy równanie $x = \operatorname{arctg} x$, które można iterować. Biorąc $x_0 = 4,7$ znajdujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arctg} 4,7 = \operatorname{arc} 258^\circ = 4,503, \\ x_2 &= \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg} 4,503 = \operatorname{arc} 257^\circ 29' = 4,4942, \\ x_3 &= \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} 4,4942 = \operatorname{arc} 257^\circ 27,3' = 4,4934, \\ x_4 &= \operatorname{arctg} x_3 = \operatorname{arctg} 4,4934 = \operatorname{arc} 257^\circ 27,2' = 4,4934 \quad (!). \end{aligned}$$

Jest oczywiste, że można uważać wszystkie cyfry liczby x_4 za dokładne.

(!) Przez $\operatorname{arc} 257^\circ 27,2'$ oznaczamy miarę łukową kąta $257^\circ 27,2'$. Podobnie piszemy: $1 = \operatorname{arc} 180^\circ/\pi$. (Przypisek tłumacza).

10. Wyznaczniki

Określenie. Wyznacznikiem stopnia n nazywamy tablicę kwadratową utworzoną z n^2 liczb a_{ij} zwanych *elementami wyznacznika* i rozmieszczonych w n wierszach oraz n kolumnach:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pierwszy wskaźnik i elementu a_{ij} wskazuje, w którym wierszu wyznacznika znajduje się ten element licząc od góry, a drugi wskaźnik j wskazuje, w której kolumnie leży dany element licząc od strony lewej; krótko: i jest to numer wiersza, a j jest to numer kolumny. Wyznacznik (bez oznaczenia jego stopnia) piszemy niekiedy w postaci

$$\det |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie symbol $\det$ jest skrótem francuskiego słowa *determinant* = wyznacznik, albo nawet jeszcze krócej:

$$|a_{ij}|.$$

Wyznacznikowi (1) przypisujemy wartość liczbową D obliczoną według następującego wzoru:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nv},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje $\alpha, \beta, \dots, v$ liczb $1, 2, \dots, n$ (!). Znak „+” lub „-” przed każdym składnikiem rozwinięcia wyznacznika jest zgodny ze znakiem $(-1)^k$, gdzie k wyraża ilość inwersji (nieporządków) w danej permutacji $\alpha, \beta, \dots, v$. Na przykład składnik $a_{13} a_{21} a_{34} a_{42}$ w wyznaczniku stopnia czwartego ma znak minus, ponieważ permutacja drugich wskaźników $3, 1, 4, 2$ ma trzy inwersje: $(3,1)$ $(3,2)$ i $(4,2)$, a więc $k = 3$ i $(-1)^3 = -1$.

Minorem elementu a_{ij} wyznacznika stopnia n nazywamy wyznacznik stopnia $n-1$ utworzony z danego wyznacznika przez skreślenie wiersza i oraz kolumny j . *Dopełnieniem algebraicznym* A_{ij} elementu a_{ij} danego wyznacznika nazywamy jego minor opatrzone znakiem plus

(!) Ilość takich permutacji wynosi $n!$. O permutacjach patrz str. 205.

lub minus, zależnie od tego, jaką wartość ma wyrażenie $(-1)^{i+j}$, mianowicie:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kombinacją liniową kilku wierszy wyznacznika stopnia n nazywamy wiersz $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ o elementach utworzonych przez jednakowe kombinacje liniowe. Na przykład kombinacją liniową trzech wierszy o wskaźnikach i, j, k jest wiersz $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ o elementach utworzonych w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \alpha a_{i1} + \beta a_{j1} + \gamma a_{k1}, \\ \bar{a}_2 &= \alpha a_{i2} + \beta a_{j2} + \gamma a_{k2}, \\ &\dots \\ \bar{a}_n &= \alpha a_{in} + \beta a_{jn} + \gamma a_{kn}, \end{aligned}$$

gdzie α, β, γ są współczynnikami danej kombinacji liniowej.

To samo dotyczy kolumn; na przykład kombinacją liniową trzech kolumn o wskaźnikach i, j, k (drugie wskaźniki wyrazów) jest kolumna o elementach:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_{i1} + a_{j1} + a_{k1}, \\ a'_2 &= a_{i2} + a_{j2} + a_{k2}, \\ &\dots \\ a'_n &= a_{in} + a_{jn} + a_{kn}. \end{aligned}$$

Własności wyznaczników.

1. Wyznacznik nie zmienia swojej wartości, gdy zastąpimy wiersze kolumnami, a kolumny wierszami (dlatego wszystkie podane poniżej własności dotyczące wierszy wyznacznika odnoszą się także do kolumn).

2. Jeżeli elementy dwóch wierszy wyznacznika są równe lub proporcjonalne albo jeżeli którykolwiek wiersz jest kombinacją liniową kilku wierszy, to wyznacznik jest równy zeru; to samo dotyczy kolumn.

3. Wspólny czynnik wszystkich elementów któregośkolwiek wiersza (lub któregośkolwiek kolumny) wyznacznika można wynieść poza wyznacznik.

4. Jeżeli dwa wyznaczniki stopnia n różnią się tylko elementami i -tego wiersza, to sumą takich wyznaczników nazywamy wyznacznik, którego i -ty wiersz składa się z sum odpowiednich elementów i -tego wiersza w każdym z danych wyznaczników, a elementy pozostałych wierszy są te same co w pozostałych wyznacznikach; to samo dotyczy kolumn.

Przykład. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Dodając do dowolnego wiersza odpowiednie elementy innego wiersza ze znakiem plus lub minus lub kombinacje liniowe elementów innych wierszy i zachowując pozostałe wiersze bez zmiany nie zmienia wartości wyznacznika; to samo dotyczy kolumn.

Przykład. Mamy

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Wyznacznik stopnia n można rozłożyć według elementów i -tego wiersza zgodnie ze wzorem

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

gdzie A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} . Można też dokonać rozkładu wyznacznika według elementów j -tej kolumny:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

7. Jeżeli każdy z elementów j -tego wiersza wyznacznika stopnia n pomnożymy przez dopełnienie algebraiczne odpowiedniego elementu innego wiersza i otrzymane ilorazy dodamy, to w sumie otrzymamy zero. Na przykład jeżeli $i \neq j$, to

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

(Podobna własność zachodzi dla kolumn).

zeru, zostanie rozważony poniżej (patrz przypadek ogólny, przykład 4 na str. 192 i przykład 2 na str. 194).

Przykłady. 1. Rozwiążmy układ równań

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9, \\ x - 2y + z &= -2, \\ 3x + 2y + 2z &= 7. \end{aligned}$$

Mamy $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13$ oraz

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39,$$

skąd

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

(układ jest oznaczony).

2. Dla układu równań

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1, \\ x - y + z &= 2, \\ 3x + 2y &= 5, \end{aligned}$$

mamy

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

więc układ równań jest sprzeczny.

Macierz, rząd macierzy. Układ mn liczb ułożonych w prostokątną tablicę z m wierszy i n kolumn nazywamy *macierzą*; macierz oznaczamy

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Minorem stopnia k macierzy $[A]$ ($k \leq m$ i $k \leq n$) nazywamy wyznacznik D składający się (z zachowaniem kolejności) z k^2 elementów

macierzy leżących na przecięciu wybranych jej k kolumn i k wierszy (patrz schemat):

$$[A] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

(minor stopnia trzeciego).

Rzędem macierzy $[A]$ nazywamy największy stopień jej minorów różnych od zera. Aby wyznaczyć stopień macierzy, należy rozpatrzyć wszystkie jej minory stopnia l , gdzie l jest liczbą mniejszą z liczb m i n (lub $l = m = n$ w przypadku równości liczb m i n); jeżeli przynajmniej jeden z tych minorów nie równa się zeru, to rząd $[A]$ jest równy l , a jeżeli wszystkie te minory są równe zeru, to należy zbadać wszystkie minory stopnia $l-1$ itd. W praktyce bardziej celowe jest postępowanie odwrotne, mianowicie: przechodzić od minorów niższego stopnia do minorów stopnia wyższego posługując się następującą regułą:

Jeżeli znajdziemy jakiś minor D_k stopnia k różny od zera, to dalej wystarczy zbadać wyznaczniki stopnia $k+1$ zawierające te rzędy i te kolumny danej macierzy, na przecięciu których znajdują się liczby tworzące wyznacznik D_k (a ponadto w każdym z badanych wyznaczników stopnia $k+1$ powinien oczywiście znaleźć się jeszcze jeden wiersz i jeszcze jedna kolumna danej macierzy); jeżeli wszystkie takie minory rzędu $k+1$ są równe zeru, to rząd macierzy jest równy k .

Przykład. Rozważmy macierz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Minor stopnia drugiego stojący w lewym górnym rogu jest równy zeru: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Ale w macierzy $[A]$ znajduje się minor stopnia drugiego nie równy zeru: $D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Utwórzmy minor

stopnia trzeciego dołączając wyrazy z trzeciego wiersza i z pierwszej kolumny danej macierzy; otrzymamy minor

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Teraz utwórzmy minor stopnia czwartego dołączając wyrazy z czwartego wiersza i z czwartej lub piątej kolumny danej macierzy; otrzymamy dwa minory równe zeru:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad D'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

a więc rząd macierzy $[A]$ jest równy 3.

Ogólny przypadek układu równań liniowych.

Równania niejednorodne. Układ równań liniowych niejednorodnych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (**)$$

jest *niesprzeczny*, jeżeli istnieje przynajmniej jeden zespół wartości $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ spełniających wszystkie dane równania (1); natomiast układ ten jest *sprzeczny*, jeżeli nie ma ani jednego takiego rozwiązania.

Cecha niesprzeczności układu równań: układ równań (**) jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

(1) Symbolem $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ oznaczamy będziemy w przyszłości rozwiązanie danego układu równań w postaci $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$.

Niesprzeczny układ równań nazywamy *oznaczonym*, jeżeli ma tylko jedno rozwiązanie, a *nieoznaczonym*, jeżeli rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Niesprzeczny układ równań (**) rozwiązuje się w następujący sposób: Obliczamy rząd r macierzy $[A]$. Zmieniamy porządek równań (**), a w równaniach przestawiamy niewiadome $x_1, x_2, \dots, x_n$ w taki sposób, żeby w lewym górnym rogu macierzy znalazł się minor stopnia r , różny od zera. Mogą przy tym zajść dwa przypadki:

1° $r = n, r \leq m$. Rozwiązując układ pierwszych n równań z n niewiadomymi otrzymujemy jedynie rozwiązanie $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ponieważ wyznacznik tego układu nie równa się zeru (patrz str. 187). Jeżeli $n < m$, wtedy to samo rozwiązanie spełnia również $m-n$ pozostałych równań, które wynikają z pierwszych. Układ (**) jest *oznaczony*.

2° $r < n, r \leq m$. Rozwiązujemy układ pierwszych r równań względem pierwszych r niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_r$, wyrażając te niewiadome przez $n-r$ pozostałych niewiadomych $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$. Otrzymujemy rozwiązanie w postaci zespołu funkcji liniowych:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

ponieważ wyznacznik układu równań nie równa się zeru. Niewiadomym $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ można nadać dowolne wartości; wtedy niewiadome $x_1, x_2, \dots, x_r$ wyznacza się według wzorów (1). Te same rozwiązania spełnia również $m-r$ pozostałych równań (jeżeli $r < m$), które wynikają z pierwszych. Układ równań (**) jest *nieoznaczony*.

Przykłady. 1. Rozpatrzmy układ równań

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - u + 2v &= 2, \\ 3x - y + 5z - 3u - v &= 6, \\ 2x + y + 2z - 2u - 3v &= 8. \end{aligned}$$

Rząd macierzy $[A]$ równa się 2, rząd macierzy $[B]$ równa się 3. Układ równań jest sprzeczny, rozwiązań nie ma.

2. Dla układu równań

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1, \\ x - 2y - z &= 2, \\ 3x - y + 5z &= 3, \\ -2x + 2y + 3z &= -4 \end{aligned}$$

rząd macierzy $[A]$ i rząd macierzy $[B]$ są równe 3; układ równań jest niesprzeczny. Wyznacznik stopnia trzeciego w lewym górnym rogu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0; \text{ nie zachodzi więc potrzeba zmiany porządku}$$

równań i przestawiania niewiadomych. $r = n$, więc układ równań jest oznaczony. Rozwiązujemy układ pierwszych trzech równań: $x = \frac{10}{7}$, $y = -\frac{1}{7}$, $z = -\frac{2}{7}$; to samo rozwiązanie spełnia również czwarte równanie.

3. Dla układu równań

$$x - y + z - u = 1,$$

$$x - y - z + u = 0,$$

$$x - y - 2z + 2u = -\frac{1}{2}$$

rząd macierzy $[A]$ i rząd macierzy $[B]$ są równe 2, więc układ równań jest niesprzeczny. $r < n$, więc układ równań jest nieoznaczony. Wyznacznik stopnia drugiego w lewym górnym rogu $D_2 = 0$; przestawiamy kolumnę z na czwarte miejsce:

$$-y + z - u + x = 1,$$

$$-y - z + u + x = 0,$$

$$-y - 2z + 2u + x = -\frac{1}{2}.$$

Rozwiązujemy układ pierwszych dwóch równań względem niewiadomych y i z :

$$-y + z = 1 - x + u,$$

$$-y - z = -x - u.$$

Rozwiązania $y = x - \frac{1}{2}$, $z = u + \frac{1}{2}$ spełniają wszystkie równania przy dowolnych wartościach x i u .

4. W przypadku układu równań

$$x + 2y - z + u = 1,$$

$$2x - y + 2z + 2u = 2,$$

$$3x + y + z + 3u = 3,$$

$$x - 3y + 3z + u = 0$$

liczba równań równa się liczbie niewiadomych. $D = 0$, a także $D_x = D_y = D_z = D_u = 0$. Rząd macierzy $[A]$ równa się 2, rząd macierzy $[B]$ równa się 3. Układ jest sprzeczny, rozwiązań nie ma.

Równania jednorodne. Układ równań jednorodnych

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

(***)

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

ma zawsze rozwiązanie zerowe $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Jeżeli oprócz tego układ równań (***) ma rozwiązanie niezerowe $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ⁽¹⁾,

(1) Patrz notka na str. 190.

to ma też nieskończoną ilość rozwiązań proporcjonalnych $\{ka_1, ka_2, \dots, ka_n\}$, gdzie k jest dowolną liczbą. Jeżeli układ równań (***) ma p różnych, tzn. nieproporcjonalnych, rozwiązań niezerowych

$$(2) \quad \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, \quad \dots, \quad \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\},$$

to ma też nieskończoną ilość rozwiązań postaci

$$(3) \quad \{k_1a_1 + k_2\beta_1 + \dots + k_p\mu_1, \quad k_1a_2 + k_2\beta_2 + \dots + k_p\mu_2, \quad \dots, \quad k_1a_n + k_2\beta_n + \dots + k_p\mu_n\},$$

gdzie $k_1, k_2, \dots, k_p$ są dowolnymi liczbami, nie równymi jednocześnie zeru. Rozwiązanie (3) nazywamy kombinacją liniową rozwiązań (2).

Rozwiązania (2) układu równań (***) nazywamy liniowo niezależnymi, jeżeli żadne z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych; p niezależnych liniowo rozwiązań tworzy podstawowy układ rozwiązań, jeżeli dowolne rozwiązanie układu równań (***) jest kombinacją liniową tych p rozwiązań ⁽¹⁾.

Jeżeli rząd r macierzy $[A]$ utworzonej ze współczynników równań (***) jest mniejszy od liczby n niewiadomych, to równania (***) mają podstawowy układ rozwiązań; jeśli zaś $r = n$, podstawowy układ nie istnieje i równania mają tylko rozwiązanie zerowe. Gdy $r < n$, układ podstawowy składa się z $n - r$ liniowo niezależnych rozwiązań. Aby znaleźć podstawowe układy rozwiązań, zmieniamy porządek równań (***) i przestawiamy niewiadome w taki sposób, żeby w lewym górnym rogu macierzy znalazł się minor stopnia r , nie równy zeru. Następnie rozwiązujemy układ równań względem pierwszych r niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_r$, wyrażając je przez pozostałe niewiadome

$$x_1 = x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n),$$

$$x_2 = x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_r = x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n).$$

Niewiadomym $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ można nadać dowolne wartości i łącznie z odpowiednimi wartościami $x_1, x_2, \dots, x_r$, wyznaczonymi według wzoru (4), otrzymujemy jedno z rozwiązań układu równań (***). Obierając te wartości $n - r$ razy

	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	$b_{1,n-r}$
2	b_{21}	b_{22}	$\dots$	$b_{2,n-r}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n - r$	$b_{n-r,1}$	$b_{n-r,2}$	$\dots$	$b_{n-r,n-r}$

(1) Układów podstawowych może być nieskończenie wiele (patrz dalej).

w ten sposób, żeby wyznacznik $B = |b_{ik}|$ nie równał się zeru, otrzymujemy jeden z podstawowych układów rozwiązań równań (***). W szczególności można podstawić $b_{ik} = 1$, gdy $i = k$ oraz $b_{ik} = 0$, gdy $i \neq k$; wtedy $B = 1$ i rozwiązania

	x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_n
1	1	0	...	0
2	0	1	...	0
...	...	...	...	...
$n-r$	0	0	...	1

wraz ze wzorami (4) wyznaczają w najprostszy sposób podstawowy układ rozwiązań układu równań (***).

Przykłady. 1. Dla układu równań

$$x - y + 5z - u = 0,$$

$$x + y - 2z + 3u = 0,$$

$$3x - y + 8z + u = 0,$$

$$x + 3y - 9z + 7u = 0$$

rzęd macierzy $[A]$ równa się 2; wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, nie zachodzi więc potrzeba zmiany porządku równań i przestawiania niewiadomych. Rozwiązujemy układ równań względem niewiadomych x i y . Podstawiając $z = 1$, $u = 0$ otrzymujemy pierwsze rozwiązanie podstawowe

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = 1, \quad u = 0, \quad \text{czyli} \quad \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0 \right\}.$$

Podstawiając $z = 0$, $u = 1$ otrzymujemy drugie rozwiązanie podstawowe

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = 0, \quad u = 1,$$

czyli

$$\{-1, -2, 0, 1\}.$$

Zatem dowolne rozwiązanie danego układu równań można przedstawić w postaci $\left\{ -\frac{3}{2}k_1 - k_2, \frac{7}{2}k_1 - 2k_2, k_1, k_2 \right\}$, gdzie k_1 i k_2 są dowolnymi liczbami.

2. Rozpatrzmy układ równań

$$2x + 3y - z = 0,$$

$$x - y + z = 0,$$

$$3x + 2y - z = 0.$$

Liczba równań równa się liczbie niewiadomych, $D = 0$, a także $D_x = D_y = D_z = 0$. Rząd macierzy $[A]$ jest równy 2; wyznacznik

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, nie zachodzi więc potrzeba zmiany porządku równań i przestawiania niewiadomych. Rozwiązujemy układ równań względem x i y : $x = -\frac{2}{5}z$, $y = \frac{3}{5}z$. Podstawiając $z = 1$ otrzymujemy jedynę liniowo niezależne rozwiązanie podstawowe $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = 1$. Zatem dowolne rozwiązanie danego układu równań można przedstawić w postaci

$$x = -\frac{2}{5}k, \quad y = \frac{3}{5}k, \quad z = k$$

albo

$$x = -2k, \quad y = 3k, \quad z = 5k,$$

gdzie k jest dowolną liczbą.

12. Układ równań wyższych stopni

Warunek niezależności równań. Dwa równania z dwiema niewiadomymi

$$f(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi(x, y) = 0$$

są *niezależne*, jeżeli ich jacobian (patrz str. 372)

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

nie jest tożsamościowo równy zeru; w przeciwnym przypadku jedno równanie wynika z drugiego i układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla trzech równań z trzema niewiadomymi istnieje analogiczny warunek niezależności. Jacobian

$$\frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$$

nie jest tożsamościowo równy zeru itd.

Warunki te odnoszą się zarówno do równań algebraicznych jak i przestępnych.

Ilość rozwiązań układu dwóch równań algebraicznych $P_1(x, y) = 0$ i $P_2(x, y) = 0$. Jeżeli P_1 jest wielomianem stopnia m , a P_2 jest wielomianem stopnia n względem x i y (1), to układ równań ma mn

(1) Przez *stopień wielomianu* dwóch zmiennych x i y rozumiemy największą sumę wykładników przy tych zmiennych w wyrazach wielomianu. Na przykład wielomian $x^2 + x^2y^2 + y^2$ jest wielomianem stopnia czwartego.

rozwiązań $x = a$, $y = \beta$, gdzie a i β są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi. Układ trzech równań algebraicznych stopnia m , n , p ma mnp rozwiązań $x = a$, $y = \beta$, $z = \gamma$.

Znalezienie rozwiązania układu dwóch równań algebraicznych z dwiema niewiadomymi sprowadza się zazwyczaj do uzyskania równania stopnia mn z jedną niewiadomą, tzw. *rezolwenty* układu równań, przez wyrugowanie drugiej niewiadomej. Po znalezieniu pierwiastków rezolwenty podstawia się je po kolei do jednego z równań danego układu dla wyznaczenia wartości drugiej niewiadomej.

Najprościej rozwiązuje się układ dwóch równań, z których jedno jest liniowe. Jeżeli drugie równanie jest stopnia n , to rozwiązując równanie liniowe względem jednej niewiadomej i podstawiając ją w drugie równanie otrzymujemy rezolwentę stopnia n względem drugiej niewiadomej.

W przypadku układu dwóch równań, z których każde jest stopnia drugiego, otrzymuje się rezolwentę stopnia czwartego. Niekiedy można rozwiązać taki układ za pomocą sztucznych chwytów.

Przykład. $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$.

Otrzymujemy $(x+y)^2 = a+2b$, $(x-y)^2 = a-2b$; stąd $x+y = \pm\sqrt{a+2b}$ lub $x+y = -\sqrt{a+2b}$, $x-y = \pm\sqrt{a-2b}$ lub $x-y = -\sqrt{a-2b}$. Kombinując te równania parami otrzymujemy cztery rozwiązania danego układu równań: $(5, 3)$, $(3, 5)$, $(-5, -3)$, $(-3, -5)$.

Graficzna metoda rozwiązywania układu dwóch równań $f(x, y) = 0$ i $\varphi(x, y) = 0$ sprowadza się do znalezienia punktów przecięcia krzywych wyznaczonych przez dane równanie.

C. WIADOMOŚCI UZUPEŁNIAJĄCE ALGEBRĘ

13. Nierówności

Określenia. *Nierówność*ą nazywa się połączenie dwóch wyrażeń liczbowych lub literowych jednym z następujących znaków:

1. $>$ (jest większe),
2. $<$ (jest mniejsze),
3. $\neq$ (nie równa się),
4. $\geq$ (jest większe lub równe, jest nie mniejsze),
5. $\leq$ (jest mniejsze lub równe, jest nie większe).

Symbole powyższe, z wyjątkiem 3, znajdują zastosowanie jedynie w dziedzinie liczb rzeczywistych.

Nierówności 1 i 2 nazywamy *nierównościami ostrymi*, a nierówności 4 i 5 *nierównościami*.

Nierówność jest *tożsamościowa*, jeżeli jest prawdziwa przy dowolnych wartościach liter wchodzących w jej skład. Nierówność prawdziwą, zawierającą tylko liczby, nazywamy także *tożsamościową*.

Podobnie jak i równania, nierówności mogą zawierać niewiadome (oznacza się je zwykle ostatnimi literami alfabetu). *Rozwiązać nierówność* albo *układ nierówności*, to znaczy określić, w jakich przedziałach powinny się zawierać wartości niewiadomych, aby wszystkie dane nierówności były prawdziwe. Można szukać rozwiązań nierówności wszystkich typów 1-5, ale najczęściej zachodzi potrzeba rozwiązywania nierówności ostrych, typu 1 lub 2.

Dwie nierówności typu 1 albo dwie nierówności typu 2 nazywamy *jednakowo skierowanymi*, natomiast nierówności 1 i 2 są *przeciwnie skierowane*.

Dwie nierówności zawierające te same niewiadome nazywamy *równoważnymi*, jeżeli są prawdziwe przy tych samych wartościach niewiadomych.

Podstawowe własności nierówności typu 1 i 2.

1. **Asymetria nierówności:** jeżeli $a > b$, to $b < a$; jeżeli $a < b$, to $b > a$.

2. **Przechodność nierówności:** jeżeli $a > b$ i $b > c$, to $a > c$; jeżeli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

3. **Monotoniczność nierówności:** jeżeli $a > b$, to $a \pm c > b \pm c$; jeżeli $a < b$, to $a \pm c < b \pm c$; to znaczy: jeżeli do obu stron nierówności dodamy lub odejmiemy tę samą liczbę, to kierunek nierówności nie ulegnie zmianie.

4. **Dodawanie nierówności:** jeżeli $a > b$ i $c > d$, to $a+c > b+d$; jeżeli $a < b$ i $c < d$, to $a+c < b+d$; to znaczy: dwie nierówności jednakowo skierowane można dodawać stronami.

5. **Odejmowanie nierówności:** jeżeli $a > b$ i $c < d$, to $a-c > b-d$; jeżeli $a < b$ i $c > d$, to $a-c < b-d$; to znaczy: od jednej nierówności można odjąć stronami drugą nierówność o przeciwnym kierunku, zachowując znak pierwszej nierówności (nie wolno odejmować stronami nierówności o jednakowym kierunku!).

6. Mnożenie i dzielenie nierówności:

jeżeli $a > b$ i $c > 0$, to $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

jeżeli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

jeżeli $a > b$ i $c < 0$, to $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

jeżeli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

to znaczy: obie strony nierówności można pomnożyć albo podzielić przez tę samą liczbę dodatnią zachowując kierunek nierówności;

obie strony nierówności można pomnożyć albo podzielić przez tę samą liczbę ujemną zmieniając przy tym kierunek nierówności na przeciwny.

Niektóre ważniejsze nierówności.

$$1. |a+b| \leq |a|+|b|, \quad |a+b+\dots+k| \leq |a|+|b|+\dots+|k|.$$

To znaczy: bezwzględna wartość sumy kilku liczb jest nie większa niż suma bezwzględnych wartości tych liczb. Równość zachodzi jedynie w przypadku, gdy wśród składników nie ma liczb o znakach przeciwnych.

$$2. |a|+|b| \geq |a-b| \geq ||a|-|b||.$$

To znaczy: bezwzględna wartość różnicy dwóch liczb jest nie większa niż suma ich bezwzględnych wartości, a zarazem nie mniejsza niż bezwzględna wartość różnicy ich bezwzględnych wartości.

3. Nierówność Cauchy'ego. Jeżeli $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$, to

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

To znaczy: średnia arytmetyczna n liczb dodatnich jest większa lub równa ich średniej geometrycznej⁽¹⁾, przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy wszystkie n liczb są równe.

$$4. \left| \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}.$$

To znaczy: bezwzględna wartość średniej arytmetycznej kilku liczb jest mniejsza lub równa średniej kwadratowej tych liczb (patrz str. 203), przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy wszystkie n liczb są równe.

5. Nierówność Buniakowskiego-Cauchy'ego:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

To znaczy: jeżeli mamy dwa ciągi liczbowe po n wyrazów w każdym, to suma iloczynów odpowiednich wyrazów obu ciągów jest nie większa niż iloczyn pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów wyrazów pierwszego ciągu przez pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów wyrazów drugiego ciągu, przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \dots, a_n = \lambda b_n$, to znaczy gdy dane ciągi są proporcjonalne.

⁽¹⁾ Szczególny przypadek tej nierówności dla $n = 2$ patrz str. 203.

Nierówność tę można napisać w postaci⁽¹⁾

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

czyli

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

6. Nierówność Czebyszewa. Jeżeli mamy dwa ciągi liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ po n wyrazów w każdym i oba ciągi są niemalejące lub oba nierosnące, to

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

a jeżeli jeden z danych ciągów jest niemalejący, a drugi nierosnący, to

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

a więc kierunek nierówności zmienia się na przeciwny.

7. Uogólnione nierówności Czebyszewa. Jeżeli mamy dane dwa ciągi liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ i oba ciągi są niemalejące lub nierosnące, to

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k}{n}} \leq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \dots + (a_n b_n)^k}{n}},$$

⁽¹⁾ W przypadku gdy $n = 3$, trójki $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ można uważać za współrzędne kartezjańskie dwóch wektorów, a wtedy z nierówności powyższych wynika, że iloczyn skalarny wektorów jest nie większy niż iloczyn ich długości (patrz str. 650). Dla $n > 3$ sformułowanie to rozciąga się na wektory w przestrzeni n -wymiarowej. Wzory te znane są też pod nazwą nierówności Buniakowskiego-Schwarza.

Analoga nierówności Buniakowskiego-Schwarza dla nieskończonych ciągów zbieżnych:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right)$$

i analogia tejże nierówności dla całek oznaczonych:

$$\left(\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \right).$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, jeżeli natomiast jeden z danych ciągów jest niemalejący, a drugi nierosnący, to

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k}{n}} \geq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \dots + (a_n b_n)^k}{n}},$$

a więc w poprzedniej nierówności należy zmienić kierunek nierówności na przeciwny.

Rozwiązywanie nierówności stopnia pierwszego i drugiego.

Przy rozwiązywaniu nierówności sprowadza się daną nierówność do innych nierówności, jej równoważnych. Podobnie jak przy rozwiązywaniu równań, można w nierówności przenosić wyrazy z jednej strony na drugą ze znakiem przeciwnym, i mnożyć lub dzielić obie strony nierówności przez tę samą liczbę różną od zera, przy czym jeżeli ta liczba jest dodatnia, to kierunek nierówności pozostaje nie zmieniony, jeżeli zaś ujemna, to kierunek nierówności zmienia się na przeciwny. Za pomocą takich przekształceń możemy zawsze sprowadzić nierówność stopnia pierwszego do postaci $ax > b$, a nierówność stopnia drugiego sprowadzić w najprostszym przypadku do postaci $x^2 < m$ lub $x^2 > m$, w ogólnym zaś przypadku do postaci $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c > 0$.

Nierówność stopnia pierwszego $ax > b$ ma rozwiązanie

$$x > \frac{b}{a}, \text{ gdy } a > 0, \text{ i } x < \frac{b}{a}, \text{ gdy } a < 0.$$

Przykład. $5x + 3 < 8x + 1$, $5x - 8x < 1 - 3$, $-3x < -2$, $x > \frac{2}{3}$.

Najprostsze nierówności stopnia drugiego $x^2 < m$ i $x^2 > m$ mają rozwiązania:

a. $x^2 < m$.

Dla $m > 0$ rozwiązanie $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}$, albo inaczej: $|x| < \sqrt{m}$.

Dla $m \leq 0$ rozwiązania nie ma.

b. $x^2 > m$.

Dla $m > 0$ rozwiązanie $x > \sqrt{m}$ lub $x < -\sqrt{m}$, albo inaczej: $|x| > \sqrt{m}$.

Dla $m = 0$ rozwiązanie $x > 0$ lub $x < 0$, czyli $x \neq 0$.

Dla $m < 0$ nierówność jest tożsamościowa.

Ogólny przypadek nierówności stopnia drugiego $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c > 0$, gdzie $a \neq 0$. Dzielimy nierówność przez a (zmieniając kierunek nierówności na przeciwny w przypadku, gdy $a < 0$) i sprowadzamy ją do postaci $x^2 + px + q < 0$ lub $x^2 + px + q > 0$. Ostatnie nierówności przekształcamy odpowiednio do jednej z postaci

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{lub} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Oznaczając $x + \frac{p}{2}$ przez z , a $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ przez m , otrzymujemy nierówność $z^2 < m$ lub $z^2 > m$; rozwiązując ją znajdziemy x .

Przykłady. 1. Dla nierówności $-2x^2 + 14x - 20 > 0$ kolejno otrzymujemy

$$x^2 - 7x + 10 < 0, \quad \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}, \quad -\frac{3}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2}, \\ -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{7}{2}, \quad 2 < x < 5.$$

2. Dla nierówności $x^2 + 6x + 15 > 0$ otrzymujemy $(x+3)^2 > -6$, czyli nierówność tożsamościową.

3. Dla nierówności $-2x^2 + 14x - 20 < 0$ kolejno otrzymujemy

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}, \quad x - \frac{7}{2} > \frac{3}{2} \text{ i } x - \frac{7}{2} < -\frac{3}{2}, \quad x > 5 \text{ i } x < 2.$$

14. Postępy, szeregi skończone i wartości średnie

Postępy. Postępem arytmetycznym nazywamy taki ciąg liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ (zwanymi *wyrazami postępu*), w którym każdą następną liczbę otrzymuje się z poprzedniej przez dodanie określonej liczby r (zwanej *różnicą postępu*). Jeżeli $r > 0$, postęp nazywamy *rosnącym*, jeżeli $r < 0$ — *malejącym*.

Wzory na wyraz ogólny oraz na sumę n wyrazów postępu arytmetycznego są odpowiednio

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Postęp geometryczny nazywamy taki ciąg liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ (zwanymi *wyrazami postępu*), w którym każdą następną liczbę otrzymuje się z poprzedniej przez pomnożenie jej przez określoną liczbę q (zwaną *ilorazem postępu*), zakłada się przy tym, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$. Jeżeli $q > 1$, postęp nazywamy *rosnącym*, jeżeli $q < 1$ — nazywamy go *malejącym*.

Wzory na wyraz ogólny oraz na sumę n wyrazów postępu geometrycznego są odpowiednio

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{gdy } q \neq 1,$$

natomiast $S_n = na_1$, gdy $q = 1$.

Dla sumy malejącego postępu geometrycznego dogodniej jest posługiwać się wzorem $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$. Jeżeli ilość wyrazów malejącego postępu geometrycznego n wzrasta nieograniczenie, to $q^n \rightarrow 0$, a S_n dąży do granicy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{a_1}{1 - q}$$

(suma nieskończenie malejącego postępu geometrycznego).

Przykład. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Niektóre szeregi liczbowe skończone⁽¹⁾:

$$1. \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad p + (p+1) + (p+2) + \dots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}.$$

$$3. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

$$4. \quad 2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) + 2n = n(n+1).$$

$$5. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$6. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n]^2.$$

$$7. \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

$$8. \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

$$9. \quad 1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Wartości średnie. Średnią arytmetyczną dwóch liczb a i b nazywamy połowę ich sumy: $x = \frac{a+b}{2}$; liczby a, x, b tworzą postęp

⁽¹⁾ Szeregi liczbowe nieskończone — patrz w tablicy na str. 380 i 381.

arytmetyczny. Średnią arytmetyczną n liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ określamy wzorem

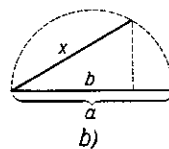
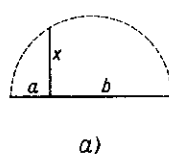
$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Średnią kwadratową n liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ (dodatnich lub ujemnych) określamy wzorem

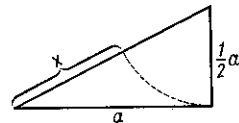
$$+ \sqrt{\frac{1}{n} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}.$$

Średnia kwadratowa ma wielkie znaczenie w teorii błędów.

Średnią geometryczną (średnią proporcjonalną) dwóch liczb dodat-



Rys. 76



Rys. 77

nich a i b określamy wzorem $x = \sqrt{ab}$; liczby a, x, b tworzą postęp geometryczny. Średnia geometryczna dwóch różnych liczb dodatnich jest zawsze mniejsza od ich średniej arytmetycznej. Jeżeli a i b są długościami odcinków, to odcinek o długości $x = \sqrt{ab}$ wyznaczamy konstrukcyjnie, jak pokazano na rysunku 76a lub b.

Złotym podziałem odcinka a (albo podziałem odcinka a w stosunku skrajnym i średnim) nazywamy jego podział na takie dwie części x i $a-x$, aby x było średnią geometryczną między a i $a-x$:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \approx 0,618a.$$

Jeżeli a jest długością odcinka, to odcinek o długości x wyznaczamy konstrukcyjnie jak pokazano na rysunku 77. Odcinek x jest bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu a .

15. Silnia i funkcja gamma

Silnia. Silnią $n!$ liczby naturalnej n nazywamy iloczyn $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Iloczyn ten można też zapisać krótko w postaci $\prod_{i=1}^n i$. Przyjmuje się ponadto, że $1! = 1$ i $0! = 1$.

Podstawowa własność silni: $n! = n(n-1)!$.

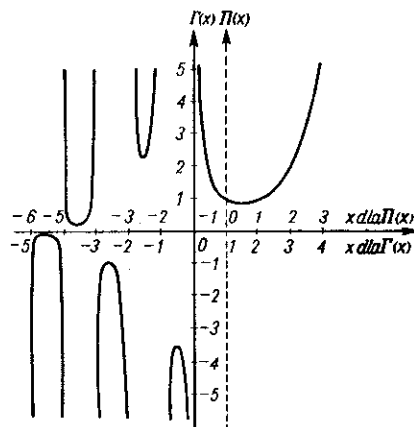
Tablice silni początkowych liczb naturalnych i odwrotności silni patrz na str. 47.

Silnie wielkich liczb można wyrazić w przybliżeniu wzorem *Stirlinga*:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right),$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Wzory te znajdują zastosowanie również przy niecałkowitych wartościach n (patrz niżej, funkcja gamma).



Rys. 78

Funkcja gamma. Pojęcie silni można rozszerzyć na dowolne liczby x ⁽¹⁾ za pomocą funkcji gamma: $\Gamma(x)$, którą można określić dwoma sposobami:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt & (\text{całka Eulera dla } x > 0)^{(2)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)} & (\text{dla dowolnych } x). \end{cases}$$

⁽¹⁾ A także na liczby zespolone.

⁽²⁾ A także dla liczb zespolonych x , gdy $\operatorname{re} x > 0$.

Podstawowe własności funkcji gamma:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$, gdzie n jest całkowite dodatnie,

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x).$$

Uogólnienie pojęcia silni $\Pi(x)$. Pojęcie silni $n!$ określone początkowo dla n całkowitych dodatnich można uogólnić dla dowolnego n rzeczywistego w postaci funkcji $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

Gdy x jest liczbą naturalną, $\Pi(x) = x! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$.

Gdy $x = 0$, $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$.

Gdy x jest całkowite ujemne, $\Pi(x) = \pm \infty$.

$$\text{Gdy } x = \frac{1}{2}, \quad \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\text{Gdy } x = -\frac{1}{2}, \quad \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Gdy } x = -\frac{3}{2}, \quad \Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Wykres funkcji $\Gamma(x)$ i $\Pi(x)$ — patrz na rysunku 78. Tablice funkcji $\Gamma(x)$ — patrz na str. 87.

16. Kombinatoryka

Pary. Jeżeli dane są dwa zbiory A i B , z których pierwszy składa się z r , a drugi z s elementów, to ilość możliwych różnych par (a, b) , gdzie a jest elementem zbioru A i b jest elementem zbioru B , jest równa iloczynowi rs .

Rozmieszczenia. Rozmieszczeniami (*wariacjami*) z n elementów po k nazywamy ciągi k -wyrazowe, w których każdej z liczb $1, 2, \dots, k$ odpowiada jeden z n danych przedmiotów. Rozmieszczenia te mogą się różnić bądź elementami, bądź porządkiem elementów. Na przykład rozmieszczenia z trzech elementów a, b, c po 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb .

Ilość wszystkich rozmieszczeń z n różnych elementów po k wyraża się wzorem

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k \text{ czynników}} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1).$$

Na przykład $V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

⁽¹⁾ O symbolu $n!$ (silnia) patrz na str. 203.

Permutacje. Permutacjami z n elementów nazywamy ciągi n -wyrazowe, w których każdej z liczb $1, 2, \dots, n$ odpowiada jeden z n danych przedmiotów. Permutacje te różnią się tylko porządkiem elementów. Na przykład permutacje z trzech elementów a, b, c : $abc, bca, cab, bac, acb, bac$. Ilość wszystkich permutacji z n różnych elementów wyznacza się ze wzoru

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! = V_n^n.$$

Jeżeli wśród n elementów $a, b, c, \dots$ znajdują się jednakowe elementy: a występuje α razy, b występuje β razy, c występuje γ razy itd., to

$$P_n = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}.$$

Kombinacje. Kombinacjami z n elementów po k nazywamy zbiory k -elementowe, które można utworzyć, wybierając k dowolnych przedmiotów spośród n danych przedmiotów, przy czym uporządkowanie nie odgrywa roli. Kombinacje te mogą się różnić tylko elementami. Na przykład kombinacje z trzech elementów a, b, c po 2: ab, ac, bc . Ilość wszystkich kombinacji z n różnych elementów po k wyraża się wzorem

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $\binom{n}{k}$ jest tzw. symbolem Newtona. W szczególności

$$C_n^1 = \binom{n}{1} = n, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = 1.$$

Podstawowa własność symbolu Newtona:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

17. Dwumian Newtona

Wzór Newtona. Wzór

$$(*) (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} a^{n-m}b^m + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

albo inaczej:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$$

nosi nazwę wzoru Newtona na dwumian.

Współczynniki dwumianowe $\binom{n}{k}$ można znajdować z tak zwanego trójkąta Pascala:

n	współczynniki									
0										1
1									1	1
2								1	2	1
3							1	3	3	1
4						1	4	6	4	1
5					1	5	10	10	5	1
6				1	6	15	20	15	6	1
7			1	7	21	35	35	21	7	1
...										

Każdy ze współczynników powstaje z dodania dwóch współczynników stojących ponad nim (na lewo w skos i na prawo w skos).

Własności współczynników dwumianowych.

1. Współczynniki we wzorze Newtona wzrastają aż do środka wzoru, a potem powtarzają się w porządku malejącym.

2. Współczynniki wyrazów równoodległych od początku i od końca wzoru są równe.

3. Suma współczynników w dwumianie stopnia n wynosi 2^n .

4. Suma współczynników stojących na miejscach nieparzystych jest równa sumie współczynników stojących na miejscach parzystych.

Potęga różnicy

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \dots + (-1)^n b^n.$$

Uogólnienie wzoru Newtona na dowolne potęgi. Wzór Newtona (*) można rozciągnąć na potęgę o dowolnym wykładniku ujem-

nym lub ułamkowym n ; potęga $(a+b)^n$, gdzie $|b| < a$, może być przedstawiona w tym przypadku w postaci szeregu nieskończonego (patrz str. 416 i 417):

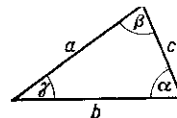
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \dots$$

III. GEOMETRIA

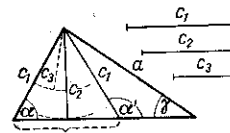
A. PLANIMETRIA

1. Figury płaskie

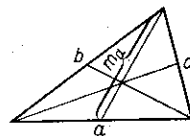
Trójkąt. Suma dwóch boków trójkąta (rys. 79) jest zawsze większa od trzeciego boku: $b+c > a$. Suma kątów trójkąta $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$. Trójkąt jest całkowicie wyznaczony, gdy są dane: 1° trzy boki albo 2° dwa boki i kąt pomiędzy nimi zawarty, albo 3° bok i dwa kąty do niego przylegające. Jeżeli dane są dwa boki i kąt przeciwległy do jednego z nich, to dane te wyznaczają w różnych przypadkach



Rys. 79



Rys. 80



Rys. 81

bądź dwa, bądź jeden, bądź zero trójkątów (patrz rysunek 80, szczególnie — patrz str. 241).

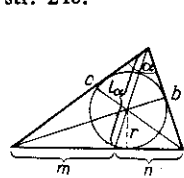
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem ciężkości trójkąta (rys. 81) i każda z nich jest w tym punkcie podzielona w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka trójkąta. Długość środkowej boku a : $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ (patrz str. 240).

Dwusieczną trójkąta nazywamy odcinek prostej dzielącej kąt wewnętrzny trójkąta na połowy, liczony od wierzchołka trójkąta do przecięcia z przeciwległym bokiem. Dwusieczne w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła wpisanego (rys. 82); promień koła wpisanego r — patrz str. 241. Długość dwusiecznej kąta α (patrz str. 240): $l_\alpha = \frac{\sqrt{bc(b+c)^2-a^2}}{b+c}$. Jeżeli dwu-

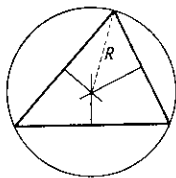
siecznej kąta α (patrz str. 240): $l_\alpha = \frac{\sqrt{bc(b+c)^2-a^2}}{b+c}$. Jeżeli dwu-

sieczna kąta α dzieli przeciwległy bok a na dwa odcinki m i n (rys. 82), to $m : n = c : b$.

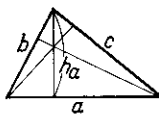
Symetralną boku trójkąta nazywamy prostą prostopadłą do tego boku i przechodzącą przez jego środek. Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła opisanego na trójkącie (rys. 83). Promień koła opisanego R — patrz str. 240.



Rys. 82



Rys. 83



Rys. 84

Wysokością trójkąta nazywamy odcinek prostej poprowadzonej przez wierzchołek trójkąta, prostopadłej do przeciwległego boku, liczony od wierzchołka do przecięcia tej prostej z przeciwległym bokiem. Wysokości trójkąta (albo ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy **ortocentrum** trójkąta (rys. 84). Długość wysokości h_a — patrz str. 240.

Wysokość, środkowa i dwusieczna poprowadzone z tego samego wierzchołka trójkąta pokrywają się, jeżeli boki wychodzące z tego wierzchołka są równe (trójkąt **równoramienny**). Pokrywanie się dwóch spośród tych odcinków wystarczy do stwierdzenia, że trójkąt jest równoramienny.

W trójkącie **równobocznym** ($a = b = c$) środek okręgu wpisanego i opisanego, środek ciężkości i ortocentrum leżą w jednym punkcie.

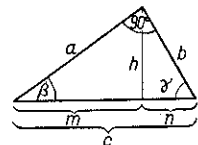
Linia środkowa jest to odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta; jest on równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

Pole trójkąta

$$S = \frac{bh_a}{2} = \frac{absin\gamma}{2} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Trójkąt prostokątny (rys. 85): c — przeciwprostokątna, a i b — przyprostokątne. Związki w trójkącie prostokątnym: $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, $a^2 + b^2 = c^2$ (twierdzenie Pitagorasa). Pole



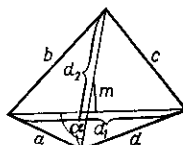
Rys. 85

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2tg\beta = \frac{1}{4}c^2sin2\beta.$$

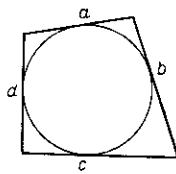
Wzory trygonometryczne dotyczące trójkąta — patrz str. 239–241.

Trójkąty podobne. Dwa wielokąty o tej samej liczbie boków są **podobne**, jeżeli ich odpowiednie kąty wewnętrzne są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne. Aby dwa trójkąty były podobne, wystarczy, by spełniony został jeden z następujących warunków: 1° trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, albo 2° dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, albo 3° dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są równe.

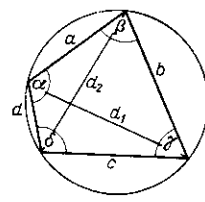
Czworokąt (rys. 86). Suma kątów każdego czworokąta jest równa 360° . $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, gdzie m jest odcinkiem łączącym środki przekątnych.



Rys. 86



Rys. 87



Rys. 88

Pole czworokąta $S = \frac{1}{2}d_1d_2sin\alpha$, gdzie α jest kątem między przekątnymi.

W czworokąt można wpisać koło (rys. 87) wtedy i tylko wtedy, gdy $a+c = b+d$. Na czworokacie można opisać koło (rys. 88) wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Pole czworokąta wpisanego $ac+bd = d_1d_2$ (twierdzenie Ptolemeusza). Pole czworokąta wpisanego

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ gdzie } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

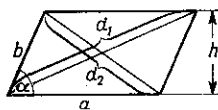
Równoległobok. Czworokąt jest **równoległobokiem** (rys. 89), jeżeli 1° przeciwległe boki są parami równe, 2° przeciwległe boki są parami równoległe, 3° dwa boki są równoległe i równe, 4° punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy, 5° kąty przeciwległe są parami równe. (Każda z tych własności pociąga za sobą cztery pozostałe).

Związek pomiędzy przekątnymi i bokami równoległoboku: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Pole równoległoboku $S = ah = absin\alpha$.

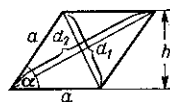
Romb. Równoległobok jest **rombem** (rys. 90), jeżeli: 1° wszystkie jego boki są równe, 2° przekątne d_1 i d_2 są wzajemnie prostopadłe, 3° przekątne dzielą kąty na połowy. (Każda z tych własności pociąga za sobą dwie pozostałe). $d_1 = 2asin\frac{1}{2}\alpha$, $d_2 = 2acos\frac{1}{2}\alpha$. Pole rombu

$$S = ah = a^2sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

W każdy romb można wpisać koło.

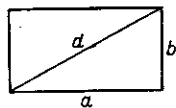


Rys. 89

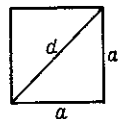


Rys. 90

Prostokąt i kwadrat. Równoległobok jest *prostokątem* (rys. 91), jeżeli: 1° wszystkie jego kąty są proste, 2° jego przekątne są równe. (Każda z tych własności wynika z drugiej). *Pole prostokąta* $S = ab$. Na każdym prostokącie można opisać koło.



Rys. 91

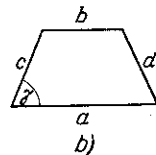
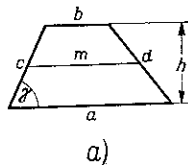


Rys. 92

Prostokąt jest *kwadratem* (rys. 92), jeżeli $a = b$. Przekątna $d = a\sqrt{2} \approx 1,4142a$, więc $a = d/\sqrt{2} \approx 0,7071d$. *Pole kwadratu* $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$.

Kwadrat jest jednocześnie prostokątem i rombem.

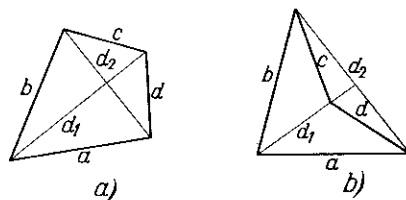
Trapez. Trapez jest to czworokąt o dwóch bokach równoległych (rys. 93a), a i b — podstawy trapezu, h — wysokość, m — linia środkowa, tzn. prosta łącząca środki nierównoległych boków; jest ona równoległa do podstaw, $m = \frac{1}{2}(a+b)$. *Pole trapezu* $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$.



Rys. 93

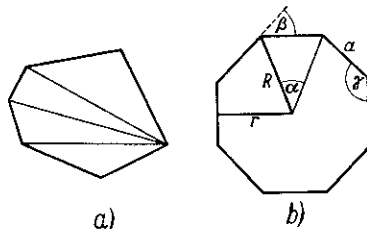
Trapez jest *równoramienny* (rys. 93b), jeżeli boki nierównoległe są równe. W takim przypadku $S = (a - c \cos \gamma) c \sin \gamma = (b + c \cos \gamma) c \sin \gamma$, gdzie γ jest kątem między podstawą a i ramieniem c .

Deltoid. Czworokąt jest *deltoidem*, jeżeli $a = b$ i $c = d$; deltoid może być wypukły (rys. 94a) lub wklęsły (rys. 94b). Przekątne są wzajemnie prostopadłe; przekątna d_1 (lub jej przedłużenie) dzieli przekątną d_2 na połowy. Kąt między bokami a i d jest równy kątowi między bokami b i c . *Pole deltoidu* $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.



Rys. 94

Wielokąt wypukły (rys. 95a). Jeśli liczba boków jest równa n , to suma kątów wewnętrznych jest równa $(n-2)180^\circ$. *Pole* oblicza się przez podział na trójkąty.



Rys. 95

Wielokąt wypukły jest *foremny*, jeżeli ma wszystkie boki równe i kąty równe. W wielokątach foremnych o n bokach (rys. 95b): kąt środkowy $\alpha = 360^\circ : n$, kąt zewnętrzny $\beta = 360^\circ : n$, kąt wewnętrzny $\gamma = 180^\circ - \beta$. Jeżeli R jest promieniem okręgu opisanego, a r — promieniem okręgu wpisanego (apotema wielokąta foremnego), to bok $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin \frac{1}{2}\alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$.

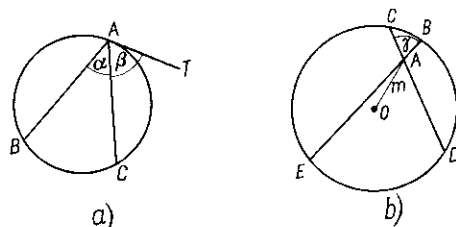
Pole wielokąta $S = \frac{1}{2}nar = nr^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}nR^2 \sin \alpha = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha$. Dane o poszczególnych wielokątach foremnych znaleźć można w tablicy na str. 214.

Elementy wielokątów foremnych. Oznaczenia: n — liczba boków, a — bok, R — promień koła opisanego, r — apotema (promień koła wpisanego).

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Okrąg koła. Oznaczenia: r — promień, d — średnica; $d = 2r$.

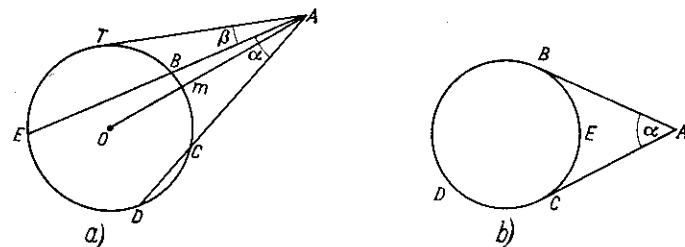
Kąty w kole. (W niżej podanych wzorach symbol $\widehat{AB}$ oznacza miarę stopniową łuku AB równą mierze stopniowej kąta środkowego $\angle AOB$). Rysunek 96a: kąt wpisany $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BC}$, kąt między cięciwą i styczną $\beta = \frac{1}{2}\widehat{AC}$. Rysunek 96b: kąt między cięciwami przecinającymi się wewnątrz koła $\gamma = \frac{1}{2}(\widehat{CB} + \widehat{ED})$. Rysunek 97a: kąt między



Rys. 96

siecznymi przecinającymi się zewnątrz koła $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$, między styczną a sieczną $\beta = \frac{1}{2}(\widehat{TE} - \widehat{TB})$. Rysunek 97b: kąt między dwiema stycznymi $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{BDC} - \widehat{BEC})$.

Związki miarowe w kole. Dla dwóch cięciw przecinających się wewnątrz koła (rys. 96b) zachodzi związek: $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$. Dla dwóch siecznych przecinających się zewnątrz koła (rys. 97a) zachodzą związki: $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.



Rys. 97

Długość okręgu C i pole koła S (r — promień, d — średnica):

$$\pi = \frac{C}{d} = 3,141\,592\,653\,589\,793 \dots$$

$$C = 2\pi r \approx 6,283r, \quad C = \pi d \approx 3,142d, \quad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3,545\sqrt{S},$$

$$S = \pi r^2 \approx 3,142r^2, \quad S = \frac{1}{4}\pi d^2 \approx 0,785d^2, \quad S = \frac{1}{4}Cd \approx 0,25Cd.$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0,159C, \quad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1,128\sqrt{S};$$

patrz także tablica na str. 70 - 72.

Odcinek kołowy i wycinek kołowy (rys. 98). Oznaczenia: r — promień, l — długość łuku, a — cięciwa, α — kąt środkowy, h — strzałka łuku.

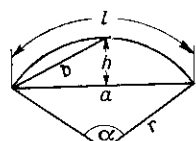
$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha,$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2} = r \left(1 - \cos \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{4}\alpha;$$

$l = ar$, gdzie a jest miarą łukową kąta środkowego, albo $l = \frac{2\pi ar}{360} \approx 0,01745 ar$, gdzie a jest miarą stopniową kąta środkowego.

Wzory przybliżone: $l = \frac{1}{3}(8b - a)$ albo $l = \sqrt{a^2 + \frac{16}{3}h^2}$.

Pole wycinka kołowego: $S = \frac{1}{2}ar^2$, gdzie α jest miarą łukową kąta



Rys. 98

środkowego, albo $S = \frac{\pi ar^2}{360} \approx 0,00873 ar^2$, gdzie α jest miarą stopniową kąta środkowego.

Pole odcinka kołowego: $S_1 = \frac{1}{2}[lr - a(r - h)] =$
 $= \frac{1}{2}[(l - a)r + ah] = \frac{1}{2}(a - \sin \alpha)r^2$, gdzie α jest

miarą łukową kąta środkowego, albo $S_1 =$
 $= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha\right)r^2$, gdzie α jest miarą stopniową kąta środkowego.

Tablice dla S_1 , l , h i a — patrz str. 76 - 82.

Pierścień kołowy (rys. 99). Średnica zewnętrzna $D = 2R$, średnica wewnętrzna $d = 2r$, promień środkowy $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$, szerokość pierścienia $\delta = R - r$.

Pole pierścienia kołowego

$$S = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) = \pi(R^2 - r^2) = 2\pi\varrho\delta.$$

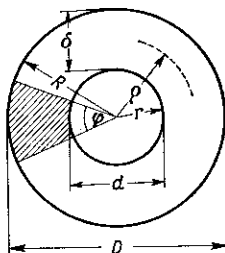
Pole wycinka pierścienia kołowego (zakresowane na rysunku 99) o kącie środkowym φ :

a. gdy φ wyrażone jest w mierze łukowej,

$$S = \frac{1}{2}\varphi(R^2 - r^2) = \varphi\varrho\delta;$$

b. gdy φ wyrażone jest w mierze stopniowej,

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\varrho\delta.$$



Rys. 99

B. STEREOMETRIA

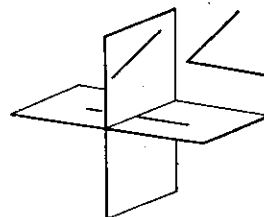
2. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Dwie proste leżące na jednej płaszczyźnie bądź mają jeden punkt wspólny, bądź nie mają żadnego punktu wspólnego. W ostatnim przypadku są one *równoległe*. Jeżeli przez dwie proste nie można poprowadzić płaszczyzny, nazywamy je *prostymi skośnymi*.

Kąt pomiędzy prostymi skośnymi mierzy się za pomocą kąta pomiędzy dwiema prostymi, do nich równoległymi, przechodzącymi

przez jeden punkt (rys. 100). Odległość między dwiema prostymi skośnymi jest to odcinek wspólnej prostopadłej do danych prostych skośnych, zawarty między tymi prostymi.

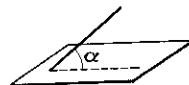
Dwie płaszczyzny bądź przecinają się wzdłuż prostej, bądź też nie mają punktów wspólnych. W ostatnim przypadku są one *równoległe*. Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do tej samej prostej, to są *równoległe*. Jeżeli na jednej płaszczyźnie leżą dwie przecinające



Rys. 100

się proste, odpowiednio *równoległe* do dwóch prostych na drugiej płaszczyźnie, to płaszczyzny te są *równoległe*.

Prosta i płaszczyzna. Prosta bądź leży cała na danej płaszczyźnie, bądź ma z nią jeden punkt wspólny, bądź nie ma z nią żadnego punktu wspólnego. W ostatnim przypadku prosta jest *równoległa* do płaszczyzny. Kąt między prostą a płaszczyzną jest to kąt między prostą i jej rzutem na płaszczyznę, jeżeli tym rzutem nie jest punkt (rys. 101). Jeśli prosta jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących na płaszczyźnie, to jest ona prostopadła do dowolnej prostej na tej płaszczyźnie (jest prostopadła do płaszczyzny); rzutem takiej prostej na płaszczyznę jest punkt.



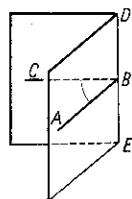
Rys. 101

3. Kąty dwuściennie. Kąty bryłowe

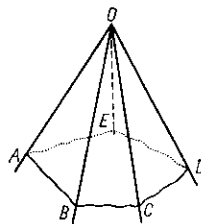
Kąt dwuścienny jest utworzony przez dwie półpłaszczyzny mające wspólną krawędź. Kąt dwuścienny mierzy się za pomocą jego kąta liniowego ABC (rys. 102), czyli kąta między dwiema prostopadłymi do krawędzi DE kąta dwuściennego, poprowadzonymi z jednego punktu B tej krawędzi na obu ścianach kąta dwuściennego.

Kąt wielościenny $OABCDE$ (rys. 103) jest utworzony przez kilka kątów płaskich o wspólnym wierzchołku O , mających parami

po jednym ramieniu wspólnym; kąty płaskie o wspólnym wierzchołku O nazywamy *ścianami* kąta wielościennego, a ramiona tych kątów nazywamy jego *krawędziami*. Dwie sąsiednie krawędzie kąta dwuściennego tworzą *kąt płaski* (czyli *ścianę*), a dwie sąsiednie ściany

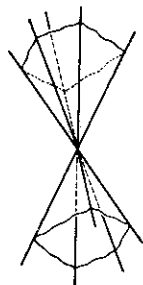


Rys. 102

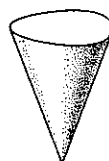


Rys. 103

tworzą *kąt dwuścienny* kąta wielościennego. Dwa kąty wielościenne są *równe*, jeżeli przy nakładaniu przystają do siebie; warunkiem ko-



Rys. 104



Rys. 105

niecznym jest równość odpowiednich kątów płaskich i odpowiednich kątów dwuściennych.

Jeżeli odpowiednio równe elementy kąta wielościennego ułożone są w odwrotnej kolejności, to te kąty wielościenne nie pokrywają się ze sobą przy nałożeniu; są one w tym przypadku symetryczne, tzn. mogą być umieszczone w pozycji, pokazanej na rysunku 104.

Kąt wielościenne jest *wypukły*, jeżeli całkowicie leży po jednej stronie płaszczyzny każdej jego ściany. Suma kątów płaskich $AOB + BOC + \dots + EOA$ dowolnego kąta wielościennego wypukłego (rys. 103) jest mniejsza niż 360° .

Kąty trójsienne są równe, jeżeli mają: 1° po jednym kącie dwuściennym równym, zawartym pomiędzy dwoma odpowiednio równymi i jednakowo umieszczonymi kątami płaskimi albo 2° po równym kącie płaskim przylegającym do dwóch odpowiednio równych i jednakowo umieszczonych kątów dwuściennych, albo 3° po trzy odpowiednio równe i jednakowo umieszczone kąty płaskie, albo też 4° po trzy odpowiednio równe i jednakowo umieszczone kąty dwuściennie.

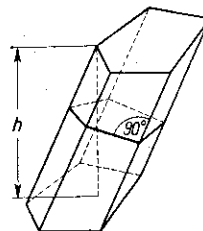
Kąt bryłowy jest to część przestrzeni ograniczona półprostymi wychodzącymi z danego punktu O (*wierzchołka*) i przechodzącymi przez wszystkie punkty krzywej zamkniętej, leżącej na powierzchni kuli o środku O (rys. 105). Określa on kąt widzenia, pod jakim dana krzywa widoczna jest z wierzchołka. *Miarą* kąta bryłowego jest pole wyciętej przez ten kąt części powierzchni kuli o środku O i promieniu 1. Na przykład dla stożka o kącie rozwarcia 120° kąt bryłowy jest równy π (patrz wzory na str. 226). Miara kąta bryłowego pełnego wynosi 4π . Miara ósemki przestrzeni (oktantu) wynosi $\frac{1}{2}\pi$.

4. Wielościany

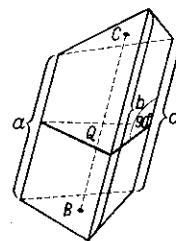
Oznaczenia: V — objętość, S — pole powierzchni całkowitej, M — pole powierzchni bocznej, h — wysokość, F — pole podstawy.

Wielościan jest to bryła ograniczona wielokątami ułożonymi w taki sposób, że każdy bok wielokąta jest wspólnym bokiem dwóch wielokątów. Wielokąty te nazywamy *ścianami* wielościanu, boki wielokątów — *krawędziami*, a wierzchołki — *wierzchołkami* wielościanu.

Graniastosłup (rys. 106) jest to wielościan, którego dwie ściany, zwane *podstawami*, są wielokątami przystającymi, leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane *ścianami bocznymi*, są równoległobokami. W graniastosłupie rozróżniamy krawędzie pod-



Rys. 106



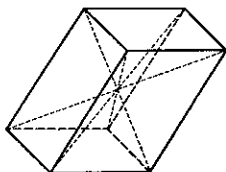
Rys. 107

staw i krawędzie boczne łączące odpowiednie wierzchołki dwóch podstaw. Graniastosłup jest *prosty*, jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw graniastosłupa; wówczas ściany boczne są prostokątami. Graniastosłup jest *prawidłowy*, jeżeli jest prosty i ma w podstawach wielokąty foremne.

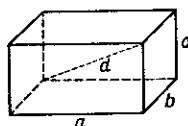
Pole powierzchni bocznej graniastosłupa $M = pl$, gdzie p jest to obwód przekroju graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi bocznych, a l długość krawędzi bocznej. $S = M + 2F$, $V = Fh$.

Dla graniastosłupa trójkątnego ukośnie ściętego $V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$ (rys. 107), gdzie a, b, c są to długości krawędzi bocznych, a Q jest to pole przekroju normalnego. Dla graniastosłupa n -kątnego skośnie ściętego $V = lQ$, gdzie l jest to długość odcinka BC , łączącego środki ciężkości podstaw, a Q jest to pole przekroju normalnego. (Odcinek l jest równoległy do krawędzi bocznych graniastosłupa).

Równoległościan (rys. 108) jest to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok. W równoległościanie wszystkie cztery przekątne przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w tym punkcie na połowy.



Rys. 108



Rys. 109

Prostopadłościan jest to równoległościan, którego wszystkie ściany są prostokątami. W prostopadłościanie (rys. 109) wszystkie przekątne są równe. Jeżeli a, b, c są krawędziami prostopadłościanu wychodzącymi z jednego wierzchołka, a d jest przekątną prostopadłościanu, to $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Sześcian jest to prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe. W sześcianie $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$, $V = a^3$, $S = 6a^2$.

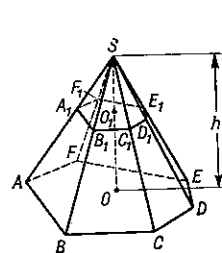
Ostrosłup (rys. 110). W podstawie leży dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami mającymi wspólny wierzchołek, zwany *wierzchołkiem ostrosłupa*. Ostrosłup nazywamy *n-kątnym*, jeżeli w podstawie leży n -kąt. Ostrosłup ten ma n ścian bocznych, a łącznie z podstawą ma ścian $n+1$. $V = \frac{1}{3}Fh$.

Jeżeli ostrosłup przecięty jest płaszczyzną równoległą do podstawy, to

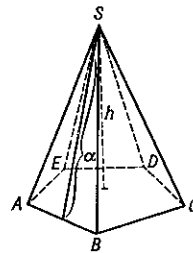
$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \dots = \frac{SO_1}{O_1O},$$

$$\frac{\text{pole } ABCDEF}{\text{pole } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2,$$

gdzie SO jest wysokością ostrosłupa, tj. prostą prostopadłą do podstawy, wychodzącą z wierzchołka.



Rys. 110



Rys. 111

Ostrosłup jest *prawidłowy* (rys. 111), jeżeli jego podstawą jest wielokąt foremny, a spodem wysokości jest środek tego wielokąta. Dla ostrosłupa prawidłowego $M = \frac{1}{2}pa$, gdzie p jest to długość obwodu podstawy, a a jest to wysokość ściany bocznej.

Czworościan jest to ostrosłup trójkątny (rys. 112). Jeżeli $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, to ⁽¹⁾

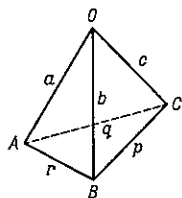
$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ostrosłup ścięty (płaszczyzna przecięcia jest równoległa do podstawy, rys. 113). Jeżeli F i f są to pola podstaw, h jest to wysokość (odległość między płaszczyznami podstaw), a i i A dwa odpowiadające sobie boki podstaw, to

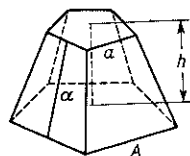
$$V = \frac{1}{3}h[F + f + \sqrt{Ff}] = \frac{1}{3}hF \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2 \right].$$

⁽¹⁾ O wyznacznikach — patrz str. 183.

Dla ostrosłupa ściętego prawidłowego $M = \frac{1}{2}(P+p)a$, gdzie P i p są to długości obwodów podstaw, a a jest wysokością ściany bocznej mającej kształt trapezu równoramiennego.

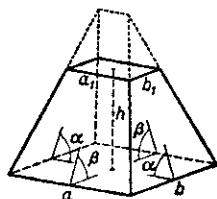


Rys. 112

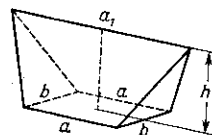


Rys. 113

Pryzma. Podstawami są prostokąty leżące w dwóch płaszczyznach równoległych; przeciwległe ściany boczne są jednakowo nachylone do



Rys. 114



Rys. 115

podstawy, ale po przedłużeniu nie przecinają się w jednym punkcie (a więc pryzma nie jest ostrosłupem ściętym) (rys. 114). Jeżeli a, b i a_1, b_1 są bokami podstaw, h — wysokością pryzmy, to

$$V = \frac{1}{6} h [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1] = \frac{1}{6} h [ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1].$$

Klin. Podstawą jest prostokąt, a ścianami bocznymi są dwa trapezy równoramienne i dwa trójkąty równoramienne (rys. 115). $V = \frac{1}{6} (2a + a_1)bh$.

Wielościan foremny jest to wielościan, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi równymi i wszystkie kąty bryłowe są równe.

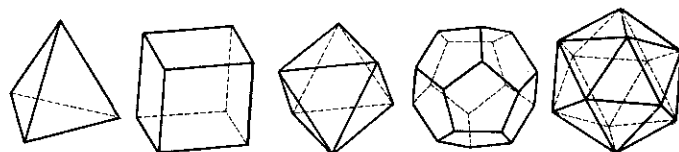
Istnieje pięć wielościanów foremnych (rys. 116), dane o nich patrz w tablicy.

Elementy wielościanów foremnych (a — długość krawędzi)

Nazwa	Liczba ścian i ich kształt	Liczba		Pole całkowitej powierzchni	Objętość
		krawędzi	wierzchołków		
czworościan (tetraedr)	4 trójkąty	6	4	$1,7321 a^2$	$0,1179 a^3$
sześcian (heksaedr)	6 kwadratów	12	8	$6 a^2$	a^3
ośmiościan (oktaedr)	8 trójkątów	12	6	$3,4641 a^2$	$0,4714 a^3$
dwunastościan (dodekaedr)	12 pięciokątów	30	20	$20,6457 a^2$	$7,6631 a^3$
dwudziestościan (ikosaedr)	20 trójkątów	30	12	$8,6603 a^2$	$2,1817 a^3$

Twierdzenie Eulera. Jeżeli w jest to liczba wierzchołków wielościanu, s — liczba ścian i k — liczba krawędzi, to $w + s = k + 2$ (pod warunkiem, że wielościan jest wypukły, lub że można w sposób ciągły przekształcić go na wypukły).

Przykłady — patrz w tablicy wielościanów foremnych.



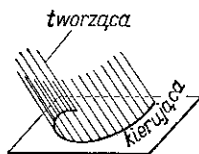
Rys. 116

5. Bryły krzywopowierzchniowe

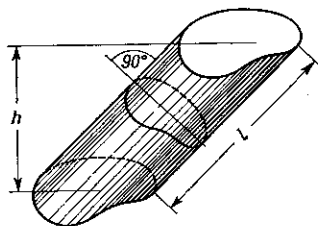
Oznaczenia: V — objętość, S — pole powierzchni całkowitej, M — pole powierzchni bocznej, h — wysokość, F — pole podstawy.

Powierzchnia cylindryczna (rys. 117) jest utworzona przez linię prostą (tworzącą) przesuwającą się równoległe do obranego kierunku wzdłuż pewnej krzywej (kierującej).

Walec jest to bryła ograniczona powierzchnią cylindryczną o kierującej zamkniętej oraz dwiema płaszczyznami równoległymi stanowiącymi podstawy walca. Za kierującą powierzchni walcowej można przyjąć kontur którejkolwiek z podstaw walca. Dla dowolnego walca



Rys. 117



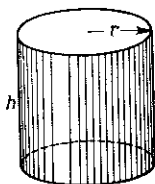
Rys. 118

(rys. 118): $M = sl = ph$, gdzie s oznacza długość obwodu przekroju normalnego, l — tworzącą walca, p — długość obwodu podstawy, h — wysokość walca. $V = Ql = Fh$, gdzie Q oznacza pole przekroju normalnego, a F — pole podstawy walca.

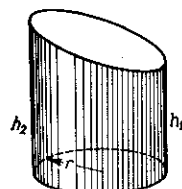
Walec obrotowy ma w podstawie koło, a tworzące są prostopadłe do płaszczyzny podstawy (rys. 119):

$$M = 2\pi rh, \quad S = 2\pi r(r+h), \quad V = \pi r^2 h,$$

gdzie r jest to promień podstawy, a h — wysokość walca.



Rys. 119



Rys. 120

Walec obrotowy ukośnie ścięty (rys. 120). Podstawa eliptyczna ma półosie $b = r$ i $a = \sqrt{r^2 + \left[\frac{1}{2}(h_2 - h_1)\right]^2}$, gdzie r jest promieniem walca, a h_1 i h_2 oznaczają najmniejszą i największą tworzącą walca ściętego.

Pole podstawy eliptycznej F' :

$$F' = \pi ab, \quad M = \pi r(h_1 + h_2), \quad S = \pi r(r + a + h_1 + h_2),$$

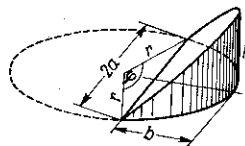
$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 (h_1 + h_2).$$

Ścinek walca obrotowego (rys. 121; $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$ w radianach):

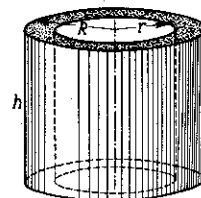
$$V = \frac{h}{3b} [a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)a] = \frac{hr^3}{b} \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} - a \cos \alpha \right),$$

$$M = \frac{2rh}{b} [(b - r)a + a].$$

Wzory pozostają prawdziwe w przypadku gdy $b > r$, $\varphi > \pi$.



Rys. 121

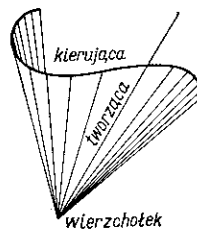


Rys. 122

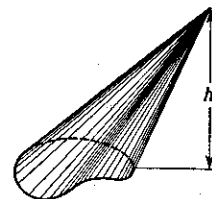
Rura cylindryczna (rys. 122). R i r są to: promień zewnętrzny i wewnętrzny rury, $\delta = R - r$ (grubość ścianki rury), $\varrho = \frac{R + r}{2}$ (średni promień rury):

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\varrho.$$

Powierzchnia stożkowa utworzona jest przez linię prostą mającą jeden punkt stały (*wierzchołek*) i przesuwaną się wzdłuż linii krzywej (*kierującej*) (rys. 123).



Rys. 123



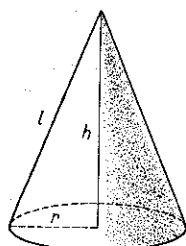
Rys. 124

Stożek (rys. 124) ograniczony jest powierzchnią stożkową o kierunku zamkniętej oraz płaszczyzną stanowiącą podstawę stożka. Za kierującą powierzchni stożkowej można przyjąć kontur podstawy stożka. Dla dowolnego stożka $V = \frac{1}{3}Fh$.

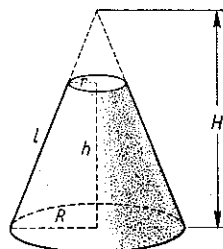
Stożek obrotowy (rys. 125) ma w podstawie koło, którego środek jest spodkiem wysokości stożka:

$$M = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}, \quad S = \pi r(r + l), \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

gdzie r jest to promień podstawy, h — wysokość, a l — tworząca stożka.



Rys. 125



Rys. 126

Stożek obrotowy ścięty (rys. 126):

$$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}, \quad M = \pi l(R+r), \quad V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$H = h + \frac{hr}{R-r} = \frac{hR}{R-r}.$$

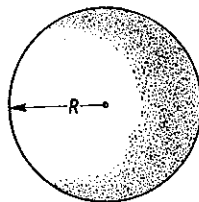
Przecięcia stożkowe — patrz str. 275.

Sfera (powierzchnia kuli). R jest to promień kuli, $D = 2R$ — średnica kuli (rys. 127). Każdy przekrój płaszczyzną jest kołem. *Koło wielkie* (o promieniu R) jest to przekrój sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Przez każde dwa punkty sfery (niebędące przeciwległymi końcami średnicy) można zawsze poprowadzić jedno i tylko jedno koło wielkie. Mniejszy łuk tego koła wielkiego stanowi najkrótszą odległość na sferze pomiędzy danymi punktami. O geometrii na sferze patrz str. 244.

Pole powierzchni kuli:

$$S = 4\pi R^2 \approx 12,57R^2,$$

$$S = \pi D^2 \approx 3,142D^2, \quad S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4,836\sqrt[3]{V^2}.$$



Rys. 127

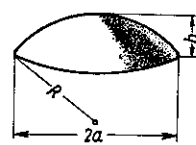
Objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4,189R^3, \quad V = \frac{1}{6}\pi D^3 \approx 0,5236D^3,$$

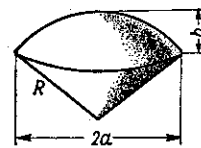
$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0,09403\sqrt{S^3}.$$

Promień kuli:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0,2821\sqrt{S}, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0,6204\sqrt[3]{V}.$$



Rys. 128



Rys. 129

Odcinek kuli (rys. 128):

$$a^2 = h(2R-h), \quad M = 2\pi R h = \pi(a^2 + h^2) = \pi l^2,$$

$$S = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2), \quad V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

Wycinek kuli (rys. 129):

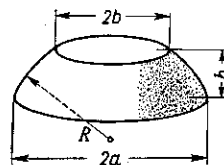
$$S = \pi R(2h+a), \quad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Warstwa kulista (rys. 130 i 131):

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2, \quad M = 2\pi R h, \quad S = \pi(2Rh + a^2 + b^2),$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Jeśli przez V_1 oznaczymy objętość stożka ściętego wpisanego w warstwę kulistą, to $V - V_1 = \frac{1}{6}\pi h l^2$, gdzie l jest tworzącą stożka.



Rys. 130



Rys. 131

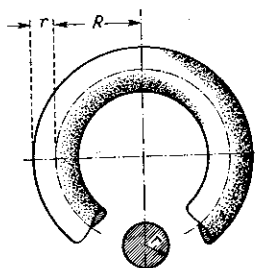
Torus (rys. 132) jest to bryła utworzona przez obrót koła dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tego koła i nie przecinającej go:

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39,48Rr,$$

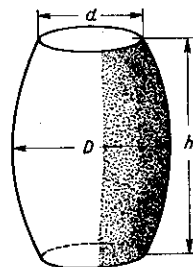
$$S = \pi^2 Dd \approx 9,870Dd,$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19,74Rr^2,$$

$$V = \frac{1}{4}\pi^2 Dd^2 \approx 2,467Dd^2.$$



Rys. 132



Rys. 133

Beczka (rys. 133). Jeżeli powierzchnia boczna beczki powstała z obrotu łuku koła dookoła prostej leżącej w jego płaszczyźnie, objętość beczki oblicza się według wzorów przybliżonych:

$$V = 0,262h(2D^2 + d^2) \quad \text{lub} \quad V = 0,0873h(2D + d)^2.$$

Dla beczki powstałej z obrotu łuku paraboli stosuje się wzór

$$V = \frac{1}{15}\pi h \left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2 \right) = 0,05236h(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

IV. TRYGNOMETRIA

A. TRYGNOMETRIA PŁASKA

1. Funkcje trygonometryczne

Miara łukowa kąta. Na równi ze stosowaną praktycznie miarą kąta w stopniach w zagadnieniach teoretycznych stosuje się *miarę łukową*. Kąt środkowy α w dowolnym kole mierzy się stosunkiem długości łuku l , na którym ten kąt się opiera, do długości promienia tego koła r :

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Przy tym sposobie mierzenia kątem jednostkowym jest *radian*, jest to kąt środkowy w kole oparty na łuku, którego długość równa się promieniowi koła:

$$\begin{aligned} 1 \text{ radian} &= \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44,8'' = \\ &= 57,2958^\circ = 3437,75' = 206264,8'', \end{aligned}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radiana} = 0,017453 \text{ radiana}.$$

Zamianę miary stopniowej na łukową i odwrotnie wykonuje się według wzoru

$$\alpha^\circ = \alpha \frac{\pi}{180} \text{ radiana}, \quad \alpha \text{ radianów} = \alpha \frac{180^\circ}{\pi}.$$

W szczególności $360^\circ = 2\pi$ radianów, $180^\circ = \pi$ radianów, $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ radianów, $60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ radianów, $45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ radianów, $30^\circ = \frac{1}{6}\pi$ radianów.

Tablice zamiany stopni na radiany — patrz str. 82 i 83.

Przy użyciu miary stopniowej we wzorach matematycznych nigdy nie pomija się oznaczenia stopnia, natomiast przy użyciu miary łukowej

kowej kąta podaje się samą tylko liczbę, bez oznaczenia jednostki miary (radiana). Na przykład dla sumy kątów α, β, γ dowolnego trójkąta możemy napisać

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{lub} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Określenia. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego można określić z trójkąta prostokątnego (rys. 134):

$$\text{sinus:} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\text{cosinus:} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

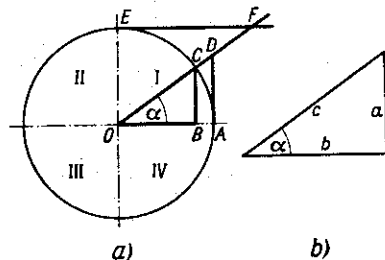
$$\text{tangens:} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\text{cotangens:} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b}{a},$$

$$\text{secans:} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b},$$

$$\text{cosekans:} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}.$$

Do wyznaczenia funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta służy koło trygonometryczne (rys. 134), w którym kąt α mierzy się od po-



Rys. 134

czątkowego, stałego ramienia OA do końcowego, ruchomego ramienia OC w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówki zegara (jest to dodatni kierunek odmierzenia kątów).

Koło trygonometryczne dzieli się na cztery ćwiartki: I (od 0° do 90°), II (od 90° do 180°), III (od 180° do 270°), IV (od 270° do 360°).

Jeżeli promień koła trygonometrycznego oznaczmy przez r , to funkcje trygonometryczne kąta α określimy za pomocą wzorów:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{OB}{r},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{r}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{EF}{r},$$

$$\sec \alpha = \frac{OD}{r}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{OF}{r}.$$

Zazwyczaj przyjmuje się $r = 1$.

Znaki. Funkcjom trygonometrycznym przypisujemy określone znaki zależnie od tego, w której ćwiartce koła trygonometrycznego (rys. 134) leży promień ruchomy OC , według następującej tablicy:

ćwiartka	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Zakres wartości funkcji trygonometrycznych

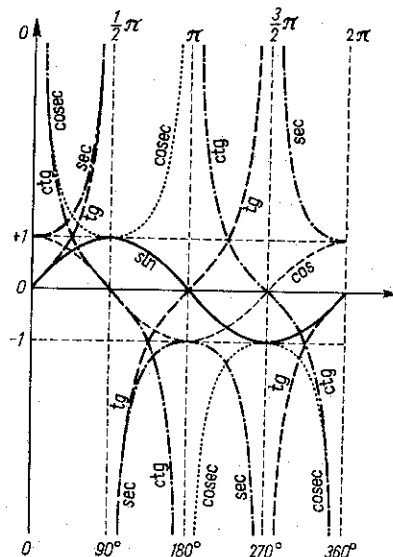
sinus i cosinus: od -1 do $+1$,

tangens i cotangens: od $-\infty$ do $+\infty$,

secans i cosekans: od $-\infty$ do -1 i od $+1$ do $+\infty$.

Wartości funkcji dla kątów będących wielokrotnościami 30° i 45° podane są w tablicy na str. 233.

Przebieg zmiany funkcji trygonometrycznych przy wzrastaniu kąta od 0° do 360° podają wykresy na rysunku 135. Krzywą $y =$



Rys. 135

$= \sin x$, gdzie x jest wyrażone w mierze łukowej, nazywamy *sinusoidą*. Sinusoida jest szczególnym przypadkiem harmoniki, omówionej na str. 237.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta odnajduje się według następujących reguł:

1. Jeżeli kąt jest większy od 360° , to funkcję sprowadzamy do funkcji kąta pomiędzy 0° a 360° (a tangens i cotangens do kąta pomiędzy 0° a 180°) według następujących wzorów:

$$\sin(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(n \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(n \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

2. Jeżeli kąt jest ujemny, to funkcję sprowadzamy do funkcji kąta dodatniego według wzorów:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

3. Jeżeli $90^\circ < \alpha < 360^\circ$, to funkcję sprowadzamy do funkcji kąta ostrego według wzorów *redukcyjnych*:

Funkcja	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

4. Jeżeli kąt jest ostry: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to wartość funkcji odnajdujemy z tablic (str. 55-58).

Na przykład $\sin(-1000^\circ) = -\sin 1000^\circ = -\sin(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = -\sin 280^\circ = +\cos 10^\circ = +0,9848^{(1)}$.

⁽¹⁾ Wartości funkcji kątów podanych w radianach odnajdujemy z tablic na str. 59-63, ułożonych dla wartości argumentów od 0,00 do 1,60. Jeżeli dany kąt przekracza granice tablicy, to postępujemy się tymi samymi wzorami redukcyjnymi i regułami, co dla kątów mierzonych w stopniach, na przykład $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$.

Wartości funkcji trygonometrycznych

dla funkcji będących wielokrotnościami 30° i 45° ($\frac{1}{6}\pi$ i $\frac{1}{4}\pi$)

Funkcje	Kąty I ćwiartki					Kąty II ćwiartki			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
cosec	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$

Funkcje	Kąty III ćwiartki					Kąty IV ćwiartki			
	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sec	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
cosec	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$

2. Podstawowe wzory trygonometrii

Funkcje jednego kąta:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1,$$

$$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad \cos \alpha \operatorname{seca} = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Wyrażenie jednej funkcji trygonometrycznej przez inną funkcję trygonometryczną (tego samego kąta):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \varepsilon \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \eta \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \\ &= \vartheta \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\operatorname{seca}} = \frac{1}{\operatorname{coseca}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \eta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \eta \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \varepsilon \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{seca}} = \\ &= \vartheta \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{coseca}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \eta \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \varepsilon \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \vartheta \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \\ &= \vartheta \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \eta \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \varepsilon \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \vartheta \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \\ &= \vartheta \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}, \end{aligned}$$

gdzie ε , η i ϑ oznaczają odpowiednio znaki wartości funkcji $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla danego kąta α .

Funkcje sumy i różnicy kątów:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \\ &+ \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \\ &- \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}.$$

Funkcje kątów wielokrotnych:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

$$\sin 4\alpha = 8 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1},$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Przy obliczaniu $\sin n\alpha$ i $\cos n\alpha$ dla większych wartości n dogodnie jest używać wzoru *de Moivre'a* dla liczb zespolonych (str. 621) ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \\ &= \cos^n \alpha + i n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha - \\ &- i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha + \dots, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \\ &- \binom{n}{6} \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots, \end{aligned}$$

$$\sin n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

⁽¹⁾ Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ jest objaśniony na str. 206 i 207.

Funkcje kąta połówkowego:

$$\sin \frac{1}{2}a = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \vartheta \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 + \cos a},$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \eta \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}a = \vartheta \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a},$$

gdzie ε , η i ϑ oznaczają odpowiednio znaki wartości funkcji $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$ dla dowolnego kąta $\frac{1}{2}a$.

Suma i różnica funkcji:

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{a+\beta}{2} \cos \frac{a-\beta}{2},$$

$$\sin a - \sin \beta = 2 \cos \frac{a+\beta}{2} \sin \frac{a-\beta}{2},$$

$$\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{a+\beta}{2} \cos \frac{a-\beta}{2},$$

$$\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{a+\beta}{2} \sin \frac{a-\beta}{2},$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2}a, \quad 1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}a \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}a \right),$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2}a, \quad 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}a \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}a \right),$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(a \pm \beta)}{\cos a \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(a - \beta)}{\cos a \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(a \pm \beta)}{\sin a \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(a + \beta)}{\sin a \cos \beta}.$$

Iloczyn funkcji:

$$\sin a \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)],$$

$$\cos a \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(a - \beta) + \cos(a + \beta)],$$

$$\sin a \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(a - \beta) + \sin(a + \beta)],$$

$$\sin a \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} [\sin(a + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - a) + \sin(\gamma + a - \beta) - \sin(a + \beta + \gamma)],$$

$$\sin a \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [\sin(a + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - a) + \sin(\gamma + a - \beta) - \sin(a + \beta + \gamma)],$$

$$\sin a \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [-\cos(a + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - a) + \cos(\gamma + a - \beta) - \cos(a + \beta + \gamma)],$$

$$\cos a \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [\cos(a + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - a) + \cos(\gamma + a - \beta) + \cos(a + \beta + \gamma)].$$

Potęgi funkcji:

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a), \quad \sin^3 a = \frac{1}{4} (3 \sin a - \sin 3a),$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a), \quad \cos^3 a = \frac{1}{4} (\cos 3a + 3 \cos a),$$

$$\sin^4 a = \frac{1}{8} (\cos 4a - 4 \cos 2a + 3),$$

$$\cos^4 a = \frac{1}{8} (\cos 4a + 4 \cos 2a + 3).$$

Przy obliczaniu $\sin^2 a$ i $\cos^2 a$ dla większych wartości n można stosować kolejno wzory na $\cos na$ i $\sin na$ ze str. 235.

3. Harmoniki

Określenia. W wielu zagadnieniach mechaniki i fizyki rozważa się wielkości zależne od czasu t i wyrażające się wzorem

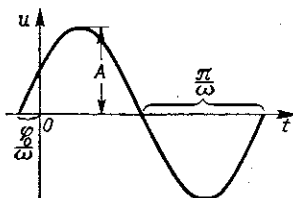
$$(1) \quad u = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Takie wielkości nazywamy *harmonikami*, a ich zmiany w zależności od czasu nazywamy *drganiami harmonicznymi*. Wykres harmoniki (rys. 136) można otrzymać odpowiednio przekształcając i przesuwając sinusoidę. Parametr A (dodatni) nazywamy *amplitudą* drgań harmonicznycch (jest to największe odchylenie punktu harmoniki od osi odciętych); parametr ω (dodatni) jest to *prędkość kątowa* lub *pulsacja* drgań harmonicznycch, a φ jest to *faza początkowa*. Harmonika jest funkcją okresową o okresie $T = 2\pi/\omega$, wielkość $1/T$ oznacza ilość drgań w jednostce. Okres T daje na wykresie harmoniki długość jednej fali. Gdy $A = 1$, $\omega = 1$ i $\varphi = 0$, harmonika jest zwykłą sinusoidą o długości fali $T = 2\pi$. Wielkość $t = \omega/2\pi = 1/T$ nazywamy *częstotliwością*.

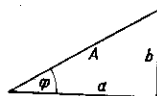
Wzór (1) można napisać w postaci

$$(2) \quad u = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

przy czym $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = b/a$; związki między parametrami a , b , A i φ można przedstawić jako związki między elementami trójkąta prostokątnego (rys. 137).



Rys. 136



Rys. 137

Działania na harmonikach. Suma dwóch harmonik o tej samej częstotliwości ω jest także harmoniką o częstotliwości ω :

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie

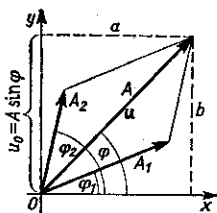
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Kombinacja liniowa kilku harmonik o tej samej częstotliwości jest również harmoniką o tej samej częstotliwości:

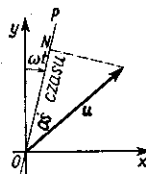
$$\sum_i c_i A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi);$$

A i φ odnajdujemy graficznie na wykresie wektorowym.

Wykres wektorowy harmonik. Harmonikę (1) lub (2) dogodnie jest przedstawić na płaszczyźnie w postaci wektora u , którego początek leży w punkcie O , a koniec ma współrzędne biegunowe



Rys. 138



Rys. 139

$\varphi = A, \varphi$ albo współrzędne prostokątne $x = a, y = b$ (str. 255 i 256). Obrazem sumy dwóch harmonik jest wektor stanowiący sumę wektorów wyrażających poszczególne składniki (rys. 138), a obrazem kombinacji liniowej kilku harmonik $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ jest odpowiednia kombinacja liniowa wektorów wyrażających dane harmoniki $u_1, u_2, \dots, u_n$. Takie przedstawienie harmonik nazywamy *wykresem wektorowym harmonik*.

Wartość u odpowiadającą danej chwili t otrzymuje się na wykresie wektorowym w sposób następujący:

Oś Oy obracamy dookoła punktu O (rys. 139) o kąt ωt zgodnie z obiegiem wskazówek zegara i otrzymujemy oś OP , tak zwaną *oś czasu*. Mówimy, że oś czasu obraca się ze stałą prędkością kątową ω . W chwili początkowej ($t = 0$) oś czasu pokrywa się z osią Oy . Wtedy rzut ON rozważanego wektora u na oś czasu jest dla każdej chwili t równy harmonice $u = A \sin(\omega t + \varphi)$. Gdy $t = 0$, mamy rzut $u_0 = A \sin \varphi$ wektora u na oś Oy (rys. 138).

4. Rozwiązywanie trójkątów

Trójkąt prostokątny. Oznaczenia: a, b — przyprostokątne, c — przeciwprostokątna, A, B — kąty naprzeciw boków a i b .

Związki podstawowe:

$$a = c \sin A = c \cos B, \quad a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B.$$

Dane	Wzory do wyznaczania pozostałych elementów		
c, A	$B = 90^\circ - A,$	$a = c \sin A,$	$b = c \cos A$
a, A	$B = 90^\circ - A,$	$b = a \operatorname{ctg} A,$	$c = \frac{a}{\sin A}$
a, c	$\sin A = \frac{a}{c},$	$b = c \cos A,$	$B = 90^\circ - A$
a, b	$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$	$c = \frac{a}{\sin A},$	$B = 90^\circ - A$

Trójkąt ukośnokątny. Oznaczenia: a, b, c — boki, A, B, C — przeciwległe kąty, S — pole, R — promień koła opisanego, r — promień koła wpisanego, p — połowa obwodu trójkąta ($p = \frac{1}{2}(a+b+c)$).

Związki podstawowe:

$$1. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (wzór sinusów, twierdzenie Snelliusa),}$$

$$2. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ (wzór cosinusów, twierdzenie Carnota),}$$

$$3. \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B) \text{ (wzór tangensów,}$$

twierdzenie Regiomontana),

$$4. S = \frac{1}{2} ab \sin C = \\ = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dalsze związki:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B},$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \end{aligned} \right\} \text{ (wzory połówkowe),}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(A-B) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2}(A+B) \right]} = \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(A-B) \right]}{\sin \frac{1}{2} C} \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(A-B) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2}(A+B) \right]} = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(A-B) \right]}{\cos \frac{1}{2} C} \end{aligned} \right\} \text{ (wzory Nepera).}$$

Obliczanie odcinków związanych z trójkątem:

$$\text{Wysokość na bok } a: h_a = b \sin C = c \sin B.$$

$$\text{Środkowa boku } a: m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}.$$

$$\text{Dwusieczna kąta } A: l_A = \frac{2bc \cos \frac{1}{2} A}{b+c}.$$

$$\text{Promień koła opisanego: } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

Promień koła wpisanego:

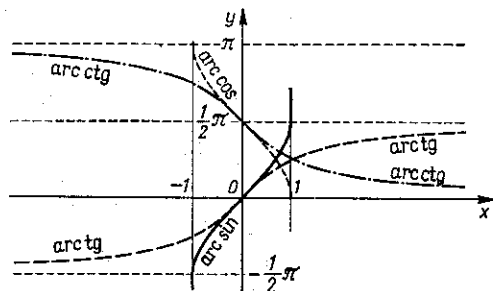
$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p} = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \\ = (p-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 4R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{a \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}.$$

Dane	Wzory do wyznaczenia pozostałych elementów
1. Bok i dwa kąty: a, A, B	$C = 180^\circ - A - B, \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
2. Dwa boki i kąt między nimi zawarty: a, b, C	$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}, \quad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} C,$ po otrzymaniu $A+B$ i $A-B$ znajdujemy A i B , $c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
3. Dwa boki i kąt naprzeciw jednego z nich a, b, A	$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$ jeżeli $a \geq b$, to $B < 90^\circ$ i ma tylko jedną wartość; jeżeli $a < b$, to 1° B ma dwie wartości, gdy $b \sin A < a$ ($B_2 = 180^\circ - B_1$), 2° B ma jedną wartość (90°), gdy $b \sin A = a$, 3° trójkąt nie istnieje, gdy $b \sin A > a$, $C = 180^\circ - (A+B), \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C$
4. Trzy boki: a, b, c	$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ $r = \frac{S}{p},$ $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$

5. Funkcje cyklometryczne (odwrotne funkcje trygonometryczne)

Określenia. Funkcjami cyklometrycznymi zmiennej x (odwrotnymi funkcjami trygonometrycznymi) nazywamy funkcje określone równaniami:

$$y = \arcsin x \text{ (czytamy: arcus sinus } x), \text{ jeżeli } -1 \leq x \leq 1, x = \sin y \text{ i } -\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi,$$



Rys. 140

$$y = \arccos x \text{ (czytamy: arcus cosinus } x), \text{ jeżeli } -1 \leq x \leq 1, x = \cos y \text{ i } 0 \leq y \leq \pi,$$

$$y = \arctg x \text{ (czytamy: arcus tangens } x), \text{ jeżeli } x = \tg y \text{ i } -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi,$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \text{ (czytamy: arcus cotangens } x), \text{ jeżeli } x = \operatorname{ctg} x \text{ i } 0 < y < \pi.$$

Przykłady:

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi, \quad \arctg 1 = \frac{1}{4}\pi,$$

$$\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi.$$

Wykresy funkcji cyklometrycznych podane są na rysunku 140.

Wyrażanie jednych funkcji cyklometrycznych przez inne

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \pi - \operatorname{arccotg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ponadto dla dodatnich wartości x zachodzą związki:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Podstawowe związki pomiędzy funkcjami cyklometrycznymi

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (xy \leq 0 \text{ lub } x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (x > 0, y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1)$$

$$= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (x < 0, y < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1),$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad (xy \geq 0 \text{ lub } x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad (x > 0, y < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1)$$

$$= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad (x < 0, y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1),$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad (x+y \geq 0)$$

$$= 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad (x+y < 0),$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad (x \geq y)$$

$$= \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad (x < y),$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1)$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (x > 0, \quad xy > 1)$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (x < 0, \quad xy > 1),$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad (xy > -1)$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad (x > 0, \quad xy < -1)$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad (x < 0, \quad xy < -1),$$

$$2\operatorname{arcsin} x = \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad \left(|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pi - \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1\right)$$

$$= -\pi - \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad \left(-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$2\operatorname{arccos} x = \operatorname{arccos}(2x^2-1) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$= 2\pi - \operatorname{arccos}(2x^2-1) \quad (-1 \leq x < 0),$$

$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x > 1)$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x < -1),$$

$$\cos(n\operatorname{arccos} x) = 2^{n-1} T_n(x) \quad (n \geq 1) \quad (1),$$

gdzie

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2^n}.$$

Gdy n jest całkowite, $T_n(x)$ jest wielomianem względem x (wielomianem Czebyszewa).

B. TRYGNOMETRIA SFERYCZNA

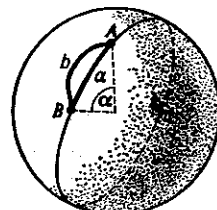
6. Geometria na powierzchni kuli

Linie geodezyjne na kuli. Przecinając kulę płaszczyzną przechodzącą przez jej środek otrzymujemy na jej powierzchni (na sferze) tak zwane *koło wielkie*, którego promień równa się promieniowi kuli.

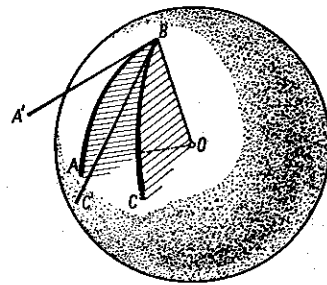
(1) Wzór jest prawdziwy dla niecałkowitych wartości n .

Przez każde dwa punkty A i B na powierzchni kuli, nie będące końcami tej samej średnicy kuli, można poprowadzić tylko jedno koło wielkie; mniejszy łuk tego koła AaB (rys. 141) jest najkrótszą ze wszystkich linii na powierzchni kuli łączących te punkty, na przykład łuk koła wielkiego AaB jest mniejszy niż łuk AbB każdego innego koła łączącego na powierzchni kuli punkty A i B . Taki łuk koła wielkiego nazywamy *linią geodezyjną* na sferze (1); linie geodezyjne na powierzchni kuli odgrywają taką rolę, jak proste na płaszczyźnie.

Pomiary łuków i kątów na sferze. Długość łuku koła wielkiego $\sim a$ odpowiadającego kątowi środkowemu α (wyrażonemu w ra-



Rys. 141



Rys. 142

dianach) równa się $R\alpha$, gdzie R jest promieniem kuli; dla jednej i tej samej sfery wygodnie jest przyjąć promień za jednostkę miary łuków; wtedy $\sim a = \alpha$. W dalszych wzorach przyjęto $R = 1$.

Kąt ABC utworzony na sferze przez dwa łuki koła wielkiego (rys. 142) mierzymy za pomocą kąta liniowego $A'BC'$ między stycznymi w punkcie B do odpowiednich łuków, lub — co na jedno wypada — za pomocą kąta dwuściennego ograniczonego płaszczyznami OBA i OBC .

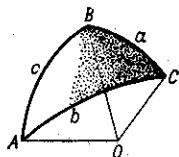
Trójkąty sferyczne. Trzy koła wielkie tworzą na sferze kilka *trójkątów sferycznych*. Rozważmy ten z nich, który ma wszystkie boki i kąty mniejsze od 180° . Boki a, b, c trójkąta sferycznego mierzymy kątami płaskimi kąta trójsiennego $OABC$ (rys. 143), gdzie O jest środkiem sfery, natomiast kąt A, B, C trójkąta sferycznego mierzymy kątami dwuściennymi tegoż kąta trójsiennego.

Podstawowa własność trójkąta sferycznego. Suma kątów $A+B+C$ trójkąta sferycznego jest zawsze większa od 180° . Różnicę

(1) Patrz str. 338.

$(A+B+C)-\pi = \delta$ wyrażoną w radianach nazywamy *przewyżką sferyczną* danego trójkąta sferycznego.

Pole trójkąta sferycznego: $S = R^2 \delta$, gdzie R jest promieniem sfery, a δ jest przewyżką sferyczną. Pole dwukąta utworzonego przez dwa



Rys. 143



Rys. 144

półokręgi kół wielkich (rys. 144): $S = 2R^2 A$, gdzie A dwukąta wyrażony jest w radianach.

7. Rozwiązywanie trójkątów sferycznych

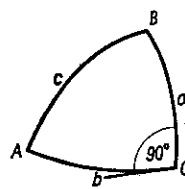
Trójkąty sferyczne prostokątne. Oznaczenia: a, b — przyprostokątne, c — przeciwprostokątna, A i B — kąty przeciwległe bokom a i b (rys. 145).

Związki podstawowe:

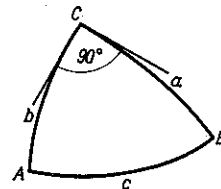
1. $\sin a = \sin c \sin A$, 6. $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$,
2. $\sin b = \sin c \sin B$, 7. $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$,
3. $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$, 8. $\cos B = \cos b \sin A$,
4. $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$, 9. $\cos A = \cos a \sin B$,
5. $\cos c = \cos a \cos b$, 10. $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

Dane	Numery wzorów na odszukanie pozostałych elementów
przeciwprostokątna c i kąt A	a (1), b (7), B (10)
przyprostokątna a i kąt przeciwległy A	b (3), c (1), B (9)
przyprostokątna a i kąt przylegający B	b (4), c (6), A (9)
dwie przyprostokątne a i b	c (5), A (3), B (4)
dwa kąty A i B	a (9), b (8), c (10)

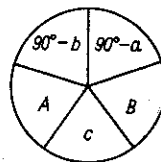
Wzorów 1-10 można używać według następującej *reguły Nepera*: jeżeli rozmieścimy pięć elementów trójkąta sferycznego prostokątnego na kole (pomijając kąt prosty) w takiej kolejności, w jakiej wy-



Rys. 145



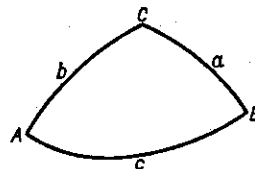
Rys. 146



stępują w trójkącie i zastąpimy przy tym boki a i b ich dopełnieniami do 90° (rys. 146), to:

1° Cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi cotangen-
sów dwóch przylegających do niego elementów.

2° Cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi sinusów
dwóch nie przylegających do niego elementów.



Rys. 147

Na przykład

$$\cos A = \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \operatorname{ctg} c, \quad \cos(90^\circ - a) = \sin c \sin A.$$

Trójkąty sferyczne ukośnokątne. Oznaczenia: A, B, C — kąty trójkąta, a, b, c — przeciwległe im boki trójkąta (rys. 147).

Związki podstawowe:

1. $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ (wzór sinusów),
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$
3. $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ } (wzory cosinusów),
4. $\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C$,
5. $\sin A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos A \cos c$.

Dane	Numery wzorów na odszukanie pozostałych elementów
Trzy boki a, b, c	A (2), B i C (1)
Trzy kąty A, B, C	a (3), b i c (1)
Dwa boki a i b oraz kąt między nimi zawarty C	B (4), A i c (1)
Dwa kąty A i B oraz bok między nimi zawarty c	b (5), a i C (1)
Dwa boki a i b oraz kąt przeciwny jednemu z nich B	A (1), c (5), C (1)
Dwa kąty A i B oraz bok przeciwny jednemu z nich b	a (1), C (4), c (1)

C. TRYGNOMETRIA HIPERBOLICZNA

8. Funkcje hiperboliczne ⁽¹⁾

Określenia funkcji hiperbolicznych. Sinus hiperboliczny (w skrócie: $\sinh x$), cosinus hiperboliczny (w skrócie: $\cosh x$) i tangens hiperboliczny (w skrócie: $\tanh x$) określamy wzorami

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych (patrz str. 164).

Geometryczne określenie funkcji hiperbolicznych jest analogiczne do określenia funkcji trygonometrycznych (patrz str. 253 i 254).

Cotangens, secans i cosecans hiperboliczny określamy jako odwrotności tangensa, cosinusa i sinusa:

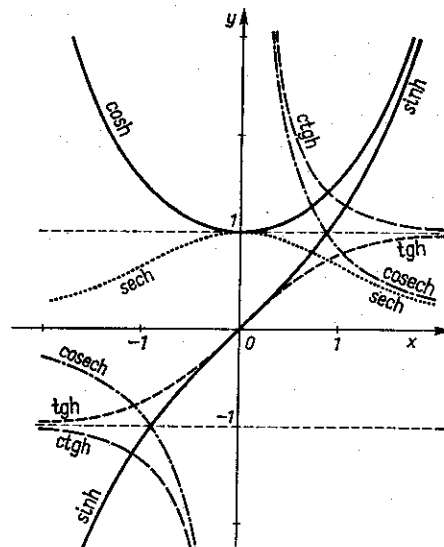
$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

⁽¹⁾ Zebrane tu zostały wiadomości o funkcjach hiperbolicznych, analogiczne do wiadomości o funkcjach trygonometrycznych.

Przebieg funkcji hiperbolicznych przedstawiony jest na rysunku 148. Patrz także tekst na str. 118.

Tablice wartości funkcji hiperbolicznych — patrz str. 59 - 63.



Rys. 148

9. Związki między funkcjami hiperbolicznymi

Dla funkcji hiperbolicznych zachodzą wzory analogiczne do wzorów dla funkcji trygonometrycznych (str. 234 - 236) ⁽¹⁾.

Funkcje tej samej zmiennej

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ctgh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1, \quad \tanh x \operatorname{ctgh} x = 1,$$

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x,$$

$$\frac{\cosh x}{\sinh x} = \operatorname{ctgh} x.$$

⁽¹⁾ Wzory te można otrzymać z odpowiednich wzorów trygonometrycznych według prostej reguły podanej na str. 251.

Wyrażenie funkcji hiperbolicznych przez inne funkcje hiperboliczne (tej samej zmiennej):

$$\sinh x = \varepsilon \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctgh}^2 x - 1}} =$$

$$= \varepsilon \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}}{\operatorname{sech} x} = \frac{1}{\operatorname{cosech} x},$$

$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \varepsilon \frac{\operatorname{ctgh} x}{\sqrt{\operatorname{ctgh}^2 x - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \varepsilon \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cosech}^2 x}}{\operatorname{cosech} x},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \varepsilon \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\operatorname{ctgh} x} =$$

$$= \varepsilon \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cosech}^2 x}},$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x} = \varepsilon \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} =$$

$$= \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}} = \varepsilon \sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1},$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy $x > 0$, i $\varepsilon = -1$, gdy $x < 0$.

Funkcje hiperboliczne sumy i różnicy dwóch zmiennych:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$

$$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y},$$

$$\operatorname{ctgh}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{ctgh} x \operatorname{ctgh} y}{\operatorname{ctgh} x \pm \operatorname{ctgh} y}.$$

Funkcje podwojonej zmiennej:

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x,$$

$$\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x},$$

$$\operatorname{ctgh} 2x = \frac{1 + \operatorname{ctgh}^2 x}{2 \operatorname{ctgh} x}.$$

Wzór de Moivre'a (patrz str. 235):

$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$$

Funkcje połówki zmiennej:

$$\sinh \frac{1}{2} x = \varepsilon \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad \operatorname{tgh} \frac{1}{2} x = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1},$$

$$\cosh \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}, \quad \operatorname{ctgh} \frac{1}{2} x = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x},$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy $x > 0$, i $\varepsilon = -1$, gdy $x < 0$.

Suma i różnica funkcji:

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{1}{2} (x + y) \cosh \frac{1}{2} (x - y),$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh \frac{1}{2} (x - y) \cosh \frac{1}{2} (x + y),$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{1}{2} (x + y) \cosh \frac{1}{2} (x - y),$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{1}{2} (x + y) \sinh \frac{1}{2} (x - y),$$

$$\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y = \frac{\sinh(x + y)}{\cosh x \cosh y},$$

$$\operatorname{tgh} x - \operatorname{tgh} y = \frac{\sinh(x - y)}{\cosh x \cosh y}.$$

Związki między funkcjami hiperbolicznymi i trygonometrycznymi⁽¹⁾

$$\sin z = -i \sinh iz, \quad \cos z = \cosh iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{tgh} iz, \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{ctgh} iz,$$

$$\sinh z = -i \sin iz, \quad \cosh z = \cos iz, \quad \operatorname{tgh} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{ctgh} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Każdy ze związków między funkcjami hiperbolicznymi zmiennej x lub ax (ale nie $ax + b$) może być otrzymany z odpowiedniego związku między funkcjami trygonometrycznymi (str. 234 - 236), przez zamianę $\sin a$ na $i \sinh x$ i $\cos a$ na $\cosh x$. Na przykład wzór: $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ daje $\cosh^2 x + i^2 \sinh^2 x = 1$, czyli $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; wzór $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ daje $i \sinh 2x = 2i \sinh x \cosh x$, czyli $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

⁽¹⁾ O funkcjach zmiennej zespolonej — patrz str. 624 - 627.

10. Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych

Określenia. Funkcjami hiperbolicznymi odwrotnymi (area funkcjami) zmiennej x nazywamy funkcje określone równaniami

$y = \operatorname{arsinh} x$ (czytamy: *area sinus* x), jeżeli $x = \sinh y$;

$y = \operatorname{arcosh} x$ (czytamy: *area cosinus* x), jeżeli $x = \cosh y$ i $y \geq 0$;

$y = \operatorname{artgh} x$ (czytamy: *area tangens* x), jeżeli $-1 < x < 1$ i $x = \operatorname{tgh} y$;

$y = \operatorname{arctgh} x$ (czytamy: *area cotangens* x), jeżeli $x > 1$ lub $x < -1$ i $x = \operatorname{ctgh} y$.

Nazwa pochodzi od słowa *area* = pole, ponieważ odwrotne funkcje hiperboliczne można przedstawić jako pole wycinka hiperbolicznego (patrz niżej).

Wyrażenie area funkcji przez logarytmy. Zgodnie ze wzorami na str. 248 i 249 mamy następujące wyrażenia area funkcji przez logarytmy:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\operatorname{arcosh} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{gdzie } x \geq 1,$$

$$\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1).$$

Wykresy area funkcji — patrz str. 120 i 121.

Wyrażenia area funkcji przez inne area funkcje:

$$\operatorname{arsinh} x = \varepsilon \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{artgh} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arctgh} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

$$\operatorname{arcosh} x = \varepsilon \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1} = \varepsilon \operatorname{artgh} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \varepsilon \operatorname{arctgh} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\operatorname{artgh} x = \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctgh} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arctgh} x = \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \varepsilon \operatorname{arcosh} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{artgh} \frac{1}{x},$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy $x > 0$, i $\varepsilon = -1$, gdy $x < 0$.

Niektóre związki między odwrotnymi funkcjami hiperbolicznymi:

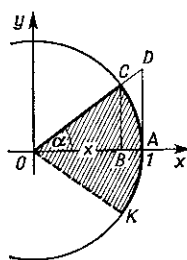
$$\operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}(x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{arcosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

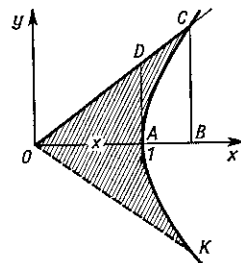
$$\operatorname{artgh} x \pm \operatorname{artgh} y = \operatorname{artgh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

11. Geometryczne określenie funkcji hiperbolicznych

W kole trygonometrycznym (str. 230) określiliśmy funkcje $\sin a$, $\cos a$, tga jako długości odcinków BC , OB , AD (gdy $R = 1$); zmienna



Rys. 149



Rys. 150

niezależna a jest kątem środkowym AOC . Za zmienną niezależną można by przyjąć wielkość x równą polu (zakreskowanemu na rysunku 149) wycinka COK o kącie środkowym równym $2a$, ponieważ $x = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2a = a$ ($R = 1$, a mierzone w radianach). A więc $\sin x = BC$, $\cos x = OB$, $\operatorname{tga} x = AD$, gdzie przez x rozumiemy wspomniane pole wycinka kołowego.

Rozważając analogiczne funkcje pola nie w kole o równaniu $x^2 + y^2 = 1$, lecz w hiperboli równoosiowej o równaniu $x^2 - y^2 = 1$ (rozważamy tylko jej prawą gałąź) i oznaczając pole analogicznego wycinka COK (zakreskowanego na rysunku 150) przez x , określamy funkcje hiperboliczne: $\sinh x = BC$, $\cosh x = OB$, $\operatorname{tgh} x = AD$.

Obliczając za pomocą rachunku całkowego pole x (patrz str. 497) mamy wyrażenia tego pola przez BC , OB i AD :

$$x = \ln(BC + \sqrt{BC^2 + 1}) = \ln(OB + \sqrt{OB^2 - 1}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+AD}{1-AD},$$

skąd otrzymujemy następujące wyrażenia funkcji hiperbolicznych przez funkcje wykładnicze (przyjmuje się je także za określenia funkcji hiperbolicznych):

$$BC = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \quad OB = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$$AD = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x.$$

GEOMETRIA ANALITYCZNA I GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

I. GEOMETRIA ANALITYCZNA

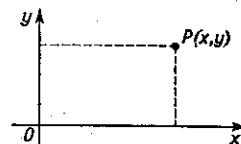
A. GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE

1. Podstawowe pojęcia i wzory

Współrzędne. Położenie dowolnego punktu P na płaszczyźnie można określić za pomocą pewnego układu współrzędnych. Liczby określające położenie punktu nazywamy *współrzędnymi* tego punktu. Najczęściej używane są: *kartezjański układ współrzędnych prostokątnych* i *układ współrzędnych biegunowych*.

Kartezjański układ współrzędnych prostokątnych powstaje w sposób następujący: Przez dowolnie obrany punkt O zwany *początkiem współrzędnych* prowadzi się poziomą oś Ox (*oś odciętych*) skierowaną zazwyczaj w prawo oraz prostopadłą do niej oś pionową Oy (*oś rzędnych*) skierowaną zazwyczaj w górę. Osie Ox i Oy nazywamy *osiami współrzędnych*. Dla obu osi współrzędnych obiera się jednostkę miary długości.

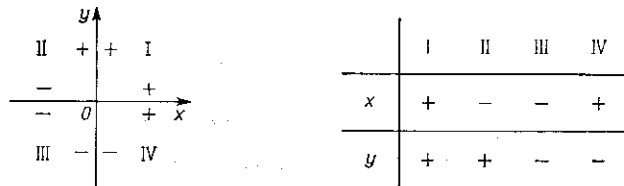
Chcąc wyznaczyć punkt P w układzie Oxy (rys. 151) znajdujemy rzut P_x punktu P na oś Ox oraz rzut P_y punktu P na oś Oy . Odcinek x punktu P nazywamy *długość odcinka OP_x* opatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy punkt P_x leży na dodatniej czy na ujemnej części Ox , a *rzędną* punktu P nazywamy *długość odcinka OP_y* opatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy punkt P_y leży na dodatniej czy na ujemnej części osi Oy (rys. 152). Liczby x i y nazywamy *współrzędnymi kartezjańskimi* albo *współrzędnymi punktu P* . Zapis $P(a, b)$ oznacza, że punkt P ma współrzędne $x = a$, $y = b$. Znaki współrzędnych zależą od ćwiartki (kwadrantu) płaszczyzny, w której leży punkt P (rys. 152). Punkty leżące na osi Ox mają



Rys. 151

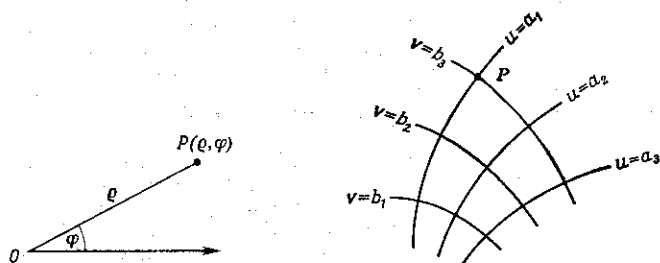
rzędną $y = 0$, a punkty leżące na osi Oy mają odciętą $x = 0$, wreszcie początek współrzędnych ma obie współrzędne równe 0.

Układ współrzędnych biegunowych (rys. 153) powstaje w sposób następujący: Obieramy na płaszczyźnie dowolny punkt O zwany *biegunem* albo *początkiem współrzędnych* i kreślimy półprostą Ox skierowaną zazwyczaj w prawo, tzw. *oś biegunową*, a następnie obieramy jednostkę miary długości. Aby wyznaczyć położenie punktu P we współrzędnych biegunowych podajemy długość ρ odcinka OP oraz kąt φ , którego ramieniem początkowym jest półprosta Ox , a ramieniem końcowym jest półprosta OP , przy czym kąt φ wyrażamy w radianach,

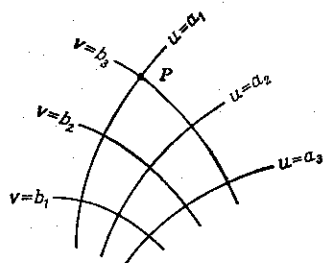


Rys. 152

opatrując go znakiem $+$, jeżeli kąt jest dodatni (tj. liczony od osi biegunowej w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówki zegara), i znakiem $-$, jeżeli kąt jest ujemny. Liczbę ρ nazywamy *promieniem wodzącym*.



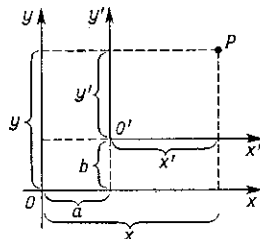
Rys. 153



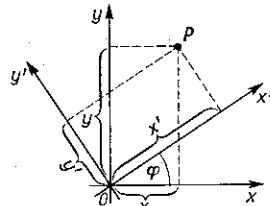
Rys. 154

cym punktu P , a liczbę φ nazywamy *amplitudą* punktu P i zapisujemy $P(\rho, \varphi)$, przy czym biegun ma promień wodzący $\rho = 0$ i nie ma określonej amplitudy; pozostałe punkty osi Ox mają amplitudę $\varphi = 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Promień wodzący ρ jest z reguły liczbą nieujemną; niekiedy jednak używa się promieni wodzących ujemnych przyjmując, że jeżeli $\rho < 0$, to punkt $P(\rho, \varphi)$ pokrywa się z punktem $P(|\rho|, \varphi + \pi)$.

Bardziej ogólnym układem współrzędnych są *współrzędne krzywoliniowe*, które powstają w sposób następujący: Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzą dwie krzywe należące do dwóch rodzin krzywych, przy czym krzywe jednej rodziny zależą od parametru u , a krzywe drugiej rodziny od parametru v . Wartości parametrów u i v dwóch krzywych przechodzących przez punkt P nazywamy *współzrzednymi krzywoliniowymi* tego punktu i piszemy $P(u, v)$. Punkt P na rysunku 154 ma współrzędne krzywoliniowe $u = a_1$, $v = b_1$. W kartezjańskim układzie współrzędnych rodzinami linii współrzędnych są rodziny prostych równoległych do osi Oy i do osi Ox ; parametrami tych linii są x i y ; w układzie współrzędnych biegunowych jedną rodziną linii współrzędnych jest rodzina okręgów mających środek w biegunie O , a drugą rodziną jest rodzina półprostych wychodzących z punktu O ; parametrami tych okręgów i półprostych są ρ i φ .



Rys. 155



Rys. 156

Zamiana układu współrzędnych. Przy przejściu od jednego układu współrzędnych do drugiego, współrzędne zmieniają się w sposób następujący:

Przesunięcie równoległe osi współrzędnych (rys. 155). Niech x, y będą współzrzednymi punktu P w danym układzie współrzędnych Oxy , a x', y' współzrzednymi tegoż punktu P w nowym układzie współrzędnych $O'x'y'$, wreszcie a, b niech będą współzrzednymi nowego początku współrzędnych O' względem dawnego układu Oxy ; osie $O'x', O'y'$ niech będą odpowiednio równoległe do osi Ox, Oy . Wówczas zachodzą związki

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

czyli

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

Obrót osi współrzędnych (rys. 156). Jeżeli obrócimy układ współrzędnych Oxy dookoła punktu O o kąt φ ⁽¹⁾, powstanie

⁽¹⁾ Kąt φ uważamy za dodatni, jeżeli obrót następuje w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wskazówek zegara.

nowy układ współrzędnych $Ox'y'$ związany z dawnym układem wzorami

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

czyli

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Ruch na płaszczyźnie. W ogólnym przypadku zamiana układu współrzędnych składa się z dwóch przekształceń: przesunięcia równoległego (układ Oxy przechodzi w układ $O'x'y'$) i obrotu (układ $O'x'y'$ przechodzi w układ $O''x''y''$).

Wzory:

$$x = a + x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi, \quad y = b + x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi,$$

czyli

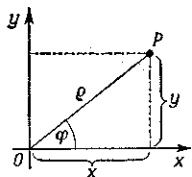
$$x'' = (x-a) \cos \varphi + (y-b) \sin \varphi, \quad y'' = -(x-a) \sin \varphi + (y-b) \cos \varphi.$$

Zamiana współrzędnych prostokątnych na biegunowe i na odwrót. Przyjmując początek współrzędnych O za biegun, a dodatnią część osi odciętych Ox za oś biegunową i biorąc dla kąta φ dodatni kierunek obrotu, otrzymujemy (rys. 157):

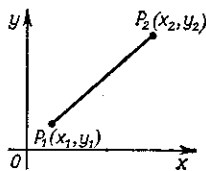
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

skąd

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}.$$



Rys. 157



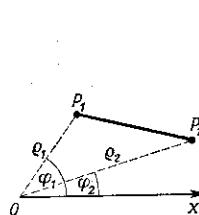
Rys. 158

Odległość dwóch punktów. We współrzędnych kartezjańskich odległość punktów $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ (rys. 158) wyraża się wzorem

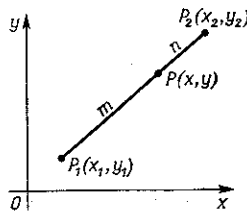
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

natomiast we współrzędnych biegunowych odległość punktów $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ i $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ (rys. 159) wyraża się wzorem

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$



Rys. 159



Rys. 160

Podział odcinka w danym stosunku. Jeżeli mamy dane punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ oraz liczbę $\lambda = m/n$, gdzie m i n są liczbami dodatnimi, to współrzędne punktu $P(x, y)$ leżącego na odcinku P_1P_2 spełniającego warunek $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$ (rys. 160) są określone wzorami

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

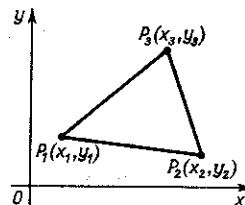
Mówimy wtedy o podziale *wewnętrznym* odcinka P_1P_2 w stosunku $\lambda = m/n$. Biorąc $\lambda = 1$ otrzymujemy współrzędne *środk*a odcinka P_1P_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Jeżeli odcinkom P_1P i PP_2 przypiszemy znak dodatni lub ujemny, w zależności od tego, czy ich kierunek jest zgodny czy niezgodny z kierunkiem P_1P_2 , to wzory na podział odcinka w danym stosunku mogą być użyte również przy $\lambda < 0$, i wówczas mówimy o podziale *zewnętrznym* odcinka P_1P_2 w stosunku $\lambda = m/n$, gdzie m i n są danymi liczbami o znakach przeciwnych. Na przykład dla takiego punktu P , że P_2 jest środkiem odcinka P_1P , otrzymujemy $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$.

Środek ciężkości. Współrzędne *środk*a ciężkości układu punktów materialnych $M_i(x_i, y_i)$ o masach m_i określamy według wzorów

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



Rys. 161

Pola. Pole trójkąta (rys. 161) o wierzchołkach $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = \\ = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)].$$

Trzy punkty leżą na jednej prostej, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pole wielokąta o wierzchołkach $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$:

$$S = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

Przy obliczaniu pola trójkąta i pola wielokąta otrzymuje się $S > 0$, jeżeli wierzchołki ponumerowane są w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wskazówek zegara, natomiast $S < 0$ w przypadku przeciwnym.

Równanie krzywej. Równaniu $F(x, y) = 0$ odpowiada pewna krzywa mająca tę własność, że współrzędne x, y dowolnego punktu $P(x, y)$ tej krzywej spełniają dane równanie — i na odwrót: każdy punkt $P(x, y)$, którego współrzędne spełniają równanie, leży na tej krzywej. Równanie $F(x, y) = 0$ nazywamy *równaniem tej krzywej*. Może się jednak okazać, że danemu równaniu $F(x, y) = 0$ nie odpowiadają współrzędne ani jednego punktu płaszczyzny Oxy , np. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ lub $y = \ln(1 - x^2 - \cosh x)$. Jeżeli $F(x, y)$ jest wielomianem, to krzywą $F(x, y) = 0$ nazywamy *krzywą algebraiczną*; w tym przypadku stopień wielomianu (patrz str. 195) nazywamy *stopniem krzywej algebraicznej*. Jeżeli równanie krzywej nie może być przedstawione w postaci $F(x, y) = 0$, gdzie $F(x, y)$ jest wielomianem, to krzywą nazywamy *krzywą przestępną*.

Analogicznie można rozważać równania krzywych w innych układach współrzędnych. W dalszych rozdziałach, o ile nie będzie specjalnego zastrzeżenia, będziemy rozważali krzywe we współrzędnych prostokątnych.

2. Prosta

Równanie prostej. Każde równanie liniowe względem współrzędnych wyznacza *prostą* — i odwrotnie: równanie każdej prostej jest równaniem stopnia pierwszego.

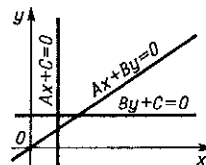
a. Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

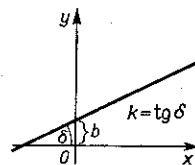
gdzie A i B nie są równocześnie równe zeru.

Jeżeli $A = 0$ (rys. 162), prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, prosta jest równoległa do osi Oy ; jeśli $C = 0$, prosta przechodzi przez początek współrzędnych. Równanie każdej prostej nie równoległej do osi Oy (rys. 163) można napisać w postaci

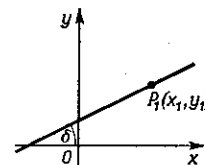
$$y = kx + b.$$



Rys. 162



Rys. 163



Rys. 164

W równaniu tym k jest *współczynnikiem kątowym* (kierunkowym) prostej, równym $\operatorname{tg} \delta$, gdzie δ jest kątem zawartym między dodatnim kierunkiem osi Ox a daną prostą, natomiast b jest rzędną punktu prostej o odciętej $x = 0$, zwaną *rzędną początkową*.

b. Równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P_1(x_1, y_1)$ i tworzącej kąt δ z dodatnim kierunkiem osi Ox (rys. 164):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad \text{gdzie} \quad k = \operatorname{tg} \delta \quad \text{dla} \quad \delta \neq \frac{1}{2}\pi,$$

gdy $\delta = \frac{1}{2}\pi$, równanie prostej ma postać $x - x_1 = 0$.

c. Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ (rys. 165):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad \text{gdy} \quad x_1 \neq x_2;$$

w przypadku gdy $x_1 = x_2$, równanie prostej przechodzącej przez punkty P_1 i P_2 ma postać $x - x_1 = 0$.

d. Równanie odcinkowe prostej. Jeżeli prosta przecina oś Ox w punkcie $A(a, 0)$, gdzie $a \neq 0$, a oś Oy przecina w punkcie $B(0, b)$, gdzie $b \neq 0$ (rys. 166), to a i b nazywają się *zwykłe odcinkami na ośiach* i równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B ma postać

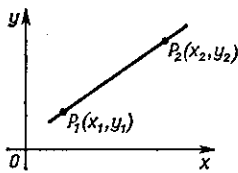
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

zwaną *równaniem odcinkowym* prostej.

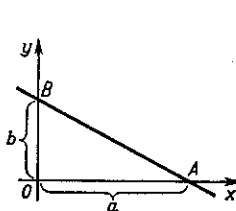
e. Równanie normalne prostej:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

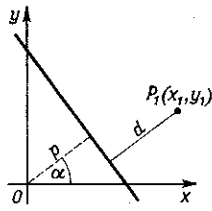
gdzie α oznacza kąt utworzony przez dodatni kierunek osi Ox z półprostą poprowadzoną z początku współrzędnych prostopadłe do danej prostej, przy czym $0 \leq \alpha < 2\pi$, a p jest odległością danej prostej od początku współrzędnych (rys. 167). Równanie normalne prostej można otrzymać z równania ogólnego $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i $C \neq 0$. W tym celu należy pomnożyć obie strony równania normalnego przez czynnik normujący $\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, gdzie $\varepsilon = 1$,



Rys. 165



Rys. 166



Rys. 167

gdy $C < 0$, i $\varepsilon = -1$, gdy $C > 0$, wreszcie w przypadku gdy $C = 0$, można wziąć $\varepsilon = 1$ lub $\varepsilon = -1$.

Odległość punktu $P_1(x_1, y_1)$ od prostej (rys. 167) wyznaczonej równaniem normalnym $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ wyraża się wzorem

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|,$$

tnz. równa się bezwzględnej wartości liczby, którą otrzymuje się w wyniku podstawienia współrzędnych punktu $P_1(x_1, y_1)$ do równania normalnego prostej.

Zauważmy, że wyrażenie $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$ ma wartość dodatnią, gdy punkt $P_1(x_1, y_1)$ i początek współrzędnych O leżą po przeciwnych stronach danej prostej, i ma wartość ujemną, gdy punkt $P_1(x_1, y_1)$ leży po tej samej stronie danej prostej co i początek współrzędnych O .

Punkt przecięcia prostych. Jeżeli mamy dwie proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to współrzędne punktu przecięcia tych prostych (x_0, y_0) otrzymuje się przez rozwiązanie układu tych równań względem x i y .

Mogą zachodzić trzy przypadki:

1. Jeżeli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

to proste przecinają się w punkcie $P(x_0, y_0)$, gdzie

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

2. Jeżeli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ale} \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{to} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

i proste nie mają żadnego punktu wspólnego, czyli są równoległe.

3. Jeżeli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i równocześnie} \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{to} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$$

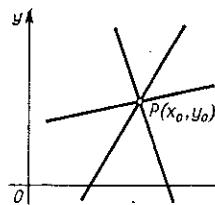
i proste mają wszystkie punkty wspólne, czyli pokrywają się. Można wtedy napisać proporcję

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

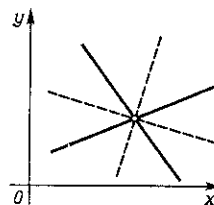
(z tym warunkiem, że jeżeli jeden z mianowników jest zerem, to i odpowiedni licznik jest zerem).

Jeżeli dwie proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ przecinają się w jednym punkcie, to trzecia prosta $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ przechodzi przez ten punkt (rys. 168), gdy

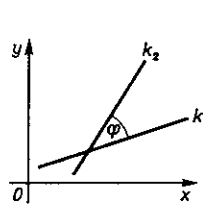
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Rys. 168



Rys. 169



Rys. 170

Pęk prostych. Zbiór prostych na płaszczyźnie przechodzących przez dany punkt nazywamy *pękiem prostych*, a ich wspólny punkt nazywamy *wierzchołkiem pęku*. Jeżeli wierzchołkiem pęku jest punkt przecięcia dwóch prostych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to równanie pęku prostych ma postać

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

gdzie λ przebiega wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$. Jeżeli równania danych dwóch prostych są napisane w postaci normalnej, to przy $\lambda = \pm 1$ otrzymujemy równania dwusiecznych kątów zawartych między tymi prostymi (rys. 169).

Kąt między dwiema prostymi. Jeżeli równania prostych dane są w postaci ogólnej $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to kąt φ między tymi prostymi liczony od pierwszej prostej do drugiej w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara (rys. 170) wyznaczamy według wzorów

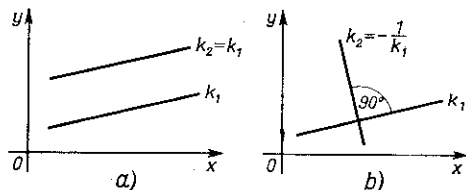
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Jeżeli znane są współczynniki kątowe k_1 i k_2 danych prostych, to

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}.$$



Rys. 171

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są *równoległe* (rys. 171a), jeśli $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$ lub $k_1 = k_2$ (drugi wzór nie obejmuje prostych równoległych do osi Oy).

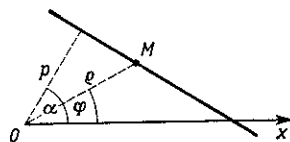
Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są *wzajemnie prostopadłe* (rys. 171b), jeżeli $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ lub $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (ostatni wzór nie obejmuje przypadku, gdy jedna prosta jest równoległa do osi Ox , a druga do osi Oy).

Równanie prostej we współrzędnych biegunowych. 1° Jeżeli prosta nie przechodzi przez biegun, to jej równanie ma postać (rys. 172):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

gdzie p jest odległością prostej od bieguna, α jest kątem zawartym między osią biegunową i półprostą poprowadzoną z bieguna prostopadłą do danej prostej.

2° Jeżeli prosta przechodzi przez biegun, to jej równanie ma postać $\varphi = \alpha$, gdzie α oznacza kąt między osią biegunową a daną prostą, przy czym promień wodzący r przebiega od $-\infty$ do $+\infty$.

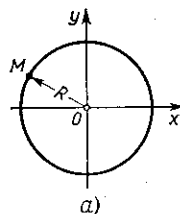


Rys. 172

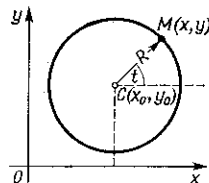
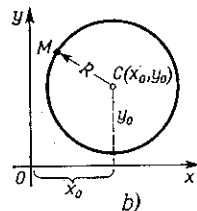
3. Okrąg koła

Równanie we współrzędnych prostokątnych. Równanie okręgu o promieniu R i środku w początku współrzędnych (rys. 173a):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Rys. 173



Rys. 174

Równanie okręgu o promieniu R i środku w punkcie $C(x_0, y_0)$ (rys. 173b):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Ogólne równanie stopnia drugiego $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ przedstawia okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$, $a = c$ i $d^2 + e^2 - af > 0$.

Wówczas równanie to można napisać w postaci

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0,$$

gdzie $m^2 + n^2 - q > 0$. Wtedy promień $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$, a środkiem okręgu jest punkt $C(-m, -n)$. Gdy $q = m^2 + n^2$, równanie wyznacza

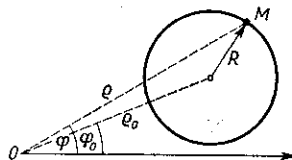
jeden tylko punkt $C(-m, -n)$. Gdy $q > m^2 + n^2$, to równania nie spełnia żaden punkt o współrzędnych rzeczywistych.

Równanie okręgu w postaci parametrycznej:

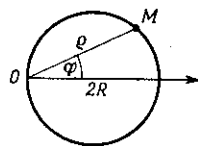
$$x = x_0 + R \cos t, \quad y = y_0 + R \sin t,$$

gdzie t oznacza kąt między dodatnim kierunkiem osi Ox a promieniem wodzącym punktu okręgu (rys. 174). Jeżeli środek okręgu leży w początku współrzędnych, równania parametryczne mają postać

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t.$$



Rys. 175



Rys. 176

Równanie okręgu we współrzędnych biegunowych. Ogólne równanie ma postać

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

gdzie ρ_0, φ_0 są współrzędnymi biegunowymi środka okręgu (rys. 175). Jeżeli środek okręgu leży w biegunie, równanie okręgu ma postać $\rho = r$. Jeżeli środek okręgu leży na osi biegunowej i okrąg przechodzi przez biegun (rys. 176), to równanie okręgu przybiera postać $\rho = 2R \cos \varphi$.

4. Elipsa

Elementy elipsy (rys. 177). Oś wielka $AB = 2a$; oś mała $CD = 2b$; wierzchołki A, B, C, D ; środek O ; ogniska F_1 i F_2 — punkty leżące po obu stronach środka w odległości $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ od niego; mimośród $e = c/a < 1$; parametr ogniskowy $p = b^2/a$ (połowa cięciwy przechodzącej przez jedno z ognisk prostopadle do osi wielkiej).

Równanie elipsy. Równanie kanoniczne elipsy (oś wielka elipsy leży na osi Ox , oś mała na osi Oy , rys. 177):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Równania parametryczne:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

Równanie we współrzędnych biegunowych podane jest na str. 278.

Ogniskowa własność elipsy (określenie elipsy). *Elipsa* jest miejscem geometrycznym punktów M , dla których suma odległości od dwóch danych punktów F_1 i F_2 (ognisk) jest wielkością stałą. Tę własność elipsy można napisać za pomocą równania

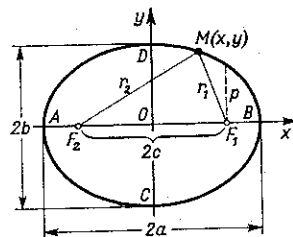
$$F_1M + F_2M = 2a,$$

gdzie $2a$ jest osią wielką elipsy. Jeżeli równanie elipsy dane jest w postaci kanonicznej, wtedy współrzędne ognisk są $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, gdzie $c < a$, a ogniskowe promienie wodzące $r_1 = F_1M$ i $r_2 = F_2M$ punktu $M(x, y)$ można obliczyć ze wzorów

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex,$$

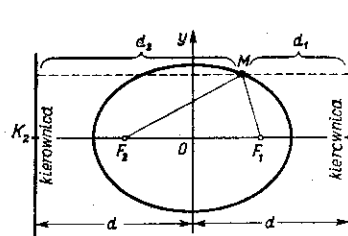
gdzie

$$e = c/a < 1.$$

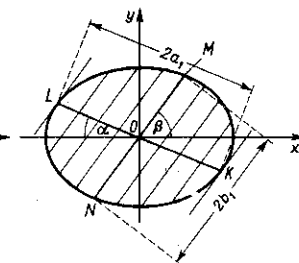


Rys. 177

Kierownice elipsy są to proste prostopadłe do wielkiej osi elipsy, odległe od środka O o odcinek $d = a^2/c$. Zauważmy (rys. 178), że $OF_1 = c = ea$, natomiast $OK_1 = d = a/e$, skąd $cd = a^2$. Jeżeli odległość punktu elipsy $M(x, y)$ od jej kierownicy oznaczmy przez d_1 i d_2 , to otrzymamy związki $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e < 1$ (na tej własności można oprzeć określenie elipsy, patrz str. 278).



Rys. 178



Rys. 179

Średnice elipsy są to cięciwy przechodzące przez środek elipsy; środek elipsy jest środkiem każdej średnicy (rys. 179). Miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do danej średnicy elipsy KL jest druga średnica MN , a miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do średnicy MN jest średnica KL ; takie dwie średnice nazywamy *średnicami sprzężonymi* (rys. 179). Jeżeli k i k' są współczynnikami kątowymi średnic sprzężonych, to $kk' = -b^2/a^2$. Jeżeli długości średnic sprzężonych wynoszą $2a_1$ i $2b_1$, α i β zaś są kątami ostrymi zawartymi między średnicami a wielką osią ($k = -\operatorname{tg} \alpha$, $k' = \operatorname{tg} \beta$), to

$$a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab \quad \text{ i } \quad a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

(*twierdzenie Apolloniusza*).

Styczna do elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ w punkcie $M(x_0, y_0)$ ma równanie

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

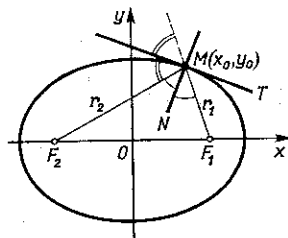
Normalna do elipsy w punkcie $M(x_0, y_0)$ jest dwusieczną kąta zawartego między promieniami wodzącymi punktu M , a styczna do elipsy w punkcie $M(x_0, y_0)$ jest dwusieczną kątów przyległych do tego kąta (rys. 180). Prosta $Ax + By + C = 0$ jest styczną do elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, jeżeli zachodzi związek $A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0$.

Promień krzywizny elipsy w punkcie $M(x_0, y_0)$ (patrz rys. 180):

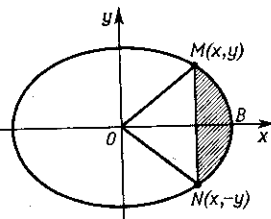
$$r = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u},$$

gdzie u jest kątem między styczną w punkcie M a jednym z promieni wodzących tego punktu.

W wierzchołkach A i B (rys. 177) $r = b^2/a = p$; w wierzchołkach C i D mamy $r = a^2/b$.



Rys. 180



Rys. 181

Pole elipsy $S = \pi ab$. Pole wycinka $BOM = \frac{ab}{2} \arccos \frac{x}{a}$ (rys.

181). Pole odcinka elipsy $MBN = ab \arccos \frac{x}{a} - xy$.

Obwód elipsy

$$L = 4a E(e) = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right],$$

gdzie $E(e) = E(e, \frac{1}{2}\pi)$ jest pełną całką eliptyczną drugiego rodzaju (patrz str. 437). Jeżeli oznaczymy $(a-b)/(a+b) = \lambda$, to

$$L = \pi(a+b) \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16384} + \dots \right).$$

Wzory przybliżone

$$L = \pi[1,5(a+b) - \sqrt{ab}], \quad L = \pi(a+b) \frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^4}.$$

5. Hiperbola

Elementy hiperboli (rys. 182). *Oś rzeczywista*: $AB = 2a$; *wierzchołki* A, B ; *środek* O ; *ogniska* F_1 i F_2 — punkty leżące na osi rzeczywistej po obu stronach środka w odległości $c > a$ od niego; *oś urojona*: $CD = 2b$, gdzie $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; *parametr ogniskowy* $p = b^2/a$ (połowa cięciwy przechodzącej przez jedno z ognisk prostopadle do osi rzeczywistej); mimośród $e = c/a > 1$.

Równanie hiperboli. Równanie kanoniczne hiperboli (oś rzeczywista hiperboli leży na osi Ox , rys. 182):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Równania parametryczne

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t \quad \left(\text{albo} \quad x = a \frac{1}{\cos t}, \quad y = b \operatorname{tg} t \right).$$

Równanie we współrzędnych biegunowych podane jest na str. 278.

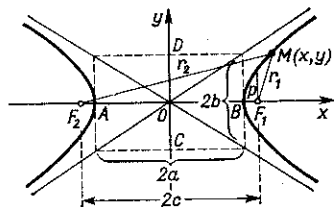
Ogniskowa własność hiperboli (określenie hiperboli). *Hiperbola* jest miejscem geometrycznym punktów M , dla których bezwzględna wartość różnicy odległości od dwóch danych punktów F_1 i F_2 (ognisk) jest wielkością stałą. Tę własność hiperboli można napisać za pomocą równania

$$F_1 M - F_2 M = 2a,$$

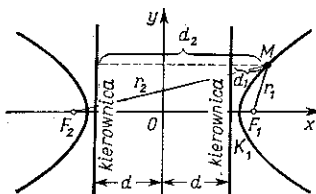
gdzie $2a$ jest osią rzeczywistą hiperboli. Jeżeli równanie hiperboli dane jest w postaci kanonicznej, współrzędne ognisk są $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, gdzie $c < a$, wówczas ogniskowe promienie wodzące $r_1 = F_1M$ i $r_2 = F_2M$ punktu $M(x, y)$ można obliczyć ze wzorów

$$r_1 = \pm(ex - a), \quad r_2 = \pm(ex + a), \quad \text{gdzie } e = c/a > 1$$

(górny znak dla punktów prawej gałęzi, dolny dla lewej); gdy $r_1 - r_2 = 2a$, otrzymujemy jedną gałąź hiperboli (na rysunku 182 lewą), a punkty, dla których $r_2 - r_1 = 2a$, tworzą drugą gałąź hiperboli (na rysunku 182 prawą).



Rys. 182



Rys. 183

Kierownice hiperboli są to proste prostopadłe do osi rzeczywistej hiperboli oddalone od środka O o odcinek $d = a^2/c$. Zauważmy (rys. 183), że $OF_1 = c = ea$, natomiast $OK_1 = d = a/e$, skąd $cd = a^2$. Jeżeli odległość punktu hiperboli $M(x, y)$ od jej kierownicy oznaczmy przez d_1 i d_2 , to otrzymamy związki $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e > 1$ (na tej własności można oprzeć określenie hiperboli, patrz str. 278).

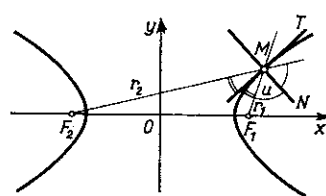
Styczna do hiperboli $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ w punkcie $M(x_0, y_0)$ ma równanie

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

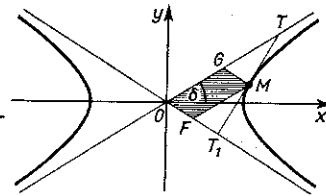
Styczna do hiperboli w punkcie $M(x_0, y_0)$ jest dwusieczną kąta zawartego między promieniami wodzącymi punktu M , a *normalna* jest dwusieczną kątów przyległych do tego kąta (rys. 184). Prosta $Ax + By + C = 0$ jest styczna do hiperboli $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, jeżeli zachodzi związek $A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 = 0$.

Asymptoty. *Asymptoty hiperboli* (rys. 185) są to proste, do których nieograniczenie zbliża się punkt $M(x, y)$ hiperboli, gdy $x \rightarrow +\infty$ lub $x \rightarrow -\infty$ (ogólne określenie asymptot podane jest na str. 316). Współczynniki kątowe asymptot $k = \tan \delta = b/a$ i $k' = \tan(\pi - \delta) = -b/a$. Równanie asymptot $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Odcinek TT_1 stycznej do hiperboli w punkcie M zawarty między asymptotami jest podzielony w punkcie M na połowy: $TM = MT_1$ (rys. 185). Pole trójkąta TOT_1 utworzonego przez styczną i asymptoty równa się ab . Jeżeli przez punkt M hiperboli poprowadzimy proste

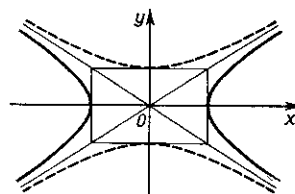


Rys. 184

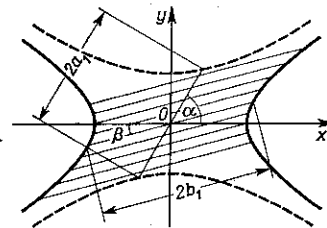


Rys. 185

równoległe do asymptot, to pole równoległoboku $OFGM = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{1}{4}c^2$.



Rys. 186



Rys. 187

Hiperbole sprzężone (rys. 186):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (linia ciągła)} \quad \text{ i } \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (linia przerywana)}$$

mają wspólne asymptoty. Oś rzeczywista jednej hiperboli jest osią urojoną drugiej i na odwrót.

Każdą cięciwę którejkolwiek z dwóch hiperbol sprzężonych przechodzącą przez ich wspólny środek O nazywamy *średnicą* jednej i drugiej hiperboli; środek O dzieli każdą średnicę na połowy.

Dwie średnice nazywamy *sprzężonymi*, jeżeli jedna z nich (lub jej przedłużenie) przepoławia wszystkie cięciwy równoległe do drugiej; wówczas druga średnica (lub jej przedłużenie) przepoławia wszystkie

cięciwy równoległe do pierwszej (rys. 187). Jeżeli k i k' są współczynnikami kątowymi średnic sprzężonych, to $kk' = b^2/a^2$. Jeżeli długości średnic sprzężonych wynoszą $2a_1$ i $2b_1$, α i β zaś są kątami ostrymi, jakie tworzą te średnice z osią rzeczywistą ($\alpha > \beta$), to $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta)$.

Promień krzywizny hiperboli w punkcie $M(x_0, y_0)$:

$$r = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^2 u},$$

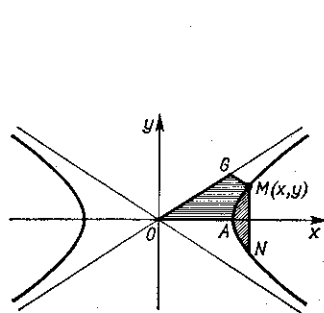
gdzie u jest kątem między styczną w punkcie M (rys. 184), a jednym z promieni wodzących tego punktu. W wierzchołkach A i B (rys. 182) $r = p = b^2/a$.

Pole odcinka hiperboli (rys. 188):

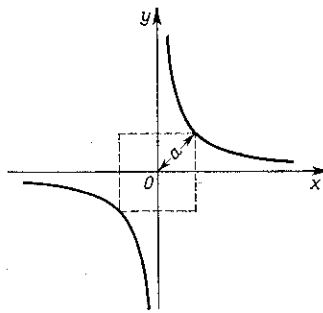
$$\text{pole } AMN = xy - ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = xy - ab \operatorname{arccosh} \frac{x}{a},$$

$$\text{pole } OAMG = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2OG}{c},$$

gdzie MG jest odcinkiem równoległym do asymptoty (rys. 188).



Rys. 188

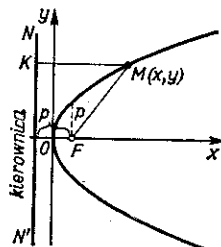


Rys. 189

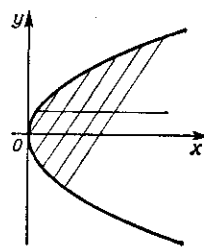
Hiperbole równoosiowa (rys. 189) otrzymujemy wówczas, gdy osie hiperboli są równe: $a = b$. Równanie osiowe: $x^2 - y^2 = a^2$; hiperbola sprzężona: $y^2 - x^2 = a^2$. Wspólny mimośród $e = \sqrt{2}a$. Asymptoty hiperboli równoosiowej są wzajemnie prostopadłe. Jeżeli asymptotami hiperboli są osie współrzędnych, równanie hiperboli równoosiowej przybiera postać $xy = \frac{1}{2}a^2$ albo $xy = -\frac{1}{2}a^2$.

6. Parabola

Elementy paraboli (rys. 190). *Oś paraboli Ox ; wierzchołek O ; ognisko F (punkt położony na osi w odległości $\frac{1}{2}p$ od wierzchołka); kierownica NN' (prosta prostopadła do osi, przecinająca oś w odległości $\frac{1}{2}p$ od wierzchołka, po przeciwnej stronie środka niż ognisko); parametr ogniskowy p (odległość ogniska od kierownicy, a zarazem połowa cięciwy przechodzącej przez ognisko prostopadłe do osi paraboli); promień wodzący punktu $M(x, y)$ $r = x + \frac{1}{2}p$; mimośród paraboli $e = 1$ (patrz str. 278).*



Rys. 190



Rys. 191

Równanie paraboli. Równanie kanoniczne paraboli:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

(wierzchołek paraboli leży w początku współrzędnych, a oś paraboli leży na osi Ox).

Równanie we współrzędnych biegunowych podane jest na str. 278.

Ogniskowa własność paraboli (określenie paraboli). Parabola jest miejscem geometrycznym punktów M równo oddalonych od danego punktu F (ogniska) i od danej prostej k (kierownicy). Stosunek $FM/KM = e = 1$ nazywamy mimośrodem paraboli (patrz str. 278), gdzie K jest rzutem punktu M na kierownicę (rys. 190).

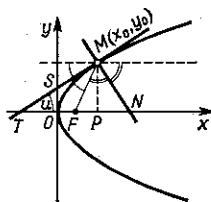
Środki cięciw paraboli, równoległych do stycznej poprowadzonej przez punkt M , leżą na prostej równoległej do osi paraboli i przechodzącej przez punkt M (rys. 191). Taką prostą nazywamy *średnicą*.

sprzężoną z kierunkiem cięciw równoległych. Jeżeli współczynnik kątowny cięciw jest k , to równanie średnicy sprzężonej ma postać $y = p/k$.

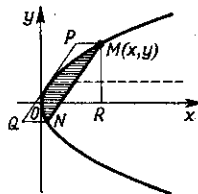
Styczna do paraboli w punkcie $M(x_0, y_0)$ (rys. 192) ma równanie

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Styczna i normalna do paraboli w danym punkcie M są dwusiecznymi kątów między promieniem wodzącym FM i średnicą przechodzącą przez punkt M . Jeżeli styczna do paraboli w punkcie M prze-



Rys. 192



Rys. 193

cina oś paraboli w punkcie T , to środek S odcinka MT leży na stycznej do paraboli poprowadzonej przez jej wierzchołek:

$$TS = SM, \quad TF = FM, \quad TO = OP = x_0.$$

Prosta $y = kx + b$ jest styczna do paraboli $y^2 = 2px$, jeżeli $kb = \frac{1}{2}p$.

Promień krzywizny paraboli w punkcie $M(x_1, y_1)$:

$$r = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{n^3}{p^2},$$

gdzie n jest długością normalnej MN (rys. 192). W wierzchołku O promień krzywizny $r = p$.

Pole odcinka paraboli MON równa się $\frac{2}{3}$ pola równoległoboku $PQNM$ (rys. 193). Pole $OMR = \frac{2}{3}xy$. Długość łuku

$$\begin{aligned} OM &= \frac{p}{2} \left[\sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p} \right)} + \ln \left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right) \right] = \\ &= \sqrt{x \left(x + \frac{p}{2} \right)} + \frac{p}{2} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{2x}{p}}. \end{aligned}$$

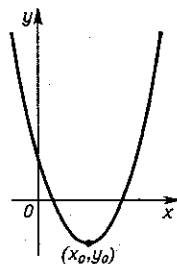
W przybliżeniu dla małych wartości $\frac{x}{y}$:

$$OM \approx y \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{y} \right)^4 \right].$$

Równanie ogólne paraboli o osi pionowej (rys. 194):

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{gdzie } a \neq 0.$$

Parametr ogniskowy paraboli $p = 1/2|a|$; gdy $a > 0$, wierzchołek paraboli leży na dole, a gdy $a < 0$ — na górze.



Rys. 194

7. Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)

Równanie ogólne krzywych stopnia drugiego:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

gdzie a, b, c nie są równocześnie równe 0, może przedstawiać 1° stożkowe właściwe: elipsę (w szczególnym przypadku okrąg), hiperbolę, parabolę; 2° stożkowe niewłaściwe: dwie proste.

Niezmienniki krzywych stopnia drugiego. Wielkości

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + c$$

są niezmiennie przy przesunięciu początku współrzędnych i obrocie osi, tj. jeśli po zmianie współrzędnych równanie krzywej przybiera postać

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0.$$

to wielkości Δ, δ, S obliczone dla nowych współrzędnych mają te same wartości co poprzednio.

Badanie kształtu krzywej. Za pomocą tablicy podanej na str. 276 i 277 możemy określić kształt krzywej przedstawionej równaniem stopnia drugiego oraz sprowadzić to równanie do postaci kanonicznej.

Ogólne własności krzywych stopnia drugiego.

Przecięcia stożkowe. Stożek obrotowy przy przecięciu płaszczyzną daje przecięcie stożkowe. Jeżeli płaszczyzna sieczna nie przechodzi przez wierzchołek stożka, to przecięcie będzie hiperbolą,

Srowadzenie równań krzywych stopnia

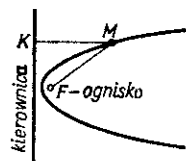
Niezmienne δ i Δ			Kształt krzywej
Krzywe środkowe $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Elipsa a. $\Delta \cdot S < 0$, elipsa rzeczywista b. $\Delta \cdot S > 0$, elipsa urojona
		$\Delta = 0$	Para prostych urojonych mających wspólny punkt rzeczywisty
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbola
		$\Delta = 0$	Para przecinających się prostych
Krzywe paraboliczne $\delta = 0$ ⁽²⁾	$\Delta \neq 0$		Parabola
	$\Delta = 0$		Para prostych równoległych, gdy $d^2 - af > 0$; pokrywających się, gdy $d^2 - af = 0$; równoległych urojonych, gdy $d^2 - af < 0$

⁽¹⁾ Oznaczenia patrz na str. 275.⁽²⁾ Jeżeli dwa współczynniki b i a albo b i c są równe zero, to przekształcenie równania sprowadza się do równoległego przesunięcia osi: równanie $cy^2 + 2dx + 2ey + f =$ drugiego do postaci kanonicznej ⁽¹⁾

Potrzebne przekształcenie współrzędnych	Równanie krzywej po przekształceniu
1. Przeniesienie początku współrzędnych do środka krzywej o współrzędnych $x_0 = \frac{be - cd}{\delta}, \quad y_0 = \frac{bd - ae}{\delta}.$ 2. Obrót osi o kąt α wyrażony równaniem $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a - c},$ przy czym znak $\sin 2\alpha$ ma być zgodny ze znakiem licznika $2b$. Współczynnik kątowy nowej osi odciętych Ox': $k = \frac{c - a + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}}{2b}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$ gdzie a' i c' są pierwiastkami równania kwadratowego $u^2 - Su + \delta = 0,$ a mianowicie $a' = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2},$ $c' = \frac{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$
1. Przeniesienie początku współrzędnych do wierzchołka paraboli, którego współrzędne można wyznaczyć z układu równań $ax_0 + by_0 + \frac{ad + be}{S} = 0,$ $\left(d + \frac{dc - be}{S}\right)x_0 + \left(e + \frac{ae - bd}{S}\right)y_0 + f = 0.$ 2. Obrót osi o kąt α określony równaniem $\operatorname{tga} = -\frac{a}{b}$, przy czym znak $\sin \alpha$ ma być przeciwny niż znak liczby a.	$y'^2 = 2px',$ gdzie $p = \frac{ae - bd}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$
Obrót osi o kąt α określony równaniem $\operatorname{tga} = -\frac{a}{b}$, przy czym znak $\sin \alpha$ powinien być przeciwny niż znak liczby a.	$Sy'^2 + 2\frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}}y' + f = 0$ sprowadza się do postaci $(y' - y'_0)(y' - y'_1) = 0$

 $= 0$ przekształca się do postaci $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, a równanie $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ przekształca się do postaci $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

parabolą lub elipsą w zależności od tego, czy płaszczyzna sieczna będzie równoległa do stożka. Przy przecięciu



Rys. 195

zależności od tego, czy płaszczyzna sieczna będzie równoległa do stożka. Przy przecięciu stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek otrzymuje się przecięcia stożkowe niewłaściwe ($d = 0$, patrz tablicę na str. 276 i 277). Proste równoległe otrzymuje się wówczas, gdy stożek przechodzi w wałek (wierzchołek oddala się w nieskończoność).

Mimośród krzywych stopnia drugiego. Miejscem geometrycznym punktów M (rys. 195), dla których stosunek odległości od danego punktu F (ogniska) i od danej prostej k (kierownicy) jest wielkością

stałą równą e , jest krzywa stopnia drugiego. Liczbę e nazywamy *mimośrodkiem* krzywej. Gdy $e < 1$, otrzymuje się elipsę, gdy $e = 1$, parabolę, gdy $e > 1$, hiperbolę.

Wyznaczenie krzywej przez pięć punktów. Przez danych pięć punktów przechodzi tylko jedna krzywa stopnia drugiego. Jeżeli chociażby trzy punkty spośród danych pięciu leżą na prostej, to powstaje krzywa stożkowa niewłaściwa.

Równanie biegunowe krzywej stopnia drugiego ma postać

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

gdzie p jest parametrem, e mimośrodkiem danej krzywej; biegun znajduje się w ognisku, oś biegunowa skierowana jest od bieguna w stronę najbliższego wierzchołka. Dla hiperboli równanie to określa tylko jedną gałąź.

B. GEOMETRIA W PRZESTRZENI

8. Podstawowe pojęcia i wzory

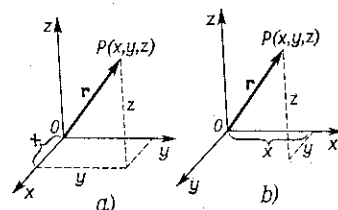
Współrzędne. Położenie dowolnego punktu P w przestrzeni możemy wyznaczyć za pomocą układu współrzędnych przestrzennych. Najczęściej używane są następujące układy współrzędnych:

- 1° kartezjański układ współrzędnych prostokątnych,
- 2° układ współrzędnych cylindrycznych (walcowych),
- 3° układ współrzędnych sferycznych (kulistych).

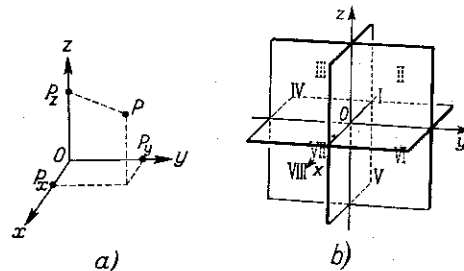
Kartezjański układ współrzędnych prostokątnych w przestrzeni powstaje w sposób następujący: Przez dowolnie obrany punkt O zwany *początkiem współrzędnych* prowadzi się trzy osie współrzędnych Ox , Oy , Oz , z których każda do każdej jest prostopadła; dla osi tych wybiera się jednostkę miary długości. W zależności od wzajemnego położenia

dodatnich kierunków osi współrzędnych otrzymujemy *prawoskrętny* (rys. 196a) i *lewoskrętny* (rys. 196b) układ współrzędnych, przy czym wzory będą jednakowe zarówno dla układu prawoskrętnego, jak i dla lewoskrętnego. W dalszych rysunkach przyjęty jest układ prawoskrętny.

Chcąc wyznaczyć punkt P w układzie $Oxyz$ znajdujemy rzuty P_1, P_2, P_3 punktu P na płaszczyzny współrzędnych Oyz , Oxz , Oxy ; albo też rzuty P_x, P_y, P_z punktu P na osie Ox , Oy , Oz ; wówczas współrzędnymi prostokątnymi x, y, z punktu P będą wzięte z odpowiednimi znakami długości odcinków OP_1, P_2P, P_3P albo OP_x, OP_y, OP_z (rys. 197a). Zapis $P(a, b, c)$ oznacza, że punkt P ma współrzędne $x = a, y = b, z = c$. Znaki współrzędnych x, y, z zależą od ósemki (oktantu) przeszerzenia, w której punkt jest położony (rys. 197b), co podane jest w poniższej tabeli:



Rys. 196



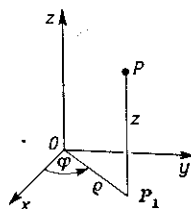
Rys. 197

Ósemka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	-	-	+	-	-	+
y	+	-	-	+	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Powierzchnią współrzędnych w przestrzeni nazywamy powierzchnię, w której punkty mają jedną z trzech współrzędnych stałą (zwaną parametrem tej powierzchni), a linią współrzędnych nazywamy linię, której punkty mają dwie współrzędne stałe. W układzie współrzędnych

prostokątnych $Oxyz$ powierzchniami współrzędnych są płaszczyzny równoległe do jednej z płaszczyzn współrzędnych, a liniami współrzędnych są proste równoległe do jednej z osi współrzędnych. Powierzchnie współrzędnych przecinają się wzdluż linii współrzędnych.

Uogólnieniem układu współrzędnych kartezjańskich jest *układ współrzędnych krzywoliniowych*, w którym przez każdy punkt przestrzeni przechodzą trzy powierzchnie (krzywe lub płaskie) należące do trzech rodzin powierzchni współrzędnych. Położenie punktu w takim układzie określamy wartościami parametrów trzech powierzchni współrzędnych, przechodzących przez ten punkt. Najczęściej stosowanymi współrzędnymi krzywoliniowymi są opisane poniżej współrzędne cylindryczne i sferyczne.



Rys. 198

Współrzędne cylindryczne zwane też *walcowymi* (rys. 198): ρ, φ, z , gdzie ρ i φ są to współrzędne biegunowe rzutu P_1 danego punktu P na płaszczyznę Oxy , a z jest to długość odcinka P_1P wzięta z odpowiednim znakiem.

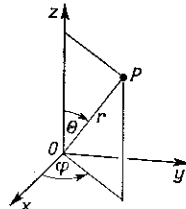
Dla współrzędnych cylindrycznych powierzchniami współrzędnych punktu $P(\rho, \varphi, z)$ są: powierzchnia walcowa ($\rho = \text{const}$), półpłaszczyzna o krawędzi Oz ($\varphi = \text{const}$), płaszczyzna prostopadła do osi Oz ($z = \text{const}$). Liniami współrzędnych utworzonymi przez przecięcia powierzchni współrzędnych są: okrąg koła ($z = \text{const}, \rho = \text{const}$); tworząca walca ($\rho = \text{const}, \varphi = \text{const}$); półprosta ($\varphi = \text{const}, z = \text{const}$). Linie współrzędnych przecinające się w jednym punkcie są wzajemnie ortogonalne.

Związki między współrzędnymi cylindrycznymi i kartezjańskimi:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho}.$$

Współrzędne sferyczne zwane także *kulistymi* (rys. 199): r, θ, φ , gdzie r jest długością promienia wodzącego danego punktu P , θ jest odległością biegunową (kąt między dodatnią częścią osi Oz a promieniem



Rys. 199

wodzącym, zawarty w przedziale $0 \leq \theta \leq \pi$), φ *długość azymutalna* (kąt między dodatnią częścią osi Ox i rzutem promienia wodzącego na płaszczyznę Oxy zawarty w przedziale $-\pi < \varphi \leq \pi$), przy czym dodatnie kierunki kątów θ i φ pokazane są strzałkami na rysunku 199.

Dla współrzędnych sferycznych powierzchniami współrzędnych punktu $P(r, \theta, \varphi)$ są: sfera o środku O ($r = \text{const}$); powierzchnia stożkowa o wierzchołku O i osi Oz ($\theta = \text{const}$), przy czym dla $\theta = \frac{1}{2}\pi$, powierzchnia stożkowa degeneruje się do płaszczyzny; półpłaszczyzna o osi Oz ($\varphi = \text{const}$).

Liniami współrzędnych punktu $P(r, \theta, \varphi)$ są: okrąg koła w płaszczyźnie prostopadłej do osi Oz ($r = \text{const}, \theta = \text{const}$); półprosta z początkiem w punkcie O ($\theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$); półokrąg o środku O leżący na półpłaszczyźnie o krawędzi Oz ($r = \text{const}, \varphi = \text{const}$). Linie współrzędnych przecinające się w jednym punkcie są wzajemnie prostopadłe.

Związki między współrzędnymi sferycznymi i kartezjańskimi:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

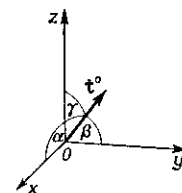
Kierunek w przestrzeni. Aby wyznaczyć kierunek w przestrzeni, podaje się jego wektor jednostkowy r^0 (zwany *wersorem* danego kierunku, patrz str. 647) albo też jego współrzędne (rys. 200), którymi są cosinusy kątów między danym wersorem a osiami współrzędnych (*cosinusy kierunkowe*):

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

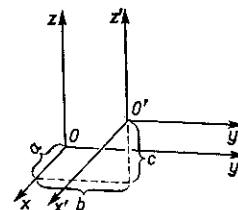
Kąt między dwoma danymi kierunkami o cosinusach kierunkowych l_1, m_1, n_1 i l_2, m_2, n_2 :

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Dwa kierunki są prostopadłe, jeżeli $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. Dwa kierunki są równoległe, gdy $l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_1 = n_2$ lub $l_1 = -l_2, m_1 = -m_2, n_1 = -n_2$.



Rys. 200



Rys. 201

Zamiana współrzędnych prostokątnych. Oznaczenia: x, y, z — dawne współrzędne, x', y', z' — nowe współrzędne tego samego punktu P , a, b, c — współrzędne nowego początku współrzędnych O' względem dawnego układu $Oxyz$ (rys. 201).

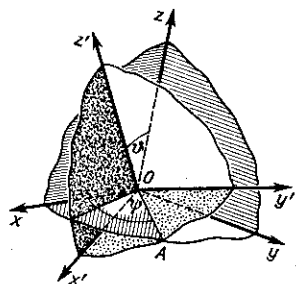
Przesunięcie równoległe w przestrzeni:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c,$$

czyli

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Obrót układu współrzędnych w przestrzeni (rys. 202). Jeżeli cosinusy kierunkowe nowych osi Ox', Oy', Oz'



Rys. 202

Dawne osie	Cosinusy nowych osi		
	Ox'	Oy'	Oz'
Ox	l_1	l_2	l_3
Oy	m_1	m_2	m_3
Oz	n_1	n_2	n_3

względem dawnych osi Ox, Oy, Oz oznaczmy według schematu, to między dawnymi współrzędnymi x, y, z i nowymi współrzędnymi x', y', z' tego samego punktu P zachodzą związki

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \quad y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \quad z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z',$$

czyli

$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z, \quad y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z, \quad z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

Wyznacznik przekształcenia (obrotu osi współrzędnych)

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \quad \text{albo} \quad \Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

Własności wyznacznika przekształcenia Δ :

1° $\Delta = \pm 1$, przy czym $\Delta = 1$, jeżeli układ lewoskrętny przechodzi w lewoskrętny, albo prawoskrętny przechodzi w prawoskrętny, natomiast $\Delta = -1$, gdy układ lewoskrętny przechodzi w prawoskrętny lub na odwrót.

2° Suma kwadratów elementów każdego wiersza lub kolumny jest równa 1.

3° Suma iloczynu odpowiednich elementów dwóch wierszy lub kolumn równa się 0.

4° Każdy element wyznacznika równa się iloczynowi algebraicznego dopełnienia (patrz str. 183) przez wartość wyznacznika Δ (wynosząca 1 lub -1).

Kąty Eulera. Położenie nowego układu współrzędnych $Ox'y'z'$ względem dawnego układu $Oxyz$ można całkowicie określić za pomocą trzech kątów zwanych *kątami Eulera* (rys. 202):

1. *Kąt nutacji* θ zawarty między dodatnimi częściami osi Oz i Oz' ($0 \leq \theta < \pi$).

2. *Kąt precesji* ψ zawarty między dodatnią częścią osi Ox i prostą OA utworzoną przez przesunięcie płaszczyzn Oxy i $Ox'y'$, przy czym na prostej OA bierze się kierunek osi w ten sposób, żeby układ osi OA, Oz i Oz' miał tę samą orientację co układ osi Ox, Oy i Oz (tzn. żeby oba układy były lewoskrętne lub prawoskrętne) (1); kąt ψ liczony jest w kierunku od Ox do Oy ($0 \leq \psi < 2\pi$).

3. *Kąt właściwego obrotu* φ zawarty między OA i Ox' ; kąt φ liczony jest w kierunku od Ox' do Oy' ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Jeżeli oznaczmy

$$\cos \theta = c_1, \quad \cos \psi = c_2, \quad \cos \varphi = c_3,$$

$$\sin \theta = s_1, \quad \sin \psi = s_2, \quad \sin \varphi = s_3,$$

to

$$l_1 = c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, \quad m_1 = s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3, \quad n_1 = s_1 s_3,$$

$$l_2 = -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, \quad m_2 = -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, \quad n_2 = s_1 c_3,$$

$$l_3 = s_1 s_2, \quad m_3 = -s_1 c_2, \quad n_3 = c_1.$$

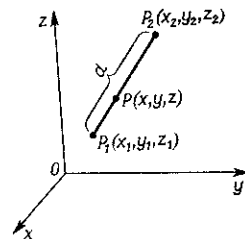
Odległość między punktami $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (rys. 203) wynosi

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

skąd cosinusy kierunkowe odcinka $P_1 P_2$:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d},$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$



Rys. 203

(1) O orientacji układu trzech osi patrz str. 650.

Podział odcinka w danym stosunku (rys. 203). Współrzędne punktu P , dla którego

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda,$$

gdzie m i n są liczbami dodatnimi, określone są wzorami

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Zastosowanie tych wzorów, gdy $\lambda < 0$, patrz str. 259. Biorąc $\lambda = 1$ otrzymujemy *współrzędne środka odcinka* P_1P_2 :

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Środek ciężkości. Współrzędne środka ciężkości układu punktów materialnych $M_i(x_i, y_i)$ o masach m_i określone są wzorami

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Objętość czworościanu o wierzchołkach $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ (rys. 204).

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}.$$

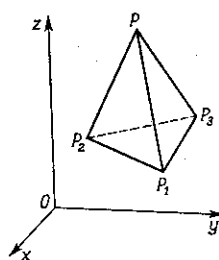
Przy obliczaniu według tego wzoru otrzymujemy $V > 0$, jeżeli orientacja układu wektorów $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$, $\overrightarrow{PP_3}$ jest taka sama jak orientacja układu osi Ox , Oy , Oz (patrz str. 650) i $V < 0$ w przypadku przeciwnym.

Cztery punkty P , P_1 , P_2 , P_3 leżą w jednej płaszczyźnie, jeżeli

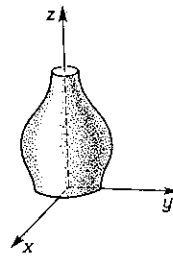
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie powierzchni. $F(x, y, z) = 0$ przedstawia na ogół pewną powierzchnię mającą tę własność, że współrzędne dowolnego punktu P tej powierzchni spełniają dane równanie i na odwrót, każdy punkt, którego współrzędne spełniają dane równanie, leży na tej powierzchni; wówczas równanie $F(x, y, z) = 0$ nazywamy *równaniem tej powierzchni*.

Równanie *powierzchni walcowej* (patrz str. 224), której tworzące są równoległe do osi Ox , nie zawiera współrzędnej x i ma postać $F(y, z) =$



Rys. 204



Rys. 205

$= 0$. Na płaszczyźnie Oyz równanie $F(y, z) = 0$ przedstawia linie przecięcia powierzchni walcowej z płaszczyzną Oyz . Podobnie równania $F(x, y) = 0$ i $F(x, z) = 0$ przedstawiają powierzchnie walcowe o tworzących równoległych do osi Oz lub Oy , a w płaszczyznach Oxy i Oxz równania te wyznaczają linie przecięcia powierzchni walcowych z prostopadłymi do nich płaszczyznami współrzędnych. Powierzchnia walcowa, której tworzące mają cosinusy kierunkowe proporcjonalne do liczb l, m, n , jest wyznaczona równaniem $F(nx-lz, ny-mz) = 0$.

Jeżeli krzywą $z = f(x)$ położoną w płaszczyźnie Oxz obracać będziemy dookoła osi Oz (rys. 205), to otrzymana *powierzchnia obrotowa* będzie miała równanie postaci $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Analogicznie piszemy równania powierzchni otrzymanych z obrotu krzywych dookoła osi Ox lub Oy .

Równanie *powierzchni stożkowej* (patrz str. 225) o wierzchołku w początku współrzędnych ma postać $F(x, y, z) = 0$, gdzie F jest funkcją jednorodną względem x, y, z (patrz str. 371).

Równanie krzywej w przestrzeni. Krzywa l w przestrzeni może być wyznaczona dwoma równaniami parametrycznymi:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t).$$

Każdej wartości parametru t odpowiada określony punkt krzywej l . Drugim sposobem wyznaczenia krzywej w przestrzeni jest podanie

dwóch równań: $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, które muszą być równocześnie spełnione przez współrzędne każdego punktu danej krzywej. Równania te wzięte z osobna przedstawiają dwie powierzchnie przechodzące przez daną krzywą l . Każde równanie $F_1 + \lambda F_2 = 0$ przy dowolnym λ przedstawia powierzchnię przechodzącą przez krzywą l i może zastąpić pierwsze z danych poprzednio równań.

9. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni

Równanie płaszczyzny. Każde równanie liniowe względem współrzędnych określa w przestrzeni płaszczyznę i na odwrót: równanie dowolnej płaszczyzny jest równaniem stopnia pierwszego.

a. Równanie ogólne płaszczyzny:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie A, B, C nie są jednocześnie równe zeru. Wektor $N(A, B, C)$ (rys. 206) jest prostopadły do danej płaszczyzny i ma cosinusy kierunkowe

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Jeżeli $A = 0$ (lub $B = 0$, lub $C = 0$), płaszczyzna jest równoległa do osi Ox (lub do osi Oy , lub do osi Oz). Jeżeli $A = B = 0$ (lub $A = C = 0$, lub $B = C = 0$), płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny Oxy (lub do płaszczyzny Oxz , lub do Oyz). Gdy $D = 0$, płaszczyzna przechodzi przez początek współrzędnych.

Równanie ogólne w postaci wektorowej: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + D = 0$ (patrz str. 654), gdzie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ jest wektorem ruchomego punktu $M(x, y, z)$ danej płaszczyzny.

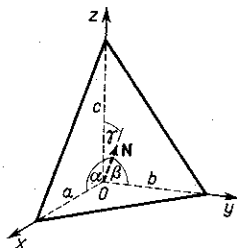
b. Równanie normalne płaszczyzny:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

gdzie p jest odległością początku współrzędnych O od jego rzutu O' na daną płaszczyznę, a wektor $N(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jest prostopadły do tej płaszczyzny

i w przypadku gdy $p \neq 0$ jest zgodniej skierowany z wektorem $\overrightarrow{OO'}$.

Równanie normalne można otrzymać z równania ogólnego mnożąc je przez czynnik normujący $\mu = 1/N = \varepsilon / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i w przypadku, gdy $D \neq 0$, znak ε jest przeciwny znakowi D .



Rys. 206

Równanie normalne w postaci wektorowej $\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} - p = 0$, gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym ruchomego punktu płaszczyzny, a $\mathbf{N}$ jest wektorem jednostkowym (wersorem) kierunku N .

c. Równanie odcinkowe płaszczyzny:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

gdzie $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, przy czym $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ są punktami przecięcia danej płaszczyzny z osiami współrzędnych (rys. 206).

d. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane trzy punkty $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{albo inaczej:} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

w postaci wektorowej $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$ (*).

e. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dwa punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ i równoległej do wektora $R(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{albo inaczej:} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

w postaci wektorowej $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0$ (**).

f. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i równoległej do dwóch wektorów $R_1(l_1, m_1, n_1)$ i $R_2(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{albo inaczej:} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

w postaci wektorowej $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0$ (**).

g. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i prostopadłej do wektora $N(A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

w postaci wektorowej $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0$ (**).

(*) W przypadku d, e, f zastosowano oznaczenia: $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ (wektor wodzący ruchomego punktu P płaszczyzny) $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$. O iloczynie mieszanym trzech wektorów — patrz str. 650.

(**) O iloczynach wektorów patrz str. 650.

h. Równanie pęku płaszczyzn przechodzących przez linię przecięcia dwóch płaszczyzn π_1 i π_2 (rys. 207), określonych równaniami

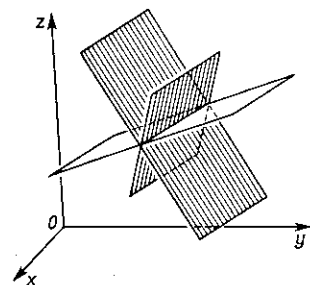
$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

przybiera postać

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

gdzie λ przebiega wszystkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$; równanie to nie zawiera jednak płaszczyzny π_2 .

Jeśli równania płaszczyzn π_1 i π_2 dane są w postaci normalnej, to przy $\lambda = 1$ lub $\lambda = -1$ otrzymuje się równania, które wyznaczają płaszczyzny dzielące kąt między płaszczyznami π_1 i π_2 na połowy (płaszczyzny dwusieczne).



Rys. 207

czają płaszczyzny dzielące kąt między płaszczyznami π_1 i π_2 na połowy (płaszczyzny dwusieczne).

Kąt między dwiema płaszczyznami omówiony jest na str. 293.

Punkt przecięcia się trzech płaszczyzn — patrz str. 292.

Odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi ⁽¹⁾

$Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ wynosi

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość punktu $M(a, b, c)$ od płaszczyzny wyznaczonej równaniem normalnym $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, gdzie $p > 0$, równa się wartości lewej strony tego równania po podstawieniu współrzędnych a, b, c punktu M zamiast współrzędnych bieżących x, y, z ⁽²⁾:

$$\delta = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma - p.$$

Jeżeli punkt M i początek współrzędnych leżą po różnych stronach danej płaszczyzny, to $\delta > 0$, a w przypadku przeciwnym $\delta < 0$.

Równania prostej w przestrzeni. Prostą w przestrzeni określa się jako linię przecięcia dwóch płaszczyzn i wyznacza się ją analitycznie za pomocą układu dwóch równań liniowych.

⁽¹⁾ Warunki równoległości płaszczyzn — patrz str. 291.

⁽²⁾ Metoda sprowadzenia ogólnego równania płaszczyzny do postaci normalnej — patrz str. 286.

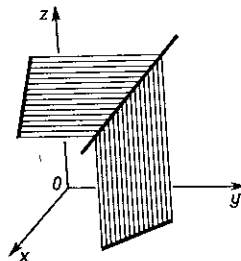
a. Równania ogólne prostej:

$$(1) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

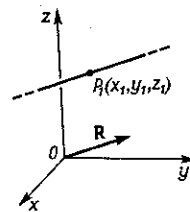
przy czym $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ i $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, w postaci wektorowej

$$\mathbf{r} \mathbf{N}_1 + D_1 = 0, \quad \mathbf{r} \mathbf{N}_2 + D_2 = 0,$$

gdzie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ (wektor wodzący ruchomego punktu P danej prostej) $\mathbf{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ i $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ są wektorami prostopadłymi do danych płaszczyzn.



Rys. 208



Rys. 209

b. Równania prostej wyznaczonej za pomocą dwóch płaszczyzn rzutujących tę prostą na płaszczyzny Oxy i Oxz (rys. 208):

$$y = kx + b, \quad z = hx + c \quad (\text{przypadek ogólny}).$$

Pierwsze równanie wyznacza płaszczyznę rzutującą daną prostą na płaszczyznę Oxy , a drugie — na płaszczyznę Oxz (rys. 208).

c. Równania prostej przechodzącej przez dany punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i równoległej do wektora kierunkowego $\mathbf{R}(l, m, n)$ (rys. 209):

$$(2) \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n};$$

w postaci wektorowej $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0$ ⁽¹⁾, gdzie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ (wektor wodzący ruchomego punktu P danej prostej), a $\mathbf{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ i $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ są wektorami prostopadłymi do danych płaszczyzn.

Równania parametryczne

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt;$$

w postaci wektorowej $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}t$.

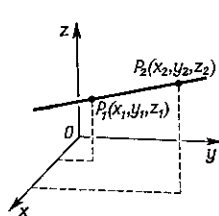
⁽¹⁾ O iloczynie wektorów patrz str. 650.

Aby otrzymać równania (2) z postaci (1), przyjmujemy

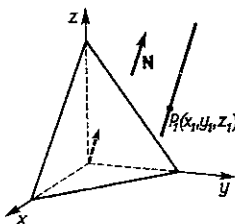
$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

a w postaci wektorowej przyjmujemy $R = N_1 \times N_2$ ⁽¹⁾, przy czym za punkt $P(x, y, z)$ możemy przyjąć którykolwiek punkt spełniający równania (1).

d. Równania prostej przechodzącej przez dane dwa punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (rys. 210):



Rys. 210



Rys. 211

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

w postaci wektorowej $(r-r_1) \times (r_2-r_1) = 0$ ⁽¹⁾.

e. Równania prostej przechodzącej przez dany punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i prostopadłej do płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ lub do płaszczyzny $rN + D = 0$ (rys. 211):

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C} \quad (2);$$

w postaci wektorowej $(r-r_1) \times N = 0$ ⁽¹⁾.

Odległość punktu $M(a, b, c)$ od prostej danej równaniem w postaci (2) określa się według wzoru

$$\delta^2 = \frac{[(a-x_1)m - (b-y_1)l]^2 + [(b-y_1)n - (c-z_1)m]^2}{l^2 + m^2 + n^2} + \frac{[(c-z_1)l - (a-x_1)n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

⁽¹⁾ O iloczynach wektorów patrz str. 650.

⁽²⁾ Z zastrzeżeniem, że jeżeli którykolwiek mianownik jest równy zero, to odpowiedni licznik równa się zero.

Punkty przecięcia płaszczyzn i prostych

Układy płaszczyzn i prostych	Wzory na wyznaczenie punktów przecięcia	Uwagi
Trzy płaszczyzny: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$	$\bar{x} = \frac{-\Delta x}{\Delta}, \quad \bar{y} = \frac{-\Delta y}{\Delta},$ $\bar{z} = \frac{-\Delta z}{\Delta},$ gdzie $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$ $\Delta x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$ $\Delta y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix},$ $\Delta z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$	Trzy płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, jeżeli $\Delta \neq 0$; jeśli $\Delta = 0$ i chociaż jeden z minorów rzędu drugiego nie równa się zero, płaszczyzny są równoległe do pewnej prostej, jeżeli wszystkie minory są równe 0, płaszczyzny mają wspólną prostą
Cztery płaszczyzny $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$ $A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$	Znajdujemy punkt przecięcia którychkolwiek trzech płaszczyzn spośród czterech (patrz wyżej). W tym przypadku ($\delta = 0$) jedno z równań wynika z trzech pozostałych	Cztery płaszczyzny tylko wtedy przecinają się w jednym punkcie, gdy $\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$ (warunek konieczny, ale nie dostateczny)
Płaszczyzna i prosta $1) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$ $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$	$1) \quad \bar{x} = x_1 - l\varrho,$ $\bar{y} = y_1 - m\varrho,$ $\bar{z} = z_1 - n\varrho,$ gdzie $\varrho = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn};$	Jeśli $Al + Bm + Cn = 0$ lub $A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} + D = 0$, to prosta jest równoległa do płaszczyzny; jeżeli ponadto $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ lub $Ba + Cb + D = 0$, to prosta leży na płaszczyźnie

Punkty przecięcia płaszczyzn i prostych (cd.)

Układy płaszczyzn i prostych	Wzory na wyznaczenie punktów przecięcia	Uwagi
2) $Ax + By + Cz + D = 0$, $y = kx + a$, $z = hx + b$	2) $\bar{x} = -\frac{Ba + Cb + D}{A + Bk + Ch}$, $\bar{y} = k\bar{x} + a$, $\bar{z} = h\bar{x} + b$	
Dwie proste $y = k_1x + a_1$, $z = h_1x + b_1$; $y = k_2x + a_2$, $z = h_2x + b_2$	$\bar{x} = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2}$; $\bar{y} = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2}$; $\bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}$	Wzory te dają punkt przecięcia tylko przy spełnieniu warunku $(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) = (b_1 - b_2)(k_1 - k_2)$, w przeciwnym przypadku proste nie przecinają się (patrz str. 293)

Kąt między płaszczyznami i prostymi

Kąt między płaszczyznami i prostymi	danymi za pomocą równań	oblicza się według wzoru
Dwie płaszczyzny w postaci wektorowej	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $rN_1 + D_1 = 0$, $rN_2 + D_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$ $\cos \varphi = \frac{N_1N_2}{N_1N_2}$
Dwie proste w postaci wektorowej	$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ $(r-r_1) \times R_1 = 0$, $(r-r_2) \times R_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$ $\cos \varphi = \frac{R_1R_2}{R_1R_2}$
Prosta i płaszczyzna w postaci wektorowej	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$, $Ax + By + Cz + D = 0$ $(r-r_1) \times R = 0$, $rN + D = 0$	$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$ $\sin \varphi = \frac{RN}{RN}$

Odległość między prostymi nierównoległymi o równaniach

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

wynosi

$$\delta = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}},$$

przy czym jeżeli licznik powyższego wyrażenia równa się zeru, to dane dwie proste przecinają się; jeżeli licznik nie równa się zeru, to proste są skośne.

Jeśli dane dwie proste są równoległe, odległość między nimi oblicza się jako odległość punktu $P(x, y, z)$ od drugiej prostej.

Warunki równoległości (oznaczenia jak wyżej):

a. Dwie płaszczyzny: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, z warunkiem, że jeżeli którykolwiek z mianowników jest zerem, to i odpowiedni licznik jest zerem; w postaci wektorowej $N_1 \times N_2 = 0$.

b. Dwie proste: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (z zastrzeżeniem jak wyżej); w postaci wektorowej $R_1 \times R_2 = 0$.

c. Prosta i płaszczyzna: $Al + Bm + Cn = 0$; w postaci wektorowej $RN = 0$.

Warunki prostokątności (oznaczenia jak wyżej):

a. Dwie płaszczyzny: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; w postaci wektorowej $N_1N_2 = 0$.

b. Dwie proste: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$; w postaci wektorowej $R_1R_2 = 0$.

c. Prosta i płaszczyzna $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ z zastrzeżeniem, że jeżeli którykolwiek z mianowników jest zerem, to i odpowiedni licznik jest zerem; w postaci wektorowej $N \times R = 0$.

10. Powierzchnie stopnia drugiego — równania kanoniczne (1)

Powierzchnie środkowe. Przytoczone niżej równania powierzchni są *równaniami kanonicznymi*: początek współrzędnych jest *środkiem symetrii* (czyli punktem, w którym wszystkie cięciwy dzielą się na po-

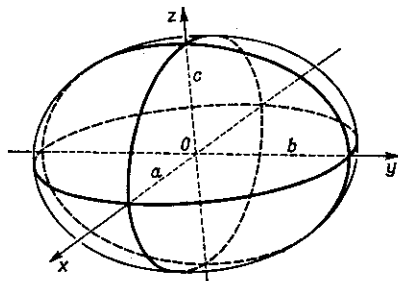
(1) Równanie ogólne powierzchni stopnia drugiego — patrz str. 299.

łowy); osie współrzędnych są *osiąmi symetrii*, a płaszczyzny współrzędnych są *płaszczyznami symetrii*.

Elipsoida. *Elipsoida* (rys. 212) ma równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

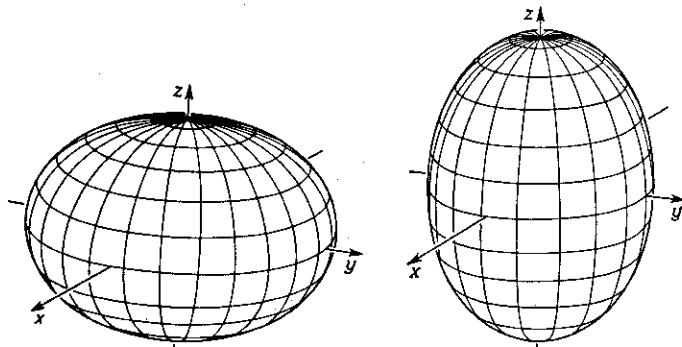
gdzie a, b, c są *półosiami* elipsoidy.



Rys. 212

Gdy $a = b = c$, otrzymujemy *powierzchnię kuli*, czyli *sferę*, o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Powierzchnię tę otrzymuje się przez obrót okręgu dokoła średnicy.

Gdy $a = b < c$, mamy *elipsoidę obrotową spłaszczoną* (rys. 213), czyli *sferoidę spłaszczoną*; otrzymuje się ją przez obrót elipsy o równaniu $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ dokoła małej osi, która w tym przypadku leży na osi Oz .

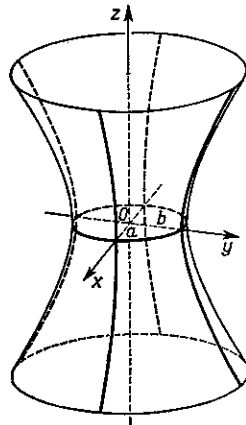


Rys. 213

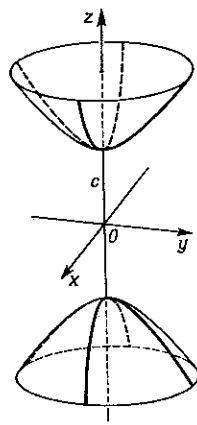
Rys. 214

Gdy $a = b < c$, mamy *elipsoidę obrotową wydłużoną* (rys. 214), czyli *sferoidę wydłużoną*; otrzymuje się ją przez obrót elipsy o równaniu $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ dokoła wielkiej osi, która w tym przypadku leży na osi Oz .

Przekrój elipsoidy dowolną płaszczyzną jest elipsą (lub kołem). Objętość elipsoidy $V = \frac{4}{3}\pi abc$.



Rys. 215



Rys. 216

Hiperboloidy. *Hiperboloida jednowłokowa* (rys. 215) ma równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gdzie a i b są *półosiami rzeczywistymi*, a c jest *półosią urojoną*.

O hiperboloidzie jednowłokowej jako *powierzchni prostokątnej* — patrz str. 297.

Hiperboloida dwuwłokowa (rys. 216) ma równanie

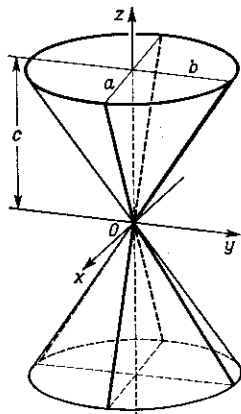
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

gdzie a i b są *półosiami urojonymi*, a c jest *półosią rzeczywistą*.

Dla obu rodzajów hiperboloid przekroje równoległe do osi Oz są hiperbolami (dla hiperboloidy jednowłokowej może być to para przecinających się prostych). Przekroje hiperboloid płaszczyznami równo-

ległymi do płaszczyzny Oxy są w tym przypadku elipsami lub kołami (rzeczywistymi lub urojonymi).

Gdy $a = b$, mamy *hiperboloidy obrotowe*; można je otrzymać przez obrót dookoła osi Oz jednej z hiperbol sprzężonych: $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ (dla hiperboloidy jednopowłokowej) lub $x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$ (dla hiperboloidy dwupowłokowej).



Rys. 217

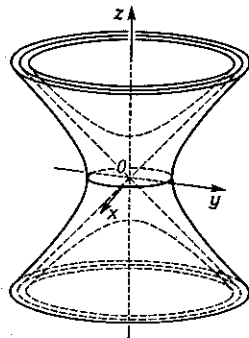
Stożek. Stożek (rys. 217) ma równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Wierzchołkiem stożka jest początek współrzędnych, a za *kierującą* (patrz str. 226) można przyjąć elipsę o półosiach a i b leżącą w płaszczyźnie $z = c$.

Każda płaszczyzna o równaniu $Ax + By = 0$ przecina stożek wzdłuż dwóch jego tworzących symetrycznych względem osi Oz . Hiperboloidy o równaniach $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ mają wspólny stożek asymptotyczny $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (rys. 218), tzn. punkt ruchomy każdej tworzącej tego stożka nieograniczenie zbliża się w nieskończoność do obu hiperboloid.

Gdy $a = b$, otrzymujemy *stożek obrotowy* (patrz str. 226).



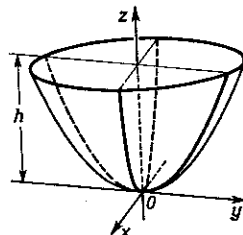
Rys. 218

Paraboloidy. Paraboloide nie mają środka. Dla równań podanych poniżej wierzchołek paraboloidy leży w początku współrzędnych, oś Oz jest osią symetrii, a płaszczyzny Oxz i Oyz są *plaszczynami symetrii*.

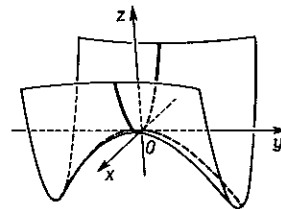
Paraboloida eliptyczna (rys. 219) ma równanie

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Każdy przekrój płaszczyzną $z = c$, gdzie $c > 0$, jest elipsą, a każdy przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś Oz lub do niej równoległą jest parabolą. Gdy $a = b$, mamy *paraboloidę obrotową*, która powstaje,



Rys. 219



Rys. 220

gdy parabola $z = x^2/a^2$ leżąca w płaszczyźnie Oxy obraca się dookoła osi Oz .

Objętość odcinka paraboloidy ograniczonego płaszczyzną $z = h$, gdzie $h > 0$: $V = \frac{1}{2} \pi abh$, czyli połowie objętości walca eliptycznego o takiej samej wysokości i podstawie.

Paraboloida hiperboliczna (rys. 220) ma równanie

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Przekrój płaszczyzną Oxz jest parabolą $z = x^2/a^2$, a przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny Oxz są takimi samymi parabolami. Przekrój płaszczyzną Oyz jest parabolą $z = -y^2/b^2$, a przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny Oyz są takimi samymi parabolami. Przekrój płaszczyzną Oxy daje parę przecinających się prostych o równaniach $x/a \pm y/b = 0$, a przekroje płaszczyznami równoległymi do Oxy dają hiperbolę.

Powierzchnie prostokreślne. Powierzchnię nazywamy *prostokreślną*, jeżeli przez każdy jej punkt przechodzi co najmniej jedna

prosta leżąca na tej powierzchni. Każdą taką prostą nazywamy *tworzącą* powierzchni prostokreślnej (jak np. tworząca stożka lub walca).

Hiperboloida jednopowłokowa (rys. 221)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ma dwie rodziny tworzących: jedną o równaniach

$$(I) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u \left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

$$u \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}$$

i drugą o równaniach

$$(II) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$v \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b},$$

gdzie u i v są dowolnymi liczbami. Przez każdy punkt hiperboloidy jednopowłokowej przechodzi po jednej tworzącej z każdej rodziny.

Paraboloida hiperboliczna (rys. 222) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ma dwie rodziny tworzących: jedną o równaniach

$$(I) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad u \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z$$

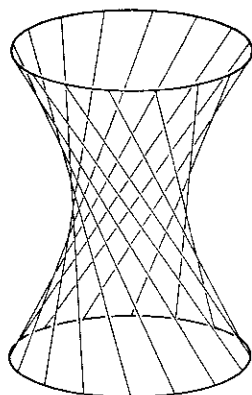
i drugą o równaniach

$$(II) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad v \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z.$$

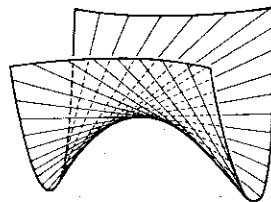
Przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej przechodzi po jednej tworzącej z każdej rodziny. Na rysunkach 221 i 222 narysowano tylko jedną rodzinę tworzących.

Walce. Walec eliptyczny (rys. 223) ma równanie

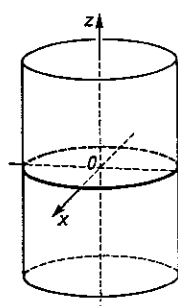
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



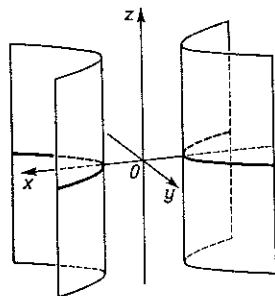
Rys. 221



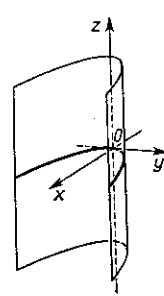
Rys. 222



Rys. 223



Rys. 224



Rys. 225

walec hiperboliczny (rys. 224) ma równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a walec paraboliczny (rys. 225) ma równanie $y^2 = 2px$.

11. Powierzchnie stopnia drugiego (ogólna teoria)

Równanie ogólne powierzchni stopnia drugiego ma postać

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

gdzie współczynniki przy wyrażeniach stopnia drugiego nie są równo-
cześnie równe zeru.

Niezmienniki powierzchni stopnia drugiego ⁽¹⁾. Wielkość

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2$$

nie zmieniają się przy zmianie początku współrzędnych i przy obrocie osi współrzędnych.

⁽¹⁾ Przyjmujemy $a_{ij} = a_{ji}$.

I. $\delta \neq 0$ (powierzchnie środkowe)

	$S\delta > 0, \quad T > 0$	$S\delta > 0, \quad T < 0$ lub $S\delta < 0, \quad T > 0$
$\Delta < 0$	Elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hiperboloida dwupowłokowa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Elipsoida urojona $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Hiperboloida jednowyłokowa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Stożek urojony (o wierzchołku rzeczywistym) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Stożek $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II. $\delta = 0$ (paraboloidy, walce i pary płaszczyzn)

	$T > 0$	$T < 0$
$\Delta \neq 0$	$\Delta < 0$ Paraboloida eliptyczna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	$\Delta > 0$ Paraboloida hiperboliczna $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Powierzchnia walcowa, której kierującą jest krzywa stopnia drugiego. W zależności od kształtu tej krzywej (patrz str. 291, 292) otrzymujemy walce różnego rodzaju: eliptyczny rzeczywisty lub urojony (gdy $T > 0$); hiperboliczny (gdy $T < 0$); paraboliczny (gdy $T = 0$), pod warunkiem, że powierzchnia stopnia drugiego nie ulega degeneracji, tzn. nie sprowadza się do układu dwóch płaszczyzn rzeczywistych lub urojonych albo do jednej płaszczyzny. Warunki degeneracji: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$	

Kształt powierzchni stopnia drugiego o danym równaniu określamy na podstawie znaków niezmienników tej powierzchni posługując się powyższą tablicą: w tablicy tej obok nazwy powierzchni dane są równania kanoniczne, do których możemy sprowadzić dane równanie za pomocą zmiany współrzędnych. Równania tzw. powierzchni urojonych nie są spełnione przez współrzędne żadnego punktu rzeczywistego z wyjątkiem dwóch przypadków: wierzchołka stożka urojonego i linii przecięcia dwóch płaszczyzn urojonych.

II. GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

W geometrii różniczkowej bada się linie krzywe (płaskie i przestrzenne) oraz powierzchnie przy użyciu metod rachunku różniczkowego; dlatego zakłada się, że funkcje występujące w równaniach są ciągłe i mają ciągłe pochodne aż do tego rzędu, który potrzebny jest w rozważanym zagadnieniu. (Warunek ten może nie być spełniony tylko w poszczególnych punktach krzywej lub powierzchni; mamy wówczas punkty specjalnego rodzaju, np. punkty nieciągłości lub załamania krzywej. Punkty takie omówione są na str. 311 i 332).

Przy badaniu tworów geometrycznych według ich równań rozróżnia się *własności zależne* od wyboru układu współrzędnych (np. punkty przecięcia krzywej lub powierzchni z osiami współrzędnych, kąt nachylenia stycznej, ekstrema) i *własności niezależne*, nie ulegające zmianie przy zmianie współrzędnych i należące do samej tylko krzywej lub powierzchni (np. punkty przegięcia, wierzchołki krzywej, krzywizna). Z drugiej strony rozróżnia się *własności lokalne*, dotyczące tylko bardzo małej części krzywej lub powierzchni (np. krzywizna, element liniowy powierzchni) i *własności integralne* krzywej lub powierzchni (np. ilość wierzchołków, długość krzywej zamkniętej).

A. KRZYWE PŁASKIE

1. Sposoby wyznaczania krzywej

Równanie krzywej ⁽¹⁾. Krzywą płaską można przedstawić analitycznie w jednej z następujących postaci:

We współrzędnych prostokątnych:

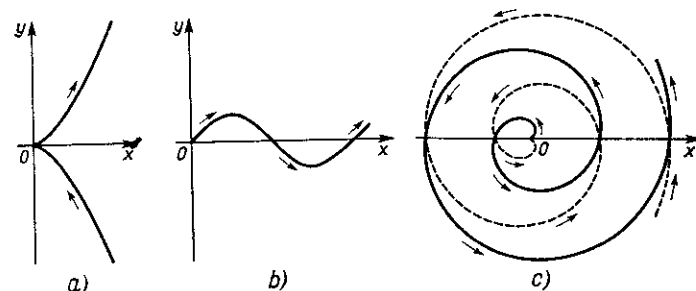
- (1) $F(x, y) = 0$ (w postaci uwikłanej),
- (2) $y = f(x)$ (w postaci wyrażonej),
- (3) $x = x(t)$, $y = y(t)$ (w postaci parametrycznej).

We współrzędnych biegunowych:

- (4) $\varrho = f(\varphi)$.

⁽¹⁾ Ogólne pojęcie równania krzywej podane jest na str. 260.

Dodatni kierunek krzywej. Jeżeli krzywa jest dana w postaci (3), to za *kierunek dodatni* przyjmuje się ten kierunek, w którym porusza się punkt $M(x(t), y(t))$ krzywej przy wzrastaniu parametru t (rys. 226a). Jeżeli krzywa jest dana w postaci (2), to za parametry można



Rys. 226

uważać odciętą x i rzędną $y = f(x)$ punktu $M(x, y)$ i za *kierunek dodatni* krzywej przyjąć kierunek odpowiadający wzrastaniu odciętej, tj. od strony lewej do prawej (rys. 226b). Jeżeli krzywa jest dana w postaci (4), to parametrem jest argument φ , a więc $x = f(\varphi) \cos \varphi$, $y = f(\varphi) \sin \varphi$ i *kierunek dodatni* krzywej odpowiada wzrastaniu argumentu φ , tj. przebiega w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówek zegara (rys. 226c).

Przykłady (rys. 226): a. $x = t^2$, $y = t^3$; b. $y = \sin x$; c. $\varrho = a\varphi$.

2. Lokalne elementy krzywej

W paragrafie tym M oznacza zmienny punkt krzywej określony przez podanie wartości x w przypadku (2), wartości t w przypadku (3) i wartości φ w przypadku (4); N oznacza punkt nieskończenie bliski punktu M , określony odpowiednio przez podanie wartości $x+dx$, $t+dt$ lub $\varphi+d\varphi$.

Różniczka łuku. Jeżeli s jest długością krzywej liczoną od stałego punktu A do zmiennego punktu M , to nieskończenie mały przyrost długości łuku $\Delta s = MN$ wyraża się w przybliżeniu przez różniczkę łuku ⁽¹⁾ ds:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{dla krzywej danej w postaci (2),}$$

⁽¹⁾ O różniczkę i jej własnościach — patrz str. 390 - 392.

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \quad \text{dla krzywej danej w postaci (3),}$$

$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\varphi \quad \text{dla krzywej danej w postaci (4).}$$

Przykłady

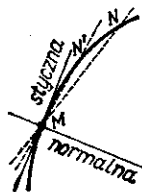
$$1. y = \sin x, ds = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx,$$

$$2. x = t^2, y = t^3, ds = |t| \sqrt{4 + 9t^2} dt,$$

$$3. \varrho = a\varphi, ds = a \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi.$$

Styczna i normalna. Określenia.

Styczną do krzywej w punkcie M nazywamy graniczne położenie cięciwy MN , gdy $N \rightarrow M$, normalną do krzywej nazywamy prostą prostopadłą do krzywej przechodzącą przez punkt M (rys. 227).



Rys. 227

Równania stycznej i normalnej są następujące:

Postać krzywej	Równanie stycznej	Równanie normalnej
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
(2)	$Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$	$Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$
(3)	$\frac{Y-y}{y_t'} = \frac{X-x}{x_t'}$	$x_t'(X-x) + y_t'(Y-y) = 0$

W równaniach tych x, y są współrzędnymi danego punktu M krzywej, X, Y są współrzędnymi bieżącymi punktu stycznej lub normalnej, a wartości pochodnych oblicza się dla punktu M .

Uwaga. Jeżeli w punkcie $M(x, y)$ jedna z wielkości $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}; x_t', y_t'$ przybiera wartość 0 lub ∞ , to styczna i normalna są równoległe do osi współrzędnych w tym punkcie.

Przykłady. Znaleźć równania stycznej i normalnej do krzywej:

1. Dla okręgu $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $M(3, 4)$. Równanie stycznej w punkcie $M(x, y)$ ma postać $2x(X-x) + 2y(Y-y) = 0$, co po uwzględ-

nieniu równości $x^2 + y^2 = 25$ daje $xX + yY = 25$, w punkcie $M(3, 4)$ mamy $3X + 4Y = 25$. Równanie normalnej w punkcie $M(x, y)$ ma postać

$$\frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y} \quad \text{lub} \quad Y = \frac{y}{x} X;$$

w punkcie $M(3, 4)$ mamy $Y = \frac{4}{3} X$.

2. Dla sinusoidy w punkcie $M(0, 0)$. Równanie stycznej w punkcie $M(x, y)$:

$$Y - \sin x = \cos x(X-x) \quad \text{lub} \quad Y = X \cos x + \sin x - x \cos x,$$

w punkcie $M(0, 0)$ jest $Y = X$. Równanie normalnej w punkcie $M(x, y)$:

$$Y - \sin x = -\frac{1}{\cos x}(X-x) \quad \text{lub} \quad Y = -\frac{X}{\cos x} + \sin x + \frac{x}{\cos x};$$

w punkcie $M(0, 0)$ mamy $Y = -X$.

3. Dla paraboli Neila $x = t^2, y = t^3$, w punkcie $M(4, -8)$, $t = -2$. Równanie stycznej w punkcie $M(x, y)$:

$$\frac{Y-t^3}{3t^2} = \frac{X-t^2}{2t} \quad \text{lub} \quad Y = \frac{3}{2} tX - \frac{1}{2} t^3;$$

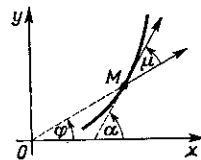
w punkcie $M(4, -8)$ mamy $Y = -3X + 4$. Równanie normalnej w punkcie $M(x, y)$:

$$2t(X-t^2) + 3t^2(Y-t^3) = 0 \quad \text{lub} \quad 2X + 3tY = t^2(2 + 3t^3);$$

w punkcie $M(4, -8)$ mamy $X - 3Y = 28$.



Rys. 228



Rys. 229

Kierunek dodatni stycznej i normalnej. Jeżeli krzywa dana jest w postaci (2), (3) lub (4) (patrz str. 302), to dodatni kierunek stycznej i normalnej określamy w sposób następujący: 1° *kierunek dodatni stycznej* jest zgodny z kierunkiem krzywej w punkcie styczności (patrz str. 303); 2° *kierunek dodatni normalnej* otrzymuje się z dodatniego kierunku stycznej przez jej obrót dookoła punktu styczności o kąt 90° przeciw obiegowi wskazówki zegara (rys. 228). Punkt M dzieli styczną i normalną na dodatnią i ujemną półprostą.

Kąt nachylenia α stycznej w danym punkcie M jest to kąt między kierunkiem dodatnim osi Ox i kierunkiem dodatnim stycznej w punkcie M ; we współrzędnych biegunowych jest to kąt μ między kierunkiem dodatnim promienia wodzącego ρ punktu M i kierunkiem dodatnim stycznej w tym punkcie (rys. 229). Kąty α i μ oblicza się według następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dy}{dx}, & \cos \alpha &= \frac{dx}{ds}, & \sin \alpha &= \frac{dy}{ds}, \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)}, & \cos \mu &= \frac{d\rho}{ds}, & \sin \mu &= \rho \frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

gdzie ds oblicza się ze wzorów podanych na str. 303 i 304.

Przykłady. 1. $y = \sin x$; wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos x, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}, \quad \sin \alpha = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

2. $x = t^2, y = t^3$; wtedy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}t$ dla każdego t oraz

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{2}{\sqrt{4+9t^2}}, & \sin \alpha &= \frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}} & \text{dla } t \geq 0, \\ \cos \alpha &= -\frac{2}{\sqrt{4+9t^2}}, & \sin \alpha &= -\frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}} & \text{dla } t < 0. \end{aligned}$$

3. $\rho = a\varphi$; wtedy

$$\operatorname{tg} \mu = \varphi, \quad \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \quad \sin \mu = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

Odcinki stycznej i normalnej, podstyczna i podnormalna (rys. 230).

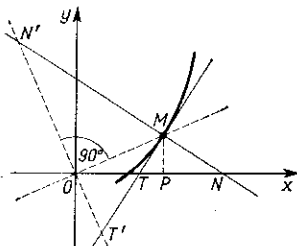
a. We współrzędnych kartezjańskich, przy określaniu krzywej w postaci (2) i (3) (patrz str. 302):

$$\text{styczna} \quad MT = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} \right|,$$

$$\text{normalna} \quad MN = |y| \sqrt{1+y'^2},$$

$$\text{podstyczna} \quad PT = \left| \frac{y}{y'} \right|,$$

$$\text{podnormalna} \quad PN = |yy'|.$$



Rys. 230

b. We współrzędnych biegunowych, przy określaniu krzywej w postaci (4) (patrz str. 302):

$$\text{styczna biegunowa} \quad MT' = \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right|,$$

$$\text{normalna biegunowa} \quad MN' = \left| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right|,$$

$$\text{podstyczna} \quad OT' = \left| \frac{\rho^2}{\rho'} \right|,$$

$$\text{podnormalna} \quad ON' = |\rho'|.$$

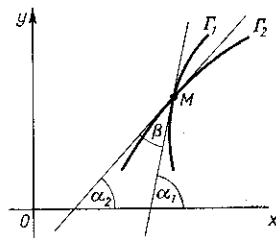
✓ **Przykłady.** 1. $y = \cosh x$, wtedy $y' = \sinh x$, $\sqrt{1+y'^2} = \cosh x$; stąd $MT = \left| \frac{\cosh^2 x}{\sinh x} \right|$, $MN = |\cosh^2 x|$, $PT = |\operatorname{ctgh} x|$, $PN = |\sinh x \cosh x|$.

2. $\rho = a\varphi$, $a > 0$; wtedy $\rho' = a$, $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{1+\varphi^2}$; stąd $MT' = |a\varphi \sqrt{1+\varphi^2}|$, $MN' = |a \sqrt{1+\varphi^2}|$, $OT' = |a\varphi^2|$, $ON' = a$.

Kąt między dwiema krzywymi.

Kątem między dwiema krzywymi Γ_1 i Γ_2 o równaniach $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ przecinającymi się w punkcie $M(x_0, y_0)$ nazywamy kąt β zawarty między stycznymi do tych krzywych w punkcie M (rys. 231). Obliczenie kąta β sprowadza się do znalezienia kąta między dwiema prostymi (patrz str. 264), których współczynniki kątowe wynoszą

$$\begin{aligned} k_1 &= \operatorname{tg} \alpha_1 = f_1'(x)_{x=x_0}, \\ k_2 &= \operatorname{tg} \alpha_2 = f_2'(x)_{x=x_0}. \end{aligned}$$



Rys. 231

Przykład. Wyznaczyć kąt między parabolami $y = \sqrt{x}$ oraz $y = x^2$ w punkcie $M(1, 1)$. Mamy tu $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x^2$, $x_0 = 1$; stąd

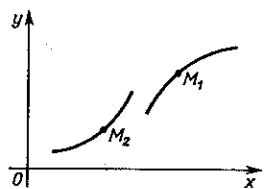
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = (2x)_{x=1} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{3}{4}.$$

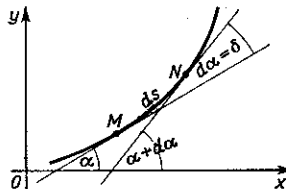
Wypukłość krzywej. Jeżeli krzywa dana jest w postaci $y = f(x)$ i leżący na niej punkt M nie jest punktem osobliwym, nie leży na odcinku prostoliniowym danej linii, ani nie jest punktem przecię-

cia krzywej (patrz str. 311 - 316), to ta krzywa w otoczeniu punktu M jest skierowana *wypukłością w górę*, gdy $f''(x) < 0$ (punkt M_1 na rysunku 232) i *wypukłością w dół*, gdy $f''(x) > 0$ (punkt M_2). Jeżeli $f''(x) = 0$, to zagadnienie należy zbadać dodatkowo, co zostało rozpatrzone na str. 312 przy omawianiu punktów przegięcia.

Przykład. $y = x^3$ (patrz rys. 6b na str. 100); mamy $y' = 3x^2$; gdy $x > 0$, krzywa jest wypukła w dół, a gdy $x < 0$, krzywa jest wypukła w górę.



Rys. 232



Rys. 233

Krzywizna i promień krzywizny. Krzywizną K krzywej w jej punkcie M nazywamy granicę stosunku kąta δ , zawartego między dodatkowymi kierunkami stycznymi w punktach M i N (rys. 233), do długości łuku $\widehat{MN}$, gdy $\widehat{MN} \rightarrow 0$:

$$K = \lim_{\widehat{MN} \rightarrow 0} \frac{\delta}{\widehat{MN}}.$$

Krzywizna K może być dodatnia lub ujemna w zależności od znaku powyższej granicy. Gdy $K > 0$, środek krzywizny leży na dodatniej półprostej normalnej (patrz str. 305) (tzn. krzywa jest skierowana wypukłością w stronę ujemnej półprostej normalnej); gdy $K < 0$, jest na odwrót.

Często krzywiznę określamy tylko jako wielkość dodatnią, biorąc bezwzględną wartość podanej powyżej granicy.

Promień krzywizny R w punkcie M krzywej nazywamy odwrotność krzywizny: $R = 1/K$. Im bardziej zakrzywiona jest krzywa w otoczeniu punktu M , tym większa jest krzywizna K , a tym mniejszy jest promień krzywizny R w tym punkcie. Dla okręgu o promieniu a krzywizna $K = 1/a$, a promień krzywizny $R = a$ (jest stały dla wszystkich punktów). Dla linii prostej $K = 0$, $R = \infty$. W ogólności krzywizna krzywej jest w różnych punktach różna.

Oznaczając $\delta = da$ i $\widehat{MN} = ds$ (rys. 233) otrzymujemy

$$(*) \quad K = \frac{da}{ds}, \quad R = \frac{ds}{da}.$$

Jeżeli krzywa jest dana w postaci (1), (2), (3) lub (4) (patrz str. 302) to K i R obliczamy według wzorów:

dla krzywej danej w postaci (2):

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

dla krzywej danej w postaci (3):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix}}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}, \quad R = \frac{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix}},$$

dla krzywej danej w postaci (1):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \quad R = \frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}},$$

dla krzywej danej w postaci (4):

$$K = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

Przykłady. 1. $y = \cosh x$; wtedy

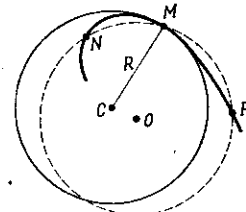
$$K = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

2. $x = t^2$, $y = t^3$; wtedy

$$K = \frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}.$$

3. $y^2 - x^2 = a^2$; wtedy $K = \frac{a^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$

4. $\varrho = a\varphi$; wtedy $K = \frac{1}{a} \cdot \frac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}.$



Rys. 234

Jeżeli mianownik w którymkolwiek z tych wzorów jest równy zeru, to krzywa ma w danym punkcie punkt przegięcia albo ma w otoczeniu tego punktu odcinek prostoliniowy i wówczas promień krzywizny jest w danym punkcie nieskończenie wielki.

Koło krzywizny i środek krzywizny. *Kołem krzywizny* krzywej w punkcie M nazywamy graniczne położenie koła, którego okrąg przechodzi przez punkt M i przez dwa punkty N i P leżące w otoczeniu punktu M (rys. 234). Promień koła krzywizny nazywamy *promieniem krzywizny* w danym punkcie; oblicza się go według wzorów (**). Środek koła krzywizny C nazywamy *środkiem krzywizny* w danym punkcie; leży on na normalnej do krzywej po stronie jej wklęsłości. Współrzędne środka krzywizny (x_C, y_C) oblicza się według wzorów:

dla krzywej danej w postaci (2) (patrz str. 302):

$$x_C = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_C = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

dla krzywej danej w postaci (3):

$$x_C = x - \frac{y'_i(x_i'^2 + y_i'^2)}{\begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ x''_i & y''_i \end{vmatrix}}, \quad y_C = y + \frac{x'_i(x_i'^2 + y_i'^2)}{\begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ x''_i & y''_i \end{vmatrix}};$$

(***) dla krzywej danej w postaci (4):

$$x_C = \varrho \cos \varphi - \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)(\varrho \cos \varphi + \varrho' \sin \varphi)}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''},$$

$$y_C = \varrho \sin \varphi - \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)(\varrho \sin \varphi - \varrho' \cos \varphi)}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''};$$

dla krzywej danej w postaci (1):

$$x_C = x + \frac{F'_x(F''_x + F''_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad y_C = y + \frac{F'_y(F''_x + F''_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}.$$

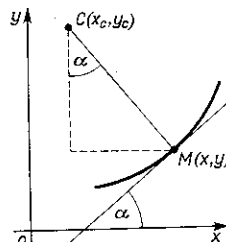
Wzory te można napisać w postaci

$$x_C = x - R \sin \alpha, \quad y_C = y + R \cos \alpha$$

lub

$$x_C = x - R \frac{dy}{ds}, \quad y_C = y + R \frac{dx}{ds}$$

(rys. 235), gdzie R oblicza się ze wzorów (**) (patrz str. 309).



Rys. 235

3. Punkty specjalnych typów⁽¹⁾

Punkt przegięcia. Określenie. *Punkt przegięcia* jest to punkt krzywej, w którym kierunek wypukłości zmienia się na przeciwny (rys. 236); krzywa w otoczeniu punktu przegięcia nie leży po jednej stronie stycznej, lecz przecina ją. W punkcie przegięcia krzywizna $K = 0$, a promień krzywizny $R = \infty$.

Reguły znajdowania punktów przegięcia.

➤ Dla krzywej danej w postaci (2) (patrz str. 302):

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia polega na tym, że druga pochodna $f''(x)$, jeżeli istnieje, równa się zero. Dla znalezienia punktów przegięcia, w których druga pochodna $f''(x)$ istnieje⁽²⁾, znajdujemy wszystkie pierwiastki $x_1, x_2, \dots$ równania $f''(x) = 0$, następnie tworzymy trzecią pochodną $f'''(x)$ i każdy z wyznaczonych pierwiastków x_i (gdzie $i = 1, 2, 3, \dots$) podstawiamy do trzeciej pochodnej $f'''(x)$. Jeżeli okaże się, że $f'''(x_i) \neq 0$, to x_i jest odcięta punktu przegięcia. Jeżeli $f'''(x_i) = 0$, to obliczamy kolejno $f^{(4)}(x_i)$, $f^{(5)}(x_i), \dots$, aż dojdziemy do takiej pochodnej, która w punkcie x_i nie równa się zero. Wówczas jeżeli pierwsza z pochodnych różniących się od zera będzie rzędu nieparzystego, to punkt x_i będzie punktem przegięcia, jeżeli zaś będzie rzędu parzystego, to punkt x_i nie będzie punktem przegięcia krzywej. Jeżeli badany punkt x_i nie jest punktem przegięcia krzywej (tzn. jeżeli w tym punkcie pierwsza z pochodnych różnych od zera jest pochodna $f^{(k)}(x_i)$, gdzie $k > 1$ jest liczbą nieparzystą, to krzywa $y = f(x)$ jest w punkcie x_i skierowana wypukłością w górę, gdy $f^{(k)}(x_i) < 0$, a w dół, gdy $f^{(k)}(x_i) > 0$.



Rys. 236

Przykłady 1. $y = \frac{1}{1+x^2}$; wtedy $y''(x) = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$, skąd $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, f'''(x) = 24x \frac{1-x^2}{(1+x^2)^4}, f'''(x_1) \neq 0, f'''(x_2) \neq 0$; punkty przegięcia

$$A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right), \quad B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right).$$

2. $y = x^4$; wtedy $f''(x) = 12x^2, x_1 = 0, f'''(x) = 24x, f'''(x_1) = 0, f^{(4)}(x) = 24, f^{(4)}(x_1) \neq 0$; punktu przegięcia nie ma.

Możemy także rozstrzygnąć, czy znaleziony pierwiastek x_i jest odcięta punktu przegięcia badając bezpośrednio zmianę znaku drugiej

⁽¹⁾ Omówimy tu tylko punkty niezmiennicze względem przekształcenia układu współrzędnych. Maksima i minima omówione są na str. 408–411.

⁽²⁾ Znalezienie punktów przegięcia dla tych przypadków, kiedy $f''(x)$ nie istnieje (np. przechodzi w nieskończoność), patrz niżej.

pochoďnej $f''(x)$ przy przejściu przez ten punkt: jeżeli znak drugiej pochoďnej zmienia się na przeciwny, wówczas zmieni się także na przeciwny kierunek wypukłości krzywej (patrz str. 308), a więc będziemy mieli punkt przegięcia. Metodę tę stosuje się również w przypadku, gdy $y'' = \infty$.

Przykład. $y = x^{5/3}$; wtedy $y' = \frac{5}{3}x^{2/3}$, $y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$. Przy $x = 0$ mamy $y'' = \infty$. Przy przejściu od ujemnych wartości x do dodatnich, druga pochoďna zmienia znak z „-” na „+”; wnioskujemy stąd, że przy $x = 0$ krzywa ma punkt przegięcia.

W praktyce, jeżeli z przebiegu krzywej widać, że krzywa ma punkty przegięcia (np. między maksimum a minimum na wykresie funkcji, która ma ciągłą pochoďną), wystarczy znaleźć tylko x ; nie interesując się wyższymi pochoďnymi.

2. *Inne postacie równania krzywej.* Podane wyżej warunki konieczne istnienia punktu przegięcia $f''(x) = 0$ przy innych postaciach równania krzywej są następujące:

a. Dla krzywej danej w postaci parametrycznej (3) (patrz str. 302):

$$\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix} = 0.$$

b. Dla krzywej danej we współrzędnych biegunowych (4):

$$\rho^3 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0.$$

c. Dla postaci uwikłanej (1) należy rozwiązać układ równań

$$F(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązania dają współrzędne ewentualnych punktów przegięcia.

Przykłady. 1. $x = a(t - \frac{1}{2}\sin t)$, $y = a(1 - \frac{1}{2}\cos t)$ (cykloida skrócona, patrz str. 129); mamy

$$\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4} \begin{vmatrix} 2 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4} (2\cos t - 1),$$

$$\cos t = \frac{1}{2}, \quad t = \pm \frac{1}{3}\pi + 2k\pi,$$

gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Każda z tych wartości t wyznacza punkt przegięcia krzywej.

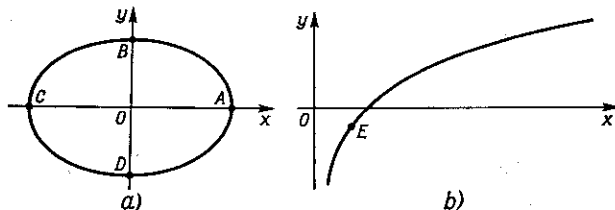
$$\begin{aligned} 2. \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad \text{wtedy} \quad \rho^3 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' &= \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \\ &= \frac{1}{4\varphi^3} (4\varphi^2 - 1), \text{ punkt przegięcia odpowiada} \quad \varphi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. $x^2 - y^2 = a^2$ (hiperbola); wtedy

$$\begin{vmatrix} F'' & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8(x^2 - y^2).$$

Równania $x^2 - y^2 = a^2$ i $8(x^2 - y^2) = 0$ są sprzeczne, zatem hiperbola nie ma punktów przegięcia.

Wierzchołki są to punkty krzywej, w których krzywizna osiąga maksimum lub minimum (krzywa najbardziej lub najmniej wygięta),



Rys. 237

np. elipsa ma 4 wierzchołki A, B, C, D (rys. 237a), krzywa logarytmiczna ma jeden wierzchołek E (rys. 237b). Znalazienie wierzchołków sprowadza się do wyznaczenia ekstremum krzywizny K danej wzorami (***) na str. 309 albo ekstremum promienia krzywizny $R = 1/K$, zależnie od tego, kiedy obliczenia będą prostsze.

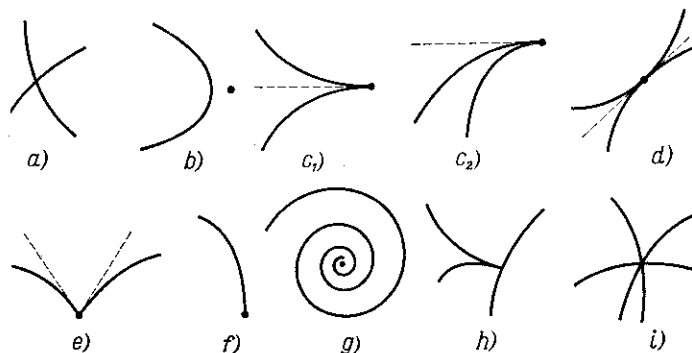
Punkty osobliwe. Nazwa ta obejmuje punkty różnego rodzaju:

a. *punkt rozgałęzienia*, w którym krzywa przecina samą siebie (rys. 238a); b. *punkt odosobniony*, oddzielony od reszty krzywej, lecz o współrzędnych spełniających równanie krzywej (rys. 238b); c. *ostrze krzywej*, w którym kierunek krzywej zmienia się na przeciwny; rozróżniamy ostrza pierwszego rodzaju (rys. 238c₁) i drugiego rodzaju (rys. 238c₂) w zależności od położenia obu gałęzi względem wspólnej stycznej); d. *punkt samostycznej*, w którym krzywa jest styczna sama do siebie (rys. 238d); e. *punkt katowy*, w którym krzywa zmienia skokiem swój kierunek, przy czym w odróżnieniu od ostrza krzywej styczne do obu części krzywej w punkcie katowym są różne (rys. 238e); f. punkt, w którym krzywa urywa się (rys. 238f); g. *punkt asymptotyczny*, który krzywa okrąża nieskończenie wiele razy, zbliżając się do niego na dowolnie małą odległość (rys. 238g). Występować mogą równocześnie kombinacje dwóch lub wielu osobliwości (rys. 238h, i).

Znajdowanie punktów osobliwych e, f, g. Osobliwości te mogą występować tylko w przypadku krzywych przestępnych⁽¹⁾. Punkty katowe zachodzą wtedy, gdy pochodna dy/dx doznaje skończonego skoku, np. początek współrzędnych dla krzywej

$$y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$$

(patrz rys. 284c na str. 389). Punkty asymptotyczne łatwiej jest wykryć dla krzywych danych we współrzędnych biegunowych $\varrho = f(\varphi)$; jeżeli



Rys. 238

$\lim \varrho = 0$, gdy $\varphi \rightarrow +\infty$ lub $\varphi \rightarrow -\infty$, to biegun jest punktem asymptotycznym, np. w spirali logarytmicznej $\varrho = ae^{k\varphi}$ (patrz rys. 60 na str. 134).

Znajdowanie punktów typu a, b, c, d oraz h, i (zwanych punktami wielokrotnymi: podwójnymi, potrójnymi itd.). Krzywą rozpatrujemy w postaci $F(x, y) = 0$. Punkt $A(x_1, y_1)$, którego współrzędne spełniają równocześnie trzy równania $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, jest punktem podwójnym, jeżeli spośród trzech pochodnych rzędu drugiego F''_{xx} , F''_{xy} , F''_{yy} przynajmniej jedna nie równa się zeru; jeżeli i te pochodne są także równe 0, to punkt jest trzykrotny lub wielokrotny.

Charakter punktu podwójnego zależy od znaku wyznacznika

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}$$

⁽¹⁾ Patrz str. 260.

1. Jeżeli $\Delta < 0$, to A jest punktem rozgałęzienia, w którym współczynniki katowe stycznych są równe pierwiastkom równania

$$F''_{yy}k^2 + 2F''_{xy}k + F''_{xx} = 0, \quad \text{gdy} \quad F''_{yy} \neq 0;$$

w przypadku gdy $F''_{yy} = 0$ (wtedy $F''_{xy} \neq 0$), jedna ze stycznych jest równoległa do osi Oy .

2. Jeżeli $\Delta > 0$, to A jest punktem odosobnionym.

3. Jeżeli $\Delta = 0$, to A jest albo ostrzem krzywej, albo punktem samostyczności. Współczynnik katowy stycznej w tym punkcie

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{F''_{xy}}{F''_{yy}}, \quad \text{gdy} \quad F''_{yy} \neq 0;$$

w przypadku gdy $F''_{yy} = 0$, a $F''_{xx} \neq 0$, styczna jest prostopadła do osi Ox . Dla szczegółowego zbadania krotności punktu, gdy $\Delta > 0$, należy przenieść ten punkt do początku współrzędnych i obrócić osie tak, by oś Ox pokrywała się z kierunkiem stycznej w punkcie A ; wtedy z kształtu równania możemy poznać, czy mamy ostrze pierwszego rodzaju, drugiego rodzaju, czy punkt samostyczności.

Przykład y. 1. $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (lemniskata, patrz rys. 51 na str. 128). Mamy $F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$; układ równań $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ ma trzy rozwiązania $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, ale tylko pierwsze z nich spełnia równanie $F = 0$. Przy podstawieniu $(0, 0)$ do pochodnych rzędu drugiego otrzymujemy $F''_{xx} = -4a^2$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 4a^2$, $\Delta = -16a^4 < 0$, skąd wynika, że początek współrzędnych jest punktem rozgałęzienia; współczynnik katowy stycznych $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$; równania stycznych $y = x$, $y = -x$.

2. $F(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$. Mamy $F'_x = x(3x - 2)$, $F'_y = y(3y - 2)$; układ równań $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ ma cztery rozwiązania $(0, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; spośród nich tylko pierwsze $(0, 0)$ należy do krzywej. W punkcie $(0, 0)$ mamy $F''_{xx} = -2$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = -2$, $\Delta = 4 > 0$, a więc początek współrzędnych jest punktem odosobnionym.

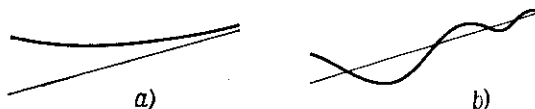
3. $F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5 = 0$. Układ równań $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ ma jedyne rozwiązanie $(0, 0)$ spełniające także równanie $F = 0$; wtedy $\Delta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$. W tym przypadku mamy w początku współrzędnych ostrze drugiego rodzaju, co wynika z równania krzywej w postaci jawnej: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; y nie istnieje przy $x < 0$, a przy małych wartościach $x > 0$ obie wartości y są dodatnie (styczna w początku współrzędnych jest pozioma).

Przypadek krzywej algebraicznej $F(x, y) = 0$. Jeżeli równanie nie zawiera wyrazów wolnych i wyrazów stopnia pierw-

szezo, to początek współrzędnych jest punktem dwukrotnym, w którym równania stycznych otrzymamy natychmiast przyrównując do zera wszystkie wyrazy stopnia drugiego; np. dla lemniskaty (patrz wyżej przykład 1) równanie stycznych przybiera postać $x^2 - y^2 = 0$, czyli $y = \pm x$. Jeżeli wyrazów stopnia drugiego nie ma, to początek współrzędnych jest punktem trzykrotnym itd.

4. Asymptoty

Określenie. Jeżeli krzywa w pewnym przedziale nieograniczenie oddala się od początku współrzędnych, to taka nieskończona gałąź krzywej może mieć *asymptotę*, czyli prostą, do której krzywa zbliża się nieograniczenie bądź z jednej strony (rys. 239a), bądź wciąż ją przecinając (rys. 239b).



Rys. 239

Znajdowanie asymptoty. Dla znalezienia asymptoty krzywej danej w postaci parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$, znajdujemy wartości t_i , przy których $x(t) \rightarrow \infty$ lub $y(t) \rightarrow \infty$.

Jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_i} x(t) = \infty$, ale $\lim_{t \rightarrow t_i} y(t) = b \neq \infty$, to prosta $y = b$ jest *asymptotą poziomą*.

Jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_i} y(t) = \infty$, ale $\lim_{t \rightarrow t_i} x(t) = a \neq \infty$, to prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową*.

Jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_i} x(t) = \infty$ i $\lim_{t \rightarrow t_i} y(t) = \infty$, to obliczamy dwie granice

$$k = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \rightarrow t_i} [y(t) - kx(t)]$$

i w przypadku istnienia obu tych granic krzywa ma *asymptotę pochylą* $y = kx + b$.

Jeżeli krzywa jest dana w postaci $y = f(x)$, to *asymptoty pionowe* znajduje się jak punkty nieciągłości funkcji $f(x)$ (patrz str. 362-365), a *poziome* i *pochyle asymptoty* przedstawia się w postaci $y = kx + b^{(1)}$, gdzie

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

⁽¹⁾ Jest to równoznaczne ze sposobem znajdowania asymptot krzywej danej w postaci parametrycznej $y = f(t)$, $x = t$.

Przykład. $x = \frac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$. Mamy $x \rightarrow \infty$, gdy $t \rightarrow t_1 = +\frac{1}{2}\pi + 2\pi l$ lub gdy $t \rightarrow t_2 = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi l$, gdzie $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; ale wtedy również $y \rightarrow \infty$. Obliczamy

$$k = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{n}{m} (\sin t - t \cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \rightarrow t_1} \left(n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{\cos t} \right) = n \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\sin t - t \cos t - 1}{\cos t} = -\frac{n\pi}{2};$$

asymptoty

$$y = \frac{n}{m} x - n \left(\frac{1}{2} \pi + 2\pi l \right).$$

Podobnie znajdujemy drugą rodzinę asymptot

$$y = -\frac{n}{m} x - n \left(-\frac{1}{2} \pi + 2\pi l \right).$$

Przypadek krzywej algebraicznej $F(x, y) = 0$, gdzie $F(x, y)$ jest wielomianem względem x i y . Wybierzmy te wyrazy $F(x, y)$, które mają największy stopień ⁽¹⁾. Oznaczmy przez $\Phi(x, y)$ sumę najwyższych wyrazów wielomianu $F(x, y)$ i rozwiążmy równanie $\Phi(x, y) = 0$ względem x i względem y :

$$x = \varphi(y), \quad y = \psi(x).$$

Wartości $y_1 = a$, dla których $x \rightarrow \infty$, dają asymptotę poziomą $y = a$; wartości $x_1 = b$, dla których $y \rightarrow \infty$, dają asymptotę pionową $x = b$. Dla otrzymania asymptot pochyłych podstawiamy do $F(x, y)$ wyrażenie $y = kx + b$ i porządkujemy otrzymany wielomian według potęg zmiennej x :

$$F(x, kx + b) = f_1(k, b)x^m + f_2(k, b)x^{m-1} + \dots$$

Przyrównujemy do zera współczynniki $f_1(k)$ i $f_2(k)$ przy najwyższych potęgach x i rozwiązujemy układ równań

$$f_1(k, b) = 0, \quad f_2(k, b) = 0.$$

Jeżeli równania te mają rozwiązanie, to k, b wyznaczają asymptotę $y = kx + b$.

Przykład. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (liść Kartezjusza, patrz rys. 44 na str. 122). Mamy $\Phi(x, y) = x^3 + y^3 = 0$; gdy $x \rightarrow \pm\infty$, wtedy $y \rightarrow \mp\infty$ i na odwrót, a więc dana krzywa nie ma asymptot

⁽¹⁾ Stopniem wyrazu $Ax^m y^n$ nazywamy sumę wykładników potęg $m+n$. Na przykład wyraz $3x^2 y^3$ jest stopnia 5, wyraz $2y^2$ jest stopnia 2, w wielomianie $x^3 + y^3 - 3xy$ najwyższe wyrazy x^3 i y^3 są stopnia 3.

pionowych ani poziomych. $F(x, kx+b) = (1+k^2)x^3 + 3(k^2b-ka)x^2 + \dots$; układ równań $1+k^2=0$, $k^2b-ka=0$ daje rozwiązania $k=-1$, $b=-a$, a więc jest asymptota $y=-x-a$.

5. Ogólne badanie krzywej na podstawie jej równania

Badanie krzywych na podstawie ich równań przeprowadza się w celu poznania przebiegu funkcji $y=f(x)$ lub wyznaczenia kształtu krzywej określonej analitycznie jednym ze wzorów (1), (2), (3) lub (4), omówionych na str. 302.

Konstrukcja wykresów funkcji danych w postaci $y=f(x)$.

1. Znajdujemy obszar oznaczoności funkcji (str. 348).
2. Badamy symetrię względem osi Oy lub początku współrzędnych, czyli parzystość lub nieparzystość (str. 354).
3. Znajdujemy punkty nieciągłości i określamy ich rodzaj (str. 363, 364) oraz znajdujemy asymptoty pionowe.
4. Określamy zachowanie się funkcji w nieskończoności obliczając granice $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (str. 356, 357) oraz znajdujemy asymptoty poziome lub pochylne.

5. Znajdujemy punkty przecięcia krzywej z osią Oy obliczając $f(0)$ oraz punkty przecięcia z osią Ox rozwiązując równanie $f(x)=0$ (o rozwiązywaniu równań algebraicznych przestępnych w ogólnej postaci patrz str. 180).

6. Znajdujemy punkty maksimów i minimów (str. 408) wyznaczając przedziały wzrastania i malenia funkcji.

7. Znajdujemy punkty przegięcia (str. 311, 312) wyznaczając przedziały, w których krzywa jest wypukła w górę lub wypukła w dół (str. 308); w punktach przegięcia obliczamy współczynnik kątowy stycznej.

Na podstawie powyższych danych szkicuje się zarys, a następnie precyzuje się przebieg krzywej punkt za punktem, w tych miejscach, gdzie zachodzi tego potrzeba.

Przykład. Sporządzić wykres funkcji $y = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$.

1. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x z wyjątkiem $x=0$.

2. Oś Oy nie jest osią symetrii, początek współrzędnych nie jest środkiem symetrii.

3. Punkt nieciągłości $x=0$; asymptota pionowa $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2-0$ (krzywa zbliża się do asymptoty $y=2$ od dołu), $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2+0$ (krzywa zbliża się do asymptoty $y=2$ od góry).

5. Równanie $2x^2+3x-4=0$ ma pierwiastki $x_1 = \frac{1}{4}(-3-\sqrt{41}) \approx -2,35$, $x_2 = \frac{1}{4}(-3+\sqrt{41}) \approx 0,85$ (punkty przecięcia krzywej z osią Ox).

6. Punkt maksimum $x = \frac{3}{2} \approx 1,5$, $y \approx 2,56$.

7. Punkt przegięcia $x=4$, $y=2,5$, $\tan \alpha = -\frac{1}{16}$.

Po naszkicowaniu krzywej według tych danych (rys. 240) obliczyć my ponadto punkt przecięcia z asymptotą $x = \frac{4}{3} \approx 1,33$, $y=2$.

Wykreślanie krzywych danych w postaci uwikłanej $F(x, y)=0$. W tym przypadku trudno jest posługiwać się ogólnymi prawidłami, gdyż bardzo często prowadzi to do skomplikowanych obliczeń. Częstokroć użyteczne jest znalezienie następujących elementów:

1. Znaleźć wszystkie punkty przecięcia z osiami współrzędnych.

2. Zbadać symetrię krzywej względem osi współrzędnych i początku współrzędnych (zamieniając x na $-x$, y na $-y$).

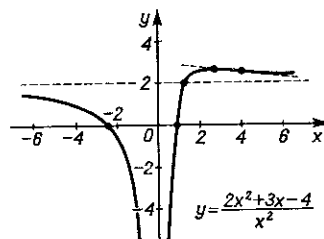
3. Znaleźć maksima i minima względem osi Ox (str. 409), a także względem osi Oy stosując analogiczne wzory ze zmianą współrzędnych.

4. Znaleźć punkty przegięcia (str. 312) i współczynnik kątowy stycznej w tych punktach.

5. Znaleźć punkty osłabiwe (str. 313, 314).

6. Znaleźć wierzchołki krzywej (str. 313); zbudować na nich koła krzywizny (str. 310), których łuki będą w dość szerokim przedziale pokrywały się z krzywą.

7. Znaleźć wszystkie asymptoty (str. 316) i zbadać położenie gałęzi względem asymptot.



Rys. 240

6. Ewoluty i ewolwenty

Ewoluta. Ewolutą albo rozwiniętą danej krzywej nazywamy miejsce geometryczne środków krzywizny (patrz str. 310) danej krzywej; jest to zarazem obwiednia normalnych do danej krzywej (patrz str. 310). Równania parametryczne ewoluty dane są wzorami (***) na str. 310 (równania dla środka krzywizny, w których x_C , y_C należy przyjąć za bieżące współrzędne ewoluty). Jeżeli z równań tych uda się

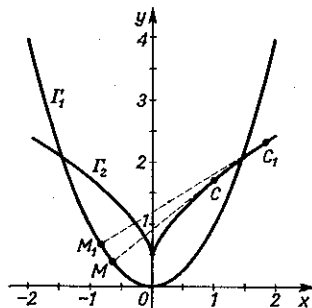
wyrugować parametr (x , t lub φ), to otrzymamy równanie ewoluty we współrzędnych prostokątnych.

Przykład. Znaleźć ewolucie paraboli $y = x^2$ (rys. 241). Mamy

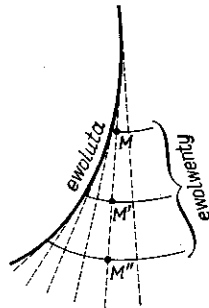
$$X = x - \frac{1}{2}[2x(1+4x^2)] = -4x^3, \quad Y = x^2 + \frac{1}{2}(1+4x^2) = \frac{1}{2}(1+6x^2),$$

skąd $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{4}X\right)^{2/3}$; jest to parabola półszescienna (patrz str. 121), X , Y są bieżącymi współrzędnymi ewoluty.

Ewolwenta. Ewolwentą albo rozwijającą danej krzywej Γ_2 nazywamy taką krzywą Γ_1 , dla której Γ_2 jest ewolutą. Normalna MC



Rys. 241



Rys. 242

ewolwenty jest styczną do ewoluty, a długość łuku CC_1 ewoluty równa jest przyrostowi promienia krzywizny ewolwenty (rys. 241):

$$\widehat{CC_1} = M_1C_1 - MC.$$

Dzięki tej własności krzywa Γ_1 jest rozwijającą krzywej Γ_2 otrzymywaną z krzywej Γ_2 przez rozwijanie napiętej nici. Danej ewolucie odpowiada rodzina ewolwent, z których każdą wyznacza początkowa długość nici (rys. 242). Równanie ewolwenty otrzymuje się przez całkowanie układu równań różniczkowych przedstawiających równanie ewoluty; równanie ewolwenty okręgu podane jest na str. 135.

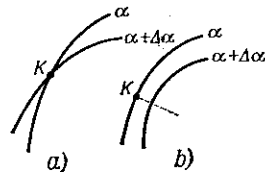
7. Obwiednia rodziny krzywych

Punkty charakterystyczne. Jeżeli mamy rodzinę krzywych z jednym parametrem a :

(*)

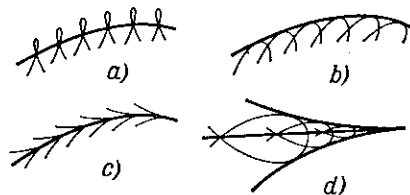
$$F(x, y, a) = 0,$$

to dwie dowolnie bliskie krzywe tej rodziny odpowiadające wartościom a i Δa mają punkt największego zbliżenia K . Punkt ten jest bądź przecięciem krzywych (a) i ($a + \Delta a$), bądź takim punktem krzywej (a), którego odległość od krzywej ($a + \Delta a$), liczona wzdłuż normalnej, jest nieskończenie małą rzędu wyższego względem Δa (rys. 243a, b). Gdy $\Delta a \rightarrow 0$, krzywa ($a + \Delta a$) dąży do krzywej (a), a punkt K w pewnych przypadkach dąży do położenia granicznego, zwanego *punktem charakterystycznym*. Punkty osobliwe krzywej (a) są zawsze punktami charakterystycznymi.



Rys. 243

Charakterystyki. Miejscem geometrycznym punktów charakterystycznych wszystkich krzywych rodziny (*) jest krzywa (złożona niekiedy z kilku krzywych) zwana *charakterystyką* danej rodziny krzy-



Rys. 244

wych, składa się ona bądź z osobliwych punktów tych krzywych danej rodziny (rys. 244a), bądź jest *obwiednią* tych krzywych, tzn. jest styczną do każdej krzywej danej rodziny (rys. 244b); występować też mogą kombinacje obu tych typów (rys. 244c, d).

Równanie obwiedni (i w ogólnym przypadku równanie charakterystyki) rodziny krzywych $F(x, y, a) = 0$ otrzymuje się przez rugowanie parametru a z układu równań $F = 0$ i $\partial F / \partial a = 0$.

Przykład. Znaleźć równanie obwiedni rodziny prostych zawierających odcinek $AB = l$, którego końce A i B poruszają się wzdłuż osi współrzędnych (rys. 245a). Równanie rodziny prostych

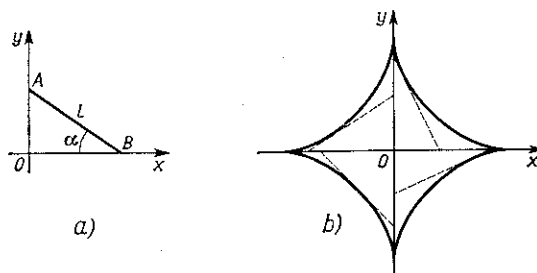
$$\frac{x}{l \sin a} + \frac{y}{l \cos a} = 1,$$

czyli

$$F(x, y, a) = x \cos a + y \sin a - l \sin a \cos a = 0;$$

stąd

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos^2 \alpha + l \sin^2 \alpha = 0.$$



Rys. 245

Rugując z tych równań parametr α otrzymujemy $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$, tzn. obwiednią danej rodziny prostych jest asteroidea (rys. 245b) (patrz str. 131).

B. KRZYWE PRZESTRZENNE

8. Sposoby określenia krzywej

Równania we współrzędnych prostokątnych. Krzywa przestrzenna (krzywa skośna) może być dana analitycznie w jednej z następujących postaci:

a. Jako przecięcie dwóch powierzchni

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

b. W postaci parametrycznej

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

gdzie t jest parametrem zmiennym; w szczególności parametr t może równać się x , y lub z .

c. W postaci parametrycznej

$$(3) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

gdzie s jest długością łuku od pewnego punktu A do bieżącego punktu M , wyrażoną wzorem

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Równania wektorowe. Oznaczając przez r promień wodzący dowolnego punktu krzywej (patrz str. 647) możemy przedstawić równania (2) w postaci

$$(2a) \quad r = r(t), \quad \text{gdzie} \quad r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$$

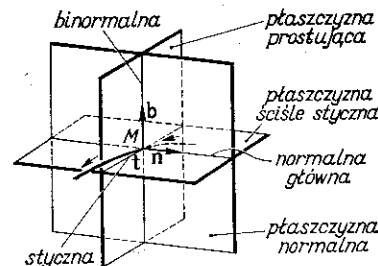
a równania (3) w postaci

$$(3a) \quad r = r(s), \quad \text{gdzie} \quad r(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k.$$

Dodatni kierunek krzywej danej równaniem (2) lub (2a) odpowiada kierunkowi wzrostu parametru t , a na krzywej danej równaniem (3) lub (3a) — kierunkowi wzrastania parametru s .

9. Trójkścian Freneta

Określenia. W każdym punkcie M krzywej przestrzennej (z wyjątkiem punktów osobliwych) są określone trzy proste i trzy płaszczyzny przecinające się w punkcie M pod kątami prostymi (rys. 246).



Rys. 246

1. **Styczna** do krzywej w punkcie M , czyli graniczne położenie siecznej MN , gdy $N \rightarrow M$ (patrz rys. 227 na str. 304).

2. **Płaszczyzna normalna** do krzywej w punkcie M , czyli płaszczyzna prostopadła do stycznej; wszystkie proste leżące w tej płaszczyźnie, przechodzące przez punkt M , nazywamy **normalnymi** do krzywej w punkcie M .

3. **Płaszczyzna ściśle styczna** do krzywej w punkcie M , czyli graniczne położenie płaszczyzny przechodzącej przez trzy dowolnie blisko siebie leżące punkty M , N i P , gdy $N \rightarrow M$ i $P \rightarrow M$ (rys. 247). Na płaszczyźnie ściśle stycznej leży styczna do krzywej w punkcie M .

4. **Normalna główna** do krzywej w punkcie M , czyli przecięcie płaszczyzny normalnej z płaszczyzną ściśle styczną (jest to normalna leżąca w płaszczyźnie ściśle stycznej).

5. *Binormalna* do krzywej w punkcie M , czyli prosta prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej i przechodząca przez punkt M .

6. *Płaszczyzna prostująca* danej krzywej w punkcie M , czyli płaszczyzna zawierająca styczną i binormalną w punkcie M .

Na trzech prostych 1, 4 i 5 ustala się kierunki dodatnie w sposób następujący:

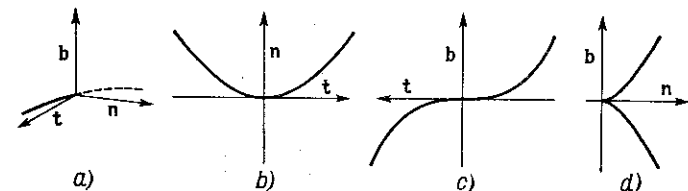
Kierunek dodatni stycznej odpowiada dodatniemu kierunkowi krzywej; wyznacza go wektor t .

Kierunek dodatni normalnej głównej jest zwrócony na płaszczyźnie ściśle stycznej w tę stronę, po której znajduje się wklęsłość krzywej; wyznacza go wektor n .

Kierunek dodatni binormalnej wyznacza wektor b . Wektor b powinien być tak zorientowany względem wektorów t i n , jak oś Oz względem osi Ox i Oy (patrz str. 650).

Trójka wektorów t , n i b wraz z tworzącymi płaszczyznami 2, 3 i 6 stanowią tzw. *trójszcian Freneta* krzywej przestrzennej w punkcie M .

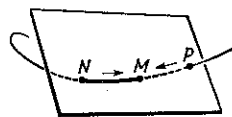
Położenie krzywej przestrzennej względem trójszcianu Freneta. W punktach typu ogólnego (gdy nie ma żadnych osobliwości) krzywa jest położona po jednej stronie płaszczyzny prostującej, a przecina płaszczyznę normalną i ściśle styczną (rys. 248a), przy tym rzuty niewielkiego łuku krzywej zawierającego punkt M na płaszczyzny trójszcianu wyglądają (w przybliżeniu) w sposób następujący:



Rys. 248

na płaszczyźnie ściśle stycznej — jak parabola (rys. 248b), na płaszczyźnie prostującej — jak parabola sześcienna (rys. 248c), na płaszczyźnie normalnej — jak parabola półsześcienne (rys. 248d).

Jeżeli zaś w punkcie M bądź krzywizna, bądź skręcenie krzywej (patrz niżej) równa się zeru, albo jeżeli punkt M jest punktem osobliwym ($x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$), to krzywa może mieć także inne położenie.



Rys. 247

Równania elementów trójszcianu.

a. Dla krzywej danej w postaci (1) (patrz str. 322):
styczna

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}};$$

płaszczyzna normalna

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie x, y, z są współrzędnymi punktu M , a X, Y, Z są współrzędnymi bieżącymi stycznej lub płaszczyzny normalnej; pochodne cząstkowe oblicza się dla punktu M .

b. Dla krzywej danej w postaci parametrycznej (2) (str. 322) lub wektorowej (2a) (str. 323) równania elementów trójszcianu Freneta podane są w następującej tablicy, przy czym x, y, z, r oznaczają współrzędne i promień wodzący punktu M krzywej; X, Y, Z, R oznaczają współrzędne bieżące i promień wodzący elementu trójszcianu; pochodne bierze się względem parametru t i oblicza się dla punktu M .

Równanie we współrzędnych prostokątnych	Równanie wektorowe
Styczna	
$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$	$R = r + \lambda \frac{dr}{dt}$
Płaszczyzna normalna	
$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$	$(R-r) \frac{dr}{dt} = 0$
Płaszczyzna ściśle styczna	
$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$	$(R-r) \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = 0$

Równanie we współrzędnych prostokątnych	Równanie wektorowe
Binormalna $\left \begin{array}{cc} X-x & Y-y & Z-z \\ y' & z' & \\ y'' & z'' & \end{array} \right = \left \begin{array}{cc} Y-y & Z-z \\ z' & x' & \\ z'' & x'' & \end{array} \right = \left \begin{array}{cc} Z-z & X-x \\ x' & y' & \\ x'' & y'' & \end{array} \right $ $R = r + \lambda \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)$	
Płaszczyzna prostująca $\left \begin{array}{ccc} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{array} \right = 0,$ gdzie $l = y'z'' - y''z', \quad m = z'x'' - z''x',$ $n = x'y'' - x''y'$ $(R-r) \frac{dr}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) = 0$	
Normalna główna $\left \begin{array}{cc} X-x & Y-y \\ y' & z' \\ m & n \end{array} \right = \left \begin{array}{cc} Y-y & Z-z \\ z' & x' \\ n & l \end{array} \right = \left \begin{array}{cc} Z-z & X-x \\ x' & y' \\ l & m \end{array} \right $ $R = r + \lambda \frac{dr}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)$	

c. Dla krzywej danej w postaci parametrycznej (3) (str. 322) lub wektorowej (3a) (str. 323) równania stycznnej, płaszczyzny normalnej, płaszczyzny ściśle stycznnej i binormalnej bierze się z powyższej tablicy zmieniając t na s , natomiast równania dwóch pozostałych elementów upraszczają się do następującej postaci:

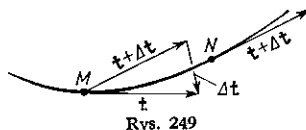
Element trójsianu	Równanie we współrzędnych prostokątnych	Równanie wektorowe
Płaszczyzna prostująca	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$	$(R-r) \frac{d^2r}{ds^2} = 0$
Normalna główna	$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$	$R = r + \lambda \frac{d^2r}{ds^2}$

10. Krzywizna i skrócenie (torsja) krzywej skośnej

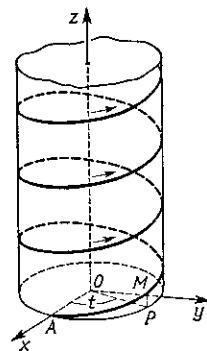
Krzywizna. Określenie. Krzywizną K krzywej w punkcie M nazywamy liczbę, która charakteryzuje odchylenie krzywej (w małej jej części zawierającej punkt M) od linii prostej. Dokładne określenie (rys. 249):

$$K = \lim_{MN \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{MN} \right| = \left| \frac{dr}{ds} \right|.$$

Promień krzywizny $\rho = 1/K$; K i ρ dla krzywych przeszerzennych są zawsze dodatnie.



Rys. 249



Rys. 250

Wzory na obliczenie K i ρ :

a. Dla krzywej danej w postaci (3) (patrz str. 322)

$$(*) \quad K = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

(pochodne względem s).

b. Dla krzywej danej w postaci (2) (patrz str. 322)

$$**) \quad K = \sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2}{\left| \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right|^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}}$$

(pochodne względem t).

Przykład. Znaleźć krzywiznę linii śrubowej (rys. 250) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ przy $a > 0$, $b \neq 0$ (1). Zastępując parametr t przez $s = t \sqrt{a^2 + b^2}$ otrzymujemy

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

i ze wzoru (*)

$$K = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const}, \quad \varrho = \frac{a^2 + b^2}{a} = \text{const}.$$

Ten sam wynik otrzymujemy bez przejścia do parametru s stosując wzór (**).

Skreślenie. Skreśleniem albo torsją T krzywej w punkcie M nazywamy liczbę określającą odchylenie krzywej (w małej jej części zawierającej punkt M) od krzywej płaskiej. Dokładne określenie (rys. 251):

$$T = \lim_{\overline{MN} \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta b}{\overline{MN}} \right| = \left| \frac{db}{ds} \right|.$$

Promień skreślenia $\tau = 1/T$.

Wzory na obliczenie T i τ :

a. Dla krzywej danej w postaci (3) (patrz str. 312)

$$(**) \quad T = \frac{1}{\tau} = \varrho^2 \left(\frac{dr}{ds} \cdot \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

(pochodne względem s).

b. Dla krzywej danej w postaci (2)

$$(**) \quad T = \frac{1}{\tau} = \varrho^2 \frac{\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \frac{d^3r}{dt^3}}{\left(\left| \frac{dr}{dt} \right| \right)^3} = \varrho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

(ϱ oblicza się według wzorów (*) lub (**)).

(1) Linię śrubową określoną powyższym równaniem i przedstawioną na rysunku 250 nazywamy *prawoskrętną*. Obserwator umieszczony wewnątrz linii śrubowej wzdłuż jej osi, czyli wzdłuż osi Oz , głową w kierunku dodatnim tej osi będzie widział kolejne zwoje linii śrubowej wznoszące się ku górze w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówki zegara. Linię śrubową symetryczną do linii śrubowej prawoskrętnej względem jakiegokolwiek płaszczyzny nazywamy *lewoskrętną*.

Skreślenie T obliczone według wzorów (*) lub (**) może być dodatnie lub ujemne. Jeżeli $T > 0$, to dla obserwatora stojącego na normalnej głównej równoległej do binormalnej (patrz rys. 246) krzywa w punkcie M zakręca się od prawej na lewo w górę (jak w prawoskrętnym korkociagu). Jeżeli zaś $T < 0$, to kierunek skreślenia jest przeciwny, tzn. od lewej na prawo w górę.

Przykład. Dla linii śrubowej skreślenie T jest wielkością stałą. Dla linii śrubowej prawoskrętnej (gdy $b > 0$) skreślenie T wynosi

$$T = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right)^2 \frac{\begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Dla linii śrubowej lewoskrętnej (gdy $b < 0$) skreślenie T jest ujemne.

Wzory Serre-Freneta. Pochodne wektorów t , n i b względem parametru s możemy obliczyć za pomocą następujących wzorów Serre-Freneta:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n}{\varrho}, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{t}{\varrho} - \frac{b}{\tau}, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{n}{\tau},$$

gdzie ϱ jest promieniem krzywizny, a τ promieniem skreślenia.

C. POWIERZCHNIE

11. Sposoby wyznaczania powierzchni

Równanie powierzchni. Powierzchnia może być określona jedną z następujących postaci:

a. *postać uwikłana*

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0,$$

b. *postać jawna*

$$(2) \quad z = f(x, y),$$

c. *postać parametryczna*

$$(3) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

d. *postać wektorowa*

$$(3a) \quad r = r(u, v) \quad \text{lub} \quad r = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k.$$

Gdy u i v przebiegają wszystkie możliwe wartości, otrzymuje się promień wodzący i współrzędne różnych punktów powierzchni, ru-
gując ze wzorów (3) parametry u i v otrzymamy wzór (1). Wzór (2) jest szczególnym przypadkiem postaci (3), gdy $u = x$, $v = y$.

Przykład. Równanie kuli

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

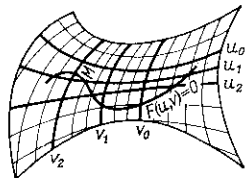
lub

$$(3) \quad x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v,$$

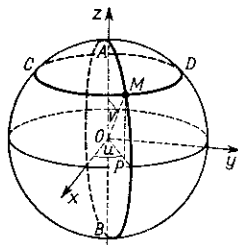
gdzie $a > 0$, lub

$$(3a) \quad r = a(\cos u \sin v i + \sin u \sin v j + \cos v k).$$

Współrzędne krzywoliniowe na powierzchni. Jeżeli powierzchnia dana jest w postaci (3) lub (3a), to przy ustaleniu jednego z parametrów, np. $v = v_0$, i zmianie drugiego u punkt $r(x, y, z)$ zakreśla



Rys. 252



Rys. 253

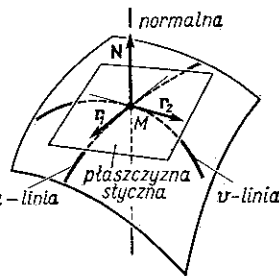
krzywą leżącą na powierzchni $r = r(u, v_0)$. Jeżeli będziemy nadawali parametrowi v różne stałe wartości $v = v_1, v = v_2, \dots$, to otrzymamy rodzinę krzywych na powierzchni; ponieważ przy ruchu wzdłuż każdej z krzywych $v = \text{const}$ zmienia się tylko parametr u , więc każdą z tych krzywych nazywamy *linią współrzędną u* przy $v = \text{const}$ (rys. 252). Podobnie punkt $r = r(u_0, v)$ zakreśla drugą krzywą; nadając współrzędnej u wartości $u = u_1, u = u_2, \dots$ otrzymamy drugą rodzinę krzywych zwanych *liniami współrzędną v* przy $u = \text{const}$. W ten sposób na powierzchni (3) utworzona zostanie siatka krzywych zwanych *liniami współrzędnymi*, a dwie liczby $u = u_i$ i $v = v_k$ nazywamy *współrzednymi krzywoliniowymi* lub *współrzednymi Gaussa* punktu M na powierzchni. W przypadku (2) liniami współrzędnymi są przecięcia powierzchni $z = f(x, y)$ płaszczyznami $x = \text{const}$, $y = \text{const}$.

Każde równanie wiążące współrzędne krzywoliniowe u i v , np. $F(u, v) = 0$ lub $u = u(t)$, $v = v(t)$, wyznacza na powierzchni pewną krzywą.

Przykład. W parametrycznych równaniach powierzchni kulistej (patrz poprzedni przykład) parametr u jest *długością geograficzną* punktu $M(u = \angle O x O P)$, a v jest *odległością biegunową* punktu $M(v = \angle O z O M)$, przy $u = \text{const}$ linią współrzędną v jest *południk* AMB , a przy $v = \text{const}$ linią współrzędną u jest *równoleżnik* CMD (rys. 253).

12. Płaszczyzna styczna oraz normalna do powierzchni

Określenia. Jeżeli przez dany punkt $M(r)$ lub $M(x, y, z)$ powierzchnię poprowadzimy rozmaite krzywe leżące na tej powierzchni, to styczne do tych krzywych w punkcie M będą z reguły leżały na jednej płaszczyźnie, którą nazywamy *płaszczyzną styczną* do powierzchni w punkcie M . (Wyjątek stanowią tzw. punkty stożkowe powierzchni omówione dalej). Prosta przechodząca przez punkt M prostopadle do płaszczyzny stycznej nazywamy *normalną* do powierzchni w punkcie M (rys. 254). Na płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie M leżą wektory $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u}$



Rys. 254

i $r_2 = \frac{\partial r}{\partial v}$, styczne w punkcie M do

linii współrzędnej u oraz linii współrzędnej v . Iloczyn wektorowy $r_1 \times r_2$ jest wektorem równoległym do normalnej w punkcie M ; wersor tego iloczynu wektorowego nazywamy *wersorem normalnej* do powierzchni w punkcie M . Kierunek wersora $N^0 = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$ zmienia się przy zmianie porządku linii współrzędnych, gdyż $r_2 \times r_1 = -r_1 \times r_2$.

Równania płaszczyzny stycznej oraz równania normalnej do powierzchni podane są w tablicy na str. 332.

W tablicy tej x, y, z, r oznaczają współrzędne i promień wodzący punktu M powierzchni; X, Y, Z, R oznaczają współrzędne bieżące i promień wodzący punktu M na płaszczyźnie stycznej lub na normalnej do powierzchni; pochodne oblicza się dla punktu M ; $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Przykład. Dla powierzchni kulistej $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ równanie płaszczyzny stycznej:

$x(X-x) + y(Y-y) + z(Z-z) - a^2 = 0$ lub $xx + yy + zz - a^2 = 0$:
równanie normalnej do powierzchni:

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{z} \quad \text{lub} \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Dla powierzchni kulistej

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v,$$

równanie płaszczyzny stycznej:

$$X \cos u \sin v + Y \sin u \sin v + Z \cos v = a.$$

Równanie normalnej do powierzchni:

$$\frac{X}{\cos u \sin v} = \frac{Y}{\sin u \sin v} = \frac{Z}{\cos v}.$$

Równania płaszczyzny stycznej oraz normalnej do powierzchni

Równania powierzchni (patrz str. 329)	Równanie płaszczyzny stycznej	Równanie normalnej
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(2)	$Z-z = p(X-x) + q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$
(3)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3a)	$(R-r)r_1 r_2 = 0 \quad \text{lub} \quad (R-r)N = 0$	$R = r + \lambda(r_1 \times r_2) \quad \text{lub} \quad R = r + \lambda N$

Punkty osobliwe (stożkowe) powierzchni. Jeżeli dla punktów powierzchni danych w postaci (1) (patrz str. 329) dla $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ spełniony jest związek

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = F(x, y, z) = 0,$$

to punkt $M(x_1, y_1, z_1)$ jest punktem osobliwym (stożkowym) powierzch-

ni; wszystkie styczne przechodzące przez punkt M nie leżą w jednej płaszczyźnie, lecz tworzą stożek stopnia drugiego o równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y-y) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(Z-z) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(X-x)(Y-y) + \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(Y-y)(Z-z) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(Z-z)(X-x) = 0, \end{aligned}$$

gdzie pochodne obliczone są dla punktu M . Jeżeli w powyższym równaniu wszystkie sześć pochodnych cząstkowych rzędu drugiego są równe zero, to punkt osobliwy jest punktem bardziej złożonego rodzaju (styczne tworzą stożek stopnia trzeciego lub wyższego).

13. Element liniowy powierzchni

Różniczka łuku. Jeżeli powierzchnia dana jest w postaci (3) lub (3a) (patrz str. 329), na niej dany jest punkt $M(u, v)$ oraz bliski niego punkt $N(u+du, v+dv)$, to długość łuku MN na powierzchni jest równa w przybliżeniu różniczce łuku lub elementowi liniowemu powierzchni według wzoru

$$(I) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

gdzie

$$E = r_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = r_1 r_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = r_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Prawa część wzoru (I) nazywa się także pierwszą formą kwadratową powierzchni danej w postaci (2) (str. 329); współczynniki E , F , G zależą od punktu powierzchni.

P r z y k ł a d. Dla kuli $r = a(\cos u \sin v + \sin u \sin v + \cos v)$ mamy

$$E = a^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2;$$

pierwsza forma kwadratowa $ds^2 = a^2(\sin^2 v du^2 + dv^2)$.

Dla powierzchni danej w postaci (2) (patrz str. 329) mamy

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Pomiary na powierzchni. Długość łuku krzywej $u = u(t)$, $v = v(t)$ na powierzchni przy $t_0 \leq t \leq t_1$ oblicza się według wzoru

$$(*) \quad L = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

Kąt α między dwiema krzywymi (tzn. między ich stycznymi) przecinającymi się w punkcie M i mającymi w tym punkcie kierunki wektorów $dr\{du, dv\}$ i $\delta r\{\delta u, \delta v\}$ (rys. 255) oblicza się według wzoru

$$(**) \quad \cos \alpha = \frac{dr \delta r}{\sqrt{(dr)^2} \sqrt{(\delta r)^2}} = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}},$$

gdzie współczynniki E, F, G należy obliczyć dla punktu M . W szczególności krzywe są ortogonalne, jeżeli licznik wzoru $(**)$ jest równy zeru; warunkiem ortogonalności linii współrzędnych $v = \text{const}$ ($dv = 0$) i $u = \text{const}$ ($\delta u = 0$) jest równość $F = 0$.

Pole płata S ograniczonego na powierzchni pewną krzywą obliczamy jako całkę podwójną

$$S = \iint_{(S)} dS,$$

gdzie

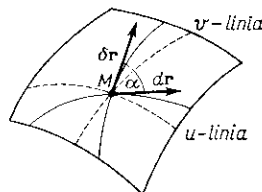
$$(***) \quad dS = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

A więc znając współczynniki E, F, G pierwszej formy kwadratowej możemy obliczyć długość linii, kąty i pola na powierzchni według wzorów $(*)$, $(**)$, $(***)$, tzn. pierwsza forma kwadratowa wyznacza metrykę powierzchni.

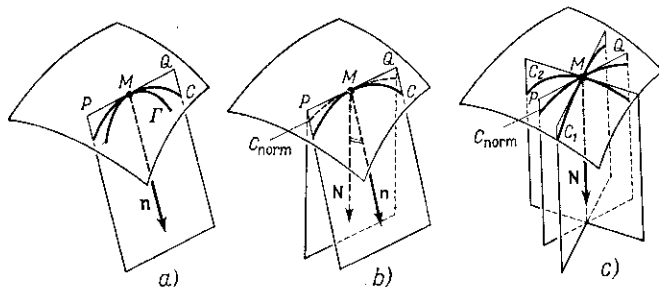
Nakładanie powierzchni przy wyginaniu. Jeżeli będziemy wyginali powierzchnię bez rozciągania i rozrywania, to metryka pozostanie bez zmian, tzn. pierwsza forma kwadratowa nie ulegnie zmianie. Dwie różne powierzchnie mające te same pierwsze formy kwadratowe można nałożyć jedną na drugą za pomocą wyginania.

14. Krzywizna powierzchni

Krzywizna linii na powierzchni. Jeżeli przez punkt M będziemy prowadzili na powierzchni różne krzywe Γ , to promienie krzywizny ρ tych krzywych w punkcie M są związane następującymi związkami:



Rys. 255



Rys. 256

(patrz str. 323) krzywej C a wektorem normalnej N do powierzchni (twierdzenie Meusnier'a, rys. 256b). We wzorze (M) należy brać R ze znakiem plus, jeżeli wektor N jest zwrócony w stronę wklęsłości krzywej C_{norm} , a znak minus w przypadku przeciwnym.

3. Dla każdego przecięcia normalnego C_{norm} krzywizna wynosi

$$(E) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}$$

(wzór Eulera), gdzie R_1 i R_2 są głównymi promieniami krzywizny, tj. największą i najmniejszą wartością promienia krzywizny R występującym w głównych przecięciach normalnych C_1 i C_2 powierzchni (patrz niżej), a α jest kątem między płaszczyznami przecięć C i C_1 (rys. 256c). We wzorze (E) znaki przy R, R_1 i R_2 określa się jak we wzorze (M) .

Główne promienie krzywizny. Jeżeli powierzchnia dana jest równaniem $z = f(x, y)$, to główne promienie krzywizny R_1 i R_2 są pierwiastkami równania kwadratowego

$$(A) \quad (rt - s^2)R^2 + h[2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r]R + h^4 = 0,$$

gdzie

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Płaszczyzny głównych przecięć normalnych C_1 i C_2 są wzajemnie prostopadłe, a kierunki ich są wyznaczone przez wartość dy/dx otrzymaną z równania kwadratowego

$$(B) \quad [tpq - s(1 + q^2)] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] \frac{dy}{dx} + [s(1 + p^2) - rpq] = 0.$$

Jeżeli powierzchnia dana jest równaniem w postaci parametrycznej $r = r(u, v)$, to równania odpowiadające równaniom (A) i (B) przybierają postać

$$(A') \quad (DD'' - D'^2)R^2 - (ED'' - 2FD' + GD)R + (EG - F^2) = 0,$$

$$(B') \quad (GD' - FD'') \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + (GD - ED'') \frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0,$$

gdzie D, D', D'' są współczynnikami drugiej formy kwadratowej danej powierzchni, określone równaniami

$$D = r_{11}N = \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D' = r_{12}N = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}},$$

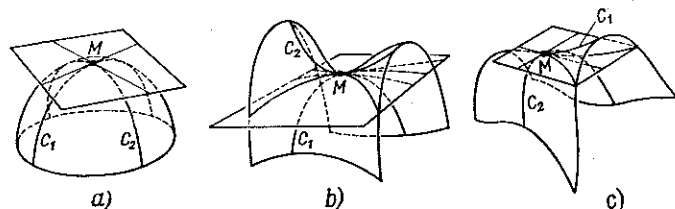
$$D'' = r_{22}N = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}};$$

wektory r_{11}, r_{12}, r_{22} są pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego promienia wodzącego r względem parametrów u i v , a liczniki d, d', d'' są następujące:

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Krzywe na powierzchni mające w każdym punkcie kierunki głównych przecięć normalnych nazywamy *liniami krzywizny*, a ich równania otrzymujemy przez całkowanie równania różniczkowego (B) lub (B').

Klasyfikacja punktów powierzchni. Jeżeli w danym punkcie M powierzchni główne promienie krzywizny R_1 i R_2 (str. 335) mają ten sam znak, to główne przecięcia normalne są zwrócone wklęsłościami w różne strony. W tym przypadku w pobliżu punktu M powierzchnia położona jest po jednej stronie płaszczyzny stycznej; taki punkt powierzchni nazywamy *punktem eliptycznym* (rys. 257a), a jego warunek analityczny wyraża się wzorem $DD'' - D'^2 > 0$. W szczególnym przypadku, gdy $R_1 = R_2$, punkt ten nazywamy *punktem kołowym*; w punkcie kołowym dla wszystkich przecięć normalnych $R = \text{const.}$



Rys. 257

Jeżeli główne promienie krzywizny R_1 i R_2 mają różne znaki, to główne przecięcia normalne zwrócone są wypukłością w przeciwnie strony. W tym przypadku powierzchnia przecina się z płaszczyzną styczną i ma kształt siodła; taki punkt powierzchni nazywamy *punktem hiperbolicznym* (rys. 257b), a jego warunek analityczny wyraża się wzorem $DD'' - D'^2 < 0$.

Jeżeli jeden z głównych promieni krzywizny R_1 lub R_2 jest nieskończenie wielki, to jedno z głównych przecięć normalnych ma punkt przecięcia lub jest linią prostą; taki punkt powierzchni nazywamy *punktem parabolicznym* (rys. 257c), a jego warunek analityczny jest $DD'' - D'^2 = 0$.

Przykłady. Wszystkie punkty elipsoidy są eliptyczne, hiperboloidy jednopowłokowej — hiperboliczne, a walca — paraboliczne.

Krzywizna powierzchni. Średnią krzywizną powierzchni w punkcie M nazywamy wyrażenie

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

a *krzywizną zupełną* (*krzywizną Gaussa*) nazywamy wyrażenie

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

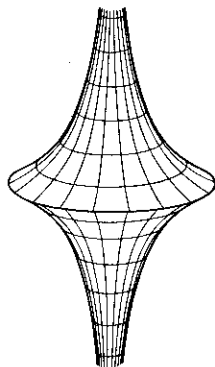
Przykład. Dla walca obrotowego o promieniu a średnia krzywizna $H = 1/2a$, a krzywizna zupełna $K = 0$.

Dla punktów eliptycznych $K > 0$, dla punktów hiperbolicznych $K < 0$, a dla punktów parabolicznych $K = 0$.

Jeżeli powierzchnia dana jest równaniem w postaci $z = f(x, y)$, to wzory na H i K przybierają postać

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \quad (1).$$



Rys. 258

Powierzchnie, dla których średnia krzywizna we wszystkich punktach równa się zero ($R_1 = -R_2$), nazywamy *powierzchniami minimalnymi*. Powierzchnie, dla których krzywizna zupełna K jest we wszystkich punktach stała, nazywamy *powierzchniami o stałej krzywiznie*. Najprostszym przykładem takiej powierzchni dla $K > 0$ jest sfera, a dla $K < 0$ jest pseudosfera, czyli powierzchnia powstała z obrotu trajektorii (patrz str. 136) dookoła jej asymptoty (rys. 258).

15. Powierzchnie prostokreślne i rozwijalne

Powierzchnię nazywamy *prostokreślną*, jeżeli powstaje ona z ruchu linii prostej; jeżeli przy tym powierzchnia może być rozwinięta na płaszczyznę, to nazywamy ją powierzchnią *rozwijalną*. Najprostszymi przykładami powierzchni rozwijalnych są powierzchnie walcowe i stożkowe (patrz str. 223 - 226). Nie każda powierzchnia prostokreślna jest rozwijalna, np. hiperboloida jednopowłokowa, paraboloida hiperboliczna (patrz str. 295 i 297) są powierzchniami prostokreślnymi nierozwijalnymi. We wszystkich punktach powierzchni rozwijalnej krzywizna zupełna jest równa zero.

Jeżeli powierzchnia dana jest równaniem $z = f(x, y)$, to warunkiem jej rozwijalności jest

$$rt - s^2 = 0 \quad (1).$$

16. Linie geodezyjne na powierzchni

Pojęcie *linii geodezyjnych*. Przez każdy punkt $M(u, v)$ danej powierzchni przechodzi w każdym kierunku określonym przez stosunek dv/du pewna linia zwana *linią geodezyjną* i odgrywająca na tej powierzchni rolę linii prostej, mianowicie:

(1) Oznaczenia p, q, r, s, t — patrz str. 336.

1. Jeżeli dany punkt materialny jest zmuszony do pozostania na powierzchni, ale nie znajduje się pod działaniem innych sił zewnętrznych, to będzie się poruszał po linii geodezyjnej.

2. Nić sprężysta napięta na powierzchnię przybiera postać linii geodezyjnej.

3. Linia najkrótszej odległości między dwoma punktami na powierzchni jest linią geodezyjną.

Linią geodezyjną na powierzchni nazywamy taką krzywą, której normalna główna pokrywa się w każdym punkcie z normalną do powierzchni.

Przykład. Dla walca obrotowego liniami geodezyjnymi są linie śrubowe.

Równanie linii geodezyjnych. Jeżeli powierzchnia dana jest w postaci $z = f(x, y)$, to równanie różniczkowe linii geodezyjnych ma postać

$$(1+p^2+q^2) \frac{d^2y}{dx^2} = pt \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + (2ps - qt) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (pr - 2qs) \frac{dy}{dx} - qr \quad (1).$$

Jeżeli powierzchnia dana jest w postaci (3) (str. 329), to równanie różniczkowe linii geodezyjnych ma postać bardziej skomplikowaną.

(1) Oznaczenia p, q, r, s, t — patrz str. 336.

PODSTAWY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

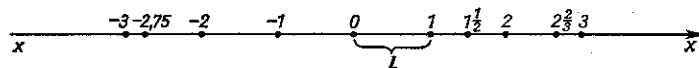
I. WSTĘP DO ANALIZY

1. Liczby rzeczywiste

Liczby wymierne. Wszystkie liczby całkowite i ułamkowe (dodatnie, ujemne i zero) nazywamy *liczbami wymiernymi*. Liczby wymierne stanowią zbiór nieskończony o następujących własnościach:

1° Zbiór ten jest *uporządkowany*, tzn. że dla każdego dwóch różnych liczb wymiernych a i b można wskazać, która z tych liczb jest większa.

2° Zbiór ten jest *wszędzie gęsty*, tzn. między każdymi dwiema liczbami wymiernymi a i b ($a < b$) istnieje co najmniej jedna liczba



Rys. 259

wymierną c ($a < c < b$), a więc istnieje również nieskończenie wiele liczb wymiernych.

3° Działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) na dwóch dowolnych liczbach rzeczywistych są zawsze wykonalne i dają w wyniku określoną liczbę wymierną; wyjątek stanowi dzielenie przez zero, które nie jest dopuszczalne: zapis $a:0$ nie ma oznaczonego sensu liczbowego, gdyż nie istnieje oznaczona liczba b spełniająca równość $b \cdot 0 = a$ (jeżeli $a = 0$, to b może być dowolną liczbą, a jeżeli $a \neq 0$, to b nie istnieje) ⁽¹⁾.

4° Każda liczba wymierna a może być przedstawiona w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego.

Geometryczne przedstawienie liczb wymiernych. Jeżeli na prostej (rys. 259) obierzemy początek współrzędnych O (punkt ze-

⁽¹⁾ Często stosowana równość $a:0 = \infty$ (nieskończoność) nie oznacza, że takie dzielenie jest wykonalne (nieskończoność nie jest liczbą), a jest tylko skróconym zapisem zdania: jeżeli dzielnik dąży do zera, to bezwzględna wartość ilorazu nieograniczenie wzrasta.

rowy), kierunek dodatni (zwrot) i jednostkę miary 1, to otrzymamy oś liczbową Ox ; każdej liczbie wymiernej a odpowiada na osi liczbowej określony punkt o współrzędnej a (punkt wymierny osi). Zgodnie z własnością 2° liczb wymiernych między dwoma dowolnymi punktami wymiernymi znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Liczby niewymierne. Zbiór liczb wymiernych jest niewystarczający dla analizy matematycznej; pomimo że jest wszędzie gęsty, zbiór ten nie wypełnia całej osi liczbowej. Na przykład jeżeli przekątną kwadratu AB o boku równym jednemu umieścimy na osi liczbowej tak, by punkt A znajdował się w punkcie zerowym, to punkt B wypadnie w punkcie, który nie ma współrzędnych wymiernych (rys. 260).

Wprowadzenie liczb niewymiernych pozwala na przyporządkowanie każdemu punktowi osi liczbowej odpowiedniej liczby, przez co zbiór liczb staje się ciągły.

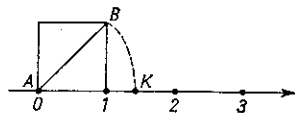
Ścisłe określenie liczb niewymiernych podają obszerniejsze podręczniki analizy matematycznej. Liczbom niewymiernym odpowiadają na osi

liczbowej punkty wypełniające wszystkie luki między punktami wymiernymi. Każda liczba niewymierna może być wyrażona za pomocą ułamka dziesiętnego nieskończonego nieokresowego.

Do liczb niewymiernych należą w szczególności niecałkowite pierwiastki rzeczywiste równań algebraicznych postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (o współczynnikach całkowitych); np. równanie $x^3 - 9x + 4 = 0$ ma pierwiastki niewymierne (patrz str. 172); takie liczby nazywamy *niewymiernościami algebraicznymi*. Najprostszymi przykładami niewymierności algebraicznych są pierwiastki równań dwumiennych $x^2 - a = 0$, czyli liczby postaci $\sqrt[n]{a}$, jeżeli nie są wymierne (przykłady liczb niewymiernych: $\sqrt{2} = 1,414\dots$, $\sqrt[3]{10} = 2,154\dots$); do liczb niewymiernych należą liczby $\pi = 3,141593\dots$, $e = 2,718282\dots$, logarytmy dziesiętne liczb całkowitych (z wyjątkiem liczb postaci 10^n), większość wartości funkcji trygonometrycznych kąta wyrażonego całkowitą liczbą stopni.

Liczby rzeczywiste. Wszystkie liczby wymierne i niewymierne nazywamy *liczbami rzeczywistymi*. Podstawowe własności zbioru liczb rzeczywistych:

- 1° zbiór liczb rzeczywistych jest uporządkowany (patrz str. 341);
- 2° jest wszędzie gęsty (tamże);
- 3° jest ciągły, tzn. inaczej niż dla zbioru liczb wymiernych, każdy punkt osi liczbowej ma współrzędną rzeczywistą;



Rys. 260

4° działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych są zawsze wykonalne z wyjątkiem dzielenia przez zero (patrz str. 341) i dają w wyniku określone liczby rzeczywiste.

W dziedzinie liczb rzeczywistych wykonalne jest obliczanie potęgi dowolnej liczby rzeczywistej o wykładniku całkowitym (z wyjątkiem potęgi 0° oraz 0^{-n} , gdzie n jest liczbą naturalną) i obliczanie potęgi dodatniej o dowolnym wykładniku rzeczywistym, a także działania odwrotne:

a. z każdej liczby dodatniej można wyciągnąć pierwiastek dowolnego stopnia naturalnego i z każdej liczby rzeczywistej można wyciągnąć pierwiastek stopnia nieparzystego,

b. każda liczba dodatnia ma logarytm przy dowolnej podstawie dodatniej, różnej od jedności.

Dalszym uogólnieniem pojęcia liczby w analizie matematycznej są liczby zespolone (patrz str. 617).

2. Ciągi i ich granice

Ciągi. *Ciągiem liczbowym* ⁽¹⁾ nazywamy zbiór liczb, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ przyporządkowanych kolejnym liczbom naturalnym $1, 2, \dots, n, \dots$. Liczby występujące w ciągu nazywamy *wyrazami* ciągu. Wśród wyrazów ciągu mogą znajdować się także liczby równe.

Ciąg uważamy za określony, jeżeli podana jest zasada tworzenia jego wyrazów, tzn. reguła, według której można wyznaczyć dowolny wyraz ciągu. W większości przypadków można ułożyć wzór na ogólny wyraz a_n ciągu.

Przykłady: 1. $a_n = n$. 2. $a_n = 3n + 1$. 3. $a_n = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 4. $a_n = (-1)^{n+1}$. 5. $a_n = 3 - 1/2^{n-2}$. 6. $a_n = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-(n-1)/2}$ dla n nieparzystych, $a_n = 3\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 10^{-n/2+1}$ dla n parzystych. 7. $a_n = 1/n$. 8. $a_n = (-1)^{n+1}n$. 9. $a_n = -\frac{1}{2}(n+1)$ dla n nieparzystych i $a_n = 0$ dla n parzystych. 10. $a_n = 3 - 1/2^{(n-3)/2}$ dla n nieparzystych i $a_n = 13 - 1/2^{n/2-2}$ dla n parzystych.

Początkowe wyrazy tych ciągów są następujące:

1. 1, 2, 3, 4, 5, ... (ciąg naturalny);
2. 4, 7, 10, 13, 16, ... (postęp arytmetyczny),
3. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ (postęp geometryczny),
4. 1, -1, 1, -1, 1, ...
5. $1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \dots$

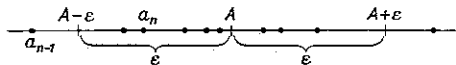
⁽¹⁾ Rozważa się tu tylko ciągi nieskończone.

6. 3, 4, 3, 3, 3, 4, 3, 33, 3, 34, 3, 333, 3, 334, ...,
 7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ (ciąg harmoniczny),
 8. 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...,
 9. -1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, 0, ...,
 10. 1, 11, 2, 12, $2\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$, ...

Granica ciągu. Jeżeli dla danego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ istnieje liczba A , do której przy wzrastaniu n wyraz a_n zbliża się nieograniczenie blisko, to liczbę A nazywamy *granica ciągu* ⁽¹⁾, co zapisujemy

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dokładne sformułowanie: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, jeżeli dla dowolnie małej liczby dodatniej ε można wskazać w danym ciągu taki



Rys. 261

wyraz a_N , że wszystkie następne wyrazy a_n (dla $n > N$) różnią się od liczby A mniej niż o ε , tzn.

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{gdy } n > N.$$

Z rozpatrzonych przykładów 1—10 granice mają ciągi 3, 5, 6, 7; granice te wynoszą:

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3; \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3\frac{1}{3}; \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Interpretacja geometryczna. Jeżeli wyrazy ciągu a_n mającego granicę A przedstawiamy za pomocą punktów na osi liczbowej, to począwszy od a_N wszystkie następne punkty a_n znajdują się w przedziale $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ (rys. 261).

Granica niewłaściwa. Przypadek, w którym granica nie istnieje wskutek tego, że przy wzrastaniu n bezwzględna wartość wyrazu a_n wzrasta nieograniczenie, oznaczamy w sposób następujący:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (\text{granica ciągu } a_n \text{ jest nieskończoność}).$$

Dokładne sformułowanie. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, jeżeli dla dowolnie wielkiej liczby dodatniej K można dobrać w danym ciągu taki

⁽¹⁾ Dla pewnych wartości n liczby a_n mogą pokrywać się z granicą A .

wskaźnik N , że wszystkie następne wyrazy a_n (przy $n > N$) będą co do bezwzględnej wartości większe od K :

$$|a_n| > K, \quad \text{gdy } n > N.$$

Jeżeli ponadto wszystkie wyrazy a_n dla $n > N$ są dodatnie, to piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeżeli zaś wszystkie wyrazy a_n dla $n > N$ są ujemne, to piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Z podanych przykładów 1—10 ciągi 1, 2 mają granicę niewłaściwą $+\infty$, a dla ciągu 8 mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

Ciągi monotoniczne. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nazywamy:

- (1) *rosnącym*, jeżeli $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$;
- (2) *malejącym*, jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$;
- (3) *niemalejącym*, jeżeli $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$;
- (4) *nierosnącym*, jeżeli $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$.

Ciągi postaci (1), (2), (3) i (4) mają ogólną nazwę *ciągów monotonicznych*, przy czym ciągi (1) i (3) nazywamy *ciągami monotonicznie rosnącymi*, a ciągi (2) i (4) — *monotonicznie malejącymi*.

Ciągi (1) i (2) w odróżnieniu od ciągów (3) i (4) nazywamy niekiedy *ciągami ściśle rosnącymi* i *ściśle malejącymi*. Punkty przedstawiające na osi liczbowej wyrazy ciągu monotonicznego postępują (w kolejności wskaźników wyrazów) w jednym kierunku, przy czym dla ciągów (3) i (4) pewne wyrazy kolejne mogą być przedstawione wspólnym punktem. Z podanych przykładów ciągów 1—10 na stronie 343 monotoniczne są tylko ciągi rosnące 1, 2, 5 oraz ciąg ściśle malejący 7.

Ciągi ograniczone. Jeżeli dla danego ciągu a_n można wskazać taką liczbę dodatnią K , że wszystkie wyrazy ciągu są co do bezwzględnej wartości mniejsze od K , tzn. $|a_n| < K$ dla wszystkich n , to ciąg taki nazywamy *ograniczonym*; jeżeli taka liczba nie istnieje, to ciąg nazywamy *nieograniczonym*. Z przykładów 1—10 podanych na stronie 343 ograniczone są tylko ciągi 3 ($K = 4$), 4 ($K = 2$), 5 ($K = 3$), 6 ($K = 5$), 7 ($K = 2$), 10 ($K = 13$).

Podstawowe twierdzenia o granicach ciągów.

1° Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

2° Ciąg mający skończoną granicę jest ograniczony; ciąg mający granicę niewłaściwą jest nieograniczony.

3° Ciąg monotoniczny ograniczony ma granicę skończoną; jeżeli ciąg monotonicznie wzrasta, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_n$, a jeżeli ciąg monotonicznie maleje, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_n$.

4° Ciąg monotoniczny nieograniczony ma granicę w nieskończoność.

ności; jeżeli ciąg ten monotonicznie wzrasta, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, a jeżeli monotonicznie maleje, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

5° Warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy ciągu. Aby ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ miał granicę, potrzeba i wystarcza, by dla dowolnie małej liczby ε można było znaleźć taki wyraz ciągu a_N , żeby dwa dowolne wyrazy ciągu następujące po wyrazie a_N różniły się mniej niż ε , tzn.

$$|a_i - a_j| < \varepsilon, \text{ gdy } i > N \text{ oraz } j > N^{(1)}.$$

Inne własności ciągów i obliczanie ich granic podane są na str. 357-360 (granica funkcji).

3. Funkcje jednej zmiennej (2)

Określenie. Zmienną y nazywamy *funkcją* zmiennej x zwanej *argumentem* funkcji lub *zmienną niezależną*, jeżeli każdej wartości x wziętej z pewnego zbioru Z odpowiada jedna oznaczona wartość zmiennej y ; zbiór Z dopuszczalnych wartości argumentu x nazywamy *obszarem oznaczoności* funkcji y . Na przykład funkcja $y = x^2$ jest oznaczona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, a obszarem oznaczoności funkcji $y = \sqrt{x}$ jest zbiór wszystkich liczb nieujemnych. Różne funkcje zmiennej x oznacza się za pomocą symboli $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ itp; symbol $f(a)$ oznacza wartość funkcji $f(x)$, którą ta funkcja przyjmuje przy $x = a$ (jeżeli a należy do obszaru oznaczoności danej funkcji), np. jeżeli $f(x) = x^2 + 2x - 5$, to $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10$.

Przedziały. Najczęściej rozważa się funkcje mające obszar oznaczoności spójny. Zbiór złożony z liczb rzeczywistych jest *spójny*, jeżeli 1° zawiera więcej niż jedną liczbę, 2° nie ma luk, ani przerw, tzn. wszystkie liczby zawarte między dwiema dowolnymi liczbami należącymi do danego zbioru należą też do tego zbioru.

Zbiór spójny liczb rzeczywistych może być *nieograniczony* po obu stronach, tzn. zawiera wszystkie punkty osi liczbowej, może być *ograniczony od strony lewej* liczbą a , tzn. składa się z liczb większych od a , może być *ograniczony od strony prawej* liczbą b , składa się z liczb mniejszych niż b , może wreszcie być *ograniczony po obu stronach* liczbami a i b , tzn. składa się z liczb zawartych między a i b , gdzie $a < b$. Zbiór spójny liczb zawartych między a i b nazywamy też *przedziałem* liczbowym o końcach a i b , gdzie $a < b$, przy czym może być $a = -\infty$ oraz $b = +\infty$. Koniec a i b przedziału nazywamy *otwartym*,

(1) Ciąg o tej własności nazywamy *ciągami podstawowym*.

(2) Rozważa się tu tylko funkcje zmiennej rzeczywistej. Funkcje zmiennej zespolonej omówione są na str. 623-637.

jeżeli nie należy do przedziału oraz *domkniętym*, jeżeli jest włączony do przedziału. Końce $-\infty$ i $+\infty$ uważamy za otwarte.

Przedział o końcach a i b otwartych nazywamy *przedziałem otwartym* i oznaczamy symbolem (a, b) . Przedział o końcach a i b domkniętych nazywamy *przedziałem domkniętym* i oznaczamy symbolem $[a, b]$. Jeżeli tylko lewy koniec a przedziału jest domknięty, to przedział nazywamy *lewostronnie domkniętym* i oznaczamy $\langle a, b \rangle$, jeżeli zaś tylko prawy koniec przedziału jest domknięty, to przedział nazywamy *prawostronnie domkniętym* i oznaczamy $(a, b]$.

Na rysunku 262 końce otwarte oznaczono kółkami (nulkami), końce domknięte czarnymi kropkami, a końce $-\infty$ i $+\infty$ oznaczono strzałkami skierowanymi odpowiednio na lewo lub na prawo.

Oto zestawienie rozmaitych przedziałów:

Nazwa	Symbol	Nierówność	Wykres
Otwarty	(a, b)	$a < x < b$	
Prawostronnie domknięty	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
Lewostronnie domknięty	$\langle a, b \rangle$	$a \leq x < b$	
Domknięty	$\langle a, b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
Przedziały nieskończone	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	
	$(-\infty, b)$	$-\infty < x < b$	
	$(-\infty, b]$	$-\infty < x \leq b$	
	$(a, +\infty)$	$a < x < +\infty$	
	$\langle a, +\infty \rangle$	$a \leq x < +\infty$	

Rys. 262

Często rozważa się także funkcje, których obszarem oznaczoności jest skończony zbiór liczb albo nieskończony ciąg liczb odosobnionych. Za obszar oznaczoności funkcji częstokroć służy ciąg wszystkich liczb naturalnych (ciąg naturalny); wartości takiej funkcji można również ustawić w ciąg

$$f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$$

(funkcja o argumentach naturalnych).

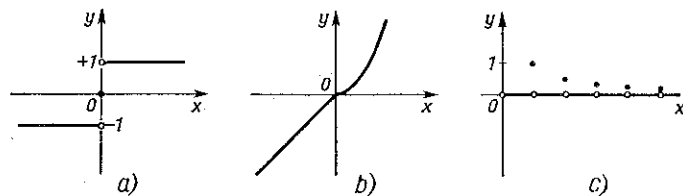
Rozważa się również obszary oznaczoności funkcji w postaci zbioru przedziałów albo zbioru przedziałów i odosobnionych liczb.

Sposoby określania funkcji. Funkcja może być określona różnymi sposobami, np. za pomocą tablic wartości funkcji, za pomocą wykresów, za pomocą jednego lub kilku wzorów (dla różnych przedziałów oznaczoności funkcji).

Przykłady funkcji określonych za pomocą kilku wzorów oraz ich wykresy (rys. 263) ⁽¹⁾:

$$a. y = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ +1 & \text{dla } x > 0; \end{cases} \quad b. y = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0; \end{cases}$$

$$c. y = \begin{cases} 1/n & \text{dla } n \text{ całkowitych dodatnich,} \\ 0 & \text{dla pozostałych liczb dodatnich.} \end{cases}$$



Rys. 263

Obszar oznaczoności wyrażenia analitycznego. W analizie matematycznej rozważa się przede wszystkim funkcje określone jednym wzorem, przy czym do obszaru oznaczoności takiej funkcji zalicza się wszystkie wartości argumentu, przy których dane wyrażenie analityczne ma sens liczbowy, tj. przybiera oznaczoną wartość rzeczywistą skończoną. Taki obszar nazywamy *obszarem oznaczoności wyrażenia analitycznego*. Zazwyczaj, jeżeli nie ma dodatkowych ograniczeń, przez obszar oznaczoności funkcji określonej jednym wzorem rozumie się właśnie obszar oznaczoności tego wzoru. Do obszaru oznaczoności nie wchodzi w szczególności te wartości zmiennych, dla których funkcja 1° przybiera wartości zespolone, 2° ucieka w nieskończoność (patrz str. 363, rodzaje nieciągłości funkcji), 3° jest nieoznaczona (patrz str. 359, 360, obliczanie symboli nieoznaczonych).

Przykłady 1. $y = \sqrt{1-x^2}$, obszar oznaczoności jest $-1 \leq x \leq 1$. $y = \log \cos x$, obszar oznaczoności $-\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi, \dots, \frac{1}{2}(4n-1)\pi < x < \frac{1}{2}(4n+1)\pi, \dots$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

⁽¹⁾ Kółko (nulka) wskazuje, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

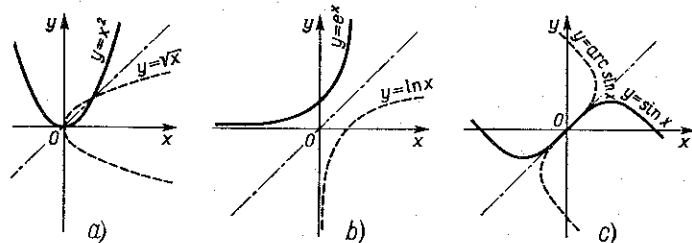
Podstawowe postacie analitycznego określenia funkcji. Funkcje mogą być określone.

1° w postaci jawnej, gdy y jest wyrażone przez x za pomocą wzoru $y = f(x)$;

2° w postaci uwikłanej, gdy x i y są związane równaniem $F(x, y) = 0$, np. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ lub $x^y - xy = 0$;

3° w postaci parametrycznej, gdy odpowiadające sobie wartości x i y są wyrażone przez trzecią zmienną t (parametr) za pomocą równań $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, np. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

Funkcje wzajemnie odwrotne. Dwie funkcje $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$ nazywamy *wzajemnie odwrotnymi*, jeżeli każda para wartości a, b spełniająca warunek $b = f(a)$ spełnia też warunek $a = \varphi(b)$ i odwrotnie:



Rys. 264

każda para wartości b, a spełniająca warunek $a = \varphi(b)$ spełnia też warunek $b = f(a)$. Jedną z dwóch funkcji wzajemnie odwrotnych (obażnie którą) można nazwać *funkcją prostą*; wtedy drugą funkcję nazywamy *odwrotną* względem pierwszej.

Aby funkcja $y = f(x)$ była odwracalna, musi być *jednoznaczna* (tzn. różnym wartościom y odpowiadają różne wartości x) i *jednokrotna* (tzn. różnym wartościom x odpowiadają różne wartości y); wówczas istnieje funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$, również jednokrotna i jednoznaczna. Przyjął się zwyczaj zapisywania funkcji odwrotnej w taki sposób, żeby x było zmienną niezależną, a y funkcją: a więc zamiast $x = \varphi(y)$ pisze się $y = \varphi(x)$; wówczas wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ są symetryczne względem prostej $y = x$. Wykres funkcji prostej $y = f(x)$ jest wykresem funkcji odwrotnej $x = \varphi(y)$, zmienia się tylko rola zmiennych: y staje się argumentem, a x funkcją.

Przykłady funkcji odwrotnych (rys. 264): a. $y = x^2$ w przedziale $0 \leq x < +\infty$ i $y = \sqrt{x}$; b. $y = e^x$ i $y = \ln x$; c. $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$ w przedziale $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$.

Aby dla danej funkcji $y = f(x)$, jednoznacznej i jednokrotnej znaleźć funkcję odwrotną, należy rozwiązać równanie $y = f(x)$ względem zmiennej x i w otrzymanym równaniu $x = \varphi(y)$ zamienić oznaczenia x, y , pisząc $y = \varphi(x)$.

Przykład. $y = f(x) = \frac{x+1}{2-x}$, $x = \varphi(y) = \frac{2y-1}{y+1}$ i po zamianach zmiennych otrzymujemy funkcję odwrotną w postaci $y = \varphi(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

Funkcje elementarne ⁽¹⁾. Funkcje elementarne są to funkcje określone wzorami zawierającymi skończoną ilość operacji algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie oraz operacje wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne), wykonanych na zmiennej niezależnej, na funkcji i na pewnych stałych. Funkcje elementarne dzielimy na algebraiczne i przestępne.

W funkcjach algebraicznych argument x i funkcja y związane są równaniem algebraicznym postaci

$$\sum a_i y^k = 0,$$

gdzie współczynniki a_i są wielomianami zmiennej x , np. $(3x+1)y^3 - 4xy + (x^3-1) = 0$. Jeżeli równanie takie rozwiążemy algebraicznie względem y , to wśród rozwiązań mogą się znaleźć następujące najprostsze funkcje algebraiczne:

1° *Funkcja całkowita wymierna*, czyli wielomian $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ (na zmiennej x wykonuje się tylko dodawanie, odejmowanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi naturalnej); w szczególności może to być funkcja stała $y = a$, funkcja liniowa $y = ax + b$, funkcja kwadratowa (trójmian kwadratowy) $y = ax^2 + bx + c$.

2° *Funkcja wymierna ułamkowa*, czyli iloraz dwóch wielomianów

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m},$$

przy czym licznik nie dzieli się przez mianownik (na zmiennej x wykonuje się dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi naturalnej); w szczególności może to być funkcja homograficzna $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad-bc \neq 0$.

3° *Funkcja niewymierna*, czyli taka funkcja, w której występuje

⁽¹⁾ Tablice funkcji elementarnych patrz str. 13-83, a wykresy funkcji elementarnych podane są na str. 98-121.

pierwiastkowanie zmiennej niezależnej lub funkcji wymiernej (całkowitej albo ułamkowej), przy czym żadne przekształcenia nie pozwalają wyłączyć zmiennej spod pierwiastka. Na przykład $y = \sqrt{2x+3}$, $y = \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}$.

Funkcje przestępne są to takie funkcje, które nie dają się wyrazić za pomocą równania $\sum a_i y^k$, gdzie a_i są wielomianami zmiennej niezależnej x . Najprostsze z nich zwane *elementarnymi funkcjami przestępnymi* są następujące:

1° *Funkcja wykładnicza*: jest to funkcja postaci $a = e^{\varphi(x)}$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią różną od jedności, a $\varphi(x)$ jest funkcją algebraiczną zmiennej x , na przykład $y = e^x$, $y = a^x$, $y = 23x^{2-5x}$.

2° *Funkcja logarytmiczna*: jest to funkcja $y = \log_a \varphi(x)$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią różną od jedności, a $\varphi(x)$ jest funkcją algebraiczną, na przykład: $y = \ln x$, $y = \log x$, $y = \log_2(5x^2-3x)$.

3° *Funkcje trygonometryczne*: są to funkcje $\sin \varphi(x)$, $\cos \varphi(x)$, $\operatorname{tg} \varphi(x)$, $\operatorname{ctg} \varphi(x)$, $\sec \varphi(x)$, $\operatorname{cosec} \varphi(x)$, na przykład: $y = \sin x$, $y = \cos(2x+3)$, $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ ⁽¹⁾.

4° *Funkcje cyklometryczne* są to funkcje $\arcsin \varphi(x)$, $\arccos \varphi(x)$, $\operatorname{arctg} \varphi(x)$, $\operatorname{arcctg} \varphi(x)$, na przykład: $y = \arcsin x$, $y = \arccos \sqrt{1-x}$, $\operatorname{arctg}(2/x)$.

Rozmaite kombinacje wymienionych funkcji algebraicznych i przestępnych, w których jedna funkcja jest argumentem drugiej funkcji, dają funkcje złożone, np. $y = \ln \sin x$, $y = \frac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x}$. Takie kombinacje funkcji elementarnych wziętych w skończonej ilości dają znowu funkcje elementarne.

Funkcje nieelementarne. Funkcje, które nie są funkcjami elementarnymi, można określić w różny sposób poczynając od prostego

⁽¹⁾ Przez argument funkcji trygonometrycznej $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a także przez wartości $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, rozumie się w analizie matematycznej nie kąt lub łuk okręgu jednostkowego (tak jak przy pierwszym zapoznaniu się z trygonometrią), lecz pewne liczby. Funkcje trygonometryczne można określić czysto analitycznie, bez stosowania pojęć geometrycznych, np. funkcję $\sin x$ można określić jako granicę pewnego ciągu potęgowego zbieżnego (patrz str. 417), albo otrzymać jako rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, przy warunkach początkowych

$x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$. Przy takim ujęciu funkcji trygonometrycznej jej argument jest miarą łuku okręgu wyrażoną w radianach; podobnie wartości funkcji cyklometrycznych są miarami łuków w okręgu wyrażonymi w radianach. Dlatego też do obliczenia funkcji trygonometrycznych można posługiwać się zwykłymi tablicami funkcji trygonometrycznych, przeliczając argumenty z miary łukowej na stopniową, a dla funkcji cyklometrycznych — odwrotnie.

opisu odpowiedniości między argumentem i funkcją. W analizie matematycznej często stosuje się następujące sposoby określenia funkcji nieelementarnych (1):

1° Przy pomocy kilku wzorów matematycznych dla różnych przedziałów (patrz str. 348);

2° Przy pomocy przejścia granicznego; w szczególności:

a. przy pomocy szeregów oraz iloczynów nieskończonych (patrz str. 383);

b. przy pomocy całek oznaczonych (z jedną lub dwiema granicami zmiennymi), nie wyrażalnych przez funkcje elementarne (patrz str. 425);

3° Przy pomocy równań różniczkowych, których rozwiązania nie dają się wyrazić w kwadraturach;

4° Przy pomocy równań funkcyjnych.

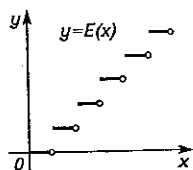
Dla funkcji nieelementarnych mających znaczenie teoretyczne lub praktyczne układa się tablice, konstruuje się wykresy, bada się własności. Funkcje takie nazywamy *funkcjami specjalnymi*; mają one często osobne nazwy i oznaczenia.

Przykłady funkcji nieelementarnych:

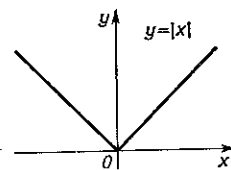
1. *Część całkowita liczby x* zwana też *entier x*: y jest to największa liczba całkowita nie przewyższająca liczby x. Oznaczenie $y = E(x)$ lub $y = [x]$; wykres — patrz rysunek 265.

2. *Wartość bezwzględna albo moduł liczby x*: $y = \begin{cases} -x & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$

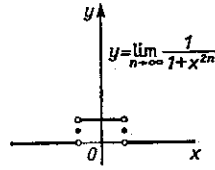
Oznaczenie $y = |x|$; wykres — patrz rysunek 266.



Rys. 265



Rys. 266



Rys. 267

3. *Znak liczby x* zwany też *signum x*: $y = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$

Oznaczenie $y = \operatorname{sgn} x$; wykres — patrz rysunek 263a na str. 348.

(1) Niekiedy możliwe jest określenie tej samej funkcji różnymi sposobami.

$$4. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} \quad \text{lub} \quad y = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } |x| = 1, \\ 0 & \text{dla } |x| > 1, \end{cases}$$

wykres — patrz rys. 267.

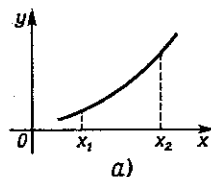
$$5. y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{lub} \quad y = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Oznaczenie $y = \operatorname{Si}(x)$, *sinus całkowity*, patrz str. 465.

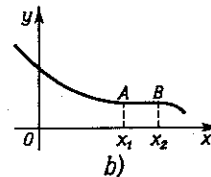
$$6. y = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{lub} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}.$$

Oznaczenie $y = \Gamma(x)$, *funkcja gamma*, patrz str. 204.

7. Rozwiązanie równania Bessela $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ przy określonych warunkach początkowych (*funkcja Bessela*, patrz str. 582).



a)



b)

Rys. 268

Rodzaje funkcji.

1° *Funkcje monotoniczne*. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w przedziale (a, b) tę własność, że dla każdej pary liczb x_1, x_2 spełniającej warunek $a < x_1 < x_2 < b$ zachodzi nierówność $f(x_1) \leq f(x_2)$, to taką funkcję nazywamy *monotonicznie rosnącą* w przedziale (a, b) ; jeżeli zaś przy spełnieniu warunku $a < x_1 < x_2 < b$ zachodzi nierówność $f(x_1) \geq f(x_2)$, to funkcję $f(x)$ nazywamy *monotonicznie malejącą* w przedziale (a, b) .

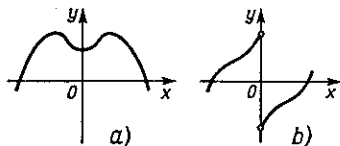
W szczególności, w przypadku gdy zachodzi ostra nierówność $f(x_1) < f(x_2)$, funkcję $f(x)$ nazywamy *ściśle rosnącą*, a w przypadku, gdy zachodzi ostra nierówność $f(x_1) > f(x_2)$ funkcję nazywamy *ściśle malejącą* (w danym przedziale). Na przykład na rysunku 268a funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b) i to ściśle rosnąca; na rysunku 268b funkcja $f(x)$ jest malejąca w przedziale (a, b) , ale nie jest ściśle malejącą w tym przedziale, gdyż między punktami x_1 i x_2 stale zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

Przykłady. Funkcja $y = e^{-x}$ jest malejąca w przedziale $-\infty < x < +\infty$; funkcja $y = \ln x$ jest rosnąca w przedziale $0 < x < +\infty$;

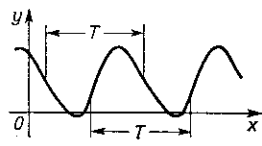
funkcja $y = x^2$ jest malejąca w przedziale $-\infty < x \leq 0$, a rosnąca w przedziale $0 \leq x < +\infty$; funkcja $y = 1/x$ jest malejąca w przedziale $-\infty < x < 0$ i również malejąca w przedziale $0 < x < +\infty$.

2° *Funkcje ograniczone.* Funkcję nazywamy *ograniczoną od góry*, jeżeli jej wartości nie przewyższają pewnej liczby M i *ograniczoną od dołu*, jeżeli jej wartości są nie mniejsze od pewnej liczby m . Funkcję ograniczoną od góry i od dołu nazywamy po prostu *funkcją ograniczoną*.

Przykłady. Funkcja $y = 1 - x^2$ jest ograniczona od góry



Rys. 269



Rys. 270

($y \leq 1$); funkcja $y = e^x$ jest ograniczona od dołu ($y > 0$); funkcja $y = \sin x$ jest ograniczona ($-1 \leq y \leq 1$); funkcja $y = \frac{4}{1+x^2}$ jest ograniczona ($0 < y \leq 4$).

3° *Funkcje parzyste.* Funkcja jest *parzysta*, jeżeli dla każdej wartości x (z przedziału oznaczoności funkcji) zachodzi równość $f(-x) = f(x)$ (rys. 269a); wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy .

Przykłady. Funkcje $y = \cos x$, $y = x^4 - 3x^2 + 1$ są parzyste.

4° *Funkcje nieparzyste.* Funkcja jest *nieparzysta*, jeżeli dla każdej wartości x (z przedziału oznaczoności funkcji) zachodzi równość $f(-x) = -f(x)$ (rys. 269b); wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku współrzędnych O .

Przykłady. Funkcje $y = \sin x$, $y = x^3 - x$ są nieparzyste.

5° *Funkcje okresowe.* Funkcja jest *okresowa*, jeżeli dla każdej wartości x (z przedziału oznaczoności funkcji) zachodzi równość $f(x+T) = f(x)$, gdzie T jest pewną stałą zwaną *okresem funkcji* $f(x)$ (rys. 270); zazwyczaj przez okres funkcji rozumie się najmniejszą liczbę dodatnią spełniającą powyższy warunek.

4. Granica funkcji

Pojęcie granicy funkcji rozważane jest tylko dla funkcji dwóch typów: 1° dla ciągów, czyli funkcji o argumentie całkowitym (patrz str. 347); 2° dla funkcji określonych w obszarze spójnym (patrz str. 346) (1).

(1) Pojęcie granicy wprowadza się także i dla funkcji o bardziej złożonych obszarach oznaczoności.

Granica funkcji o argumentie całkowitym.

Określenie. Granicę funkcji $y = f(x)$, gdzie $x = 1, 2, \dots, n, \dots$, określa się tylko dla $x \rightarrow \infty$; jest to granica ciągu liczbowego (1) $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ dla $n \rightarrow \infty$, co zapisujemy

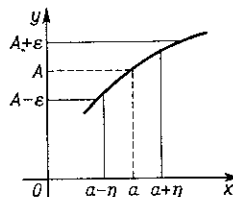
$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

Przykłady. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Granica funkcji określonej w obszarze spójnym.

Określenie. Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie $x = a$ granicę A , co zapisujemy:

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$



Rys. 271

jeżeli przy x dążącym do a wartość funkcji $f(x)$ zbliża się nieograniczenie do liczby A . W punkcie $x = a$ funkcja $f(x)$ może nie przybierać wartości A , co więcej, może nie być w tym punkcie oznaczona.

Ścisłe sformułowanie: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, jeżeli dla dowolnie małej dodatniej

liczby ϵ można dobrać taką dodatnią liczbę η , że dla każdej wartości x z przedziału $a - \eta < x < a + \eta$ (2) (z wyjątkiem, być może, wartości $x = a$) odpowiednia wartość $f(x)$ leży w przedziale $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$ (rys. 271).

Kryteria istnienia granicy.

1° *Srowadzenie zagadnienia granicy funkcji do granicy ciągu.* Funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = a$ granicę A , jeżeli dla dowolnego ciągu wartości $x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ należącego do obszaru oznaczoności funkcji i zbieżnego do granicy a , ciąg odpowiednich wartości funkcji $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ma granicę A . Ta granica A jest wspólna dla wszystkich takich ciągów i jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$.

2° *Kryterium Cauchy'ego.* Aby funkcja $f(x)$ miała granicę w punkcie $x = a$, potrzeba i wystarcza, by dla dowolnych dwóch wartości x_1 i x_2 argumentu x należących do obszaru oznaczoności funkcji i dostatecznie bliskich wartości $x = a$, odpowiednie wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$ funkcji $f(x)$ różniły się dowolnie mało.

Ścisłe sformułowanie. Aby funkcja $f(x)$ miała granicę w punkcie $x = a$, potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnie małej dodatniej liczby ϵ można było dobrać taką dodatnią liczbę η , że dla

(1) Patrz str. 343.

(2) Jeżeli a jest punktem brzegowym obszaru spójnego, to powyższą nierówność podwójną należy zastąpić nierównościami $a - \eta < x < a$ albo $a < x < a + \eta$.

każdych dwóch wartości x_1 i x_2 argumentu x należących do obszaru oznaczoności funkcji i spełniających warunki $|x_1 - a| < \eta$ oraz $|x_2 - a| < \eta$ spełniony będzie warunek

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Granica niewłaściwa funkcji jest pojęciem analogicznym do granicy niewłaściwej ciągu (str. 344); symbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (granica jest równa nieskończoności) oznacza przypadek, kiedy granica funkcji w punkcie $x = a$ nie istnieje, wskutek tego, że przy zdążaniu x do a wartość bezwzględna funkcji wzrasta nieograniczenie.

Ścisłe sformułowanie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, jeżeli dla dowolnie wielkiej liczby dodatniej K można dobrać taką liczbę dodatnią η , by dla każdej wartości x z przedziału $a - \eta < x < a + \eta$ odpowiednia wartość funkcji $f(x)$ była co do bezwzględnej wartości większa od K , tzn.

$$|f(x)| > K, \quad \text{gdy} \quad a - \eta < x < a + \eta.$$

Jeżeli przy tym wszystkie wartości $f(x)$ w przedziale $a - \eta < x < a + \eta$ są dodatnie, to piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, jeżeli zaś wszystkie

wartości $f(x)$ w przedziale $a - \eta < x < a + \eta$ są ujemne, to piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Lewostronna i prawostronna granica funkcji. Funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = a$ granicę lewostronną A , jeżeli wartości tej funkcji zbliżają się nieograniczenie do A , gdy x rosnąc dąży do a . Oznaczenie: $A = f(a-0)$. Analogicznie funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = a$ granicę prawostronną A , jeżeli wartości tej funkcji zbliżają się nieograniczenie do A , gdy x malejąc dąży do a . Oznaczenie: $A = f(a+0)$. Na przykład funkcja $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}}$ ma przy $x \rightarrow 1$ inną granicę lewostronną, a inną prawostronną: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (rys. 272).

Rys. 272

granice lewostronną, a inną prawostronną: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (rys. 272).

Granica funkcji w nieskończoności. Liczbę A nazywamy granicą funkcji $y = f(x)$ przy $x \rightarrow +\infty$, co zapisujemy:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

jeżeli dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką

liczbę N , że dla wszystkich wartości $x > N$ odpowiednie wartości $f(x)$ będą zawarte w przedziale $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Analogicznie

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

jeżeli dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę $-N$, że dla wszystkich wartości $x < -N$ odpowiednie wartości $f(x)$ będą zawarte w przedziale $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Na przykład

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Jeżeli zaś przy $x \rightarrow +\infty$ lub $x \rightarrow -\infty$ wartość bezwzględna funkcji $f(x)$ wzrasta nieograniczenie, to granica funkcji $f(x)$ w nieskończoności nie istnieje; zapisujemy to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

Jeżeli przy tym $f(x)$ przebiega wartości dodatnie, to piszemy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, a jeżeli $f(x)$ przebiega wartości ujemne, to piszemy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Na przykład

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-1}{x^2} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{x^2} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{x^2} &= +\infty. \end{aligned}$$

Podstawowe twierdzenia o granicach funkcji.

1° **Granica stałej** jest ta sama stałą; innymi słowy, jeżeli w każdym punkcie $x = a$ (w przedziale oznaczoności funkcji) funkcja $y = f(x)$ ma stałą wartość A , to

$$\lim_{x \rightarrow a} A = A.$$

2° **Granica sumy** lub **różnicy** skończonej ilości funkcji równa się odpowiednio sumie lub różnicy granic tych funkcji (jeżeli granice te istnieją)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a} \psi(x).$$

3° **Granica iloczynu** skończonej ilości funkcji równa się iloczynowi granic tych funkcji (jeżeli granice te istnieją)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x) \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \lim_{x \rightarrow a} \psi(x).$$

4° Granica ilorazu dwóch funkcji

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)},$$

jeżeli granice te istnieją i $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$.

5° Jeżeli funkcja $f(x)$ jest zawarta między dwiema innymi funkcjami $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, tzn. jeżeli $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$, przy czym $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$

i $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

6° Funkcja monotoniczna określona w obszarze spójnym ma granicę (skończoną lub nieskończoną) dla każdej wartości x (skończonej lub nieskończonej); funkcja monotoniczna ograniczona ma granicę skończoną dla każdej wartości x .

Pewne ważniejsze granice.

1. Liczba e : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828 \dots$ (liczba niewymierna). Tablice wielkości związanych z liczbą e patrz str. 13. Liczba e jest podstawą logarytmów naturalnych (patrz str. 164).

2. Liczba γ : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma = 0,5772 \dots$ (stała Eulera).

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, jeżeli x jest wyrażone w mierze łukowej.

Obliczanie granic. Dla obliczania granic posługujemy się podanymi wyżej twierdzeniami oraz następującymi sposobami:

1° Przekształcamy funkcję do postaci, dla której łatwo można znaleźć granicę.

Przykłady.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin 2x)}{2x} = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

2° W przypadkach prowadzonych do nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ stosujemy regułę de l'Hospitala.

a. Nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$. Jeżeli $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcjami określonymi w pewnym przedziale zawierającym punkt $x = a$ (1) i mającymi w tym przedziale skończone pochodne $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$, przy czym $\psi'(x) \neq 0$, i jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0 \quad \left(\text{nieoznaczoność typu } \frac{0}{0} \right)$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty \quad \left(\text{nieoznaczoność typu } \frac{\infty}{\infty} \right),$$

to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

pod warunkiem, że granica ta istnieje lub jest równa ∞ (reguła de l'Hospitala).

W przypadku gdy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ też przedstawia sobą nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, to stosuje się powyższą regułę powtórnie itd.

Przykład.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = 1. \end{aligned}$$

b. Nieoznaczoność typu $0 \cdot \infty$. Jeżeli $f(x) = \varphi(x) \psi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcjami określonymi i różniczkowalnymi w pewnym przedziale zawierającym punkt $x = a$ i jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$,

a $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$ (nieoznaczoność typu $0 \cdot \infty$), to przekształcając

funkcję $f(x)$ do postaci $f(x) = \frac{\varphi(x)}{1/\psi(x)}$ lub $f(x) = \frac{\psi(x)}{1/\varphi(x)}$ sprowadzamy zagadnienie do przypadku a.

(1) W punkcie a funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ mogą nie być określone.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi - 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-2}{-1/\sin^2 x} = 2.$$

c. Nieoznaczoność typu $\infty - \infty$. Jeżeli $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$ (nieoznaczoność typu $\infty - \infty$), to dla znalezienia granicy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ przekształcamy algebraicznie różnicę $\varphi(x) - \psi(x)$ do postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$. Można tego dokonać

różnymi sposobami, np. $\varphi - \psi = \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) : \frac{1}{\varphi\psi}$.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x} \right) \quad \left(\text{nieoznaczoność typu } \frac{0}{0} \right).$$

Stosując dwukrotnie regułę de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{2}.$$

d. Nieoznaczoność typu 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Jeżeli $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ i $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$, to najpierw znajdujemy granicę A funkcji $\ln f(x) = \psi(x) \ln \varphi(x)$, prowadzącej do nieoznaczoności typu $0 \cdot \infty$ (przypadek b), a potem delogarytmujemy ją obliczając e^A .

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = X$, $\ln x^x = x \ln x$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$, więc $\ln X = 0$, $X = e^0 = 1$. Stąd $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$.

W przypadkach nieoznaczoności typu ∞^0 i 1^∞ postępujemy analogicznie.

3° Oprócz reguły de l'Hospitala do wyznaczenia wartości wyrażeń nieoznaczonych można stosować rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Na przykład

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

5. Wielkości nieskończenie małe

Określenia. Funkcję a jednej zmiennej nazywamy *wielkością nieskończenie małą*, gdy $x \rightarrow a$, jeżeli funkcja ta ma granicę 0, $\lim a = 0$, gdy $x \rightarrow a$. Jeżeli funkcja a ma stałą wartość c i w którymkolwiek punkcie $x = a$ ma granicę $\lim_{x \rightarrow a} a = 0$, to $c = 0$ (na podstawie twier-

dzenia: granica funkcji stałej jest w każdym punkcie równa tej stałej); zatem wśród wielkości stałych nieskończenie małą wielkością jest tylko zero.

Jeżeli granicą funkcji A zmiennej x , gdy $x \rightarrow a$, jest ∞ (patrz str. 356), to A nazywamy *wielkością nieskończenie wielką*, gdy $x \rightarrow a$.

Podstawowe własności. Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ są wielkościami nieskończenie małymi, gdy $x \rightarrow a$ i m jest wielkością skończoną, tzn. nie dąży ani do 0, ani do ∞ , gdy $x \rightarrow a$, to

1° suma $\alpha + \beta + \dots$ i różnica $\alpha - \beta - \dots$, i ogólnie: suma algebraiczna $\alpha + \beta - \gamma - \delta + \dots$ (o skończonej ilości wyrazów) są nieskończenie małe, gdy $x \rightarrow a$;

2° iloczyn $\alpha\beta, \alpha\gamma, \dots$ i ogólnie: $\alpha\beta\gamma \dots$ są nieskończenie małe, gdy $x \rightarrow a$;

3° iloraz α/m jest wielkością nieskończenie małą, gdy $m \neq 0$ i $x \rightarrow a$;

4° iloraz m/α jest nieskończenie wielki, gdy $m \neq 0$ i $x \rightarrow a$;

5° stosunek α/β może być albo wielkością nieskończenie małą, albo skończoną, albo nieskończenie wielką, albo też nie mieć żadnej granicy, gdy $x \rightarrow a$.

Przykład y. 1. Niech $\alpha = \sin x$, $\beta = 1 - \cos x$, $\gamma = x^2$. Gdy $x \rightarrow 0$, α, β, γ są wielkościami nieskończenie małymi. Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad (\text{reguła de l'Hospitala}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} = \infty,$$

a więc $\frac{\beta}{\alpha}$ jest wielkością nieskończenie małą, $\frac{\beta}{\gamma}$ — skończoną, $\frac{\alpha}{\gamma}$ — nieskończenie wielką.

2. Niech $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{(-1)^n}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną. Gdy $n \rightarrow \infty$, α i β są nieskończenie małymi. Zauważmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nie istnieje.

Rząd nieskończenie małych. Dwie wielkości nieskończenie małe α i β są tego samego rzędu, gdy $x \rightarrow a$, jeżeli stosunek α/β lub β/α

(co na jedno wychodzi) jest wielkością skończoną, gdy $x \rightarrow a$; jeżeli zaś α/β jest wielkością nieskończoną małą, gdy $x \rightarrow a$, to α jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż β ; jeżeli wreszcie γ/α jest wielkością nieskończoną wielką, gdy $x \rightarrow a$, to α/γ jest wielkością nieskończoną małą, i α jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż γ .

Przykład. Niech $\alpha = \sin x$, $\beta = 1 - \cos x$, $\gamma = x^2$. Gdy $x \rightarrow 0$, β i γ są wielkościami nieskończoności małymi tego samego rzędu, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (wielkość skończona); natomiast β i γ są nieskończonościami małymi rzędu wyższego niż α , gdy $x \rightarrow 0$, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = 0$.

Nieskończenie małą α nazywamy *nieskończenie małą rzędu m* względem nieskończoności małej β , gdy $x \rightarrow a$, jeżeli α jest tegoż rzędu co β^m .

Przykład. Gdy $x \rightarrow 0$, $\sin x$ jest nieskończenie małą rzędu 1 względem x , a $1 - \cos x$ jest nieskończenie małą rzędu 2.

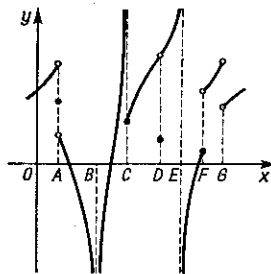
Dwie wielkości nieskończenie małe nazywamy *równoważnymi*, gdy $x \rightarrow a$, jeżeli granicą ich stosunku jest 1.

Przykład. Gdy $x \rightarrow 0$, nieskończenie małe x i $\sin x$ są równoważne, natomiast nieskończenie małe x^2 i $1 - \cos x$ są tego samego rzędu, ale nie są równoważne.

Przy obliczaniu granicy stosunku dwóch wielkości nieskończoności małych można każdą z nich zastąpić wielkością równoważną, co nie zmienia granicy.

6. Ciągłość i punkty nieciągłości funkcji

Pojęcie ciągłości funkcji i punktów nieciągłości. Większość funkcji badanych w analizie matematycznej, są to funkcje *ciągłe*, tzn. przy niewielkich zmianach argumentu x wartości funkcji y zmieniają się także bardzo mało, a wykresem takiej funkcji jest linia ciągła. Przy pewnych wartościach x funkcja może nie być ciągła i wtedy wykres funkcji ma *przerwy*; wartości argumentu, przy których to zachodzi, nazywamy *punktami nieciągłości* funkcji. Na rysunku 273 dany jest wykres funkcji ciągłej we wszystkich punktach z wyjątkiem punktów A, B, C, D, E, F, G (litery te oznaczają punkty nieciągłości funkcji, leżące na osi Ox), przy czym kółkami (nulkami) oznaczone są punkty nie należące do wykresu funkcji, a czarnymi kropkami oznaczone są punkty, które należą do wykresu.



Rys. 273

Określenia. Funkcję $y = f(x)$ nazywamy *ciągłą w punkcie $x = a$* , jeżeli 1° liczba a należy do obszaru oznaczoności funkcji, 2° granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje i równa się $f(a)$ (1°).

Jeżeli funkcja jest oznaczona i ciągła w każdym punkcie przedziału ab otwartego albo domkniętego na jednym lub na obu końcach (patrz str. 347), to nazywamy ją *ciągłą w danym przedziale*.

W tych punktach $x = a$ (leżących wewnątrz obszaru oznaczoności funkcji lub na jego brzegach), w których funkcja nie jest oznaczona albo, w których wartość funkcji $f(a)$ nie jest równa $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, funkcja nie jest ciągła, a punkty takie nazywamy *punktami nieciągłości* funkcji (2°).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła we wszystkich punktach pewnego przedziału z wyjątkiem skończonej ilości punktów, w których funkcja $f(x)$ doznaje skończonego skoku (patrz niżej), to funkcję taką nazywamy *przedziałami ciągłą*; jej wykres składa się ze skończonej ilości łuków zwykłych.

Często spotykane rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie $x = a$.

1° Funkcja *ucieka w nieskończoność*; tzn. w punkcie $x = a$ funkcja ma granicę niewłaściwą lewostronną lub prawostronną lub też obie te granice są niewłaściwe, jak np. w punktach B, C, E na rysunku 273 (jest to przypadek najczęściej spotykany).

Przykłady. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(\frac{1}{2}\pi - 0) = +\infty$, $f(\frac{1}{2}\pi + 0) = -\infty$ (3°) (rysunek, patrz str. 116) (nieciągłość typu punktu E na rysunku 273);

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = +\infty$ (nieciągłość typu punktu B na rysunku 273);

$f(x) = e^{1/(x-1)}$; $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = \infty$ (nieciągłość typu punktu C na rysunku 273, z tą różnicą, że dla $x = 1$ funkcja nie jest określona).

2° Funkcja ma *skończony skok*; gdy x przechodzi przez wartość a funkcja przeskakuje od jednej skończonej wartości do drugiej (punkty A, F, G na rysunku 273), przy czym wartość $f(x)$ dla $x = a$ może nie być oznaczona, jak np. w punkcie G ; może pokrywać się z wartością $f(a-0)$, jak np. w punkcie F lub z wartością $f(a+0)$; może też mieć

(1) Drugi warunek można zastąpić takim warunkiem równoważnym: przy α nieskończenie małym różnica $\beta = f(a+\alpha) - f(a)$ jest nieskończenie mała, tzn. nieskończenie małym przyrostom argumentu odpowiadają nieskończenie małe przyrosty funkcji.

(2) Jeżeli funkcja jest określona tylko po jednej stronie danego punktu $x = a$ (np. funkcja $\sqrt{x}$ na prawo od punktu $x = 0$, albo $\arcsin x$ na lewo od punktu $x = 1$), to mówimy, że w punkcie $x = a$ funkcja się *wrywa*.

(3) O symbolicznym oznaczeniu $f(a-0)$ i $f(a+0)$, patrz str. 356.

wartość różną od $f(a-0)$ i od $f(a+0)$, jak np. w punkcie A na rysunku 273; może się też zdarzyć, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje, mianowicie $f(a-0) = f(a+0)$, ale w punkcie $x = a$ funkcja ma wartość $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, jak np. w punkcie D .

Przykłady. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/(x-1)}}$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (patrz rys. 272 str. 356); $f(x) = E(x)$ (rys. 265, str. 352), $f(a-0) = a-1$, $f(a+0) = a$; $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ (rys. 267, str. 352), $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$.

3^o Funkcja ma w punkcie $x = a$ *osobliwość usuwalną*, gdy $f(a-0) = f(a+0)$, ale w punkcie $x = a$ funkcja nie jest oznaczona; biorąc $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ wprowadzamy do wykresu funkcji $x = a$, $y = f(a)$ i usuwamy w ten sposób nieciągłość funkcji w punkcie $x = a$.

Różne przypadki nieokreśloności funkcji rozpatrywane za pomocą reguły de l'Hospitala lub innymi sposobami (patrz str. 359, 360) i dające w wyniku skończoną granicę stanowią przykłady nieciągłości usuwalnych.

Przykład. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ przy $x = 0$ daje nieoznaczoność $\frac{0}{0}$,

przy czym $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$; funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

staje się funkcją ciągłą.

Ciągłość i punkty nieciągłości funkcji elementarnych. Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w obszarze ich oznaczoności; punkty nieciągłości nie należą do obszaru ich oznaczoności. Sposoby badania i wykresiania funkcji elementarnych podane są na str. 318; wykresy najprostszych funkcji patrz str. 98-120. Tu podane są tylko ogólne wiadomości o nieciągłościach funkcji elementarnych.

Funkcje całkowite (wielomiany) są ciągłe wszędzie (na całej osi liczbowej).

Funkcje ułamkowe $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami, są ciągłe wszędzie z wyjątkiem tych wartości a , przy których $Q(a) = 0$, ale $P(a) \neq 0$; w takim punkcie $x = a$ funkcja ucieka w nieskończoność. Jeżeli a jest pierwiastkiem zarówno mianownika jak

i licznika, to funkcja ma nieciągłość tylko w tym przypadku, gdy krotność pierwiastka mianownika jest większa od krotności pierwiastka licznika. W przeciwnym przypadku nieciągłość jest usuwalna.

Funkcje niewymierne. Pierwiastki (dowolnego stopnia) z funkcji całkowitych są funkcjami ciągłymi dla wszystkich wartości x należących do obszaru oznaczoności funkcji; na końcach przedziałów oznaczoności funkcje mogą się urywać (jak np. pierwiastek stopnia parzystego w punkcie granicznym między dodatnimi i ujemnymi wartościami funkcji podpierwiastkowej). Pierwiastki z funkcji ułamkowych mają nieciągłość w tych punktach wartości x , w których funkcja podpierwiastkowa jest nieciągła.

Funkcje trygonometryczne: $\sin x$ i $\cos x$ są wszędzie ciągłe; $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{sec} x$ mają nieciągłości w punktach $x = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, a $\operatorname{ctg} x$ i $\operatorname{cosec} x$ w punktach $x = n\pi$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Funkcje cyklotometryczne: $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arccotg} x$ są wszędzie ciągłe, $\operatorname{arcsin} x$ i $\operatorname{arccos} x$ urywają się na końcach przedziału oznaczoności $-1 \leq x \leq 1$.

Funkcja wykładnicza e^x lub a^x , gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ jest wszędzie ciągła.

Funkcja logarytmiczna $\log x$ (przy dowolnej podstawie dodatniej) jest ciągła dla wszystkich dodatnich wartości x i urywa się przy $x = 0$, przy czym $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ (granica prawostronna).

W przypadku złożonej funkcji elementarnej badanie ciągłości wykonuje się dla tych wartości argumentów, dla których mają nieciągłości funkcje składowe.

Przykład. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji $y = \frac{e^{1/(x-2)}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$.

Wykładnik $1/(x-2)$ ma punkt nieciągłości $x = 2$, przy czym $\lim_{x \rightarrow 2-0} e^{1/(x-2)} = 0$, a $\lim_{x \rightarrow 2+0} e^{1/(x-2)} = \infty$. Mianownik funkcji $f(x)$ jest równy zero w punkcie $x = 0$ i w tych punktach x , w których $\sin \sqrt[3]{1-x} = 0$; punkty te odpowiadają pierwiastkom równania $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$, skąd $x = 1 - n^3\pi^3$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Przy żadnej z tych wartości licznik nie równa się zero, zatem w punktach $x = 0$ oraz $x = 1 - n^3\pi^3$ ma nieciągłość typu punktu E na rys. 273.

Własności funkcji nieciągłych.

1^o Przechodzenie przez zero (*twierdzenie Cauchy'ego*). Jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona i ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ i na końcach tego przedziału wartości $f(a)$ i $f(b)$ mają znaki różne, to między a i b istnieje co najmniej jedna taka wartość c , dla której $f(c)$ jest równe zero:

$$f(c) = 0, \quad \text{gdzie } a < c < b.$$

Sens geometryczny: krzywa ciągła przechodząca z jednej strony osi Ox na drugą, przecina tę oś.

2° **Twierdzenie o wartości średniej.** Jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona i ciągła w pewnym obszarze spójnym i w dwóch punktach a i b ($a < b$) tego obszaru funkcja przybiera różne wartości A i B :

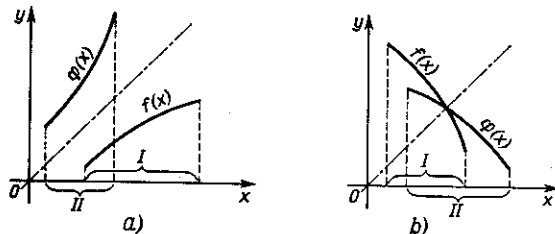
$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad \text{gdzie} \quad A \neq B,$$

to dla każdej liczby C , leżącej między A i B istnieje co najmniej jeden taki punkt c leżący między a i b , że

$$f(c) = C, \quad \text{gdzie} \quad a < c < b \quad \text{oraz} \quad A < C < B \quad \text{lub} \quad A > C > B,$$

tzn. funkcja $f(x)$ przechodzi przez wszystkie pośrednie wartości między A i B .

3° **Istnienie funkcji odwrotnej**⁽¹⁾. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona w pewnym obszarze spójnym I o końcach a i b , i jest w tym obszarze ciągła oraz ściśle rosnąca (lub ściśle malejąca) (patrz str. 353), to dla tej funkcji istnieje funkcja odwrotna $\varphi(x)$ oznaczona w obszarze spójnym II o końcach $f(a)$ i $f(b)$, ciągła w tym obszarze i również ściśle rosnąca (lub ściśle malejąca) (rys. 274a i b).



Rys. 274

4° **Twierdzenie o ograniczoności funkcji.** Jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona i ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, to funkcja ta jest w tym przedziale ograniczona, tzn. istnieją takie dwie liczby m i M , że $m \leq f(x) \leq M$, gdy $a \leq x \leq b$.

5° **Istnienie największej i najmniejszej wartości.** Jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona i ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, to w tym przedziale istnieje co najmniej jeden taki punkt c , że wartość $f(c)$ jest największa ze wszystkich wartości $f(x)$ i co najmniej jeden taki punkt d , że wartość $f(d)$ jest najmniejsza ze wszystkich wartości $f(x)$:

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{i} \quad f(d) \leq f(x), \quad \text{gdzie} \quad a \leq x \leq b.$$

(1) Patrz str. 349, 350.

Różnicę między największą i najmniejszą wartością funkcji ciągłej w danym przedziale nazywamy *wahaniami funkcji* w tym przedziale⁽¹⁾.

6° Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest także jednostajnie ciągła w tym przedziale (patrz niżej).

Ciągłość jednostajna. Funkcję $y = f(x)$ nazywamy *jednostajnie ciągłą* w jej obszarze oznaczoności, jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę η , że dla każdych dwóch punktów x_1, x_2 należących do obszaru oznaczoności funkcji i odległych od siebie mniej niż η , różnica odpowiednich wartości funkcji $f(x_1)$ i $f(x_2)$ będzie co do bezwzględnej wartości mniejsza od ε :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{gdzie} \quad |x_1 - x_2| < \eta.$$

Ciągłość jednostajna oznacza, że dla wszystkich części obszaru oznaczoności funkcji wystarczy jedna i ta sama szerokość pasa η między prostymi pionowymi $x = x_1$ i $x = x_2$, aby odpowiednie wartości funkcji $f(x)$ zawierały się w pasie między dwiema prostymi poziomymi o z góry zadanej szerokości ε .

Funkcja ciągła w danym obszarze nie zawsze jest w tym obszarze jednostajnie ciągła.

7. Funkcje wielu zmiennych

Określenie. Zmienną u nazywamy *funkcją n zmiennych niezależnych* $x, y, z, \dots, t$ (argumentów), określoną w pewnym obszarze oznaczoności, jeżeli każdemu zespołowi wartości zmiennych niezależnych z tego obszaru oznaczoności odpowiada określona wartość zmiennej u .

Oznaczenia: funkcja dwóch zmiennych $u = f(x, y)$, funkcja trzech zmiennych $u = F(x, y, z)$, funkcja n zmiennych $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zespół wartości argumentów $x_1, x_2, \dots, x_n$ należących do obszaru funkcji u nazywamy *punktem* tego obszaru⁽²⁾.

Przykłady. Funkcja dwóch zmiennych $u = f(x, y) = xy^2$ w punkcie $x = 2, y = 3$ przybiera wartość $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Funkcja czterech zmiennych $u = \varphi(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$ w punkcie $x = 3, y = 4, z = 3, t = 1$ przybiera wartość $\varphi(3, 4, 3, 1) = 3 \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$.

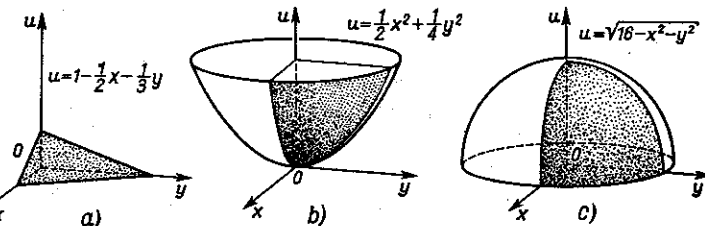
Przedstawienie geometryczne. Przedstawienie zespołu argumentów. Zespół wartości dwóch zmiennych niezależnych x, y może być przedstawiony na płaszczyźnie kartezjańskiej za pomocą punktu P o współrzędnych x, y (patrz str. 255); zespół

(1) Pojęcie wahanía funkcji może być rozszerzone także na funkcje nie mające największej i najmniejszej wartości.

(2) Lub punktem przestrzeni n -wymiarowej.

wartości trzech zmiennych x, y, z może być przedstawiony w przestrzeni kartezjańskiej za pomocą punktu P o współrzędnych x, y, z . Dla zespołu czterech i większej ilości zmiennych niezależnych takie przedstawienie jest niemożliwe; przyjęto jednak przed analogię zespoły o n zmiennych ($x_1, x_2, \dots, x_n$) nazywać *punktami przestrzeni n -wymiarowej* o współrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$. W poprzednim przykładzie zespół liczb (3, 4, 3, 1) wyznaczał punkt przestrzeni czterowymiarowej o współrzędnych $x = 3, y = 4, z = 3, t = 1$. Dlatego też funkcję $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy też *funkcją przestrzeni n -wymiarowej*.

Przedstawienie geometryczne funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$. Podobnie jak funkcja jednej zmiennej $y = f(x)$ wyznacza pewną krzywą, tak funkcja dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ wyznacza pewną powierzchnię (rys. 275) (patrz str. 285). Na przykład funkcja $u = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$ (rys. 276a) przedstawia



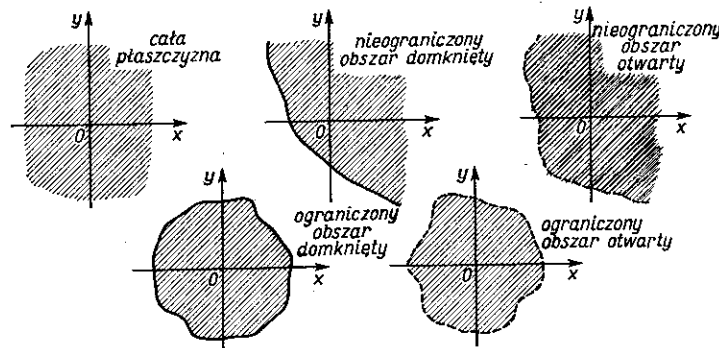
Rys. 276

plaszczynę (patrz str. 286), funkcja $u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ (rys. 276b) przedstawia paraboloidę eliptyczną (patrz str. 297), funkcja $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ (rys. 276c) przedstawia połowę sfery (¹⁾).

Obszarem oznaczoności funkcji jest zbiór tych zespołów wartości argumentów, którym odpowiadają określone wartości funkcji. Te obszary mogą być bardzo rozmaite; najczęściej bada się funkcje o spójnych obszarach oznaczoności.

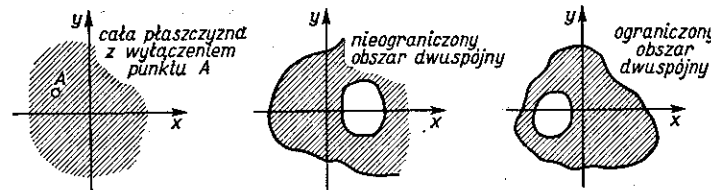
(¹) Funkcje trzech i więcej zmiennych nie mają takiego obrazu geometrycznego. Jednak przez analogię do powierzchni trójwymiarowej wprowadza się pojęcie hiperpowierzchni w przestrzeni n -wymiarowej.

Obszary spójne dwóch zmiennych. Obszary przedstawione na rysunku 277 nazywamy *jednospójnymi* (¹) (do obszarów jednospójnych należy również cała płaszczyzna). Jeżeli wewnątrz rozważanej części płaszczyzny występuje jeden punkt lub jednospójny



Rys. 277

obszar ograniczony, nie należący do obszaru oznaczoności funkcji, to taką część płaszczyzny nazywamy *obszarem dwuspójnym*. Przykłady obszarów dwuspójnych pokazane są na rysunku 278. Podobnie rysunek 279 przedstawia obszary wielospójne.



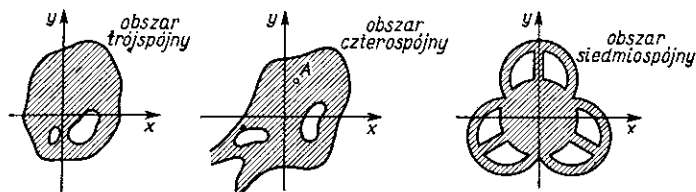
Rys. 278

Obszar na rysunku 280 nie jest spójny.

Obszary spójne trzech zmiennych (najprostsze przypadki): cała przestrzeń lub jej część ograniczona jedną lub kilkoma powierzchniami, przy czym punkty powierzchni mogą należeć lub

(¹) Na rysunku 277 pokazane są najprostsze przypadki obszarów spójnych dwóch zmiennych (obszary zakreskowane), z podaniem ich nazw. Jeśli brzegi obszaru należą do obszaru oznaczoności funkcji, to brzegi te zaznaczone są liniami ciągłymi, a jeżeli nie — liniami przerywanymi.

nie należeć do obszaru oznaczoności; nazwy tych obszarów są analogiczne do nazw podanych na rysunkach 277-279 dla funkcji dwóch zmiennych. Dla funkcji o większej ilości zmiennych można wprowadzić analogiczne obrazy geometryczne w przestrzeni wielowymiarowej.



Rys. 279

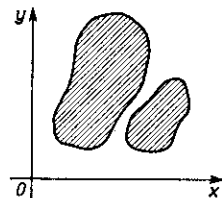
Sposoby określania funkcji. Określenie funkcji za pomocą tablic. Funkcja dwóch zmiennych może być określona za pomocą tablicy jej wartości (za przykład takich tablic służyć mogą tablice wartości całek eliptycznych na str. 93). W takiej tablicy wartości argumentów podawane są w górnym wierszu i w lewej kolumnie, a wartości funkcji znajduje się na przecięciu odpowiednich kolumn i wierszy. Tablicę tego typu nazywamy *tablicą o dwóch wejściach*. Określenie funkcji za pomocą wzorów. Funkcja wielu zmiennych może być określona przy pomocy jednego lub kilku wzorów.

Przykłady. 1. $u = xy^2$,

2. $u = x \ln(y - zt)$,

$$3. u = \begin{cases} x+y & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, \\ x-y & \text{dla } x \geq 0, y < 0, \\ -x+y & \text{dla } x < 0, y \geq 0, \\ -x-y & \text{dla } x < 0, y < 0; \end{cases}$$

ostatnia funkcja może być też napisana w postaci $u = |x| + |y|$.

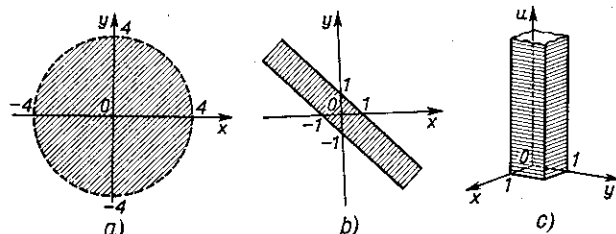


Rys. 280

Obszar istnienia wyrażenia analitycznego (obszar istnienia funkcji). W analizie matematycznej bada się przede wszystkim funkcje określone jednym wzorem, przy czym do obszaru oznaczoności takiej funkcji zalicza się wszystkie te zespoły wartości argumentów, przy których dane wyrażenie analityczne ma sens liczbowy, tzn. przyjmuje określoną, skończoną wartość rzeczywistą. Taki obszar nazywamy *obszarem oznaczoności wyrażenia analitycznego*. Zazwyczaj (jeżeli nie ma dodatkowych ograniczeń), przez *obszar oznaczoności funkcji*, określo-

nej za pomocą jednego wzoru, rozumie się właśnie obszar oznaczoności wzoru, który określa tę funkcję.

Przykłady. 1. $u = x^2 + y^2$; obszar oznaczoności stanowią wszystkie punkty x, y (cała płaszczyzna). 2. $u = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; obszarem oznaczoności są punkty x i y spełniające nierówność $x^2 + y^2 < 16$ (obszar otwarty, wewnątrz koła, rysunek 281a). 3. $u = \arcsin(x+y)$; obszarem oznaczoności są punkty x, y spełniające nierówność $-1 \leq x+y \leq 1$ (obszar domknięty pasa między prostymi równoległymi



Rys. 281

$x+y = -1$ i $x+y = 1$, rysunek 281b). 4. $u = \arcsin(2x-1) + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{y} + \ln z$; obszarem oznaczoności są punkty x, y, z spełniające nierówności: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z > 0$ (wszystkie punkty przestrzeni znajdujące się ponad kwadratem o boku równym 1; obszar domknięty w postaci prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ograniczony po bokach płaszczyznami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ i od dołu płaszczyzną $z = 0$, rysunek 281c).

Podstawowe postacie analitycznego określania funkcji.

Funkcja wielu zmiennych może być wyrażona w jednej z następujących postaci: 1° w postaci *jawnej*, gdy funkcja jest wyrażona przez argumenty za pomocą wzoru $u = f(x, y, z, \dots, t)$; 2° w postaci *uwikłanej*, gdy argumenty i funkcja są związane równaniem $F(x, y, z, \dots, t) = 0$; 3° w postaci *parametrycznej*, gdy argumenty $x_1, x_2, \dots, x_n$ i funkcja u są wyrażone w sposób jawny za pomocą n nowych zmiennych (parametrów); np. funkcja $u = f(x, y)$ może być wyrażona parametrycznie $x = \varphi_1(r, s)$, $y = \varphi_2(r, s)$, $u = \varphi(r, s)$; podobnie dla funkcji trzech zmiennych $u = \varphi(x, y, z)$ piszemy $x = \varphi_1(r, s, t)$, $y = \varphi_2(r, s, t)$, $z = \varphi_3(r, s, t)$, $u = \varphi(r, s, t)$.

Funkcje jednorodne wielu zmiennych są to funkcje $f(x, y, z, \dots, t)$ spełniające następujący warunek:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots, \lambda t) = \lambda^n f(x, y, z, \dots, t),$$

gdzie λ jest dowolną liczbą różną od zera. Liczbę n nazywamy *stopniem jednorodności funkcji*. Na przykład funkcja $u = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}}$ jest jednorodna stopnia $n = 2$, a funkcja $u = \frac{x+z}{2x-3y}$ jest jednorodna stopnia $n = 0$.

Dla funkcji jednorodnej $u = f(x, y, z, \dots, t)$ zachodzi *twierdzenie Eulera*

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + t \frac{\partial f}{\partial t} = n f(x, y, \dots, t).$$

Zależność między funkcjami wielu zmiennych. Dwie jednoznaczne funkcje dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$ określone w pewnym wspólnym obszarze oznaczoności nazywamy *zależnymi*, jeżeli jedna z nich może być przedstawiona jako funkcja drugiej: $u = F(v)$, tzn. że dla każdego punktu obszaru oznaczoności zachodzi tożsamość

$$f(x, y) = F(\varphi(x, y)), \quad \text{lub ogólnie} \quad \Phi(f, \varphi) = 0,$$

natomiast funkcje $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$ nazywamy *niezależnymi*, jeżeli wymienione funkcje F lub Φ nie istnieją. Na przykład dwie funkcje $u = (x^2 + y^2)^2$ i $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ określone we wspólnym obszarze oznaczoności $x^2 + y^2 \geq 0$ są zależne, gdyż $u = v^4$, czyli $u - v^4 = 0$.

Analogicznie m funkcji $u_1, u_2, \dots, u_m$ n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ określonych we wspólnym obszarze oznaczoności nazywamy *zależnymi*, jeżeli jedną z nich (którkolwiek) można przedstawić jako funkcję pozostałych, tzn. jeżeli dla każdego punktu obszaru oznaczoności zachodzi tożsamość

$$u_i = F(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m) \quad \text{lub} \quad \Phi(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0,$$

natomiast jeżeli taka funkcja F lub Φ nie istnieje, to dane funkcje $u_1, u_2, \dots, u_m$ nazywamy *niezależnymi*. Na przykład trzy funkcje n zmiennych

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad v = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

$$w = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

określone w całej przestrzeni n -wymiarowej są zależne, gdyż $v = u^2 - 2w$.

Analityczny warunek niezależności dwóch funkcji $u = f(x, y)$ i $v = \varphi(x, y)$; *jacobian* tych funkcji

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{oznaczony symbolem} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \quad \text{lub} \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

nie jest w rozważanym obszarze tożsamościowo równy zeru. Kryterium powyższe uogólnia się na przypadki n funkcji takiej samej ilości n zmiennych

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0.$$

W przypadku gdy liczba m funkcji $u_1, u_2, \dots, u_m$ jest mniejsza niż liczba n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, funkcje te są niezależne, jeżeli chociaż jeden wyznacznik stopnia m macierzy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera. Liczba niezależnych funkcji jest w tym przypadku równa rzędowi μ powyższej macierzy ⁽¹⁾, przy czym niezależne będą właśnie te funkcje, których pochodne są elementami wyznacznika stopnia μ nie równego tożsamościowo zeru.

Jeżeli $m > n$, to funkcji niezależnych może być nie więcej niż n spośród danych m funkcji.

Granica funkcji wielu zmiennych ⁽²⁾. Mówimy, że funkcja dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ ma *granicę* A w punkcie $x = a, y = b$ i piszemy $A = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, jeżeli przy zbliżaniu się punktu

(x, y) do punktu (a, b) w dowolny sposób, funkcja $f(x, y)$ zbliża się do liczby A dowolnie blisko. W samym punkcie $P(a, b)$ funkcja $f(x, y)$ może różnić się od wartości A , a nawet może być nieoznaczona.

Ścisłe sformułowanie: $A = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, jeżeli dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką dodatnią liczbę

⁽¹⁾ O rzędzie macierzy patrz str. 189.

⁽²⁾ Rozważa się tu funkcje określone w obszarze spójnym (patrz str. 368 i 369).

η , że dla dowolnych, wzajemnie niezależnych wartości x i y zawartych w przedziałach $a-\eta < x < a+\eta$ i $b-\eta < y < b+\eta$ (rys. 282), odpowiednio wartości $f(x, y)$ zawierać się będą w przedziale $A-\varepsilon < f(x, y) < A+\varepsilon$.

Pojęcie granicy funkcji wielu zmiennych $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ określa się analogicznie.

Kryteria istnienia granicy rozpatrzone dla jednej zmiennej (sprowadzenie do granicy ciągu, kryterium Cauchy'ego patrz str. 355) można analogicznie rozszerzyć także na funkcje wielu zmiennych.

Granice iterowane. Jeżeli dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ znajdziemy najpierw granicę $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, przy

stałej wartości y , i dla otrzymanego wyrażenia, które jest funkcją y znajdziemy granicę przy $y \rightarrow b$, to otrzymamy liczbę

$$B = \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)]$$

nazywamy *granicą iterowaną*. Zmieniając porządek przechodzenia do granicy otrzymujemy drugą granicę iterowaną

$$C = \lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)].$$

W ogólnym przypadku $B \neq C$ (jeżeli nawet obie granice istnieją), na przykład dla funkcji $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, gdy $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ mamy $B = -1$, $C = 1$.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma granicę $A = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, to $B = C = A$, jednak z równości granic iterowanych nie wynika istnienie granicy A .

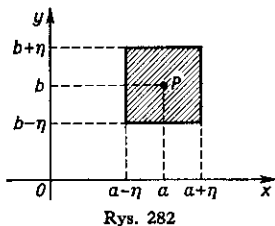
Funkcje ciągłe wielu zmiennych. Określenie. Funkcję dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ nazywamy *ciągłą w punkcie* $P(a, b)$, jeżeli:

1° punkt $P(a, b)$ należy do obszaru oznaczoności funkcji;

2° istnieje granica $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$; granica ta równa się wartości funkcji $f(x, y)$ w punkcie $P(a, b)$, tzn. $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Jeżeli granica ta nie istnieje, funkcja $f(x, y)$ jest nieciągła w punkcie $P(a, b)$.

Jeżeli funkcja jest oznaczona i ciągła w każdym punkcie należącym do danego obszaru spójnego, to funkcję taką nazywamy *ciągłą w danym obszarze*.



Analogicznie określa się ciągłość funkcji wielu zmiennych.

Ciągłość jednostajną funkcji wielu zmiennych w pewnym obszarze spójnym określa się tak samo jak dla funkcji jednej zmiennej (str. 367). Na przykład funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ jest ciągła jednostajnie w danym obszarze oznaczoności, jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką dodatnią liczbę η , że dla dwóch dowolnie obranych punktów $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ spełniających warunki $|x_1 - x_2| < \eta$, $|y_1 - y_2| < \eta$, różnice odpowiednich wartości funkcji będą co do bezwzględnej wartości mniejsze od ε :

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Funkcja ciągła w danym obszarze nie zawsze jest w tym obszarze ciągła jednostajnie.

Własności funkcji ciągłych wielu zmiennych.

1° *Przechodzenie przez zero (twierdzenie Cauchy'ego).* Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest oznaczona i ciągła w pewnym obszarze spójnym, i w dwóch punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ tego obszaru ma znaki różne, to w tym obszarze istnieje co najmniej jeden taki punkt $P_3(x_3, y_3)$, w którym funkcja $f(x, y)$ jest równa zero:

$$f(x_3, y_3) = 0, \text{ jeżeli } f(x_1, y_1) > 0 \text{ i } f(x_2, y_2) < 0.$$

2° *Twierdzenie o wartości średniej.* Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest oznaczona i ciągła w pewnym obszarze spójnym i w dwóch punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_3(x_3, y_3)$ tego obszaru funkcja ta przybiera różne wartości A i B , $F(x_1, y_1) = A$, $F(x_3, y_3) = B$, $A \neq B$, to dla każdej liczby C leżącej między A i B istnieje w rozważanym obszarze co najmniej jeden taki punkt $P_2(x_2, y_2)$, że

$$f(x_2, y_2) = C, \text{ gdzie } A < C < B \text{ lub } B < C < A.$$

3° *Twierdzenie o ograniczoności funkcji.* Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest oznaczona i ciągła w obszarze domkniętym, to funkcja ta jest w tym obszarze ograniczona, tzn. istnieją takie dwie liczby m i M , że dla każdego punktu $P(x, y)$ należącego do obszaru zachodzą nierówności

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

4° *Istnienie wartości największej i najmniejszej.* Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest oznaczona i ciągła w obszarze domkniętym ograniczonym, to w obszarze tym istnieje co najmniej jeden taki punkt $P'(x', y')$, że wartość $f(x', y')$ jest największa ze wszystkich wartości $f(x, y)$, którą funkcja przybiera w tym obszarze i co najmniej jeden taki punkt $P''(x'', y'')$, że wartość $f(x'', y'')$ jest naj-

mniejsza ze wszystkich wartości $f(x, y)$, które funkcja przybiera w tym obszarze:

$$f(x', y') \geq f(x, y) \geq f(x'', y''),$$

dla dowolnego punktu $P(x, y)$ należącego do danego obszaru.

5° Funkcja ciągła w ograniczonym obszarze domkniętym jest w tym obszarze ciągła jednostajnie (1).

8. Szeregi liczbowe

Określenie. Wyrażenie postaci

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tworzą ciąg nieskończony (patrz str. 343) nazywamy **szeregiem liczbowym**. Wyraz a_n nazywamy **wyrazem ogólnym szeregu**. Sumy $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazywamy **sumami częściowymi szeregu**.

Jeżeli ciąg sum częściowych $S_1, S_2, \dots, S_n$ ma granicę (gdy $n \rightarrow \infty$) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, to szereg nazywamy **zbieżny**, a liczbę S nazywamy

sumą szeregu i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Jeżeli zaś taka granica nie istnieje, to szereg jest **rozbieżny**; w tym przypadku wielkość S_n może wzrastać

nieograniczenie ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$) lub oscylować. Warunkiem

koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu jest więc warunek istnienia granicy ciągu $S_1, S_2, \dots, S_n$, gdy $n \rightarrow \infty$ (patrz str. 345).

Przykłady. Szereg

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

jest zbieżny (postęp geometryczny).

Szeregi

$$(2) \quad 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ (szereg harmoniczny),}$$

$$(4) \quad 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

są rozbieżne. Dla szeregów (2) i (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$; szereg (4) jest oscylacyjny.

Resztą R_n szeregu zbieżnego $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ nazywamy różnicę między jego sumą S , a wartością liczbową sumy częściowej S_n :

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots$$

(1) Patrz str. 374.

Podstawowe twierdzenia o zbieżności szeregów:

1° Odrzucenie skończonej ilości wyrazów początkowych szeregu lub napisanie na początku szeregu skończonej ilości wyrazów nie wpływa na zbieżność czy rozbieżność szeregu.

2° Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego zostaną pomnożone przez ten sam czynnik c , to szereg pozostanie zbieżny, a jego suma zostanie pomnożona przez c .

3° Szeregi zbieżne można dodawać i odejmować wyraz po wyrazie: ze zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ o sumie S_1 i szeregu $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ o sumie S_2 wynika, że szereg $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$ jest zbieżny i ma sumę $S_1 \pm S_2$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu: bezwzględna wartość a_n wyrazu szeregu dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Warunek ten

nie jest wystarczający, na przykład w szeregu harmonicznym (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

Zasada porównywania szeregów o wyrazach dodatnich. Jeżeli dwa szeregi

$$(A) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$(B) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

mają wyrazy dodatnie i począwszy od pewnego n zachodzi nierówność $a_n \geq b_n$, to ze zbieżności szeregu (A) wynika zbieżność szeregu (B), a z rozbieżności szeregu (B) wynika rozbieżność szeregu (A).

Przykłady. Szereg

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

jest zbieżny, bo dla $n \geq 2$ wyrazy szeregu (5) są mniejsze od wyrazów szeregu (1), mianowicie $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2^{n-1}}$ dla $n \geq 2$, a szereg (1) jest zbieżny.

Szereg

$$(6) \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

jest rozbieżny, bo począwszy od $n = 2$ wyrazy szeregu (6) są większe od wyrazów szeregu (3), mianowicie $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ dla $n \geq 2$, a szereg (3) jest rozbieżny.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Kryterium d'Alemberta. Jeżeli dla szeregu $a_1 + a_2 + \dots$

$\dots + a_n + \dots$ wszystkie stosunki $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ począwszy od pewnego n są

mniejsze od pewnej liczby $q < 1$, to szereg jest zbieżny; jeżeli zaś wszystkie te stosunki począwszy od pewnego n są większe od pewnej liczby $Q > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Wniosek. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to szereg jest zbieżny, gdy $q < 1$ i rozbieżny, gdy $q > 1$. Przy $q = 1$ kryterium nie daje rozstrzygnięcia: szereg może być zbieżny albo rozbieżny.

Przykłady. 1. Dla szeregu

$$(7) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, zatem szereg (7) jest zbieżny.

2. Dla szeregu

$$\frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2} + \dots$$

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2} \right) = 1$ i kryterium d'Alemberta nie daje rozstrzygnięcia.

Kryterium Cauchy'ego. Jeżeli dla szeregu $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ wszystkie liczby $\sqrt[n]{a_n}$ począwszy od pewnego n są mniejsze od pewnej liczby $q < 1$, to szereg jest zbieżny; jeżeli zaś wszystkie te liczby począwszy od pewnego n są większe od pewnej liczby $Q > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Wniosek. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, to szereg jest zbieżny, gdy $q < 1$, i rozbieżny, gdy $q > 1$; gdy $q = 1$ kryterium nie daje rozstrzygnięcia. Na przykład dla szeregu

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots$$

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$; zatem szereg (9)

jest zbieżny.

Kryterium całkowe. Szereg o wyrazie ogólnym $a_n = f(n)$ jest zbieżny, jeżeli $f(x)$ jest funkcją monotonicznie malejącą i całka

niewłaściwa $\int_c^\infty f(x) dx$ (patrz str. 502) jest zbieżna; natomiast jeżeli całka ta jest rozbieżna, to szereg o wyrazie ogólnym $f(n)$ jest rozbieżny. Przy tym dolną granicę całkowania c należy tak obrać, żeby funkcja $f(x)$ w przedziale $c < x < \infty$ była oznaczona i nie miała punktów nieciągłości. Na przykład dla szeregu (8) mamy

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int_c^\infty \frac{x+1}{x^2} dx = \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_c^\infty = \infty;$$

całka jest rozbieżna, a więc i szereg (8) jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa. Jest rzeczą dogodną jednocześnie z szeregiem

$$(A) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

którego wyrazy mają znaki niejednakowe, rozważać szereg

$$(B) \quad |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots,$$

utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu (A).

Jeżeli szereg (B) jest zbieżny, to i szereg (A) jest zbieżny; wówczas szereg (A) nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*. Jeżeli zaś szereg (B) jest rozbieżny, to szereg (A) może być rozbieżny albo też zbieżny i wówczas nazywamy go *zbieżnym warunkowo*. Na przykład szereg

$$(10) \quad \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \dots + \frac{\sin na}{2^n} + \dots,$$

gdzie a jest dowolną liczbą stałą, jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg o wyrazie ogólnym $\left| \frac{\sin na}{2^n} \right|$ jest zbieżny; jest to widoczne z porównania tego szeregu z szeregiem (1):

$$\left| \frac{\sin na}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Szereg

$$(11) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

jest zbieżny warunkowo (patrz str. 380, twierdzenie Leibniza), gdyż szereg (3) o wyrazie ogólnym $|a_n| = 1/n$ jest rozbieżny.

Własności szeregów bezwzględnie zbieżnych.

¹⁰ W szeregu bezwzględnie zbieżnym można dowolnie przestawiać wyrazy i przy tym suma szeregu nie ulegnie zmianie. Natomiast zmie-

nając porządek wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego (w taki sposób, że ulegnie przestawieniu nieskończenie wiele wyrazów szeregu) można zmienić jego sumę czyniąc ją równą dowolnej liczbie (*twierdzenie Riemanna*), a nawet uczynić szereg rozbieżnym.

2° Szeregi bezwzględnie zbieżne można nie tylko dodawać i odejmować wyraz po wyrazie (patrz str. 377), ale także mnożyć jak zwykłe wielomiany przedstawiając wynik w postaci szeregu, np. w sposób następujący:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots)(b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + \dots + a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n + \dots$$

Jeżeli $\sum a_n = S_a$ i $\sum b_n = S_b$, to suma szeregu otrzymanego w wyniku mnożenia tych szeregów równa jest iloczynowi $S_a S_b$ (1).

Szeregi przemienne. Szereg $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ są liczbami dodatnimi, nazywamy *szeregiem przemianym*. Dla zbieżności szeregu przemianego wystarcza spełnienie dwóch warunków

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

2. $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ (*twierdzenie Leibniza*). Na przykład szereg (11) jest przemianym zbieżny.

Oszacowanie reszty szeregu przemianego. Jeżeli ograniczymy się w szeregu przemianym, zbieżnym do n początkowych wyrazów, to reszta $R_n = S - S_n$ ma taki znak, jak pierwszy z odrzuconych wyrazów i jest co do bezwzględnej wartości od niego mniejsza:

$$|S - S_n| < |a_{n+1}|.$$

Na przykład w szeregu (1), którego suma wynosi $\ln 2$, reszta R_n spełnia nierówność $|\ln 2 - S_n| < \frac{1}{n+1}$.

Tablica sum pewnych szeregów liczbowych

$$1. 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e,$$

$$2. 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \pm \dots = \frac{1}{e},$$

$$3. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \pm \dots = \ln 2.$$

(1) Jeżeli dwa szeregi $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ i $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ są zbieżne i przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to szereg otrzymany w wyniku ich mnożenia jest zbieżny, chociaż niekoniecznie bezwzględnie zbieżny.

$$4. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2,$$

$$5. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \pm \dots = \frac{2}{3},$$

$$6. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \pm \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$7. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

$$8. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots = \frac{1}{2},$$

$$9. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \dots = \frac{3}{4},$$

$$10. \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8},$$

$$11. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots = \frac{1}{4},$$

$$12. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (l+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot \dots \cdot (n+l-1)} + \dots = \frac{1}{(l-1)(l-1)!},$$

$$13. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$14. 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12},$$

$$15. \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$16. 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$17. 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} \pm \dots = \frac{7\pi^4}{720},$$

$$18. \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

Liczby Bernoulliego B_k

$$19. 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots + \frac{1}{n^{2k}} + \dots = \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_k,$$

$$20. 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}} \pm \dots = \frac{\pi^{2k} (2^{2k-1} - 1)}{(2k)!} B_k,$$

$$21. 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + \dots = \frac{\pi^{2k} (2^{2k-1} - 1)}{2 \cdot (2k)!} B_k,$$

Tablica początkowych liczb Bernoulliego

k	B_k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174\,611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854\,513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43\,867}{798}$		

Liczby Eulera E_k

$$22. 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^{2k+1}} \pm \dots = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2} (2k)!} E_k.$$

Tablica początkowych liczb Eulera

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50 521
2	5	6	2 702 765
3	61	7	199 360 981
4	1385		

U w a g a. Niektórzy autorzy przyjmują inne oznaczenia dla liczb Bernoulliego i Eulera:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad \dots,$$

$$E_1 = 0, \quad E_2 = -1, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 5, \quad E_5 = 0, \quad E_6 = -61, \\ E_7 = 0, \quad E_8 = 1385, \quad \dots$$

9. Szeregi funkcyjne

Określenia. Szereg utworzony z funkcji jednej i tej samej zmiennej x , np. szereg

$$(1) \quad f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

nazywamy *szeregiem funkcyjnym*. Wszystkie te wartości $x = a$, które należą do wspólnego obszaru oznaczoności wszystkich funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... i dla których szereg liczbowy

$$f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_n(a) + \dots$$

jest zbieżny, tj. dla których istnieje granica sum częściowych $S_n(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = S(a)$$

stanowi obszar zbieżności szeregu funkcyjnego (1). Funkcję $S(x)$ nazywamy *sumą szeregu funkcyjnego* zbieżnego (1) i mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny* do funkcji $S(x)$. Sumę $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, czyli sumę n początkowych wyrazów szeregu (1), nazywamy *n -tą sumą częściową* tego szeregu, a różnicę między sumą $S(x)$ szeregu funkcyjnego zbieżnego i jego sumą częściową $S_n(x)$ nazywamy *resztą szeregu* (1) i oznaczamy przez $R_n(x)$:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x) + \dots$$

Jednostajna i niejednostajna zbieżność szeregu. Zgodnie z określeniem granicy ciągu liczbowego (str. 344) szereg (1) jest zbieżny w danym obszarze, jeżeli dla dowolnie małej liczby dodatniej ε można wskazać taką naturalną liczbę N , że $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ dla $n > N$; przy tym dla szeregów funkcyjnych mogą zachodzić dwa przypadki:
1° Można znaleźć liczbę N wspólną dla wszystkich wartości x należących do obszaru zbieżności szeregu; w tym przypadku szereg (1) nazywamy *szeregiem jednostajnie zbieżnym* w danym obszarze.

2° Może się zdarzyć, że taka liczba N wspólna dla wszystkich x

nieających do obszaru zbieżności szeregu nie istnieje, tzn. dla każdej liczby n można znaleźć w obszarze zbieżności taką liczbę x , że $|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$; w tym przypadku mówimy, że szereg (1) jest w danym obszarze zbieżny *niejednostajnie*.

Przykłady. 1. Szereg

$$(*) \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

jest zbieżny przy wszystkich wartościach x ; jego suma równa się e^x (patrz str. 418). Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w dowolnym ograniczonym obszarze wartości x . Istotnie, przy $|x| < a$, mamy

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right|^{(1)} < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a,$$

ale wyrażenie $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$ przy dostatecznie wielkiej (nie zależącej od x) wartości n można uczynić mniejszym od ε , gdyż $(n+1)!$ rośnie szybciej niż a^{n+1} . Natomiast na całej osi liczbowej szereg ten jest zbieżny *niejednostajnie*, gdyż dla każdego n można znaleźć takie x , że $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right|$ będzie większe od z góry danej wielkości ε .

2. Szereg

$$(**) \quad x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots + x(1-x)^n + \dots$$

jest zbieżny przy wszystkich wartościach x w przedziale domkniętym $\langle 0, 1 \rangle$, ponieważ według wniosku z kryterium d'Alemberta (patrz str. 377) mamy

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |1-x| < 1 \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1$$

(a przy $x = 0$, mamy $S = 0$). Ale zależność ta jest *niejednostajna*; istotnie dla każdej liczby n można znaleźć takie małe x , że $(1-x)^{n+1}$ będzie dowolnie bliskie liczby 1, tj. nie będzie mniejsze od ε . Natomiast w obszarze $a \leq x \leq 1$, gdzie $0 < a < 1$, szereg jest zbieżny *jednostajnie*.

Kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregów. Szereg

$$(1) \quad f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

jest jednostajnie zbieżny w danym obszarze, jeżeli istnieje taki zbieżny szereg liczbowy

$$(2) \quad c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

⁽¹⁾ Według wzoru na resztę szeregu Maclaurina, patrz str. 414.

że dla wszystkich wartości x leżących w tym obszarze zachodzi nierówność

$$|f_n(x)| \leq c_n.$$

W tym przypadku szereg (2) nazywamy *majorantą* szeregu (1).

Przykład. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ są jednostaj-

nie zbieżne w dowolnym obszarze, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest w tym obszarze bezwzględnie zbieżny, gdyż $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$ oraz $|a_n \sin nx| \leq |a_n|$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Własności szeregów jednostajnie zbieżnych.

1° Jeżeli $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... są funkcjami ciągłymi w pewnym obszarze ich oznaczonej i szereg $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ jest jednostajnie zbieżny w tym obszarze, to jego suma $S(x)$ jest także funkcją ciągłą w tym obszarze. Jeżeli zaś powyższy szereg jest zbieżny *niejednostajnie* w pewnym obszarze ograniczonym, to jego suma $S(x)$ może być w tym obszarze nieciągła. W rozważanym wyżej przykładzie (**) suma szeregu jest nieciągła, gdyż $S(x)$ przy $x = 0$ ma wartość 0, a gdy $0 < x \leq 1$ suma $S(x)$ ma wartość 1; w przykładzie (*) funkcja e^x jest ciągła, gdyż wprawdzie szereg jest zbieżny *niejednostajnie*, ale dotyczy to nie obszaru skończonego, lecz całej nieskończonej prostej liczbowej.

2° Szereg jednostajnie zbieżny można całkować w danym obszarze wyraz po wyrazie i suma całek wszystkich wyrazów szeregu jest równa całce sumy danego szeregu.

Szeregi potęgowe. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$(A) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

lub postaci

$$(B) \quad a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots,$$

gdzie a_i ($i = 1, 2, \dots$) są stałymi współczynnikami.

Podstawowe własności szeregów potęgowych.

1° Szereg (A) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości x spełniających warunek $|x| < \varrho$, gdzie ϱ jest pewną liczbą dodatnią zwaną *promieniem zbieżności* szeregu. Szereg (B) jest bezwzględnie

zbieżny dla wszystkich wartości x spełniających nierówność $|x-a| < \varrho$, gdzie ϱ jest promieniem zbieżności. Promień zbieżności ϱ można wyznaczyć według wzorów

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\varrho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (1).$$

Na końcach obszaru zbieżności (dla szeregu (A) w punktach $x = \varrho$ i $x = -\varrho$, a dla szeregu (B) w punktach $x = a + \varrho$ i $x = a - \varrho$) szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

2° Jeżeli szereg (A) jest zbieżny dla dodatniej wartości $x = x_1$, to jest on jednostajnie zbieżny wewnątrz przedziału $-x_1 + \varepsilon < x < x_1$, gdzie $\varepsilon > 0$ (twierdzenie Abela).

Przykład. Dla szeregu $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ mamy

$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, tzn. $\varrho = 1$, i szereg jest bezwzględnie zbieżny wewnątrz przedziału $-1 < x < 1$, przy czym dla $x = -1$ szereg jest warunkowo zbieżny (patrz szereg (11) na str. 379), a dla $x = 1$ szereg jest rozbieżny (patrz szereg (3) na str. 376). Według twierdzenia Abela szereg ten jest jednostajnie zbieżny w przedziale $-x_1 \leq x \leq x_1$, gdzie x_1 jest dowolną liczbą zawartą między 0 i 1.

Tablica początkowych wyrazów niektórych potęg szeregu potęgowego

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \dots$$

$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \dots,$$

$$\sqrt{S} = S^{1/2} = a^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \left(\frac{1}{2} \frac{c}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} \right) x^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{d}{a} - \frac{1}{4} \frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \left(\frac{1}{2} \frac{e}{a} - \frac{1}{4} \frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16} \frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = S^{-1/2} = a^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \left(\frac{3}{8} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{a} \right) x^2 + \left(\frac{3}{4} \frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{a} - \frac{5}{16} \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \left(\frac{3}{4} \frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{e}{a} - \frac{15}{16} \frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128} \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

(1) W przypadkach gdy granice te nie istnieją, w powyższych wzorach zamiast $\lim$ należy wziąć $\lim \sup$.

$$\frac{1}{S} = S^{-1} = a^{-1} \left[1 - \frac{b}{a} x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right) x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3 \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right],$$

$$\frac{1}{S^2} = S^{-2} = a^{-2} \left[1 - 2 \frac{b}{a} x + \left(3 \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{c}{a} \right) x^2 + \left(6 \frac{bc}{a^2} - 2 \frac{d}{a} - 4 \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \left(6 \frac{bd}{a^2} + 3 \frac{c^2}{a^2} - 2 \frac{e}{a} - 12 \frac{b^2c}{a^3} + 5 \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

Odwroćenie szeregu potęgowego. Jeżeli dany jest szereg

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \dots, \quad \text{gdzie } a \neq 0,$$

to funkcję odwrotną można napisać w postaci szeregu

$$x = \varphi(y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \dots,$$

w którym współczynniki są następujące:

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a^2}, \quad C = \frac{1}{a^3} (2b^2 - ac), \quad D = \frac{1}{a^4} (5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^5} (6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^6} (7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5).$$

Rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe patrz str. 413, a rozwinięcia w szeregi trygonometryczne patrz str. 759.

II. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

1. Pojęcia podstawowe

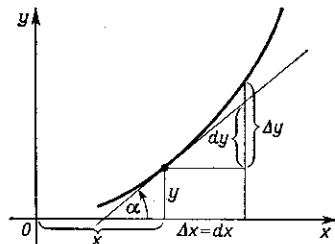
Pochodna funkcji jednej zmiennej ⁽¹⁾. Pochodna funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$, oznaczana symbolami: y' , y'' , Dy , $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $Df(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ jest to nowa funkcja zmiennej x , równa przy każdej wartości x granicy stosunku przyrostu funkcji Δy do odpowiadającego mu przyrostu zmiennej niezależnej Δx , gdy Δx dąży do zera:

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Obliczanie pochodnej $f'(x)$ nazywamy *różniczkowaniem* danej funkcji $f(x)$.

Interpretacja geometryczna pochodnej. Jeżeli wykresem funkcji $y = f(x)$ w układzie współrzędnych prostokątnych jest pewna krzywa (rys. 283), to wartość pochodnej $f'(x)$ w danym punkcie (tzn. przy danej wartości x) równa się $\operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem między osią Ox i styczną do krzywej w danym jej punkcie; kąt ten liczy się od dodatniego kierunku osi Ox w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara ⁽²⁾.

Istnienie pochodnej. Pochodna $f'(x)$ istnieje przy tych wartościach zmiennej niezależnej x , przy których 1° funkcja $f(x)$ jest oznaczona i ciągła, 2° istnieje granica określona wzorem (1).

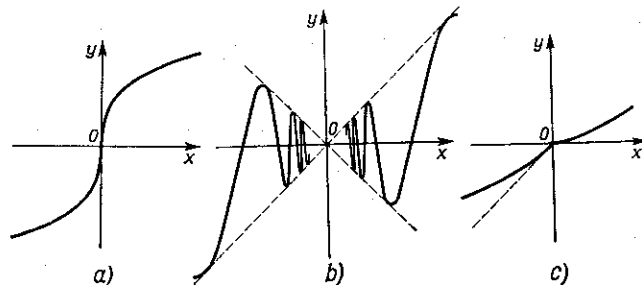


Rys. 283

⁽¹⁾ W rozdziale tym rozważane są jedynie funkcje jednoznaczne zmiennej rzeczywistej.

⁽²⁾ Wzór $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ jest prawdziwy tylko w tym przypadku, gdy jednostka miary na osiach Ox i Oy jest ta sama.

Nieistnienie pochodnej w danym punkcie x_1 wskazuje na to, że w odpowiednim punkcie wykresu funkcji bądź nie ma określonej stycznej, bądź styczna tworzy z osią kąt równy 90° . W ostatnim przypadku granica funkcji (1) jest nieskończona. Oznacza się to (nieściśle) w postaci $f'(x_1) = \infty$ (pochodna staje się nieskończenie wielka).



Rys. 284

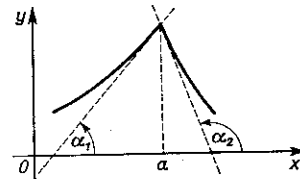
Przykłady nieistnienia pochodnej w danym punkcie.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $f'(0) = \infty$, w punkcie 0 pochodna staje się nieskończenie wielka (rys. 284a).

2. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, granica (1) w punkcie $x = 0$ nie istnieje (rys. 284b).

3. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$, granica (1) w punkcie $x = 0$ nie istnieje, ale granica lewostronna $f'(-0) = 1$ i granica prawostronna $f'(+0) = 0$. W tym przypadku mówimy, że punkt $x = 0$ jest *punktem kątowym* krzywej (rys. 284c).

Pochodna lewostronna i prawostronna. Jeżeli przy danej wartości $x = a$ nie ma granicy (1), lecz istnieje granica lewostronna i granica prawostronna (podobnie, jak w przykładzie 3, rys. 284c), to granice te nazywamy odpowiednio *pochodną lewostronną* i *pochodną prawostronną* w danym punkcie x . Interpretacja geometryczna takich pochodnych: $f'(a-0) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $f'(a+0) = \operatorname{tg} \alpha_2$ (rys. 285); krzywa ma punkt kątowy.



Rys. 285

Funkcje elementarne mają pochodną w całym obszarze oznaczoności z wyjątkiem poszczególnych punktów, w których mogą zachodzić przypadki podanych rodzajów (rys. 284a, b, c).

Pochodna cząstkowa. Pochodną cząstkową funkcji wielu zmiennych $u = f(x, y, z, \dots, t)$ względem jednej z tych zmiennych, na przykład względem x , oznaczoną symbolami $\frac{\partial u}{\partial x}$, u'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x określa wzór

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x};$$

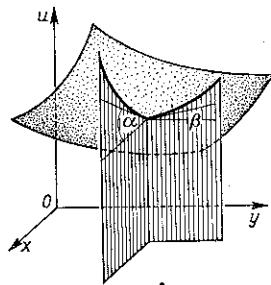
w tym przypadku przyrost otrzymuje tylko jedna ze zmiennych niezależnych. Funkcja n zmiennych ma n pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial t}$. Pochodną cząstkową względem danej zmiennej oblicza się zgodnie z zasadami różniczkowania funkcji jednej zmiennej (patrz str. 394 - 396), przy czym pozostałe zmienne niezależne uważa się w danym przypadku za stałe. Na przykład

$$u = \frac{x^2 y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}.$$

Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej funkcji dwóch zmiennych. Jeżeli funkcja $u = f(x, y)$ jest przedstawiona w układzie współrzędnych prostokątnych powierzchnią, to $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α oznacza kąt między dodatnim kierunkiem osi Ox a styczną do przecięcia powierzchni w danym jej punkcie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny Oxu (kąt odmierzamy od osi Ox w kierunku dodatnim, zgodnie z obiegiem wskazówek zegara, gdy na kąt patrzymy od dodatniej strony osi Oy). Podobnie $\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ (przy czym β odmierzamy się od osi Oy w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara) (rys. 286, na rysunku tym oba kąty α i β są dodatnie).

Pochodna w danym kierunku i pochodna objętościowa patrz w teorii pola (str. 666 i 674).

Różniczki. Różniczki zmiennych x, y itd. (oznacza się: dx, dy itd.) określa się różnie, w zależności od tego, czy dana zmienna jest zmienną niezależną czy funkcją. Różniczką zmiennej niezależnej x jest jej przy-



Rys. 286

rost Δx , któremu można nadać dowolną wartość (dodatnią lub ujemną), a więc $dx = \Delta x$. Różniczką dy funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie x nazywamy iloczyn pochodnej $f'(x)$ przez różniczkę dx (czyli przez dowolny przyrost Δx zmiennej x) i piszemy

$$dy = f'(x)dx.$$

Interpretacja geometryczna różniczki. Przy przedstawieniu funkcji $y = f(x)$ w układzie współrzędnych prostokątnych obrazem różniczki dy jest przyrost, jaki otrzymuje rzędna stycznej do wykresu funkcji w punkcie x przy danym przyroście odciętej dx (patrz rys. 283 na str. 388).

Podstawowe własności różniczki.

1. **Niezmienniczość.** Równanie $dy = f'(x)dx$ pozostaje prawdziwe niezależnie od tego, czy x jest zmienną niezależną, czy też funkcją nowej zmiennej t .

2. **Rząd nieskończenie małych.** Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma w danym punkcie x pochodną skończoną $f'(x)$, to stosunek przyrostu funkcji $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ do jej różniczki $dy = f'(x)dx$ (gdzie $dx = \Delta x$) dąży do 1, gdy $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Mówimy, że gdy $\Delta x \rightarrow 0$, to Δy i dy są nieskończenie małymi tego samego rzędu co Δx , a różnica $\Delta y - dy$ jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż Δx . Własność ta pozwala przy obliczaniu małych przyrostów funkcji zastępować w obliczeniach małe przyrosty funkcji ich różniczkami; stosuje się to zarówno w rachunku przybliżonym (str. 139), jak również w rachunku różniczkowym i całkowym.

Różniczka cząstkowa. Różniczkę cząstkową funkcji wielu zmiennych $u = f(x, y, \dots, t)$ względem jednej z tych zmiennych, na przykład względem x , oznaczamy symbolem dxu lub dx_f i określamy przy pomocy wzoru

$$dxu = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Funkcja różniczkowalna i różniczka zupełna. Funkcję wielu zmiennych $u = f(x, y, \dots, t)$ nazywamy różniczkowalną w punkcie $M_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$, jeżeli przy przejściu do dowolnie bliskiego punktu $M(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt)$ (gdzie $dx, dy, \dots, dt$ są dowolnie małe) całkowity przyrost funkcji w danym punkcie $M_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$

$$\Delta u = f(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt) - f(x_0, y_0, \dots, t_0)$$

różni się od sumy jej różniczek cząstkowych względem wszystkich zmiennych

$$(1) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt \right)_{x_0, y_0, \dots, t_0}$$

o nieskończenie małą rzędu wyższego niż

$$M_0 M = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \dots + dt^2}.$$

Jeżeli u jest funkcją różniczkowalną, to sumę (1) nazywamy jej *różniczką zupełną* i oznaczamy

$$(2) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (1).$$

Każda funkcja ciągła wielu zmiennych mająca w danym punkcie ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych jest w tym punkcie różniczkowalna. Jednakże z samego tylko istnienia pochodnych cząstkowych funkcji względem wszystkich jej zmiennych nie wynika jej różniczkowalność.

Interpretacja geometryczna różniczki zupełnej du funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ przedstawionej w układzie współrzędnych prostokątnych w postaci powierzchni (rys. 287) równa się przyrostowi współrzędnej u płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym punkcie, gdy x i y otrzymują odpowiednio przyrosty dx i dy .

Podstawowa własność różniczki zupełnej jest analogiczna do własności różniczki jednej zmiennej (patrz str. 390): niezmienniczość wyrażenia (2) względem występujących w nim zmiennych.

Liniiowość wyrażen różniczkowych.

Różniczki zmiennych związanych pewną zależnością funkcyjną (równaniem o postaci skończonej) związane są zawsze zależnością liniową (równaniem różniczkowym rzędu pierwszego). Dotyczy to zarówno różniczek zmiennych niezależnych, jak i różniczek (cząstkowych i zupełnych) funkcji jednej lub wielu zmiennych.

Otrzymywanie równania różniczkowego z równania danego w postaci skończonej nazywamy *różniczkowaniem* tego równania. W węższym znaczeniu tego słowa *różniczkowaniem* nazywa się po prostu obliczanie pochodnej lub różniczki funkcji.

(1) O różniczkę zupełnej w postaci wektorowej — patrz w teorii pola, str. 667.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów. Druga pochodna funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$ oznaczana symbolami y'' , y'' , D^2y , $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$, $D^2f(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (1) jest to pochodna pochodnej: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$. Pochodne dowolnego rzędu oznaczane symbolami y''' , y''' , $\frac{d^3y}{dx^3}$ (1), $f^{IV}(x)$, $D^n f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ itp. określa się w sposób analogiczny.

Pochodna cząstkowa rzędu drugiego funkcji $u = f(x, y, z, \dots, t)$ może być brana względem tej samej zmiennej co i pierwsza pochodna $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\dots$ lub też względem innej zmiennej $\frac{\partial^2u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x \partial z}$, $\dots$; w ostatnim przypadku pochodną taką nazywamy *mieszaną*. Wartość pochodnej mieszanej rzędu drugiego, ciągłej w danym punkcie, nie zależy od kolejności zmiennych, względem których bierze się pochodne $\frac{\partial^2u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2u}{\partial y \partial x}$. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów określa się w sposób analogiczny; stosuje się przy tym oznaczenie: $\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3u}{\partial x \partial y^2}$,

$$\frac{\partial^3u}{\partial x \partial y \partial z}, \dots$$

Druga różniczka funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$, oznaczana symbolem d^2y lub $d^2f(x)$, jest to różniczka pierwszej różniczki: $d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2$ (1). Podobnie określa się różniczki wyższych rzędów: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3$ (1) itp.

Różniczka zupełna rzędu drugiego funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$:

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} dy^2$$

lub, w zapisie symbolicznym, $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u$ (2).

Różniczka zupełna rzędu n funkcji dwóch zmiennych:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u \quad (2),$$

(1) Oznaczenia typu $\frac{d^2y}{dx^2}$ lub $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, gdzie $n > 1$ są dogodne jedynie w przypadku, gdy x jest zmienną niezależną, są one natomiast niedogodne, jeżeli x jest funkcją $x = \varphi(t)$; patrz str. 402 (zamiana zmiennych).

(2) W przypadku gdy zmienne $x, y, \dots, f$ są funkcjami nowych zmiennych, wzory są bardziej skomplikowane; patrz str. 403 i 404.

dla funkcji większej ilości zmiennych:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial}{\partial t} dt \right)^n u^{(1)}.$$

2. Technika różniczkowania

Wskazówki ogólne. Posługując się przytoczonymi poniżej regułami różniczkowania i tablicą pochodnych można znaleźć pochodną dowolnej funkcji elementarnej. Najistotniejsze znaczenie ma reguła różniczkowania funkcji złożonej, tak zwana *reguła łańcuchowa* (str. 395); niech np. $y = e^{tg\sqrt{x}}$, wtedy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{tg\sqrt{x}} \cdot \frac{d(tg\sqrt{x})}{dx} = e^{tg\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \\ &= e^{tg\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{tg\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Zanim przystąpimy do różniczkowania, należy — o ile to jest możliwe — przekształcić funkcję do postaci sumy otwierając nawiasy (str. 157), wyłączając część całkowitą z ułamka (str. 158), logarytmując wyrażenie (str. 165) itp.

Przykłady.

$$1. \quad y = \frac{2-3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+x^2}{x} = \frac{2}{x} - 3x^{-1/2} + 4x^{-2/3} + x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-3/2} - \frac{8}{3}x^{-5/3} + 1.$$

$$2. \quad y = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-1),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2-1} \right) = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

Podstawowe reguły różniczkowania. Oznaczenia: $u, v, w, \dots$ — funkcje zmiennej niezależnej x ; $u', v', w', \dots$ — pochodne tych funkcji względem x .

1. *Pochodna (lub różniczka) sumy algebraicznej dwóch lub kilku funkcji jest równa sumie algebraicznej pochodnych (lub różniczek) każdej z tych funkcji:*

$$(u+v-w+\dots+t)' = u'+v'-w'+\dots+t';$$

$$d(u+v-w+\dots+t) = du+dv-dw+\dots+dt.$$

(¹) Patrz notkę (²) na str. 393.

2. *Pochodna (lub różniczka) iloczynu dwóch lub kilku funkcji jest równa sumie n składników (gdzie n oznacza ilość czynników); każdy składnik jest tak zbudowany, jak dany iloczyn, z tą różnicą, że jeden z czynników jest kolejno zastępowany swoją pochodną (różniczką):*

dla dwóch funkcji: $(uv)' = u'v + uv'$, $d(uv) = vdu + u dv$;

dla trzech funkcji: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, $d(uvw) = vwdu + uvw dv + uv dw$, itd.

Często, aby obliczyć pochodną iloczynu kilku funkcji, odnajduje się początkowo ich *pochodną logarymiczną* (to znaczy pochodną logarytmu danej funkcji $(\ln|y|)' = y'/y$); na przykład jeżeli

$$y = \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}, \quad \ln y = \frac{1}{2} (3 \ln|x| + 4x + \ln|\sin x|),$$

gdzie $x \sin x > 0$, to

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x \right), \quad y' = \left(\frac{3}{2x} + 2 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}.$$

Sposób ten znajduje zastosowanie przy różniczkowaniu funkcji postaci u^v ; na przykład jeżeli $y = (2x+1)^{3x}$, gdzie $2x+1 > 0$, to

$$\ln y = 3x \ln(2x+1), \quad \frac{y'}{y} = 3 \left(\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1) \right),$$

$$y' = 3 \left(\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1) \right) y = 3 \left(\frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1) \right) (2x+1)^{3x}.$$

3. Stały czynnik można wyносить przed znak pochodnej (lub różniczki):

$$(cu)' = cu', \quad d(cu) = cdu.$$

4. *Pochodną (lub różniczkę) ilorazu oblicza się według wzoru*

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

5. **Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej.** Jeżeli $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, to

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \varphi'(x);$$

jeżeli $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$, to

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \varphi'(t) \psi'(x).$$

Jest to *reguła łańcuchowa*; w przypadku łańcucha złożonego z większej ilości funkcji postępuje się w sposób analogiczny.

Tablica pochodnych funkcji elementarnych

Funkcja	Pochodna	Funkcja	Pochodna
stała	0		
x	1	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\log_a x $	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x $	$\frac{1}{x} \log e \approx \frac{0,4343}{x}$	$\operatorname{ctgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{artgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$	$\operatorname{arctgh} x$	$\frac{1}{x^2-1}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$		
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$		

Tablica pochodnych wyższych rzędów dla najprostszych funkcji

Funkcja	Pochodna rzędu n
x^m ⁽¹⁾	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
$\ln x $	$(-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}$
$\log_a x $	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$
$\sinh x$	$\sinh x$, gdy $n = 2k$, $\cosh x$, gdy $n = 2k+1$
$\cosh x$	$\cosh x$, gdy $n = 2k$, $\sinh x$, gdy $n = 2k+1$

6. Wzór Leibniza. Pochodna rzędu n dla iloczynu dwóch funkcji

$$D^n(uv) = uD^n v + \binom{n}{1} Du D^{n-1} v + \binom{n}{2} D^2 u D^{n-2} v + \dots + \binom{n}{k} D^k u D^{n-k} v + \dots + D^n u \cdot v$$

lub oznaczając $D^0 u = u$, $D^0 v = v$ piszemy wzór w postaci sumy

$$D^n(uv) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k u D^{n-k} v,$$

albo w postaci symbolicznej:

$$D^n(uv) = (Du + Dv)^n.$$

Jest to wzór analogiczny do dwumianu Newtona, przy czym w pierwszym i ostatnim wyrazie rozwinięcia dwumianu należy podstawić $D^0 v = v$ i $D^0 u = u$.

⁽¹⁾ Jeżeli m jest liczbą naturalną i $n > m$, to pochodna rzędu n równa się 0.

Pochodna funkcji złożonej wielu zmiennych. W przypadku jednej zmiennej niezależnej:

$$u = f(x, y, \dots, z),$$

gdzie $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ..., $z = \chi(t)$, pochodna ma postać

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Jeżeli funkcja złożona jednej zmiennej t ma postać

$$u = f(x, y, \dots, z, t),$$

gdzie $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ..., $z = \chi(t)$, to pochodna ma postać

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Jest to tak zwana *pochodna substancjalna*.

Dla funkcji wielu zmiennych niezależnych: $u = f(x, y, \dots, t)$, gdzie $x = \varphi(\xi, \eta, \dots, \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \dots, \tau)$, ..., $t = \lambda(\xi, \eta, \dots, \tau)$, mamy

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Różniczkowanie funkcji uwikłanej.

1. Funkcja jednej zmiennej $y = f(x)$ określona w punkcie (x, y) równaniem

$$(A) \quad F(x, y) = 0,$$

gdzie $F_y(x, y) \neq 0$. Różniczkowanie wzoru (A) względem x zgodnie ze wzorem (1) daje

$$(B) \quad F'_x + F'_y y' = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Różniczkowanie wzoru (B) względem x na podstawie tegoż samego wzoru (1) daje

$$(C) \quad F''_{xx} + 2F''_{xy} y' + F''_{yy} (y')^2 + F'_y y'' = 0,$$

skąd z uwzględnieniem wzoru (B) otrzymujemy

$$(D) \quad y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}$$

W taki sam sposób otrzymujemy

$$(E) \quad F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy} y' + 3F'''_{xyy} (y')^2 + F'''_{yyy} (y')^3 + 3F''_{xyy} y'' + 3F''_{yyy} y' y'' + F'_y y''' = 0,$$

skąd z uwzględnieniem wzoru (B) i (D) wyznaczamy y''' itd.

2. Funkcja wielu zmiennych $u = f(x, y, z, \dots, t)$ określona równaniem $F(x, y, \dots, t, u) = 0$, gdzie $F'_u \neq 0$. Pochodne cząstkowe znajduje się w sposób analogiczny wykorzystując wzory (3) na str. 398:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{F'_t}{F'_u}.$$

W ten sam sposób otrzymuje się też pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

3. Dwie funkcje jednej zmiennej $y = f(x)$ i $z = \varphi(x)$ określone układem równań

$$(A) \quad F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

Różniczkowanie wzoru (A) według wzoru (1) daje

$$(B) \quad F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0, \quad \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' = 0,$$

skąd

$$y' = \frac{F'_z \Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y}, \quad z' = \frac{F'_x \Phi'_y - F'_y \Phi'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y},$$

przy założeniu, że $F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y$ nie równa się zeru.

W ten sam sposób, różniczkując (B) z uwzględnieniem wartości y' i z' , znajduje się drugie pochodne y'' i z'' itd.

4. n funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, ..., $t = \psi(x)$ wyznaczonych układem równań

$$(A) \quad F(x, y, z, \dots, t) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \dots, t) = 0, \quad \dots, \quad \Psi(x, y, z, \dots, t) = 0,$$

Różniczkując (A) według wzoru (1) otrzymujemy

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' + \dots + F'_t t' = 0,$$

$$(B) \quad \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' + \dots + \Phi'_t t' = 0,$$

$$\dots \dots \dots \Psi'_x + \Psi'_y y' + \Psi'_z z' + \dots + \Psi'_t t' = 0.$$

Jeżeli będzie spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z & \dots & F'_t \\ \Phi'_y & \Phi'_z & \dots & \Phi'_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi'_y & \Psi'_z & \dots & \Psi'_t \end{vmatrix} \neq 0,$$

to rozwiązując układ (B) względem $y', z', \dots, t'$ znajdujemy pierwsze pochodne; w podobny sposób znajdujemy pochodne wyższych rzędów.

5. Dwie funkcje dwóch zmiennych $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$ wyznaczone układem dwóch równań

$$(A) \quad F(x, y, u, v) = 0, \quad \Phi(x, y, u, v) = 0.$$

Różniczkując równania (A) względem x i względem y według wzorów (3) otrzymujemy

$$(B_x) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (B_y) \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Jeżeli $\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \neq 0$, to rozwiązując układ równań (B_x)

względem $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ i układ równań (B_y) względem $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ otrzymujemy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego; w podobny sposób znajdujemy pochodne wyższych rzędów.

6. n funkcji m zmiennych wyznaczonych układem n równań. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego (i wyższych) znajduje się w sposób analogiczny.

Pochodne funkcji $y = f(x)$ wyznaczonej w postaci parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ oblicza się według wzorów

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'') - y'x'''}{x'^6}, \dots$$

gdzie $x', x'', x''', \dots, y', y'', y''', \dots$ oznaczają pochodne względem t , przy czym $x' \neq 0$.

Pochodna funkcji odwrotnej. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest odwrotna względem funkcji $y = \varphi(x)$, to jej pochodne oblicza się według następujących wzorów:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \dots,$$

gdzie $\varphi'(x) \neq 0$.

Na przykład funkcja $y = \arcsin x$ jest funkcją odwrotną względem funkcji $y = \sin x$; jej pochodna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

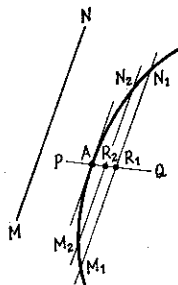
jest oznaczona w przedziale $-1 < x < 1$.

Różniczkowanie graficzne. Jeżeli funkcja różniczkowalna $y = f(x)$ przedstawiona jest we współrzędnych prostokątnych za pomocą wykresu Γ w pewnym przedziale $a < x < b$, to wykres jej pochodnej Γ' można w przybliżeniu wykreślić w następujący sposób:

Zadanie przygotowawcze. Wykreślenie stycznej w danym punkcie krzywej można wykonać na oko bardzo niedokładnie; jeżeli jednak dany jest kierunek stycznej (MN , rys. 288), to punkt styczności A można wykreślić dokładniej. Wykreślmy dwie cięciwy M_1N_1 i M_2N_2 tak, by przecięły krzywą w bliskich sobie punktach, po czym wyznaczmy środki R_1 i R_2 tych cięciw, i poprowadźmy przez punkty R_1 i R_2 prostą PQ ; ostatnia prosta przecina krzywą w punkcie A ; styczna w tym punkcie ma (w przybliżeniu) żądany kierunek. Dla kontroli poprawności konstrukcji można wykreślić trzecią cięciwę, równoległą do dwóch pierwszych i niedaleką od nich — powinna ona przecinać w swym środku prostą PQ .

Konstrukcja wykresu pochodnej. 1° Obieramy kilka kierunków $l_1, l_2, \dots$ stycznych do krzywej $y = f(x)$ (rys. 289) w taki sposób, by na oko odpowiadały rozważanemu przedziałowi krzywej; wyznaczamy punkty styczności $A_1, A_2, \dots$ z poprzednią konstrukcją (samych stycznych można nie wykreślać).

2° Po ujemnej stronie osi Ox obieramy dowolny punkt P (biegun). Odcinek $PO = a$ powinien być tym większy, im mniej stromo przebiega krzywa.



Rys. 288

3° Z bieguna P prowadzimy proste $PB_1, PB_2, \dots$ równoległe do kierunków $l_1, l_2, \dots$ aż do przecięcia z osią Oy w punktach $B_1, B_2, \dots$

4° Przez punkty $B_1, B_2, \dots$ prowadzimy proste poziome $B_1C_1, B_2C_2, \dots$ aż do przecięcia w punktach $C_1, C_2, \dots$ z odpowiednimi rzędnymi punktów $A_1, A_2, \dots$

5° Punkty $C_1, C_2, \dots$ łączymy łagodną linią; jej równanie jest $y = af'(x)$. Będzie to właśnie szukany wykres pochodnej, jeżeli za jednostkę miary na osi Oy weźmiemy odcinek a . Aby otrzymać wykres w zwykłej skali (krzywą Γ'), kreślimy punkty $D_1, D_2, \dots$, których rzędne są równe rzędnym punktów $C_1, C_2, \dots$ podzielonym przez a ($a = PO$ na rysunku 289).

Rys. 289

3. Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych

Funkcja jednej zmiennej. Jeżeli $y = f(x)$ i dane jest wyrażenie

$$H = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots\right)$$

zawierające argument, funkcję i jej pochodne, to w przypadku zamiany zmiennych pochodne oblicza się według następujących wzorów:

1. W przypadku zamiany argumentu x na argument t związanym z argumentem x wzorem $x = \varphi(t)$ stosuje się wzory

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3} \left(\varphi'(t) \frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t) \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5} \left([\varphi'(t)]^3 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t) \frac{d^2y}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + [3[\varphi''(t)]^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)] \frac{dy}{dt} \right)^{(1)},$$

gdzie $\varphi'(t) \neq 0$.

⁽¹⁾ Jeżeli wzór przekształcenia dany jest w postaci uwikłanej $\Phi(x, t) = 0$, to pochodne $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ oblicza się według tych samych wzorów, tylko $\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t)$

2. W przypadku zastąpienia funkcji y funkcją u związaną z y wzorem $y = \varphi(u)$ stosuje się wzory

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u) \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u) \frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u) \left(\frac{du}{dx} \right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u) \frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u) \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u) \left(\frac{du}{dx} \right)^3,$$

3. W przypadku zastąpienia argumentu x i funkcji y nowym argumentem t i nową funkcją u , związanymi z x i y wzorami $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$, stosuje się wzory

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{1}{B} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{1}{B^3} \left(B \frac{dA}{dt} - A \frac{dB}{dt} \right),$$

gdzie $A = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt}$, $B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt}$, przy czym $B \neq 0$.

Analogicznie oblicza się $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Przykład. Przy zamianie współrzędnych prostokątnych na biegunowe według wzorów $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^3},$$

pod warunkiem, że $\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \neq 0$.

Funkcja dwóch zmiennych. Jeżeli $\omega = f(x, y)$ i dane jest wyrażenie

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \dots\right)$$

zawierające argumenty, funkcję i jej pochodne cząstkowe, to w przypadku zamiany zmiennych x, y na nowe zmienne u, v , związane z x, y wzorami $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ pochodne cząstkowe rzędu pierwszego $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ oblicza się z układu równań

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

oblicza się według wzoru różniczkowania funkcji uwikłanej; przy tym ostatecznie wyrażenie H może zawierać zmienną x , którą należy wyrugować przy pomocy równań $\Phi(x, t) = 0$.

skąd przy założeniu, że $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = A \frac{\partial \omega}{\partial u} + B \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = C \frac{\partial \omega}{\partial u} + D \frac{\partial \omega}{\partial v},$$

gdzie A, B, C, D są funkcjami zmiennych u i v . Drugie pochodne cząstkowe oblicza się według tych samych wzorów, ale zastosowanych nie do funkcji ω , lecz do funkcji $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ i $\frac{\partial \omega}{\partial y}$. Na przykład

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \omega}{\partial u} + B \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) = \\ &= A \left(A \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) + \\ &+ B \left(A \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Podobnie otrzymuje się pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

P r z y k ł a d. Wyrazić operator Laplace'a ⁽¹⁾

$$\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

we współrzędnych biegunowych $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$.

Mamy

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varrho} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \varrho \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \varrho \cos \varphi,$$

skąd

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} + \frac{\cos \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - \\ &- \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Analogicznie obliczając $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ otrzymujemy ostatecznie

$$\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varrho}.$$

Dla funkcji wielu zmiennych otrzymuje się wzory na zamianę zmiennych w taki sam sposób.

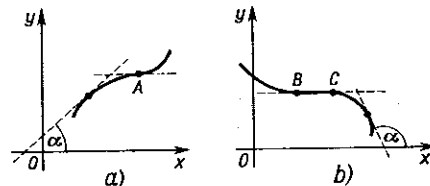
⁽¹⁾ Patrz str. 678.

4. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego

Warunek monotoniczności funkcji. Jeżeli dana funkcja $f(x)$ jest ciągła w pewnym spójnym przedziale i ma pochodną we wszystkich punktach wewnętrznych tego przedziału ⁽¹⁾, to warunkiem koniecznym i wystarczającym monotoniczności tej funkcji w obszarze oznaczoności jest:

$f'(x) \geq 0$, gdy funkcja wzrasta monotonicznie,
 $f'(x) \leq 0$, gdy funkcja maleje monotonicznie ⁽²⁾.

Interpretacja geometryczna. Wykresem funkcji monotonicznie rosnącej jest krzywa, która przy wzrastaniu x nie opada w żadnym punkcie (podnosi się lub przebiega poziomo, rys. 290a);



Rys. 290

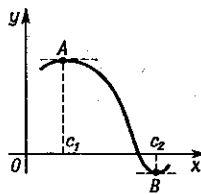
styczna w punktach tej krzywej tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt ostry, lub też jest do tej osi równoległa. Analogicznie — dla funkcji monotonicznie malejącej (rys. 290b) ⁽³⁾.

Twierdzenie Fermata. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest dana w przedziale spójnym i ma w pewnym punkcie wewnętrznym tego przedziału ⁽⁴⁾ $x = c$ wartość największą lub najmniejszą, to znaczy taką, że

$$f(c) > f(x) \quad \text{lub} \quad f(c) < f(x),$$

oraz w punkcie c ma pochodną skończoną, to pochodna ta jest równa zero: $f'(c) = 0$.

Interpretacja geometryczna. W punktach A i B wykresu funkcji spełniającej warunki twierdzenia styczna jest równoległa do osi Ox (rys. 291).



Rys. 291

⁽¹⁾ To znaczy w punktach nie będących końcami przedziału.

⁽²⁾ Warunek ten jest słuszny dla monotonicznego wzrostu lub malenia w szerszym znaczeniu tego słowa (patrz str. 353). Aby funkcja wzrastała lub malała ściśle monotonicznie, do przytoczonego warunku trzeba dodać drugi warunek: pochodna $f'(x)$ nie powinna stawać się tożsamościowo równa zero w żadnym przedziale stanowiącym część obszaru jej oznaczoności. Warunek ten nie jest spełniony na przykład na odcinku BC (rys. 290b).

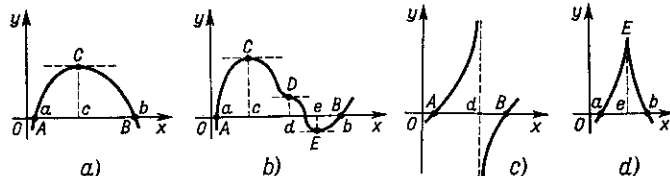
⁽³⁾ W przypadku ściślejszej monotoniczności styczna może być równoległa do osi Ox tylko w poszczególnych punktach (na przykład w punkcie A na rysunku 290a), ale nie w całym przedziale (BC na rysunku 290b).

⁽⁴⁾ To znaczy w punkcie nie leżącym na końcu przedziału.

Twierdzenie Fermata podaje tylko warunek konieczny istnienia wartości największej lub najmniejszej dla danej funkcji; jest on jednak niewystarczający: na rysunku 290a w punkcie A funkcja $f'(x) = 0$, lecz nie przybiera ona w tym punkcie największej ani najmniejszej wartości (punkt przegięcia krzywej).

Warunek skończoności pochodnej jest w twierdzeniu Fermata istotny: na rysunku 292d funkcja w punkcie E przybiera wartość największą, lecz pochodna nie przybiera wartości zerowej (ostrze krzywej).

Twierdzenie Rolle'a. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, gdzie $a < b$, ma pochodną ciągłą wewnątrz



Rys. 292

tego przedziału i przybiera wartość zerową na jego końcach: $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, to istnieje przynajmniej jedna liczba c zawarta pomiędzy a i b , która spełnia zależność

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

Interpretacja geometryczna. Jeżeli krzywa stanowiąca wykres funkcji $y = f(x)$ przecina oś Ox w dwóch punktach A i B , jest ciągła i ma w sposób ciągle zmieniającą się styczną na całej rozciągłości od A do B , to istnieje przynajmniej jeden taki punkt C zawarty pomiędzy A i B , w którym styczna ta jest równoległa do osi Ox (rys. 292a).

Punktów takich może być więcej (punkty C , D , E na rysunku 292b). Postulat ciągłości funkcji lub jej pochodnej jest istotny; na rysunku 292c funkcja jest nieciągła dla $x = d$, na rysunku 292d pochodna jest nieciągła w punkcie E ; w obu tych wypadkach nie istnieje punkt C , w którym $f'(x) = 0$.

Twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie o przyroście skończonym). Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, gdzie $a < b$, i ma pochodną w tym przedziale, to istnieje przynajmniej jedna liczba c zawarta pomiędzy punktami a i b , taka że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b).$$

To samo twierdzenie w innych oznaczeniach (podstawiając $b = a + h$ i oznaczając przez θ pewną liczbę zawartą między 0 i 1):

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

Interpretacja geometryczna. Jeżeli krzywa $y = f(x)$ (rys. 293) jest ciągła i ma w sposób ciągle zmieniającą się styczną w przedziale od A do B , to pomiędzy A i B istnieje taki punkt C leżący na krzywej, że styczna w tym punkcie jest równoległa do cięciwy AB .

Takich punktów może być więcej. Postulaty ciągłości funkcji i jej pochodnej są istotne (łatwo podać przykłady ilustrujące to analogicznie do rysunku 292b, c i d).

Twierdzenie Taylora (uogólnienie twierdzenia Lagrange'a). Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, a+h \rangle$ ⁽¹⁾ i ma pochodną ciągłą od pierwszej do n -tej włącznie, to zachodzi równość (wzór Taylora)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h),$$

gdzie θ jest pewną liczbą zawartą pomiędzy 0 i 1 ($0 < \theta < 1$).

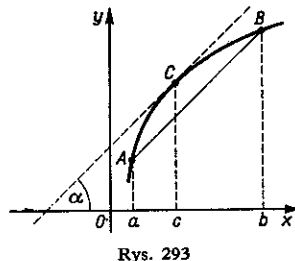
Twierdzenie Cauchy'ego. Jeżeli dwie funkcje $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ są określone w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, ciągle i mają ciągle pochodne w tym przedziale, przy czym funkcja $\varphi'(x)$ nigdzie nie jest równa zero, to istnieje taka liczba c zawarta pomiędzy a i b , która spełnia równanie

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad \text{gdzie } a < c < b.$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Cauchy'ego jest taka jak i twierdzenia Lagrange'a. Jeżeli rozważać będziemy krzywą na rysunku 293, daną w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, gdzie punkt A odpowiada wartości parametru $t = a$, a punkt B — wartości $t = b$, to dla punktu C

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

⁽¹⁾ h może tu być zarówno dodatnie, jak i ujemne.

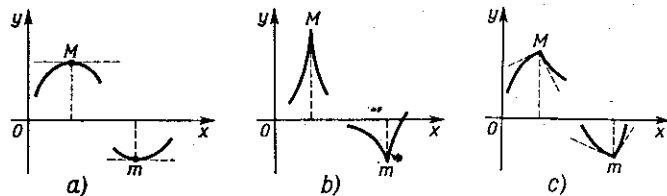


5. Znajdowanie maksimum i minimum funkcji

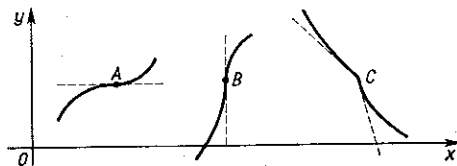
Funkcja jednej zmiennej. Określenie. *Maksimum* (M) lub *minimum* (m)⁽¹⁾ funkcji $y = f(x)$ nazywamy takie jej wartości $f(x_0)$, przy których zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &< f(x_0) \text{ dla przypadku maksimum,} \\ f(x_0+h) &> f(x_0) \text{ dla przypadku minimum} \end{aligned}$$

przy dowolnych wartościach h , dodatnich lub ujemnych. A więc w punktach maksimum (lub minimum) wartość $f(x_0)$ jest większa (lub odpowiednio mniejsza) niż wszystkie sąsiednie wartości funkcji.



Rys. 294



Rys. 295

Warunek konieczny dla maksimum albo minimum funkcji ciągłej. Dla funkcji ciągłej maksimum albo minimum może zachodzić jedynie w tych punktach, w których pochodna jest bądź równa zero, bądź nie istnieje (w szczególności staje się nieskończona).

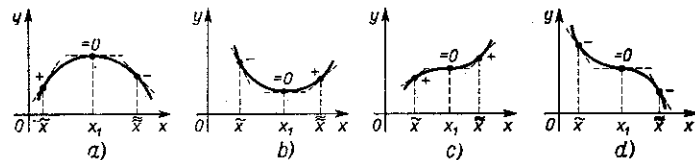
Interpretacja geometryczna. W punktach wykresu funkcji odpowiadających punktom maksimum lub minimum styczna jest bądź równoległa do osi Ox (rys. 294a), bądź równoległa do osi Oy (rys. 294b), bądź też w ogóle nie istnieje (rys. 294c).

Warunek ten jest niewystarczający: na rysunku 295 w punktach A , B , C spełnione są warunki konieczne, lecz punkty te nie są punktami maksimum ani minimum.

⁽¹⁾ W analizie matematycznej pojęcia maksimum i minimum obejmuje się wspólnym wyrazem *ekstremum*.

W przypadku funkcji ciągłej punkty maksimum i minimum występują kolejno: między dwoma sąsiednimi maksimumami zawsze znajduje się jedno minimum, między dwoma minimumami znajduje się jedno maksimum.

Znajdowanie maksimum i minimum funkcji ciągłej danej w postaci jawnej $y = f(x)$ i mającej pochodną ciągłą. Najpierw znajdujemy punkty spełniające warunek konieczny $f'(x) = 0$, tak zwane *punkty stacjonarne*, potem obliczamy pochodną i znajdujemy wszystkie pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ równania $f'(x) = 0$, następnie każdy ze znalezionych pierwiastków, na przykład x_1 , badamy przy pomocy jednej z następujących metod:



Rys. 296

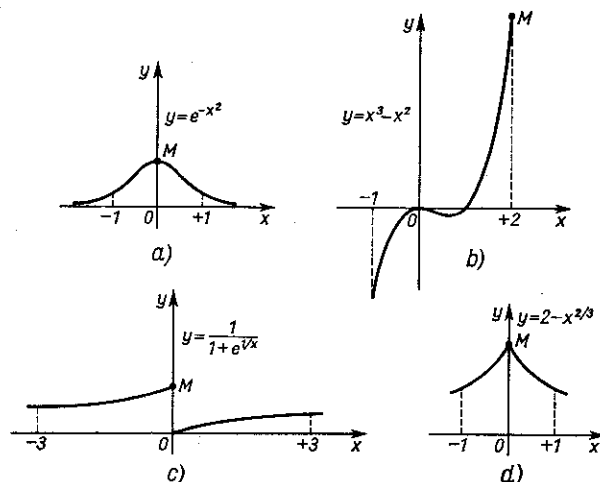
1. Metoda porównywania znaków pochodnej. Określa się znak $f'(x)$ dla wartości $\tilde{x}$ nieco mniejszych i wartości $\tilde{x}$ nieco większych niż x_1 (ściślej: dla wartości $\tilde{x}$ i $\tilde{x}$ leżących po obu stronach x_1 w tak niewielkich odległościach, że pomiędzy $\tilde{x}$ i x_1 oraz między x_1 i $\tilde{x}$ nie ma już pierwiastków równania $f'(x) = 0$). Jeżeli znak $f'(x)$ zmienia się przy tym z „+” na „-” (rys. 296a), to przy $x = x_1$ mamy dla $f(x)$ maksimum, a jeżeli znak zmienia się z „-” na „+” (rys. 296b), to w punkcie x_1 funkcja $f(x)$ ma minimum; jeżeli zaś znak pochodnej nie zmienia się (rys. 296c i d), to w punkcie $x = x_1$ nie zachodzi ani maksimum, ani minimum, a wykres ma punkt przegięcia, w którym styczna jest równoległa do osi Ox .

2. Metoda pochodnych wyższych rzędów. Metoda ta może być stosowana wtedy, gdy w punkcie $x = x_1$ funkcja $f(x)$ ma pochodne wyższych rzędów. Pierwiastek x_1 pierwszej pochodnej podstawiamy do drugiej pochodnej.

Jeżeli $f''(x_1) < 0$, to w punkcie $x = x_1$ funkcja $f(x)$ ma maksimum, a jeżeli $f''(x_1) > 0$, to funkcja $f(x)$ ma minimum; jeżeli zaś $f''(x_1) = 0$, to podstawiamy x_1 do trzeciej pochodnej $f'''(x_1)$. Jeżeli w tym przypadku $f'''(x_1) \neq 0$, to w punkcie $x = x_1$ nie ma ani maksimum, ani minimum (jest punkt przegięcia); jeżeli zaś $f'''(x_1) = 0$, to obliczamy $f^{IV}(x_1)$ itd.

Reguła ogólna: Jeżeli najniższa pochodna, która w punkcie $x = x_1$ nie staje się równa zero, jest rzędu parzystego, to $f(x)$ ma w punkcie $x = x_1$ maksimum lub minimum, zależnie od tego, czy pochodna ta jest ujemna czy dodatnia. Jeżeli zaś rząd tej pochodnej jest nieparzysty, to funkcja w punkcie $x = x_1$ nie ma ani maksimum, ani minimum.

Metodę porównywania znaków pochodnej można zastosować również do tych wartości funkcji, w których pochodna nie istnieje (patrz rys. 294b i c i rys. 295).



Rys. 297

Aby znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji w danym przedziale $a \leq x \leq b$, obliczamy wszystkie jej maksima i minima leżące wewnątrz tego przedziału, a także obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału, w punktach nieciągłości funkcji i w punktach nieciągłości jej pochodnej. Następnie ustalamy, która z obliczonych wartości jest największa, a która najmniejsza.

Przykłady znajdowania największej wartości funkcji:

1. $y = e^{-x^2}$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Największa wartość jest w punkcie $x = 0$ (maksimum, rys. 297a).

2. $y = x^3 - x^2$ w przedziale $\langle -1, 2 \rangle$. Największa wartość jest w punkcie $x = 2$ (prawy koniec przedziału, rys. 297b).

3. $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ w przedziale $\langle -3, 3 \rangle$. Największa wartość jest

w punkcie $x = 0$ (punkt nieciągłości funkcji, rys. 297c), jeżeli podstawimy $y = 1$ przy $x = 0$.

4. $y = 2 - x^{2/3}$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Największa wartość jest w punkcie $x = 0$ (maksimum, pochodna nieskończona, rys. 297d).

Znajdowanie maksimów i minimów w funkcji danej w postaci uwikłanej. Aby znaleźć maksima i minima funkcji $y = f(x)$ danej w postaci uwikłanej za pomocą równania $F(x, y) = 0$, gdzie F , F'_x i F'_y są ciągłe, postępuje się w sposób następujący. Rozwiązuje się układ równań $F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$ i otrzymane rozwiązania (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... podstawia się do F'_y i F''_{xx} .

Jeżeli w punkcie (x_i, y_i) pochodne F'_y i F''_{xx} mają różne znaki, to przy danym x_i funkcja y_i osiąga minimum; jeżeli F'_y i F''_{xx} mają ten sam znak, to funkcja $y = f(x)$ przy danym x_i osiąga maksimum. Jeżeli zaś jedno z wyrażeń F'_y lub F''_{xx} jest w rozważanym punkcie równe zero, to dalsze metody analizy stają się bardziej skomplikowane.

Funkcja wielu zmiennych. Określenie. Funkcja $u = f(x, y, \dots, t)$ osiąga *maksimum* (lub *minimum*) przy zespole wartości $x_0, y_0, \dots, t_0$, inaczej mówiąc: w punkcie $P_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$, jeżeli można wskazać taką liczbę dodatnią ε , że obszar określony nierównościami $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, ..., $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ zawiera się w obszarze oznaczoności danej funkcji i przy każdym punkcie $(x, y, \dots, t)$ wewnątrz tego obszaru z wyjątkiem punktu $(x_0, y_0, \dots, t_0)$ spełnione są warunki:

$$f(x, y, \dots, t) < f(x_0, y_0, \dots, t_0) \text{ dla przypadku maksimum,}$$

$$f(x, y, \dots, t) > f(x_0, y_0, \dots, t_0) \text{ dla przypadku minimum.}$$

Korzystając z pojęcia przestrzeni wielowymiarowej⁽¹⁾ można powiedzieć, że w punktach maksimum (minimum) funkcja u ma większą (lub odpowiednio mniejszą) wartość niż we wszystkich punktach sąsiednich.

Interpretacja geometryczna maksimum i minimum funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$ przedstawionej powierzchnią we współrzędnych prostokątnych (patrz str. 367): w punkcie A , w którym zachodzi maksimum (minimum), współrzędna z punktu powierzchni jest większa (lub odpowiednio mniejsza) od wartości tej współrzędnej w dowolnym punkcie dostatecznie małego otoczenia punktu A (to znaczy obszaru o małych rozmiarach, dla którego punkt A jest punktem wewnętrznym), patrz rys. 298: a) maksimum, b) minimum.

Jeżeli powierzchnia $z = f(x, y)$ ma w punkcie ekstremalnym P płaszczyznę styczną, to płaszczyzna ta jest równoległa do płaszczyzny Oxy (rys. 298a i b). Warunek ten jest konieczny, lecz niewystarczający

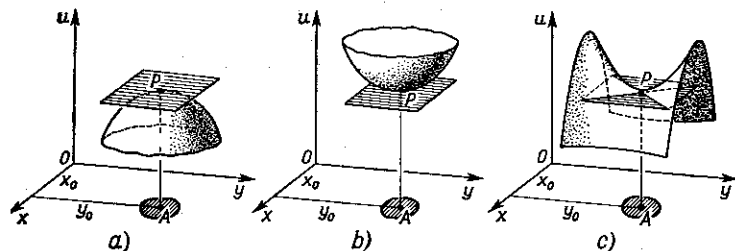
⁽¹⁾ Patrz str. 367.

na to, aby w punkcie P było maksimum lub minimum funkcji $z = f(x, y)$: na rysunku 298c powierzchnia ma w punkcie P poziomą płaszczyznę styczną, lecz w punkcie tym nie ma ani maksimum, ani minimum (P jest punktem siodłowym).

Znajdowanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$. Rozwiązujemy układ równań

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

otrzymane układy rozwiązań $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ podstawiamy do po-



Rys. 298

chodnych $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Układamy wyrażenie

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = [f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2]_{x=x_1, y=y_1}.$$

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja $f(x, y)$ w punkcie (x, y) ma maksimum, gdy $f''_{xx} < 0$ i minimum, gdy $f''_{xx} > 0$. Jeżeli $\Delta < 0$, to $f(x, y)$ nie ma ani maksimum, ani minimum. Jeżeli zaś $\Delta = 0$, to metody stają się bardziej skomplikowane.

Znajdowanie ekstremów funkcji n zmiennych $u = f(x, y, \dots, t)$. Warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym na to, by w punkcie $(x, y, \dots, t)$ funkcja różniczkowalna n zmiennych $u = f(x, y, \dots, t)$ miała maksimum albo minimum, jest spełnienie w tym punkcie n równań następujących:

$$(A) \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad \dots, \quad f'_t = 0.$$

Warunki wystarczające są w ogólnym przypadku skomplikowane; w praktyce dla ustalenia, czy rozwiązanie $x_1, y_1, \dots, t_1$ układu równań (A) daje ekstremum (i jakie mianowicie), należy badać funkcję w punktach bliskich punktu $(x_1, y_1, \dots, t_1)$.

Ekstrema warunkowe (metoda Lagrange'a). Jeżeli mamy znaleźć maksimum lub minimum funkcji n zmiennych $u = f(x, y, \dots, t)$, gdy zmienne te nie są niezależne, ale są związane warunkami dodatkowymi:

$$\varphi_1(x, y, \dots, t) = 0, \quad \varphi_2(x, y, \dots, t) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n(x, y, \dots, t) = 0,$$

gdzie $k < n$, to wprowadzamy k czynników nieoznaczonych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ i rozważamy następującą funkcję $n+k$ zmiennych $x, y, \dots, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

$$\Phi(x, y, \dots, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x, y, \dots, t) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, \dots, t) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, \dots, t) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x, y, \dots, t).$$

Warunkiem koniecznym dla istnienia ekstremum funkcji Φ w punkcie $(x, y, \dots, t)$ jest spełnienie układu $n+k$ równań z $n+k$ niewiadomymi $x, y, \dots, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, mianowicie:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_k = 0, \quad \Phi'_x = 0, \quad \Phi'_y = 0, \quad \dots, \quad \Phi'_t = 0.$$

Zespół wartości $(x_1, y_1, \dots, t_1)$ spełniających powyższe równania może dla funkcji f dawać maksimum lub minimum (jest to jednak warunek tylko konieczny).

Przykład. Dla funkcji $u = f(x, y)$ przy warunku $\varphi(x, y) = 0$ punkt, w którym funkcja ma ekstremum, określa się z trzech równań o trzech niewiadomych x, y, λ , a mianowicie

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0.$$

6. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy

Szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Funkcję $y = f(x)$ ciągłą i mającą wszystkie pochodne w punkcie $x = a$ można w wielu wypadkach przedstawić w postaci sumy szeregu potęgowego (patrz str. 385), którą otrzymuje się ze wzoru Taylora (str. 407):

$$(T) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots,$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$S_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x);$$

wyrażenie $R_n(x)$ nazywamy resztą szeregu Taylora.

Wzór (T) jest prawdziwy przy tych wartościach x , przy których reszta R_n dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$ (¹).

Wyrażenie na resztę szeregu Taylora:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

gdzie ξ leży między a i x ,

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Inna postać szeregu Taylora

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Dla tej postaci reszta szeregu wyraża się wzorami

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

gdzie $0 < \theta < 1$, oraz

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t) dt.$$

Szereg Maclaurina. Jest to rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg według potęg zmiennej x . Jest to przypadek szczególny szeregu Taylora dla $a = 0$

$$(M) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Reszta szeregu Maclaurina

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

gdzie $0 < \theta < 1$, oraz

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

(¹) Dane tutaj pojęcie reszty nie zawsze pokrywa się z tym pojęciem, które zostało wprowadzone w paragrafie o szeregach (str. 383). Oba pojęcia pokrywają się tylko w tych przypadkach, gdy wzór (T) jest prawdziwy.

Zbieżność szeregów Taylora i Maclaurina określa się bądź przez badanie reszty R_n , bądź przez wyznaczenie promienia zbieżności szeregu (str. 385); w tym ostatnim przypadku może się niekiedy okazać, że szereg jest zbieżny, lecz jego suma $S(x)$ nie równa się $f(x)$.

Szereg Taylora dla funkcji dwóch zmiennych. Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych ma postać

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{6} (\dots) + \dots + \frac{1}{n!} (\dots) + R_n \end{aligned}$$

lub w postaci symbolicznej

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= \\ &= f(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^3 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + R_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k),$$

przy czym $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$.

Jeżeli przy $n \rightarrow \infty$ reszta $R_n \rightarrow 0$, otrzymujemy szereg Taylora.

Dla funkcji m zmiennych zachodzi analogiczny wzór symboliczny:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots, t+l) &= f(x, y, \dots, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \dots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^i f(x, y, \dots, t) + R_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \dots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, \dots, t+\theta_m l),$$

przy czym $0 < \theta_i < 1$.

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$(a \pm x)^m$	Funkcje algebraiczne Szereg dwumianowy przekształcając do postaci $a^m \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ sprowadzamy do szeregów następujących: Szeregi dwumianowe o wykładniku dodatnim ⁽¹⁾ $(1 \pm x)^m$ ($m > 0$) $1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ $\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$ $x \leq 1$ $(1 \pm x)^{1/4}$ $1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \pm \dots$ $x \leq 1$ $(1 \pm x)^{1/3}$ $1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \dots$ $x \leq 1$ $(1 \pm x)^{1/2}$ $1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$ $x \leq 1$ $(1 \pm x)^{3/2}$ $1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$ $x \leq 1$ $(1 \pm x)^{5/2}$ $1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$ $x \leq 1$ Szeregi dwumianowe o wykładniku ujemnym $(1 \pm x)^{-m}$ ($m > 0$) $1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \dots$ $\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \dots$ $x < 1$ $(1 \pm x)^{-1/4}$ $1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \dots$ $x < 1$	$x \leq a$, gdy $m > 0$ $x < a$, gdy $m < 0$.

⁽¹⁾ Przy m naturalnym szereg jest skończony i zawiera $m+1$ wyrazów o współczynnikach w postaci $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n}$, tablicę współczynników dwumianowych patrz na str. 207.

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$(1 \pm x)^{-1/3}$	$1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-3/2}$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-5/2}$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots)$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-4}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 +$ $+ 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \dots)$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-5}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 +$ $+ 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \dots)$	$ x < 1$
Funkcje trygonometryczne		
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a + x \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} +$ $+ \frac{x^4 \sin a}{4!} + \dots + \frac{x^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$	$ x < \infty$

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$\cos(x+a)$	$\cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} +$ $+\frac{x^4 \cos a}{4!} - \dots + \frac{x^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots +$ $+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots^{(1)}$	$ x < \frac{1}{2}\pi$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \frac{1}{4725}x^7 + \dots + \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots\right)^{(1)}$	$0 < x < \pi$
$\sec x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots +$ $+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \dots^{(2)}$	$ x < \frac{1}{2}\pi$
$\operatorname{cosec} x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 +$ $+\frac{127}{604800}x^7 + \dots + \frac{2^{2n-1}(1-B_n)}{(2n)!}x^{2n-1}^{(1)}$	$0 < x < \pi$
Funkcje wykładnicze		
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$ x < \infty$
$a^x = e^{x \ln a}$	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} +$ $+\frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$	$ x < \infty$

⁽¹⁾ B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).⁽²⁾ E_n są to liczby Eulera (patrz str. 382).

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$\frac{x}{e^x - 1}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \dots +$ $+ (-1)^{n+1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots^{(1)}$	$ x < 2\pi$
Funkcje logarytmiczne		
$\ln x$	$2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots \right)$	$x > 0$
$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots +$ $+ (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \pm \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} +$ $+\frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{nx^n} + \dots$	$x > \frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right)$	$-1 \leq x < 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{arctgh} x$	$2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right)$	$ x < 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{arctgh} x$	$2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots \right)$	$ x > 1$

⁽¹⁾ B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$\ln \sin x $	$\ln x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n(2n)!} - \dots^{(1)}$	$0 < x < \pi$
$\ln \cos x$	$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} - \dots^{(1)}$	$ x < \frac{1}{2}\pi$
$\ln \operatorname{tg} x $	$\ln x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n} + \dots^{(1)}$	$0 < x < \frac{1}{2}\pi$
Funkcje cyklometryczne		
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + \dots$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + \dots \right)$	$ x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots^{(2)}$	$ x < 1$ $ x > 1$

⁽¹⁾ B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).⁽²⁾ Pierwszy wyraz $\frac{1}{2}\pi$ bierze się ze znakiem „+” dla $x > 1$ i ze znakiem „-” dla $x < -1$.

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots \right)$	$ x < 1$
Funkcje hiperboliczne		
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$ x < \infty$
$\operatorname{tgh} x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots^{(1)}$	$ x < \frac{1}{2}\pi$
$\operatorname{ctgh} x$	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots^{(1)}$	$0 < x < \pi$
$\operatorname{sech} x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n x^{2n} \pm \dots^{(2)}$	$ x < \frac{1}{2}\pi$
$\operatorname{cosech} x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} + \dots^{(1)}$	$0 < x < \pi$

⁽¹⁾ B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).⁽²⁾ E_n są to liczby Eulera (patrz str. 382).

Tablica rozwinięć niektórych funkcji w szeregi potęgowe (cd.)

Funkcja	Rozwinięcie w szereg	Obszar zbieżności
Odwrotne funkcje hiperboliczne		
$\operatorname{arsinh} x$	$x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+1)} x^{2n+1} \pm \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{arcosh} x$	$\pm \left(\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \right)$	$x > 1$
$\operatorname{artgh} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{arctgh} x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots$	$ x > 1$

III. RACHUNEK CAŁKOWY

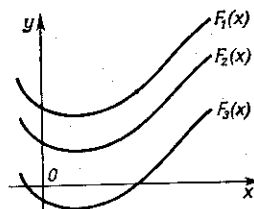
A. CAŁKI NIEOZNACZONE

1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia

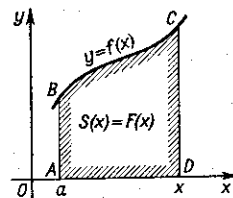
Funkcja pierwotna. Funkcją pierwotną danej funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$, określonej w pewnym obszarze domkniętym, nazywamy taką funkcję $F(x)$ określoną w tymże obszarze ⁽¹⁾, której pochodna jest równa $f(x)$, albo — co oznacza to samo: jest to funkcja, której różniczka równa się $f(x) dx$:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{lub} \quad dF(x) = f(x) dx.$$

Dana funkcja $f(x)$ ma nieskończenie wiele funkcji pierwotnych; różnica między dwiema funkcjami pierwotnymi $F_1(x)$ i $F_2(x)$ jest wiel-



Rys. 299



Rys. 300

kością stałą. Wykresy wszystkich funkcji pierwotnych $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... danej funkcji są tą samą krzywą. Wykresy te otrzymuje się jeden z drugiego za pomocą przesunięcia równoległego wzdłuż osi rzędnych (rys. 299).

⁽¹⁾ W niektórych przypadkach obszar oznaczoności funkcji pierwotnej $F(x)$ jest szerszy niż obszar oznaczoności danej funkcji $f(x)$. Jeżeli dana funkcja $f(x)$ jest oznaczona w pewnym przedziale spójnym z wyjątkiem poszczególnych punktów nieciągłości $x_1, x_2, \dots, x_n$, to może się zdarzyć, że obszar oznaczoności jej funkcji pierwotnej obejmuje również te punkty (patrz str. 424).

Interpretacja geometryczna funkcji pierwotnej. Jeżeli dana funkcja $f(x)$ przedstawiona jest w postaci krzywej we współrzędnych prostokątnych (rys. 300), to wartość funkcji pierwotnej jest równa polu $S(x)$ ograniczonemu krzywą $y = f(x)$, osią Ox i dwiema rzędnymi, stałą rzędną AB w punkcie $x = a$ i zmienną rzędną CD (w punkcie x). Dobierając dowolnie stałą a otrzymujemy różne funkcje pierwotne.

Przy tym pole $S(x)$ może być dodatnie lub ujemne ⁽¹⁾.

Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej. Dla każdej funkcji ciągłej w pewnym obszarze domkniętym istnieje funkcja pierwotna, również ciągła w tym obszarze. Funkcja mająca punkty nieciągłości przy niektórych poszczególnych wartościach x ma funkcję pierwotną, będącą bądź funkcją ciągłą, bądź też mającą punkty nieciągłości przy tychże wartościach x ⁽²⁾.

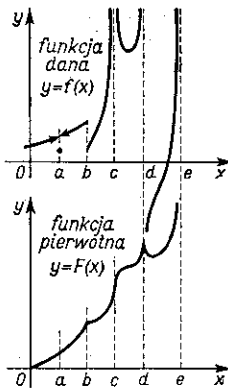
Przykłady.

$$1. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad F(x) = 3\sqrt[3]{x}, \quad 2. f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad F(x) = -\frac{1}{x}.$$

W pierwszym przykładzie funkcja $f(x)$ ma punkt nieciągłości $x = 0$, natomiast funkcja pierwotna $F(x)$ jest ciągła również i w tym punkcie. W drugim przykładzie zarówno funkcja $f(x)$ jak i jej funkcja pierwotna $F(x)$ mają punkt nieciągłości $x = 0$.

Przebieg wykresu funkcji pierwotnej $F(x)$ w różnych punktach nieciągłości funkcji danej $f(x)$ przedstawiono na rysunku 301. W przypadku nieciągłości usuwalnej (a) lub skoku skończonego (b) funkcji $f(x)$ funkcja pierwotna jest ciągła; w przypadku zaś skoku nieskończonego funkcji $f(x)$ funkcja pierwotna może być ciągła (krzywa $F(x)$ ma punkt przegięcia (c) lub ostrze krzywej (d) ze stycznią pionową) lub może także uciekać w nieskończoność (e). O analitycznym rozpoznaniu, jaki zachodzi przypadek, patrz str. 506 - 509.

Całka nieoznaczona. Wyrażenie ogólne $F(x) + C$ dla wszystkich funkcji pierwotnych danej funkcji $f(x)$ nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji $f(x)$ lub różniczki $f(x)dx$.



Rys. 301

⁽¹⁾ Pole figury $ABCD = \int_a^x f(x)dx$, patrz str. 487.

⁽²⁾ Patrz notkę na poprzedniej stronie.

Oznaczenie

$$F(x) + C = \int f(x)dx,$$

gdzie $\int$ jest znakiem całki, $f(x)$ jest daną funkcją podcałkową, a $f(x)dx$ jest wyrażeniem podcałkowym.

Za funkcję pierwotną $F(x)$ można zawsze przyjąć całkę oznaczoną (patrz str. 488) z dowolną stałą granicą dolną całkowania i zmienną granicą górną.

Całki funkcji elementarnych nie zawsze są funkcjami elementarnymi. Na str. 426 - 441 zestawione zostały sposoby odnajdowania całek (metody całkowania) najprostszych funkcji, które mają funkcje pierwotne elementarne; wyniki całkowania zestawione są w tablicy na str. 441 - 484 ⁽¹⁾.

Jeżeli całka nie jest funkcją elementarną, to w razie potrzeby (w interesie badań teoretycznych lub częstego zastosowania w praktyce) układane są tablice wartości danej funkcji. Takim funkcjom specjalnym (przy ustaleniu dowolnej stałej całkowania za pomocą podania dolnej granicy całkowania) nadaje się często specjalne nazwy, na przykład

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \text{li}(x) \text{ (logarytm całkowy),}$$

$$\int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi) \text{ (całka eliptyczna pierwszego rodzaju) }^{(2)}.$$

Jeżeli funkcja nie daje się scałkować w sposób elementarny albo jeżeli całkowanie funkcji jest zbyt skomplikowane, to często funkcję podcałkową rozwija się w szereg (patrz str. 413), który w przypadku jednostajnej zbieżności (patrz str. 383) można kolejno całkować wyraz po wyrazie. W celu całkowania przybliżonego można zastąpić funkcję wielomianem (patrz str. 818) ⁽³⁾.

2. Ogólne reguły całkowania

Całki podstawowe. Wzory na całkowanie, które możemy otrzymać przez odwrócenie podstawowych wzorów na różniczkowanie, zebrane są w tablicy na str. 426. Do całek podstawowych należy starać się sprawdzić daną całkę przy pomocy przekształceń algebraicznych lub trygonometrycznych lub też zastosowania reguł całkowania.

⁽¹⁾ W dalszym tekście termin „funkcja pierwotna” zastępowany jest słowem „całka”, w tablicach całek dowolna stała całkowania C została dla krótkości wszędzie pominięta.

⁽²⁾ O całkach eliptycznych patrz str. 437.

⁽³⁾ O całkowaniu graficznym, czyli budowaniu wykresu funkcji pierwotnej na podstawie wykresu danej funkcji, patrz str. 494 i 495.

Tablica całek podstawowych⁽¹⁾

Funkcje potęgowe	Funkcje wykładnicze
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,$	$\int e^x dx = e^x.$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x .$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$
Funkcje trygonometryczne	Funkcje hiperboliczne
$\int \sin x dx = -\cos x,$	$\int \sinh x dx = \cosh x,$
$\int \cos x dx = \sin x,$	$\int \cosh x dx = \sinh x,$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x ,$	$\int \operatorname{tgh} x dx = \ln \cosh x^{(2)},$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x ,$	$\int \operatorname{ctgh} x dx = \ln \sinh x ,$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x,$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x.$
Funkcje wymierne ($a > 0$).	Funkcje niewymierne ($a > 0$)
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}, \quad a > x ,$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artgh} \frac{x}{a} =$ $= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad x < a,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} =$ $= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})^{(3)},$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctgh} \frac{x}{a} =$ $= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, \quad x > a.$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} =$ $= \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} .$

⁽¹⁾ Stałe całkowania zostały tu i w następnych tablicach pominięte.⁽²⁾ Ponieważ $\cosh x > 0$, przeto znak bezwzględnej wartości jest w tym przypadku niepotrzebny.⁽³⁾ Wyrażenie $x + \sqrt{x^2 + a^2}$ jest zawsze dodatnie.

Podstawowe reguły całkowania podają własności całek nieoznaczonych, pozwalające na przekształcanie całki funkcji danej na całki innych funkcji.

1. Stały czynnik można wynieść przed znak całki:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

2. Całka sumy (lub różnicy) jest równa sumie (lub różnicy) całek poszczególnych składników:

$$\int (u+v-w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx^{(1)}.$$

3. Reguła podstawiania: jeżeli $x = \varphi(t)$, to

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

4. Całkowanie przez części:

$$\int u dv = uv - \int v du^{(2)}.$$

Ogólne wskazówki dotyczące znajdowania całek. Nie można podać ogólnej reguły znajdowania całki dowolnej funkcji elementarnej; technikę całkowania zdobywa się przez doświadczenie. W następnych paragrafach rozpatrzone są w sposób systematyczny przykłady całkowania najprostszych rodzajów funkcji elementarnych; na str. 441 - 484 podane są tablice, w których należy szukać danej całki lub podobnej całki.

Z metod ogólnych najczęściej stosowanych przy znajdowaniu całki, można wskazać następujące:

1. Przy pomocy przekształceń algebraicznych lub trygonometrycznych przedstawiamy funkcję podcałkową w postaci sumy kilku funkcji i rozkładamy całkę na sumę całek.

Przykłady.

$$\begin{aligned} \int (x+3)^2 (x^2+1) dx &= \int (x^4+6x^3+10x^2+6x+9) dx = \\ &= \frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{2} x^4 + \frac{10}{3} x^3 + 3x^2 + 9x + C. \end{aligned}$$

$$\int \sin 2x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

2. Jeżeli znana jest (np. z tablic) $\int f(x) dx = F(x)$, to

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \quad \int f(x+b) dx = F(x+b) + C,$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

gdzie $a \neq 0$.

⁽¹⁾ u, v, w są to funkcje zmiennej x .⁽²⁾ u i v są to funkcje zmiennej x .

Przykłady.

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+(x+a)^2} = \arctg(x+a) + C.$$

3. Jeżeli wyrażenie podcałkowe jest ułamkiem, którego licznik jest różniczką mianownika, to całka równa się logarytmowi mianownika:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Przykład.

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx = \ln|x^2+3x-5| + C.$$

3. Całkowanie funkcji wymiernych

Całki funkcji wymiernych zawsze można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych.

Reguły ogólne. Funkcję wymierną całkowitą (wielomian) całkuje się wyraz po wyrazie

$$\begin{aligned} \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx = \\ = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C. \end{aligned}$$

Funkcję wymierną ułamkową $\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx$ (gdzie $Q(x)$ i $P(x)$ są wielomianami stopnia odpowiednio: m i n) przekształca się w sposób algebraiczny do postaci dogodnej do całkowania w następujący sposób:

1° skracamy ułamek, aby wielomiany $Q(x)$ i $P(x)$ nie miały wspólnych czynników;

2° jeżeli $m \geq n$, to dzieląc $Q(x)$ przez $P(x)$ wyłączamy część całkowitą ułamka (patrz str. 159), którą całkuje się jak wielomian i trzeba jeszcze scałkować część ułamkową, w której licznik ma stopień niższy od stopnia mianownika;

3° mianownik $P(x)$ rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe (patrz str. 175):

$$P(x) = a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \dots (x^2+px+q)^r(x^2+p'x+q')^s \dots,$$

gdzie

$$\frac{1}{4}p^2 - q < 0, \quad \frac{1}{4}p'^2 - q' < 0, \quad \dots;$$

4° współczynnik a_0 w mianowniku wnosimy przed znak całki;

5° otrzymany ułamek właściwy nieskracalny, którego mianownik rozłożony jest na czynniki pierwsze przekształcamy na sumę ułamków prostych (patrz str. 159 i 160), które dają się łatwo całkować. Mogą zajść przy tym cztery przypadki:

1. Wszystkie pierwiastki mianownika są rzeczywiste i jednokrotne:

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\lambda).$$

Rozkład ma postać

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \dots + \frac{L}{x-\lambda},$$

gdzie

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \quad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \quad \dots, \quad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)} \quad (1).$$

Całkowanie przeprowadza się według wzoru

$$\int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha|.$$

Przykład.

$$I = \int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}, \quad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=0} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=1} = \frac{5}{3}, \quad C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2} \right) dx = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{5}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

2. Wszystkie pierwiastki mianownika są rzeczywiste, ale wśród nich są pierwiastki wielokrotne:

$$P(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)^m \dots$$

(1) Liczby $A, B, C, \dots, L$ można również otrzymać za pomocą metody współczynników nieoznaczonych (patrz str. 160).

Rozkład przybiera postać

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_i}{(x-a)^i} + \dots + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots$$

Stałe $A_1, A_2, \dots, A_i, B_1, B_2, \dots, B_m, \dots$ oblicza się przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych (patrz str. 159); całkowanie przeprowadza się według wzoru

$$\int \frac{A_1 dx}{x-a} = A_1 \ln|x-a|, \quad \int \frac{A_k dx}{(x-a)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \quad (k > 1).$$

Przykład.

$$I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx, \quad \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych prowadzi do równań

$$A+B_1=1, \quad -3A-2B_1+B_2=0, \quad 3A+B_1-B_2+B_3=0, \quad -A=1,$$

skąd

$$A=-1, \quad B_1=2, \quad B_2=1, \quad B_3=2,$$

$$I = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

3. Wśród pierwiastków mianownika znajdują się pierwiastki zespolone sprzężone

$$P(x) = (x-a)^i (x-\beta)^m \dots (x^2+px+q) (x^2+p'x+q') \dots,$$

przy czym

$$\frac{1}{4}p^2 < q, \quad \frac{1}{4}p'^2 < q', \quad \dots$$

Rozkład na postać

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_i}{(x-a)^i} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \dots$$

Stałe oblicza się przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych (patrz str. 151).

Całkowanie wyrażenia $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ przeprowadza się według wzoru

$$\int \frac{(Cx+D)dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} C \ln|x^2+px+q| + \frac{D-\frac{1}{2}Cp}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}} \arctg \frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}.$$

Przykład.

$$I = \int \frac{4dx}{x^3+4x}, \quad \frac{4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych prowadzi do równań

$$A+C=0, \quad D=0, \quad 4A=4,$$

skąd $A=1, C=-1, D=0$, zatem

$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C_1$$

(w danym przypadku nie ma wyrazu zawierającego arcus tangens).

4. Mianownik zawiera pierwiastki zespolone sprzężone wielokrotnie:

$$P(x) = (x-a)^k (x-\beta)^l \dots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \dots$$

Rozkład ma postać

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m} + \dots + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \dots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n} + \dots$$

Stałe oblicza się przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych (str. 159).

Całkowanie wyrażenia $\frac{C_mx+D}{(x^2+px+q)^m}$ przeprowadza się w następujący sposób: Przekształca się licznik

$$C_mx+D_m = \frac{1}{2} C_m(2x+p) + \left(D_m - \frac{1}{2} C_m p \right).$$

Szukana całkę rozkłada się na dwa składniki. Pierwszy z nich całkuje się od razu

$$\int \frac{C_m}{2} \cdot \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^m} = -\frac{C_m}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

a drugi (bez współczynnika) — według wzoru na obniżenie wykładnika potęgi:

$$(1) \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{x + \frac{1}{2}p}{2(m-1) \left(q - \frac{1}{4}p^2\right) (x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1) \left(q - \frac{1}{4}p^2\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}.$$

Przykład.

$$I = \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx,$$

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych prowadzi do układu równań

$$A+C_1=0, \quad -2C_1+D_1=0, \quad 2A+C_1-2D_1+C_2=2,$$

$$-2C_1+D_1-2C_2+D_2=2, \quad A-2D_1-2D_2=13,$$

skąd $A=1$, $C_1=-1$, $D_1=-2$, $C_2=-3$, $D_2=-4$, zatem

$$I = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right) dx = \ln|x-2| - \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x \right) - \left(-\frac{3}{2(x^2+1)} + \int \frac{4dx}{(x^2+1)^2} \right).$$

Ale ze wzoru (1) wynika, że

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x,$$

skąd ostatecznie mamy

$$I = \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \arctg x + C.$$

Wyłączenie wymiernej części całki (metoda Ostrogradskiego). Całką funkcji ułamkowej wymiernej jest funkcja elementarna złożona z części wymiernej (czyli ułamka algebraicznego) i części przestępnej

(zawierającej logarytmy i arcus tangensy); część wymierna występuje przy tym tylko w drugim i w czwartym z rozważanych przypadków, to znaczy tylko wtedy, gdy mianownik funkcji podcałkowej zawiera pierwiastki wielokrotne (rzeczywiste lub zespolone). Część wymierną można znaleźć bez całkowania przy pomocy metody Ostrogradskiego i sprowadzić obliczenie całki do przypadków, w których mianownik zawiera tylko pierwiastki jednokrotne. Metoda polega na wykonaniu następujących czynności:

Mianownik $P(x)$ funkcji podcałkowej $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (ułamka właściwego nieskracalnego, patrz str. 429) ma postać

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \dots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \dots$$

Można go rozłożyć na dwa czynniki $P_1(x)$ i $P_2(x)$, gdzie $P_2(x)$ jest iloczynem wszystkich czynników wchodzących w skład $P(x)$ i wziętych w pierwszej potęgę:

$$P_2(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \dots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \dots,$$

zatem

$$P_1(x) = (x-\alpha)^{k-1} (x-\beta)^{l-1} \dots (x^2+px+q)^{m-1} (x^2+p'x+q')^{n-1} \dots \quad (1)$$

Daną całkę można przedstawić w postaci

$$(A) \quad \int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx$$

(wzór Ostrogradskiego), gdzie $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ są wielomianami wiadomymi stopnia odpowiednio r , s i t , $Q(x)$ jest wielomianem wiadomym stopnia nie wyższego niż $r-1$, a $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ są wielomianami niewiadomymi stopni nie wyższych niż $s-1$ i odpowiednio $t-1$:

$$Q_1(x) = ax^{s-1} + bx^{s-2} + \dots + d, \quad Q_2(x) = ex^{t-1} + fx^{t-2} + \dots + h.$$

Różniczkowanie (A) daje

$$(B) \quad \frac{Q(x)}{P(x)} = \left[\frac{Q_1(x)}{P_1(x)} \right]' + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}.$$

Współczynniki niewiadome wielomianów $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ wyznacza się z równania (B) metodą współczynników nieoznaczonych.

Znając wielomiany $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, sprowadzamy obliczanie całki danej do wyznaczenia całki $\int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx$, w której mianownik funkcji podcałkowej nie zawiera pierwiastków wielokrotnych.

(1) Znajdowanie wielomianów $P_1(x)$ i $P_2(x)$ nie sprawia trudności, jeżeli znany jest rozkład $P(x)$ na czynniki, tzn. jeżeli wyznaczone są wszystkie pierwiastki równania $P(x) = 0$. Ale $P_1(x)$ i $P_2(x)$ można także wyznaczyć nie rozwiązując tego równania: w tym celu wystarczy scałkować wielomian $P(x)$ i znaleźć największy wspólny dzielnik wielomianów $P(x)$ i $P'(x)$ (patrz str. 157). Ten największy wspólny dzielnik jest równy $P_1(x)$, a $P_2(x) = P(x)/P_1(x)$.

Przykład.

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} dx.$$

Mamy tu

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1, \\ P &= (x^3 + x^2 + x + 1)^2, \\ Q &= x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2, \\ Q_1 &= ax^2 + bx + c, \\ Q_2 &= ex^2 + fx + g. \end{aligned}$$

Wzór (B) daje

$$\frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1} \right) + \frac{ex^2 + fx + g}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

skąd

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2 &= (2ax + b)(x^3 + x^2 + x + 1) - \\ &- (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + (ex^2 + fx + g)(x^3 + x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach x w obu częściach otrzymamy układ równań względem a, b, c, e, f, g :

$$\begin{aligned} 1. e &= 0, & 2. -a + f &= 1, & 3. -2b + f + g &= 1, \\ 4. a - b - 3c + f + g &= 4, & 5. 2a - 2c + f + g &= 3, & 6. b - c + g &= 2. \end{aligned}$$

W równaniach 2-6 współczynnik $e = 0$ został pominięty. Stąd

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -1, \quad e = 0, \quad f = \frac{3}{4}, \quad g = \frac{3}{4}.$$

A więc

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} dx &= \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{3}{4} \int \frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx. \end{aligned}$$

Ostatnia całka równa się $\arctg x$.

Tablice całek funkcji wymiernych patrz str. 441 - 484.

4. Całkowanie funkcji niewymiernych

Całki funkcji niewymiernych nie zawsze wyrażają się funkcjami elementarnymi. W najprostszych przypadkach całki funkcji

niewymiernych można sprowadzić do całek funkcji wymiernych za pomocą następujących podstawień:

Całka (*)	Podstawienie
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t,$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \dots\right) dx$	$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t,$
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	gdzie r jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $n, m, \dots$ Jedno z trzech podstawień Eulera:
1° przypadek, gdy $a > 0$ (2)	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a} x,$
2° przypadek, gdy $c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c},$
3° przypadek, gdy trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste różne:	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-a)$
$ax^2+bx+c = a(x-a)(x-\beta)$	

Całkę $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ można także sprowadzić do jednej z trzech następujących postaci:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx,$$

gdyż trójmian kwadratowy ax^2+bx+c można zawsze przedstawić w postaci sumy lub różnicy dwóch kwadratów.

Przykłady.

$$\begin{aligned} 1. 4x^2 + 16x + 17 &= 4\left(x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{4}\right) = \\ &= 4\left[(x+2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4\left[x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right], \quad \text{gdzie } x_1 = x+2. \\ 2. x^2 + 3x + 1 &= x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 = \\ &= x_1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2, \quad \text{gdzie } x_1 = x + \frac{3}{2}. \\ 3. -x^2 + 2x &= 1 - x^2 + 2x - 1 = 1^2 - (x-1)^2 = 1^2 - x_1^2, \\ &\quad \text{gdzie } x_1 = x-1. \end{aligned}$$

(*) Symbol R oznacza funkcję wymierną wyrażenia, do którego się odnosi. Liczby $n, m, \dots$ są to liczby naturalne.

(*) Jeżeli $a < 0$ i trójmian ax^2+bx+c ma pierwiastki zespolone, to funkcja podcałkowa nie istnieje dla żadnej wartości x , ponieważ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ jest liczbą urojoną przy wszystkich rzeczywistych wartościach x .

Całki takie oblicza się przy pomocy następujących podstawień:

Całka	Podstawienie
$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx$	$x = a \sinh t$ lub $x = a \operatorname{tg} t$
$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$	$x = a \cosh t$ lub $x = a \operatorname{sech} t$
$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$	$x = a \sin t$ lub $x = a \cos t$

Powyższe podstawienia prowadzą do całek wyrażeń wymiernych zawierających funkcje trygonometryczne lub hiperboliczne (patrz str. 438 lub 441).

Całkowanie różniczek dwumiennych. Różniczką dwumienną nazywamy wyrażenie

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a m, n, p — dowolnymi liczbami wymiernymi (dodatnimi lub ujemnymi).

Twierdzenie Czebyszewa. Całka

$$(1) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx$$

może być wyrażona za pomocą funkcji elementarnych tylko w trzech następujących przypadkach:

1. p jest liczbą całkowitą. Wyrażenie $(a+bx^n)^p$ rozwija się według wzoru na dwumian Newtona (patrz str. 206) i funkcja podcałkowa po otwarciu nawiasów jest sumą składników postaci cx^k , które łatwo scałkować.

2. $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą. Całkę (1) sprowadza się do całki

funkcji wymiernej przez podstawienie $t = \sqrt[n]{a+bx^n}$, gdzie r jest mianownikiem ułamka p .

3. $\frac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą. Całkę (1) sprowadza się do całki

funkcji wymiernej przez podstawienie $t = \sqrt[n]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, gdzie r jest mianownikiem ułamka p .

Przykłady.

$$1. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3} dx,$$

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = 2 \quad (\text{przypadek 2}).$$

Podstawienie

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt,$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^3-1)^3 dt = \frac{3}{7} t^4(4t^3-7) + C.$$

$$2. \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^3(1+x^3)^{-1/4} dx,$$

$$m = 3, \quad n = 3, \quad p = -\frac{1}{4}; \quad \frac{m+1}{n} = \frac{4}{3}, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{13}{12};$$

nie zachodzi ani jeden z warunków 1, 2, 3 — całka nie jest funkcją elementarną.

Całki eliptyczne. Całki postaci

$$(A) \quad \int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}) dx, \\ \int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}) dx$$

z reguły nie wyrażają się przez funkcje elementarne. W przypadkach gdy całki te nie są funkcjami elementarnymi, nazywamy je *całkami eliptycznymi* ⁽¹⁾.

Całki typów (A) nie dające się wyrazić przez funkcje elementarne mogą być za pomocą przekształceń sprowadzone do funkcji elementarnych i do całek następujących trzech typów:

$$(B) \quad \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

gdzie $0 < k < 1$.

Przy pomocy podstawienia $t = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$) można sprowadzić całki (B) do następującej postaci Legendre'a:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (\text{całka eliptyczna pierwszego rodzaju}), \\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi \quad (\text{całka eliptyczna drugiego rodzaju}), \\ \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (\text{całka eliptyczna trzeciego rodzaju}).$$

⁽¹⁾ W przypadkach gdy całki (A) można wyrazić przez funkcje elementarne, nazywamy je *całkami pseudoeliptycznymi*.

Odpowiednie całki oznaczone z dolną granicą całkowania równą zeru oznaczają się następującymi symbolami:

$$(I) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = F(k, \varphi),$$

$$(II) \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = E(k, \varphi),$$

$$(III) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1+h \sin^2 \psi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \Pi(h, k, \varphi),$$

gdzie $k < 1$.

Całki te nazywamy *całkami eliptycznymi niepełnymi*, odpowiednio *pierwszego, drugiego, trzeciego rodzaju*. Gdy $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, całki (I) i (II) nazywamy *całkami eliptycznymi pełnymi* i oznaczamy

$$K = F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$E = E\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi.$$

Tablica wartości całek eliptycznych niepełnych i pełnych pierwszego i drugiego rodzaju patrz str. 92, 93.

Tablice całek funkcji niewymiernych — patrz str. 450-464.

5. Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkę postaci

$$(A) \quad \int R(\sin x, \cos x) dx \quad (1)$$

można zawsze sprowadzić do całki funkcji wymiernej za pomocą podanego poniżej podstawienia uniwersalnego, w szczególnych zaś przypadkach również i prostszymi sposobami.

Podstawienie uniwersalne dla całki (A)

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{skąd} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(1) Symbol R oznacza funkcję wymierną wyrażenia, do którego się odnosi.

Na przykład

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx &= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2} \int \left(t+2+\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \frac{1}{4} t^2 + t + \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{4} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + C. \end{aligned}$$

Jeżeli w funkcjach podcałkowych całki (A) $\sin x$ i $\cos x$ występują tylko w potęgach o wykładniku całkowitym, to całkę tę można najprościej sprowadzić do funkcji wymiernej za pomocą podstawienia $t = \operatorname{tg} x$.

Metody uproszczone w niektórych często spotykanych przypadkach:

1. $\int R(\sin x) \cos x dx$. Podstawienie $t = \sin x$, $\cos x dx = dt$.
2. $\int R(\cos x) \sin x dx$. Podstawienie $t = \cos x$, $\sin x dx = -dt$.
3. $\int \sin^n x dx$. Jeżeli n jest nieparzyste ($n = 2m+1$), to mamy $\int \sin^{2m+1} x dx = \int (1-\cos^2 x)^m \sin x dx = - \int (1-t^2)^m dt$,
gdzie $t = \cos x$.

Jeżeli n jest parzyste ($n = 2m$), to mamy

$$\int \sin^{2m} x dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1-\cos t)^m dt,$$

gdzie $t = 2x$.

Wykładnik potęgi jest teraz dwa razy mniejszy; otwieramy nawias w wyrażeniu $(1-\cos t)^m$ (patrz niżej, przypadek 4).

4. $\int \cos^n x dx$. Jeżeli n jest nieparzyste ($n = 2m+1$), to mamy $\int \cos^{2m+1} x dx = \int (1-\sin^2 x)^m \cos x dx = \int (1-t^2)^m dt$,
gdzie $t = \sin x$.

Jeżeli n jest parzyste ($n = 2m$), to mamy

$$\int \cos^{2m} x dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1+\cos t)^m dt,$$

gdzie $t = 2x$.

Wykładnik potęgi jest teraz dwa razy mniejszy; otwieramy nawias i całkujemy wyraz po wyrazie.

5. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ sprowadza się do przypadków 1 lub 2, jeżeli przynajmniej jedna z liczb m i n jest nieparzysta.

Przykłady.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int t^2 (1 - t^2) dt,$$

gdzie $t = \sin x$,

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = - \int \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \text{gdzie } t = \cos x.$$

Jeżeli obie liczby m i n są parzyste, to potęgi mogą być obniżone dwukrotnie, podobnie jak w przypadkach 3 i 4. Wykorzystuje się przy tym wzory

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Przykład.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx + \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

6. $\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x dt - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx =$
 $= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$ itd. Iterując powyższe postępowanie sprowadzamy całkę do całki $\int dx = x + C$, jeżeli n jest parzyste, albo do całki $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$, jeżeli n jest nieparzyste.

7. $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ całkuje się podobnie jak przykład 6.

Tablice całek funkcji trygonometrycznych — patrz str. 464 - 477.

6. Całkowanie innych funkcji przestępnych

Funkcje wykładnicze. Całki postaci

$$\int R(e^{mx}, e^{nx}, \dots, e^{px}) dx,$$

gdzie $m, n, \dots, p$ są liczbami wymiernymi, sprowadza się przy pomocy podstawienia $t = e^x$ do całki $\int \frac{1}{t} R(t^m, t^n, \dots, t^p) dt$, a tę całkę sprowa-

dza się do całki funkcji wymiernej (patrz str. 428) przy pomocy podstawienia $z = \sqrt[r]{t}$, gdzie r jest najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników ułamków $m, n, \dots, p$.

Funkcje hiperboliczne. Całki zawierające $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{ctgh} x$ oblicza się zazwyczaj wyrażając funkcje hiperboliczne przez wykładnicze (str. 248). Najczęściej spotykane przypadki $\int \sinh^n x dx$, $\int \cosh^n x dx$, $\int \sinh^n x \cosh^m x dx$ całkuje się przy pomocy metod analogicznych do tych, które stosowaliśmy przy całkowaniu funkcji trygonometrycznych (str. 438 - 440).

Zastosowanie całkowania przez części. Funkcje zawierające logarytmy, funkcje cyklometryczne oraz odwrotne funkcje hiperboliczne, iloczyny x^m przez $\ln x$, e^{ax} , $\sin ax$ lub $\cos ax$ całkuje się najczęściej przez zastosowanie (raz lub kilka razy) wzoru całkowania przez części (str. 427). W niektórych przypadkach kilkakrotne zastosowanie całkowania przez części doprowadza do całki wyjściowej i wtedy obliczenie tej całki sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego. Tak na przykład oblicza się całki $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$ (w całkach tych całkowanie przez części stosuje się dwukrotnie, przy czym za u bierze się w obu przypadkach funkcję jednego typu — wykładniczą lub trygonometryczną).

W przypadkach $\int P(x) e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin bx dx$, $\int P(x) \cos bx dx$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, również stosuje się wzór na całkowanie przez części.

Tablice całek funkcji przestępnych znajdują się na str. 477 - 484

7. Tablice całek nieoznaczonych

Wskazówki ogólne

1. Stała całkowania została wszędzie pominięta z wyjątkiem przypadków, w których całka może być przedstawiona w różnych postaciach z różnymi stałymi dowolnymi.

2. W tych przypadkach, w których funkcja pierwotna jest przedstawiona w postaci szeregu potęgowego, funkcja ta nie może być wyrażona przez funkcje elementarne.

Całki funkcji wymiernych

Całki zawierające $ax+b$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = ax+b$.

$$1. \int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (\text{gdy } n = -1, \text{ patrz 2}).$$

$$2. \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln|X|.$$

$$3. \int x X^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1},$$

$$n \neq -1, -2 \text{ (gdy } n = -1, -2, \text{ patrz 5 i 6)}.$$

$$4. \int x^m X^n dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dX; \text{ wzór ten stosuje się, gdy}$$

$m < n$ lub gdy m jest całkowite, a n ułamkowe; w tych przypadkach wyrażenie $(X-b)^m$ rozwijamy według wzoru na dwumian Newtona, str. 206; $n \neq -1, -2, \dots, -m$.

$$5. \int \frac{x dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|X|.$$

$$6. \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln|X|.$$

$$7. \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2} \right).$$

$$8. \int \frac{x dx}{X^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}} \right), n \neq 1, 2.$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln|X| \right).$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X - 2b \ln|X| - \frac{b^2}{X} \right).$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln|X| + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right).$$

$$12. \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}} \right),$$

$$n \neq 1, 2, 3.$$

$$13. \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3 \ln|X| \right).$$

$$14. \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{2} - 3bX + 3b^2 \ln|X| + \frac{b^3}{X} \right).$$

$$15. \int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{a^4} \left(X - 3b \ln|X| - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2} \right).$$

$$16. \int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{a^4} \left(\ln|X| + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3} \right).$$

$$17. \int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}} \right),$$

$$n \neq 1, 2, 3, 4.$$

$$18. \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$19. \int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{ax}{X} \right).$$

$$20. \int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2} \right).$$

$$21. \int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(-a)^i x^i}{iX^i} \right], n \geq 1.$$

$$22. \int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$23. \int \frac{dx}{x^2X^2} = -a \left(\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right).$$

$$24. \int \frac{dx}{x^2X^3} = -a \left(\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right).$$

$$25. \int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}} \left[-\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - n a \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right],$$

$$n \geq 2.$$

$$26. \int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3} \left(a^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2} \right).$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4} \left(3a^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x} \right).$$

$$28. \int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5} \left(6a^3 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x} \right).$$

$$29. \int \frac{dx}{x^3 X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}} \left[-\sum_{i=3}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2 X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right], n \geq 3.$$

$$30. \int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} \binom{m+n-2}{i} \frac{X^{m-i-1} (-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}};$$

jeżeli mianownik któregośkolwiek wyrazu pod znakiem sumy równa się zeru, to taki wyraz zastępuje się składnikiem

$$\binom{m+n-2}{n-1} (-a)^{m-1} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

Oznaczenie: $\Delta = bf - ag$

$$31. \int \frac{ax+b}{fx+g} dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2} \ln |fx+g|.$$

$$32. \int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \ln \left| \frac{fx+g}{ax+b} \right|, \Delta \neq 0.$$

$$33. \int \frac{xdx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{b}{a} \ln |ax+b| - \frac{g}{f} \ln |fx+g| \right), \Delta \neq 0.$$

$$34. \int \frac{dx}{(ax+b)^2 (fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln \left| \frac{fx+g}{ax+b} \right| \right), \Delta \neq 0.$$

$$35. \int \frac{xdx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right|, a \neq b.$$

$$36. \int \frac{x^2 dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln |a+x| + \frac{b^2 - 2ab}{(b-a)^2} \ln |b+x|, a \neq b.$$

$$37. \int \frac{dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} \right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right|, a \neq b.$$

$$38. \int \frac{xdx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} \right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right|, a \neq b.$$

$$39. \int \frac{x^2 dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x} \right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right|, a \neq b.$$

Całki zawierające ax^2+bx+c , gdzie $a \neq 0$

Oznaczenia: $X = ax^2+bx+c$, $\Delta = 4ac-b^2$.

$$40. \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \Delta > 0,$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{artgh} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \right|, \Delta < 0.$$

$$41. \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$42. \int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X} \right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$43. \int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$44. \int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a} \ln |X| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$45. \int \frac{xdx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$46. \int \frac{xdx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$47. \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln |X| + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$48. \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \text{ (patrz 40).}$$

$$49. \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \int \frac{xdx}{X^n} \text{ (patrz 43 i 46).}$$

$$50. \int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2} dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{X^n}, m \neq 2n-1 \text{ (gdy } m=2n-1, \text{ patrz 51).}$$

51. $\int \frac{x^{2n-1} dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3} dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3} dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{X^n}.$
52. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{|X|} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 40}).$
53. $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}}.$
54. $\int \frac{dx}{x^2 X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{|X|}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 40}).$
55. $\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}, \quad m > 1.$
56. $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)} \left(f \ln \frac{(fx+g)^2}{|X|} \right) + \frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 40}).$

Całki zawierające $a^2 \pm x^2$, gdzie $a \neq 0$

Przyjmujemy $a > 0$ i oznaczamy

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, & \text{gdy } X = a^2 + x^2, \\ \operatorname{artgh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, & \text{gdy } X = a^2 - x^2, \\ \operatorname{arctgh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|, & \text{gdy } X = a^2 - x^2 \text{ i } |x| > a. \end{cases}$$

W przypadku gdy we wzorze występuje znak podwójny, to górny znak dotyczy przypadku, gdy $X = a^2 + x^2$, a dolny dotyczy przypadku, gdy $X = a^2 - x^2$.

57. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} Y.$
58. $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^2} Y.$
59. $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2 X^2} + \frac{3x}{8a^4 X} + \frac{3}{8a^4} Y.$

60. $\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2 X^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{X^n}.$
61. $\int \frac{x dx}{X} = \pm \frac{1}{2} \ln |X|.$
62. $\int \frac{x dx}{X^2} = \mp \frac{1}{2X}.$
63. $\int \frac{x dx}{X^3} = \mp \frac{1}{4X^2}.$
64. $\int \frac{x dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nX^n}, \quad n \neq 0.$
65. $\int \frac{x^2 dx}{X} = \pm x \mp a Y.$
66. $\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \mp \frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a} Y.$
67. $\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \mp \frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2 X} \pm \frac{1}{8a^3} Y.$
68. $\int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}, \quad n \neq 0.$
69. $\int \frac{x^3 dx}{X} = \pm \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |X|.$
70. $\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln |X|.$
71. $\int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$
72. $\int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}, \quad n > 1.$
73. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{|X|}.$
74. $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{|X|}.$
75. $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2 X^2} + \frac{1}{2a^4 X} + \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{|X|}.$
76. $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^2 x} \mp \frac{1}{a^2} Y.$

$$77. \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^4 x} \mp \frac{x}{2a^4 X} \mp \frac{3}{2a^5} Y.$$

$$78. \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^6 x} \mp \frac{x}{4a^4 X^2} \mp \frac{7x}{8a^6 X} \mp \frac{15}{8a^7} Y.$$

$$79. \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2a^2 x^2} \mp \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{|X|}.$$

$$80. \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^4 x^3} \mp \frac{1}{2a^4 X} \mp \frac{1}{a^6} \ln \frac{x^2}{|X|}.$$

$$81. \int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{2a^6 x^3} \mp \frac{1}{a^6 X} \mp \frac{1}{4a^4 X^2} \mp \frac{3}{2a^8} \ln \frac{x^2}{|X|}.$$

$$82. \int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2 c^2 \mp b^2} \left(c \ln |b+cx| - \frac{c}{2} \ln |X| \mp \frac{b}{a} Y \right).$$

Całki zawierające $a^3 \pm x^3$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = a^3 \pm x^3$; jeżeli we wzorze występuje znak podwójny, to górny znak dotyczy przypadku, gdy $X = a^3 + x^3$, a dolny dotyczy przypadku, gdy $X = a^3 - x^3$.

$$83. \int \frac{dx}{X} = \pm \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a \pm x)^3}{|a^2 \mp ax + x^2|} + \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \arctg \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}}.$$

$$84. \int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3 X} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 83}).$$

$$85. \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{6a} \ln \frac{|a^2 \mp ax + x^2|}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a \sqrt{3}} \arctg \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}}.$$

$$86. \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3 X} + \frac{1}{3a^3} \int \frac{x dx}{X} \quad (\text{patrz 85}).$$

$$87. \int \frac{x^2 dx}{X} = \pm \frac{1}{3} \ln |X|.$$

$$88. \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}.$$

$$89. \int \frac{x^3 dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 83}).$$

$$90. \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 83}).$$

$$91. \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{x^3}{X} \right|.$$

$$92. \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3 X} + \frac{1}{3a^6} \ln \left| \frac{x^3}{X} \right|.$$

$$93. \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{a^3 x} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{x dx}{X} \quad (\text{patrz 85}).$$

$$94. \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{a^6 x} \mp \frac{x^2}{3a^6 X} \mp \frac{4}{3a^6} \int \frac{x dx}{X} \quad (\text{patrz 85}).$$

$$95. \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2a^3 x^2} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 83}).$$

$$96. \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^6 x^2} \mp \frac{x}{3a^6 X} \mp \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{patrz 83}).$$

Całki zawierające $a^4 + x^4$, gdzie $a \neq 0$

$$97. \int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3 \sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} \right| + \frac{1}{2a^3 \sqrt{2}} \arctg \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}.$$

$$98. \int \frac{x dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \arctg \frac{x^2}{a^2}.$$

$$99. \int \frac{x^2 dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a \sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} \right| + \frac{1}{2a \sqrt{2}} \arctg \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}.$$

$$100. \int \frac{x^3 dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln(a^4 + x^4).$$

Całki zawierające $a^4 - x^4$, gdzie $a \neq 0$

$$101. \int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a}.$$

$$102. \int \frac{x dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{|a^2 - x^2|}.$$

$$103. \int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$104. \int \frac{x^3 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln |a^4 - x^4|.$$

Niektóre przypadki rozkładu ułamka na ułamki proste

$$105. \frac{1}{(a+bx)(f+gx)} = \frac{1}{fb-ag} \left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx} \right).$$

$$106. \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c},$$

$$\text{gdzie } A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}, \quad B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}, \quad C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

$$107. \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d},$$

$$\text{gdzie } A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}, \quad B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)} \text{ itd.}$$

$$108. \frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} = \frac{1}{fb-ag} \left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2} \right).$$

Całki funkcji niewymiernych

Całki zawierające $\sqrt{x}$ i $a^2 \pm b^2 x$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenia:

$$X = a^2 \pm b^2 x, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{x}}{a}, & \text{gdy } x = a^2 + b^2 x, \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}} \right|, & \text{gdy } x = a^2 - b^2 x. \end{cases}$$

W przypadku gdy we wzorze występuje podwójny znak, to górny znak dotyczy przypadku, gdy $X = a^2 + b^2 x$, a dolny dotyczy przypadku, gdy $X = a^2 - b^2 x$.

$$109. \int \frac{\sqrt{x} dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y.$$

$$110. \int \frac{\sqrt{x^3} dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2 \sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y.$$

$$111. \int \frac{\sqrt{x} dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2 X} \pm \frac{1}{ab^3} Y.$$

$$112. \int \frac{\sqrt{x^3} dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^3 X} + \frac{3a^2 \sqrt{x}}{b^4 X} - \frac{3a}{b^5} Y.$$

$$113. \int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab} Y.$$

$$114. \int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2 \sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3} Y.$$

$$115. \int \frac{dx}{X^2 \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2 X} + \frac{1}{a^3 b} Y.$$

$$116. \int \frac{dx}{X^2 \sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2 X \sqrt{x}} \mp \frac{3b^2 \sqrt{x}}{a^4 X} \mp \frac{3b}{a^5} Y.$$

Inne całki zawierające $\sqrt{x}$

$$117. \int \frac{\sqrt{x} dx}{a^4 + x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+a\sqrt{2x+a^2}}{x-a\sqrt{2x+a^2}} \right| + \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x},$$

$a \neq 0.$

$$118. \int \frac{dx}{(a^4 + x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+a\sqrt{2x+a^2}}{x-a\sqrt{2x+a^2}} \right| + \frac{1}{a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x},$$

$a \neq 0.$

$$119. \int \frac{\sqrt{x} dx}{a^4 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} \right| - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}, \quad a \neq 0.$$

$$120. \int \frac{dx}{(a^4 - x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} \right| + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}, \quad a \neq 0.$$

Całki zawierające $\sqrt{ax+b}$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = ax+b$.

$$121. \int \sqrt{X} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{X^3}.$$

$$122. \int x \sqrt{X} dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$$

$$123. \int x^2 \sqrt{X} dx = \frac{2(15a^2x^3 - 12abx + 8b^3) \sqrt{X^3}}{105a^3}.$$

$$124. \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$$

$$125. \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2} \sqrt{X}.$$

$$126. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^3) \sqrt{X}}{15a^3}.$$

$$127. \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{artgh} \sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{X} - \sqrt{b}}{\sqrt{X} + \sqrt{b}} \right|, \quad b > 0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{X}{-b}}, \quad b < 0.$$

$$128. \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = 2\sqrt{X} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$129. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$130. \int \frac{\sqrt{X}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$131. \int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$132. \int \sqrt{X^3} dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}.$$

$$133. \int x\sqrt{X^3} dx = \frac{2}{35a^2} (5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5}).$$

$$134. \int x^2\sqrt{X^3} dx = \frac{2}{a^3} \left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5} \right).$$

$$135. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$136. \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2} \left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}} \right).$$

$$137. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3} \left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}} \right).$$

$$138. \int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$139. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 127}).$$

$$140. \int X^{\pm n/2} dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}.$$

$$141. \int xX^{\pm n/2} dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n} \right).$$

$$142. \int x^2X^{\pm n/2} dx = \frac{2}{a^3} \left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n} \right).$$

$$143. \int \frac{X^{n/2} dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b \int \frac{X^{(n-2)/2}}{x} dx.$$

$$144. \int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$$

$$145. \int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b} \int \frac{dx}{xX^{n/2}}.$$

Całki zawierające $\sqrt{ax+b}$ i $\sqrt{fx+g}$, gdzie $a \neq 0$ i $f \neq 0$

Oznaczenia: $X = ax+b$, $Y = fx+g$, $\Delta = bf-ag$.

$$146. \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \frac{2}{\sqrt{-af}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{-\frac{fX}{aY}}, \quad af < 0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{af}} \operatorname{artgh} \sqrt{\frac{fX}{aY}} = \frac{1}{2\sqrt{af}} \ln |\sqrt{aY} + \sqrt{fX}|, \quad af > 0.$$

$$147. \int \frac{x dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad (\text{patrz 146}).$$

$$148. \int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}.$$

$$149. \int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{-4f}} \arctg \frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-4f}}, \quad 4f < 0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4f}} \ln \left| \frac{f\sqrt{X} - \sqrt{4f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{4f}} \right|, \quad 4f > 0.$$

$$150. \int \sqrt{XY} dx = \frac{4+2aY}{4af} \sqrt{XY} - \frac{4^2}{8af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad (\text{patrz 146}).$$

$$151. \int \sqrt{\frac{Y}{X}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{XY} - \frac{4}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} \quad (\text{patrz 146}).$$

$$152. \int \frac{\sqrt{X} dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{4}{f} \int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 149}).$$

$$153. \int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a} \left(\sqrt{X} Y^n - n \int \frac{Y^{n-1} dx}{\sqrt{X}} \right).$$

$$154. \int \frac{dx}{\sqrt{X} Y^n} = -\frac{1}{(n-1)4} \left[\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2} \right) a \int \frac{dx}{\sqrt{X} Y^{n-1}} \right].$$

$$155. \int \sqrt{X} Y^n dx = \frac{1}{(2n+3)f} \left(2\sqrt{X} Y^{n+1} + 4 \int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}} \right) \quad (\text{patrz 153}).$$

$$156. \int \frac{\sqrt{X} dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f} \left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X} Y^{n-1}} \right).$$

Całki zawierające $\sqrt{a^2 - x^2}$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = a^2 - x^2$.

$$157. \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$158. \int x \sqrt{X} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$159. \int x^2 \sqrt{X} dx = -\frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$160. \int x^3 \sqrt{X} dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2 \frac{\sqrt{X^3}}{3}.$$

$$161. \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$162. \int \frac{\sqrt{X}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$163. \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$164. \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$165. \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$$

$$166. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$167. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2 \sqrt{X}.$$

$$168. \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$169. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

$$170. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2 x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$171. \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$172. \int x \sqrt{X^3} dx = -\frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$$

$$173. \int x^2 \sqrt{X^3} dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2 x \sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4 x \sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$174. \int x^3 \sqrt{X^3} dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2 \sqrt{X^5}}{5}.$$

$$175. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$176. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2} x \sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$177. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3}{2} a \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|$$

$$178. \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$$

$$179. \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$180. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$181. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

$$182. \int \frac{dx}{x \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$183. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4} \left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$$

$$184. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2 x^2 \sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

Całki zawierające $\sqrt{x^2 + a^2}$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = x^2 + a^2$.

$$185. \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} + a^2 \ln |x + \sqrt{X}| \right) + C_1.$$

$$186. \int x \sqrt{X} dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$187. \int x^2 \sqrt{X} dx = \frac{1}{4} x \sqrt{X^3} - \frac{1}{8} a^2 \left(x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} x \sqrt{X^3} - \frac{1}{8} a^2 \left(x \sqrt{X} + a^2 \ln |x + \sqrt{X}| \right) + C_1.$$

$$188. \int x^3 \sqrt{X} dx = \frac{\sqrt{X^6}}{5} - \frac{a^2 \sqrt{X^3}}{3}.$$

$$189. \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$190. \int \frac{\sqrt{X}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln |x + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$191. \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$192. \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C = \ln |a + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$193. \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

$$194. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} x \sqrt{X} - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{X} - \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$195. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2 \sqrt{X}.$$

$$196. \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$197. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

$$198. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$199. \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln |x + \sqrt{X}| \right) + C_1.$$

$$200. \int x\sqrt{X^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$$

$$201. \int x^2\sqrt{X^3} dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16} \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C = \\ = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16} \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$202. \int x^3\sqrt{X^3} dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$$

$$203. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3 \ln \left| \frac{a+\sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$204. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2} x\sqrt{X} + \frac{3}{2} a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2} x\sqrt{X} + \frac{3}{2} a^2 \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$205. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2} \sqrt{X} - \frac{3}{2} a \ln \left| \frac{a+\sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$206. \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

$$207. \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$208. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$209. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

$$210. \int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a+\sqrt{X}}{x} \right|.$$

$$211. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$$

$$212. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5} \ln \left| \frac{a+\sqrt{X}}{x} \right|.$$

Całki zawierające $\sqrt{x^2-a^2}$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenie: $X = x^2 - a^2$.

$$213. \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{X} - a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{1}{2} (x\sqrt{X} - a^2 \ln|x+\sqrt{X}|) + C_1.$$

$$214. \int x\sqrt{X} dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$215. \int x^2\sqrt{X} dx = \frac{1}{4} x\sqrt{X^3} + \frac{1}{8} a^2 \left(x\sqrt{X} - a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{1}{4} x\sqrt{X^3} + \frac{1}{8} a^2 (x\sqrt{X} - a^2 \ln|x+\sqrt{X}|) + C_1.$$

$$216. \int x^3\sqrt{X} dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$$

$$217. \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$218. \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$219. \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$220. \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$221. \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

$$222. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} x\sqrt{X} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C = \\ = \frac{1}{2} x\sqrt{X} + \frac{1}{2} a^2 \ln|x+\sqrt{X}| + C_1.$$

$$223. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$$

$$224. \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$225. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$$

$$226. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^3} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$227. \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{1}{4} \left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln |x + \sqrt{X}| \right) + C_1.$$

$$228. \int x\sqrt{X^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$$

$$229. \int x^2\sqrt{X^3} dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + C = \\ = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln |x + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$230. \int x^3\sqrt{X^3} dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$$

$$231. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3 \arccos \frac{a}{x}.$$

$$232. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2} x\sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2} x\sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$233. \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^5} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^3} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2} a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$234. \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

$$235. \int \frac{xdx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$236. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln |x + \sqrt{X}| + C_1.$$

$$237. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

$$238. \int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$239. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$$

$$240. \int \frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^3\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \arccos \frac{a}{x}.$$

Całki zawierające $\sqrt{ax^2+bx+c}$, gdzie $a \neq 0$

Oznaczenia: $X = ax^2+bx+c$, $\Delta = 4ac-b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$.

$$241. \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2\sqrt{aX} + 2ax + b| + C, \quad a > 0, \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arsinh} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_1, \quad a > 0, \quad \Delta > 0, \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b|, \quad a > 0, \quad \Delta = 0, \\ = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad a < 0, \quad \Delta < 0.$$

$$242. \int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$243. \int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}} \left(\frac{1}{X} + 2k \right).$$

$$244. \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

$$245. \int \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$246. \int X \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b) \sqrt{X}}{8a} \left(X + \frac{3}{2k} \right) + \frac{3}{8k^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$247. \int X^2 \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b) \sqrt{X}}{12a} \left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2} \right) + \frac{5}{16k^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$248. \int X^{(2n+1)/2} dx = \frac{(2ax+b) X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)} \int X^{(2n-1)/2} dx.$$

$$249. \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$250. \int \frac{x dx}{X \sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{4\sqrt{X}}.$$

$$251. \int \frac{x dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}} \quad (\text{patrz 244}).$$

$$252. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2} \right) \sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$253. \int \frac{x^2 dx}{X \sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a4\sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$254. x \sqrt{X} dx = \frac{X \sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} \sqrt{X} - \frac{b}{4ak} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241}).$$

$$255. \int xX \sqrt{X} dx = \frac{X^2 \sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a} \int X \sqrt{X} dx \quad (\text{patrz 246}).$$

$$256. \int xX^{(2n+1)/2} dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a} \int X^{(2n+1)/2} dx \quad (\text{patrz 248}).$$

$$257. \int x^2 \sqrt{X} dx = \left(x - \frac{5b}{6a} \right) \frac{X \sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2} \int \sqrt{X} dx \quad (\text{patrz 245}).$$

$$258. \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b \right| + C, \quad c > 0,$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arsinh} \frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1, \quad c > 0, \quad \Delta > 0,$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{bx+2c}{x} \right|, \quad c > 0, \quad \Delta = 0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}}, \quad c < 0, \quad \Delta < 0.$$

$$259. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{patrz 258}).$$

$$260. \int \frac{\sqrt{X} dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{1}{2} b \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241 i 258}).$$

$$261. \int \frac{\sqrt{X} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{1}{2} b \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{patrz 241 i 258}).$$

$$262. \int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x} dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{1}{2} b \int X^{(2n-1)/2} dx + c \int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x} dx \quad (\text{patrz 248 i 260}).$$

$$263. \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx} \sqrt{ax^2+bx}.$$

$$264. \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$265. \int \frac{x dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$266. \int \sqrt{2ax-x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$267. \int \frac{dx}{(ax^2+b) \sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{ag-bf}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2+g}}, \quad ag-bf > 0,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b} \sqrt{bf-ag}} \ln \left| \frac{\sqrt{b} \sqrt{fx^2+g} + x \sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2+g} - x \sqrt{bf-ag}} \right|, \quad ag-bf < 0.$$

Całki zawierające inne wyrażenia niewymierne

$$268. \int \sqrt[n]{ax+b} dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a} \sqrt[n]{ax+b}, \quad a \neq 0.$$

$$269. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}, \quad a \neq 0.$$

$$270. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na} \ln \left| \frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}} \right|, \quad a \neq 0.$$

$$271. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na} \arccos \frac{a}{\sqrt{x^n}}, \quad a \neq 0.$$

$$272. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}, \quad a \neq 0.$$

Wzory rekurencyjne dla całki różniczki dwumiennej

$$273. \int x^m (ax^n+b)^p dx =$$

$$= \frac{1}{m+np+1} (x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb \int x^m (ax^n+b)^{p-1} dx),$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)} (-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1) \int x^m (ax^n+b)^{p+1} dx),$$

$$= \frac{1}{(m+1)b} (x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1) \int x^{m+n} (ax^n+b)^p dx),$$

$$= \frac{1}{a(m+np+1)} (x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b \int x^{m-n} (ax^n+b)^p dx).$$

Całki funkcji trygonometrycznych ⁽¹⁾

Całki zawierające $\sin ax$, gdzie $a \neq 0$

$$274. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$$

$$275. \int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$276. \int \sin^3 ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax.$$

⁽¹⁾ Całki funkcji zawierających $\sin x$ i $\cos x$ w połączeniu z funkcjami hiperbolicznymi i funkcją e^{ax} są na str. 478 i 480.

$$277. \int \sin^4 ax dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$$

$$278. \int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx$$

(n jest całkowite, > 0).

$$279. \int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.$$

$$280. \int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos ax.$$

$$281. \int x^3 \sin ax dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \cos ax.$$

$$282. \int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx, \quad n > 0.$$

$$283. \int \frac{\sin ax}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (1).$$

$$284. \int \frac{\sin ax}{x^2} dx = -\frac{\sin ax}{x} + a \int \frac{\cos ax}{x} dx \quad (\text{patrz } 322).$$

$$285. \int \frac{\sin ax}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx \quad (\text{patrz } 324).$$

$$286. \int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$287. \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$$

$$288. \int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \sin^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$289. \int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}, \quad n > 1.$$

⁽¹⁾ Całkę oznaczoną $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ nazywamy *sinusem całkowym* i oznaczamy $\operatorname{Si} x$:

$$\operatorname{Si} x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

$$290. \int \frac{x dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2} \left(ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n(ax)^{2n+1} + \dots \right) \quad (1).$$

$$291. \int \frac{x dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln |\sin ax|.$$

$$292. \int \frac{x dx}{\sin^n ax} = -\frac{x \cos ax}{(n-1)a \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\sin^{n-2} ax}, \quad n > 2.$$

$$293. \int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right).$$

$$294. \int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right).$$

$$295. \int \frac{x dx}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) \right|.$$

$$296. \int \frac{x dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) \right|.$$

$$297. \int \frac{\sin ax dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi \mp \frac{1}{2} ax \right).$$

$$298. \int \frac{dx}{\sin ax (1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi \mp \frac{1}{2} ax \right) + \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$299. \int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right).$$

$$300. \int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right).$$

$$301. \int \frac{\sin ax dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right).$$

$$302. \int \frac{\sin ax dx}{(1 - \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} ax \right).$$

(1) B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).

$$303. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{3 \sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1} \right).$$

$$304. \int \frac{dx}{1 - \sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$$

$$305. \int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad |a| \neq |b|$$

(gdy $|a| = |b|$, patrz 275).

$$306. \int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \arctg \frac{b \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + c}{\sqrt{b^2 - c^2}}, \quad b^2 > c^2,$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{b \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + c + \sqrt{c^2 - b^2}} \right|, \quad b^2 < c^2.$$

$$307. \int \frac{\sin ax dx}{b + c \sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}, \quad c \neq 0 \text{ (patrz 306)}.$$

$$308. \int \frac{dx}{\sin ax (b + c \sin ax)} = \frac{1}{ab} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right| - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b + c \sin ax},$$

$b \neq 0$ (patrz 306).

$$309. \int \frac{dx}{(b + c \sin ax)^2} = \frac{c \cos ax}{a(b^2 - c^2)(b + c \sin ax)} + \frac{b}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}, \quad |b| \neq |c| \text{ (patrz 306)}.$$

$$310. \int \frac{\sin ax}{(b + c \sin ax)^2} dx = \frac{b \cos ax}{a(c^2 - b^2)(b + c \sin ax)} + \frac{c}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}, \quad |b| \neq |c| \text{ (patrz 306)}.$$

$$311. \int \frac{dx}{b^2 + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}} \arctg \frac{\sqrt{b^2 + c^2} \operatorname{tg} ax}{b}, \quad b > 0.$$

$$312. \int \frac{dx}{b^2 - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \arctg \frac{\sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{tg} ax}{b}, \quad b^2 > c^2, \quad b > 0,$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax - b} \right|, \quad c^2 > b^2, \quad b > 0.$$

Całki zawierające $\cos ax$, gdzie $a \neq 0$

$$313. \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

$$314. \int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$315. \int \cos^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax.$$

$$316. \int \cos^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$$

$$317. \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx.$$

$$318. \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}.$$

$$319. \int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax.$$

$$320. \int x^3 \cos ax \, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \sin ax.$$

$$321. \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx.$$

$$322. \int \frac{\cos ax}{x} \, dx = \ln |ax| - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots \quad (1).$$

$$323. \int \frac{\cos ax}{x^3} \, dx = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax}{x} \, dx \quad (\text{patrz } 283).$$

$$324. \int \frac{\cos ax}{x^n} \, dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} \, dx, \quad n \neq 1$$

(patrz 285).

$$325. \int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} ax + \frac{1}{4} \pi \right) \right|.$$

(1) Całkę oznaczoną $\int \frac{\cos t}{t} dt$ nazywamy *cosinusem całkowym* i oznaczamy przez $\operatorname{ci} x$:

$$\operatorname{ci} x = \gamma - \ln |x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots,$$

gdzie γ jest stałą Eulera (patrz str. 358).

$$326. \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$$

$$327. \int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right|.$$

$$328. \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}, \quad n > 1.$$

$$329. \int \frac{x}{\cos ax} \, dx = \frac{1}{a^2} \left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10 \cdot 8!} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n!)} + \dots \right) \quad (1).$$

$$330. \int \frac{x}{\cos^2 ax} \, dx = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln |\cos ax|.$$

$$331. \int \frac{x}{\cos^n ax} \, dx = \frac{x \sin ax}{(n-1)a \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\cos^{n-2} ax}, \quad n > 2.$$

$$332. \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax.$$

$$333. \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax.$$

$$334. \int \frac{x}{1 + \cos ax} \, dx = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$335. \int \frac{x}{1 - \cos ax} \, dx = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$336. \int \frac{\cos ax}{1 + \cos ax} \, dx = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax.$$

$$337. \int \frac{\cos ax}{1 - \cos ax} \, dx = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax.$$

$$338. \int \frac{dx}{\cos ax (1 + \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right| - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax.$$

$$339. \int \frac{dx}{\cos ax (1 - \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right| - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax.$$

(1) E_n są to liczby Eulera (patrz str. 382).

340. $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} ax.$
341. $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{1}{2} ax.$
342. $\int \frac{\cos ax}{(1+\cos ax)^2} dx = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} ax.$
343. $\int \frac{\cos ax}{(1-\cos ax)^2} dx = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} ax - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{1}{2} ax.$
344. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax} \right).$
345. $\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$
346. $\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, |a| \neq |b|$
(gdz $|a| = |b|$, patrz 314).
347. $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(b-c)\operatorname{tg} \frac{1}{2} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}, b^2 > c^2,$
 $= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \frac{(c-b)\operatorname{tg} \frac{1}{2} ax + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg} \frac{1}{2} ax - \sqrt{c^2-b^2}} \right|, b^2 < c^2.$
348. $\int \frac{\cos ax}{b+c\cos ax} dx = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b+c\cos ax}, c \neq 0$ (patrz 347).
349. $\int \frac{dx}{\cos ax(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} ax + \frac{1}{4} \pi \right) \right| - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b+c\cos ax}$
(patrz 347).
350. $\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c \sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2} \int \frac{dx}{b+c\cos ax},$
 $|b| \neq |c|$ (patrz 347).
351. $\int \frac{\cos ax}{(b+c\cos ax)^2} dx = \frac{b \sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2} \int \frac{dx}{b+c\cos ax},$
 $|b| \neq |c|$ (patrz 347).
352. $\int \frac{dx}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}, b > 0.$

$$353. \int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}, b^2 > c^2, b > 0,$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \frac{b \operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2-b^2}}{b \operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2-b^2}} \right|,$$

$$c^2 > b^2, b > 0.$$

Całki zawierające $\sin ax$ i $\cos ax$, gdzie $a \neq 0$

354. $\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax.$
355. $\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{1}{8} x - \frac{\sin 4ax}{32a}.$
356. $\int \sin^n ax \cos ax dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax, n \neq -1.$
357. $\int \sin ax \cos^n ax dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax, n \neq -1.$
358. $\int \sin^n ax \cos^m ax dx =$
 $= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax dx,$
 $m > 0, n > 0$ (obniżanie wykładnika potęgi n),
 $= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax dx,$
 $m > 0, n > 0$ (obniżanie wykładnika potęgi m).
359. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{tg} ax|.$
360. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right| - \frac{1}{\sin ax} \right].$
361. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right| + \frac{1}{\cos ax} \right).$
362. $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left(\lg |\operatorname{tg} ax| - \frac{1}{2\sin^2 ax} \right).$
363. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln |\operatorname{tg} ax| + \frac{1}{2\cos^2 ax} \right).$

$$364. \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2ax.$$

$$365. \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left[\frac{\sin ax}{2 \cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right| \right].$$

$$366. \int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2 \sin^2 ax} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right| \right).$$

$$367. \int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax},$$

$n \neq 1$ (patrz 361, 363).

$$368. \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax},$$

$n \neq 1$ (patrz 360, 362).

$$369. \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax},$$

$m > 0, n > 1$ (obniżanie wykładnika potęgi n),

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax},$$

$m > 1, n > 0$ (obniżanie wykładnika potęgi m).

$$370. \int \frac{\sin ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a \cos ax}.$$

$$371. \int \frac{\sin ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{2a \cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + C_1.$$

$$372. \int \frac{\sin ax}{\cos^n ax} dx = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax}.$$

$$373. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right|.$$

$$374. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \left[\frac{\sin ax}{2 \cos^2 ax} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right| \right].$$

$$375. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^n ax} dx = \frac{\sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}, \quad n \neq 1$$

(patrz 325, 326, 328).

$$376. \int \frac{\sin^3 ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln |\cos ax| \right).$$

$$377. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^3 ax} dx = \frac{1}{a} \left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax} \right).$$

$$378. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^n ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3) \cos^{n-3} ax} \right),$$

$n \neq 1, n \neq 3$.

$$379. \int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax dx}{\cos ax}, \quad n \neq 1.$$

$$380. \int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx =$$

$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx, \quad m \neq 1,$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m) \cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2} ax}{\cos^m ax} dx, \quad m \neq n,$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-1} ax}{\cos^{m-2} ax} dx, \quad m \neq 1.$$

$$381. \int \frac{\cos ax}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a \sin ax}.$$

$$382. \int \frac{\cos ax}{\sin^3 ax} dx = -\frac{1}{2a \sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$$

$$383. \int \frac{\cos ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax}.$$

$$384. \int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \left(\cos ax + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right| \right).$$

$$385. \int \frac{\cos^2 ax}{\sin^3 ax} dx = -\frac{1}{2a} \left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right| \right).$$

$$386. \int \frac{\cos^2 ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{(n-1)} \left(\frac{\cos ax}{a \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \right), \quad n \neq 1$$

(patrz 289).

387. $\int \frac{\cos^3 ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln |\sin ax| \right).$
388. $\int \frac{\cos^3 ax}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax} \right).$
389. $\int \frac{\cos^3 ax}{\sin^n ax} dx = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax} \right],$
 $n \neq 1, n \neq 3.$
390. $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin ax} dx, \quad n \neq 1.$
391. $\int \frac{\cos^n ax}{\sin^m ax} dx =$
 $= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n ax}{\sin^{m-2} ax} dx, \quad m \neq 1,$
 $= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin^m ax} dx, \quad m \neq n,$
 $= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin^{m-2} ax} dx, \quad m \neq 1.$
392. $\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$
393. $\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right|.$
394. $\int \frac{\sin ax}{\cos ax(1 \pm \cos ax)} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax} \right|.$
395. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} dx = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax} \right|.$
396. $\int \frac{\sin ax}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} dx = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} ax \right) \right|.$
397. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} dx = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$
398. $\int \frac{\sin ax}{\sin ax \pm \cos ax} dx = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|.$

399. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax \pm \cos ax} dx = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|$
400. $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} ax \pm \frac{1}{8} \pi \right) \right|.$
401. $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a} \ln \left| 1 \pm \operatorname{tg} \frac{1}{2} ax \right|.$
402. $\int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax + \theta}{2} \right|, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$
 (oznaczenia: $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}$)
403. $\int \frac{\sin ax}{b + c \cos ax} dx = -\frac{1}{ac} \ln |b + c \cos ax|.$
404. $\int \frac{\cos ax}{b + c \sin ax} dx = \frac{1}{ac} \ln |b + c \sin ax|.$
405. $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + f \sin ax} = \int \frac{d(x + \theta/a)}{b + \sqrt{c^2 + f^2} \sin(ax + \theta)}, \quad c \neq 0, \quad f \neq 0.$
 (oznaczenia: $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{c}{f}, \quad \text{patrz 306}.$)
406. $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{abc} \arctg \left(\frac{c}{b} \operatorname{tg} ax \right), \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$
407. $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{2abc} \ln \left| \frac{c \operatorname{tg} ax + b}{c \operatorname{tg} ax - b} \right|, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$
408. $\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}, \quad a \neq b$
 (gdzie $a = b$, patrz 354).

Całki zawierające $\operatorname{tg} ax$, gdzie $a \neq 0$

409. $\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|.$
410. $\int \operatorname{tg}^2 ax dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$
411. $\int \operatorname{tg}^3 ax dx = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a} \ln |\cos ax|.$

$$412. \int \operatorname{tg}^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax dx, \quad n > 3.$$

$$413. \int x \operatorname{tg} ax dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x^5}{15} + \frac{2a^5 x^7}{105} + \frac{17a^7 x^9}{2835} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots (1).$$

$$414. \int \frac{\operatorname{tg} ax}{x} dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots (1).$$

$$415. \int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{tg}^{n+1} ax, \quad n \neq -1.$$

$$416. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm \frac{1}{2} x + \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|.$$

$$417. \int \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} ax \pm 1} dx = \frac{1}{2} x \mp \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax|.$$

Całki zawierające $\operatorname{ctg} ax$, gdzie $a \neq 0$

$$418. \int \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|.$$

$$419. \int \operatorname{ctg}^2 ax dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$$

$$420. \int \operatorname{ctg}^3 ax dx = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a} \ln |\sin ax|.$$

$$421. \int \operatorname{ctg}^n ax dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax dx, \quad n > 3.$$

$$422. \int x \operatorname{ctg} ax dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3 x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n} B_n a^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots (1).$$

$$423. \int \frac{\operatorname{ctg} ax}{x} dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots (1).$$

(1) B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).

$$424. \int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax, \quad n \neq -1.$$

$$425. \int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} ax \pm 1} dx \quad (\text{patrz } 417).$$

Całki innych funkcji przestępnych

Całki funkcji hiperbolicznych

W całkach 426 - 446 zakładamy, że $a \neq 0$.

$$426. \int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax.$$

$$427. \int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax.$$

$$428. \int \sinh^2 ax dx = \frac{1}{2a} \sinh ax \cosh ax - \frac{1}{2} x.$$

$$429. \int \cosh^2 ax dx = \frac{1}{2a} \sinh ax \cosh ax + \frac{1}{2} x.$$

$$430. \int \sinh^n ax dx = \frac{1}{an} \sinh^{n-1} ax \cosh ax - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax dx, \quad n > 0, \\ = \frac{1}{a(n+1)} \sinh^{n+1} ax \cosh ax - \frac{n+2}{n+1} \int \sinh^{n+2} ax dx, \quad n < 0, n \neq -1.$$

$$431. \int \cosh^n ax dx = \frac{1}{an} \sinh ax \cosh^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax dx, \quad n > 0, \\ = -\frac{1}{a(n+1)} \sinh ax \cosh^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1} \int \cosh^{n+2} ax dx, \quad n < 0, n \neq -1.$$

$$432. \int \frac{dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tgh} \frac{1}{2} ax \right|.$$

$$433. \int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{ax}.$$

$$434. \int x \sinh ax dx = \frac{1}{a} x \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax.$$

$$435. \int x \cosh ax dx = \frac{1}{a} x \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax.$$

$$436. \int \tgh ax dx = \frac{1}{a} \ln |\cosh ax|.$$

$$437. \int \ctgh ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax|.$$

$$438. \int \tgh^2 ax dx = x - \frac{\tgh ax}{a}.$$

$$439. \int \ctgh^2 ax dx = x - \frac{\ctgh ax}{a}.$$

$$440. \int \sinh ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sinh bx \cosh ax - b \cosh bx \sinh ax),$$

$$a^2 \neq b^2.$$

$$441. \int \cosh ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax),$$

$$a^2 \neq b^2.$$

$$442. \int \cosh ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sinh bx \sinh ax - b \cosh bx \cosh ax),$$

$$a^2 \neq b^2.$$

$$443. \int \sinh ax \sin ax dx = \frac{1}{2a} (\cosh ax \sin ax - \sinh ax \cos ax).$$

$$444. \int \cosh ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sinh ax \cos ax + \cosh ax \sin ax).$$

$$445. \int \sinh ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\cosh ax \cos ax + \sinh ax \sin ax).$$

$$446. \int \cosh ax \sin ax dx = \frac{1}{2a} (\sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax).$$

Całki funkcji wykładniczych

W całkach 447 - 464 zakładamy, że $a \neq 0$.

$$447. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$448. \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$$

$$449. \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$$

$$450. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$451. \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln |x| + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \quad (1).$$

$$452. \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \right), \quad n \neq 1.$$

$$453. \int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} \right|.$$

$$454. \int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln |b+ce^{ax}|, \quad b \neq 0.$$

$$455. \int \frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}} dx = \frac{1}{ac} \ln |b+ce^{ax}|.$$

$$456. \int \frac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \arctg \left(e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}} \right), \quad bc > 0;$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \left| \frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}} \right|, \quad bc < 0.$$

$$457. \int \frac{x e^{ax}}{(1+ax)^2} dx = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$$

$$458. \int e^{ax} \ln |x| dx = \frac{e^{ax} \ln |x|}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad (\text{patrz 451}).$$

$$459. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$460. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

(1) Całkę oznaczoną $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ nazywamy funkcją całkowo-wykładniczą i oznaczamy przez $\text{Ei } x$. Gdy $x < 0$, całka w punkcie $t = 0$ jest rozbieżna; w tym przypadku przez $\text{Ei } x$ należy rozumieć wartość główną całki niewłaściwej (patrz str. 506):

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = \gamma + \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \dots$$

(γ jest to stała Eulera, patrz str. 358).

$$461. \int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx \quad (\text{patrz } 447, 459).$$

$$462. \int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx \quad (\text{patrz } 447, 460).$$

$$463. \int x e^{ax} \sin bx dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \sin bx - 2ab \cos bx].$$

$$464. \int x e^{ax} \cos bx dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \cos bx + 2ab \sin bx].$$

Całki funkcji logarytmicznych

$$465. \int \ln |x| dx = x \ln |x| - x.$$

$$466. \int (\ln |x|)^2 dx = x(\ln |x|)^2 - 2x \ln |x| + 2x.$$

$$467. \int (\ln |x|)^3 dx = x(\ln |x|)^3 - 3x(\ln |x|)^2 + 6x \ln |x| - 6x.$$

$$468. \int (\ln |x|)^n dx = x(\ln |x|)^n - n \int (\ln |x|)^{n-1} dx, \quad n \neq -1.$$

$$469. \int \frac{dx}{\ln |x|} = \ln |\ln |x|| + \ln |x| + \frac{(\ln |x|)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln |x|)^3}{3 \cdot 3!} + \dots^{(1)}.$$

$$470. \int \frac{dx}{(\ln |x|)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln |x|)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln |x|)^{n-1}}, \quad n \neq 1 \\ (\text{patrz } 469).$$

⁽¹⁾ Całkę oznaczoną $\int \frac{dx}{\ln |x|}$ nazywamy *logarytmem całkowym* i oznaczamy przez lix.

Gdy $x > 1$, całka w punkcie $t = 1$ jest rozbieżna. W tym przypadku przez lix należy rozumieć wartość główną całki niewłaściwej (str. 506). Logarytm całkowity jest związany z funkcją całkowo-wykładniczą (patrz str. 479) zależnością lix = ci (ln |x|).

$$471. \int x^m \ln |x| dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln |x|}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right), \quad m \neq -1.$$

$$472. \int x^m (\ln |x|)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln |x|)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln |x|)^{n-1} dx, \\ m, n \neq -1 \quad (\text{patrz } 470).$$

$$473. \int \frac{(\ln |x|)^n}{x} dx = \frac{(\ln |x|)^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$$

$$474. \int \frac{\ln |x|}{x^m} dx = -\frac{\ln |x|}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}}, \quad m \neq 1.$$

$$475. \int \frac{(\ln |x|)^n}{x^m} dx = -\frac{(\ln |x|)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln |x|)^{n-1}}{x^m} dx, \\ m \neq 1 \quad (\text{patrz } 474).$$

$$476. \int \frac{x^m}{\ln |x|} dx = \int \frac{e^{-y}}{y} dy, \quad y = -(m+1) \ln |x| \quad (\text{patrz } 451).$$

$$477. \int \frac{x^m}{(\ln |x|)^n} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln |x|)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m}{(\ln |x|)^{n-1}} dx, \\ n \neq 1.$$

$$478. \int \frac{dx}{x \ln |x|} = \ln |\ln |x||.$$

$$479. \int \frac{dx}{x^n \ln |x|} = \ln |\ln |x|| - (n-1) \ln |x| + \frac{(n-1)^2 (\ln |x|)^2}{2 \cdot 2!} - \\ - \frac{(n-1)^3 (\ln |x|)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$480. \int \frac{dx}{x (\ln |x|)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln |x|)^{n-1}}, \quad n \neq 1.$$

$$481. \int \frac{dx}{x^p (\ln |x|)^n} = \frac{-1}{x^{p-1} (n-1) (\ln |x|)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1} \int \frac{dx}{x^p (\ln |x|)^{n-1}}, \\ n \neq 1.$$

$$482. \int \ln |\sin x| dx = x \ln |x| - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \dots - \\ - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \dots^{(1)}$$

⁽¹⁾ B_n są to liczby Bernoulliego (patrz. str. 382).

$$483. \int \ln |\cos x| dx =$$

$$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots \quad (1)$$

$$484. \int \ln |\operatorname{tg} x| dx =$$

$$= x \ln |x| - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \quad (1).$$

$$485. \int \sin \ln |x| dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln |x| - \cos \ln |x|).$$

$$486. \int \cos \ln |x| dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln |x| + \cos \ln |x|).$$

$$487. \int e^{ax} \ln |x| dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln |x| - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad (\text{patrz 451}).$$

Całki funkcji cyklometrycznych

W całkach 488-511 zakładamy, że $a \neq 0$.

$$488. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$489. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{4} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$490. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{1}{3} x^3 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$491. \int \frac{\arcsin \frac{x}{a}}{x} dx =$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{a^7} + \dots$$

$$492. \int \frac{\arcsin \frac{x}{a}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$493. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$494. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{4} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$495. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{1}{3} x^3 \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$496. \int \frac{\arccos \frac{x}{a}}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \ln |x| - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{a^7} - \dots$$

$$497. \int \frac{\arccos \frac{x}{a}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$498. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} a \ln |a^2 + x^2|.$$

$$499. \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} ax.$$

$$500. \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{6} ax^2 + \frac{1}{6} a^3 \ln(a^2 + x^2).$$

$$501. \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx, \quad n \neq -1.$$

$$502. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x} dx = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} - \frac{x^7}{7^2 a^7} + \dots, \quad |x| < |a|.$$

$$503. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a^2 + x^2}{x^2} \right|.$$

$$504. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)},$$

$$n \neq 1.$$

$$505. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} a \ln(a^2 + x^2).$$

$$506. \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} ax.$$

(1) B_n są to liczby Bernoulliego (patrz str. 382).

$$507. \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{6} a x^2 - \frac{1}{6} a^3 \ln(a^2 + x^2).$$

$$508. \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx, \quad n \neq -1.$$

$$509. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x} dx = \frac{1}{2} \pi \ln|x| - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \dots$$

$$510. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$511. \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)}, \quad n \neq 1.$$

Całki odwrotnych funkcji hiperbolicznych

$$512. \int \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a \neq 0.$$

$$513. \int \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2}, \quad a \neq 0.$$

$$514. \int \operatorname{artg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{artg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} a \ln|a^2 - x^2|, \quad a \neq 0.$$

$$515. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} a \ln|x^2 - a^2|, \quad a \neq 0.$$

B. CAŁKI OZNACZONE

8. Podstawowe pojęcia i twierdzenia

Określenie. Całką oznaczoną funkcji $y = f(x)$ w granicach od a do b , określonej w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ ⁽¹⁾, przy czym może być $a < b$ (przypadek A) albo $a > b$ (przypadek B), nazywamy liczbę otrzymaną w sposób następujący:

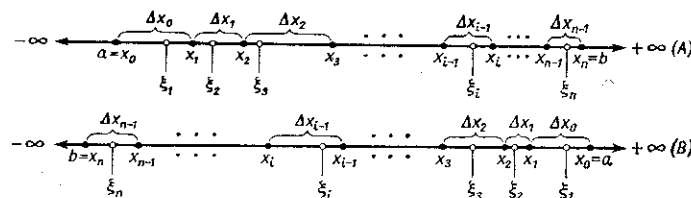
⁽¹⁾ Pojęcie całki oznaczonej może być uogólnione również dla funkcji określonych w dowolnym obszarze spójnym (przedział otwarty albo jednostronnie domknięty, półoś albo cała prosta liczbową) albo w obszarze spójnym z wyłączeniem skończonej ilości punktów odosobnionych. Całki rozważane w takich obszarach uogólnionych zalicza się do całek niewłaściwych (patrz str. 502–509).

1° przedział $\langle a, b \rangle$ rozkładamy na n podprzedziałów, tzw. przedziałów elementarnych, za pomocą dowolnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, z dołączeniem liczb $x_0 = a$ i $x_n = b$, dobranych w taki sposób, żeby było

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ (w przypadku A) lub

$a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_i > \dots > x_{n-1} > x_n = b$ (w przypadku B);

2° wewnątrz (lub na jednym z końców) każdego z przedziałów elementarnych $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ wybieramy dowolny punkt ξ_i (rys. 302): $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (w przypadku A) lub $x_{i-1} \geq \xi_i \geq x_i$ (w przypadku B);



Rys. 302

3° wartość $f(\xi_i)$ funkcji $f(x)$ w tych wybranych punktach ξ_i mnożymy przez odpowiednie różnice $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$, czyli przez długość odpowiedniego przedziału elementarnego $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ wziętego ze znakiem „+” w przypadku A i ze znakiem „-” w przypadku B;

4° dodajemy wszystkie otrzymane n iloczynów $f(\xi_i) \Delta x_{i-1}$;

5° obliczamy granicę otrzymanej sumy

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_{i-1},$$

gdy długość każdego przedziału elementarnego Δx_{i-1} dąży do zera (a więc $n \rightarrow \infty$).

Jeżeli granica taka istnieje i nie zależy od wyboru punktów x_i i ξ_i , to granicę tę nazywamy całką oznaczoną:

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_{i-1}.$$

We wzorze (1) symbol $\int$ nazywamy *znakiem całki*, liczbę a — *granicą dolną*, liczbę b — *granicą górną*, funkcję $f(x)$ — *funkcją podcałkową*, wyrażenie $f(x)dx$ — *wyrażeniem podcałkowym*, literę x — *zmienną całkowania*. Wartość całki zależy tylko od postaci funkcji f i od granic a i b , lecz nie zależy od zmiennej całkowania, którą oznaczyć można dowolną literą. Na przykład

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

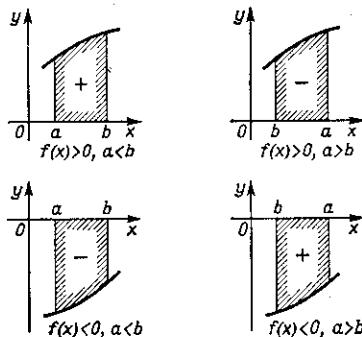
Twierdzenie o istnieniu całki oznaczonej. Całka oznaczona funkcji ciągłej w przedziale $\langle a, b \rangle$ istnieje, tzn. granica (1) istnieje i nie zależy od wyboru liczb x_i i ξ_i (1).

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej funkcji ciągłej.

Całka (1) jest liczbowo równa polu figury ograniczonej częścią wykresu funkcji $y = f(x)$, osią Ox i rzędnymi w punktach $x = a$ i $x = b$, wziętymi ze znakiem „+” lub „-” stosownie do rysunku 303. Jeżeli krzywa przecina oś Ox raz lub kilka razy wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$, to całka jest liczbowo równa sumie algebraicznej pól figur znajdujących się po obu stronach osi Ox .

Całka o równych granicach całkowania. Z określenia wynika, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$



Rys. 303

Podstawowe własności całki oznaczonej wyznaczają następujące twierdzenia:

1. Twierdzenie o przestawianiu granic całkowania. Przy przestawianiu granic całkowania całka zmienia znak na przeciwny:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

(1) Całka oznaczona istnieje także dla funkcji ograniczonej mającej w przedziale $\langle a, b \rangle$ skończoną ilość punktów nieciągłości.

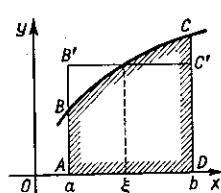
Funkcję, dla której istnieje całka oznaczona w danym przedziale, nazywamy *całkowalną* w tym przedziale.

2. Twierdzenie o rozkładzie całki. Dla dowolnych liczb a, b, c zachodzi związek

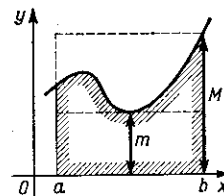
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Całka sumy algebraicznej kilku funkcji jest równa odpowiedniej sumie algebraicznej całek tych funkcji

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx.$$



Rys. 304



Rys. 305

4. Stały czynnik można wynieść przed znak całki:

$$\int_a^b c f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

5. Twierdzenie o wartości średniej. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$, to wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$ istnieje przynajmniej jedna taka liczba ξ ($a < \xi < b$ w przypadku A, $a > \xi > b$ w przypadku B, patrz str. 484 i 485), że

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Interpretacja geometryczna tego twierdzenia pokazana jest na rysunku 304; pomiędzy punktami a i b istnieje taki punkt ξ , że pole figury $ABCD$ jest równe polu prostokąta $AB'C'D$.

Uogólnione twierdzenie o wartości średniej. Dla całki iloczynu dwóch funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$ (gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą, a $\varphi(x)$ ma stały znak w przedziale $\langle a, b \rangle$) istnieje wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$ przynajmniej jedna taka liczba ξ , że

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

6. Twierdzenie o oszacowaniu całki. Wartość całki oznaczonej jest zawarta między iloczynami najmniejszej i największej wartości funkcji podcałkowej przez długość przedziału całkowania:

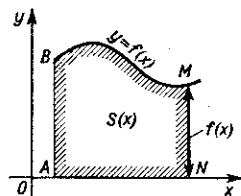
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

gdzie m jest najmniejszą wartością, a M — największą wartością funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Sens geometryczny tego twierdzenia widoczny jest z rysunku 305.

7. Twierdzenie Leibniza-Newtona. Całka oznaczona o górnej granicy zmiennej $\int_a^x f(t) dt$ (¹) jest funkcją ciągłą $F(x)$ tej granicy, pierwotną względem funkcji podcałkowej:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{lub} \quad d \int_a^x f(t) dt = f(x) dx.$$



Rys. 306

Interpretacja geometryczna tego twierdzenia polega na tym, że pochodna zmiennego pola figury $S(x)$ podanej na rysunku 306 równa się zmiennej rzędnej końcowej NM (zarówno pole jak i rzędną końcową należy brać ze znakiem „+” lub „-”, zgodnie z rysunkiem 303 na str. 486).

8. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego (wyrażenie całki oznaczonej przez nieoznaczoną). Jeżeli

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

to

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Prawą część równania (2) piszemy często z użyciem symbolu podstawienia:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad \text{lub} \quad F(x)|_a^b.$$

Stała całkowania C przy podstawieniu granic całkowania znika i dlatego można ją pominąć przy obliczaniu całki oznaczonej według wzoru (2). Tak więc równanie (2) można napisać w postaci

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b.$$

(¹) Zmienna całkowania oznaczona tutaj została przez t , aby nie mylić jej ze zmienną granicą x (patrz str. 486).

Równanie (2) można napisać również stosując całkę różniczkową funkcji pierwotnej:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

9. Obliczanie całek oznaczonych

Podstawowa metoda obliczania całek oznaczonych polega na zastąpieniu całki oznaczonej całką nieoznaczoną (patrz podstawowe twierdzenie na str. 488):

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b.$$

W tym przypadku dla obliczenia całki oznaczonej trzeba znaleźć funkcję pierwotną $f(x)$.

Reguły przekształcania całki oznaczonej. Całkę oznaczoną przekształca się w inną całkę najczęściej za pomocą następujących reguł, analogicznych do reguł przekształcania całek nieoznaczonych:

1. **Reguła podstawiania.** Za pomocą funkcji pomocniczej $x = \varphi(t)$, gdzie nowa zmienna t jest funkcją jednoznacznie $t = \psi(x)$ zmiennej x w przedziale $\langle a, b \rangle$, można całkę przekształcić do postaci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Przy użyciu tego wzoru można nie przeprowadzać podstawienia odwrotnego obliczania całki nieoznaczonej.

Przykład(¹). Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} d \sin t = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \end{aligned}$$

(¹) W przykładzie tym najpierw podstawiamy $x = \varphi(t) = a \sin t$, skąd $t = \psi(x) = \arcsin(x/a)$; w przedziale $\langle 0, a \rangle$ funkcja $\psi(x)$ jest jednoznaczna, przy czym $\psi(0) = 0$, a $\psi(a) = \frac{1}{2} \pi$. Następnie podstawiamy $t = \varphi(z) = \frac{1}{2} z$, skąd $z = \psi(t) = 2t$; w przedziale $\langle 0, \frac{1}{2} \pi \rangle$ jest to oczywiście funkcja jednoznaczna, przy czym $\psi(0) = 0$ i $\psi(\frac{1}{2} \pi) = \pi$.

$$= \frac{1}{2} a^2 \left[t \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\pi} \cos z \, dz =$$

$$= \frac{1}{4} \pi a^2 + \frac{1}{4} a^2 [\sin z]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

2. Reguła całkowania przez części. Przedstawiając wyrażenie podcałkowe $f(x)dx$ w dowolny sposób w postaci $u dv$ i znajdując du (za pomocą różniczkowania) i v (za pomocą całkowania) można przekształcić całkę oznaczoną do postaci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du,$$

gdzie granice całkowania b i a podstawia się zamiast zmiennej x .

Przykład. Mamy

$$\int_0^1 \underbrace{x e^x}_{u \, dv} dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

Sztuczne chwytty. Jeżeli obliczanie całki nieoznaczonej jest bardzo skomplikowane albo jeżeli całka ta w ogóle nie może być wyrażona za pomocą funkcji elementarnych, to w wielu wypadkach wartość całki oznaczonej może być jednak znaleziona za pomocą sztucznych chwytów. Można na przykład wykorzystać własności funkcji analitycznych zmiennej zespolonej (przykłady na str. 541 i 644), twierdzenie o różniczkowaniu całki względem parametru (patrz str. 510):

$$(A) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Przykład. Obliczmy

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln|x|} dx.$$

Wprowadźmy parametr t i rozważmy całkę

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln|x|} dx, \quad \text{przy czym} \quad F(0) = 0, \quad F(1) = I.$$

Stosując do funkcji $F(t)$ wzór (A), gdzie $F(0) = 0$ i $F(1) = I$ mamy

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x^t - 1}{\ln|x|} \right) dt = \int_0^1 \frac{x^t \ln|x|}{\ln|x|} dx =$$

$$= \int_0^1 x^t dx = \left[\frac{1}{t+1} x^{t+1} \right]_0^1 = \frac{1}{t+1}.$$

Całkowanie daje

$$F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{dt}{t+1} = [\ln|t+1|]_0^t = \ln|t+1|,$$

skąd otrzymujemy szukaną całkę $I = F(1) = \ln 2$.

Całkowanie przez rozwinięcie w szereg. Jeżeli funkcję podcałkową $f(x)$ można przedstawić w przedziale całkowania $\langle a, b \rangle$ w postaci szeregu funkcyjnego jednostajnie zbieżnego (patrz str. 383):

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

to zachodzi równość

$$\int f(x) dx = \int \varphi_1(x) dx + \int \varphi_2(x) dx + \dots + \int \varphi_n(x) dx + \dots$$

zatem całka oznaczona może być przedstawiona w postaci szeregu liczbowego zbieżnego

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi_1(x) dx + \int_a^b \varphi_2(x) dx + \dots + \int_a^b \varphi_n(x) dx + \dots$$

W przypadku gdy funkcje $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) dają się łatwo scałkować, na przykład przy rozwinięciu funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle a, b \rangle$, całka $\int_a^b f(x) dx$ może być obliczona z dowolną dokładnością.

Przykład. Obliczmy z dokładnością do 0,0001 całkę

$$I = \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx.$$

Mamy

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

(patrz tablicę na str. 418); szereg ten jest jednostajnie zbieżny w dowolnym przedziale skończonym (zgodnie z twierdzeniem Abela, patrz str. 386), zatem

$$\int e^{-x^2} dx = x \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{2! \cdot 5} - \frac{x^6}{3! \cdot 7} + \frac{x^8}{4! \cdot 9} - \dots \right),$$

skąd

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{2^6 \cdot 3! \cdot 7} + \frac{1}{2^8 \cdot 4! \cdot 9} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} - \frac{1}{2688} + \frac{1}{55296} - \dots \right). \end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem Leibniza o szeregach przemennych (patrz str. 380) dla obliczenia całki I z żadaną dokładnością można poprzestać na pierwszych czterech członach rozwinięcia:

$$I \approx \frac{1}{2} (1 - 0,08333 + 0,00625 - 0,00037) = \frac{1}{2} \cdot 0,92255 = 0,46127,$$

czyli

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx = 0,4613.$$

Metody przybliżone. Najczęściej stosowane metody przybliżone

oparte są na zastąpieniu całki sumą skończoną. Aby obliczyć $\int_a^b y dx$, dzielimy przedział od $a = x_0$ do $b = x_n$ na n równych części punktami $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i dla punktów podziału $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ obliczamy wartości funkcji całkowanej y . Potem podstawiając $h = \frac{b-a}{n}$ stosujemy jeden z trzech wzorów:

1. Wzór prostokątów (rys. 307a):

$$\int_a^b y dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

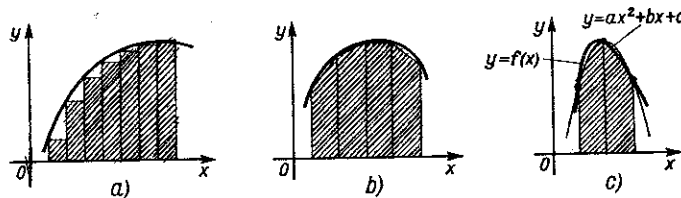
2. Wzór trapezów (rys. 307b):

$$\int_a^b y dx \approx \frac{1}{2} h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

3. Wzór parabol (Simpsona) dla n parzystego (rys. 307c):

$$(I) \quad \int_a^b y dx \approx \frac{1}{3} h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Wszystkie trzy wzory są tym bardziej dokładne, im większe jest n . Przy tych samych wartościach n drugi jest dokładniejszy od pierwszego, a trzeci jeszcze dokładniejszy i dlatego najczęściej używany. Aby



Rys. 307

oszacować błąd w wyniku obliczania całki według wzoru Simpsona (gdy n jest wielokrotnością liczby 4), oblicza się sumę pomocniczą

$$(II) \quad \frac{2}{3} h(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-2} + y_n)$$

stanowiącą ten sam wzór Simpsona dla pasków o szerokości $2h$ po odrzuceniu rzędnych o wskaźnikach nieparzystych. Można przyjąć w przybliżeniu, że

$$\int_a^b y dx - (I) = \frac{(I) - (II)}{15}.$$

Zastępując funkcję podcałkową dowolnym wielomianem całkowalnym (patrz str. 818) można otrzymać wiele innych wzorów na całkowanie przybliżone. Najczęściej stosowane są wzory następujące (oznaczenia patrz na str. 819 i 820):

$$\begin{aligned} \int_a^b y dx &= 2h[(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + \\ &+ \frac{1}{6} (A^2 y_0 + A^2 y_2 + \dots + A^2 y_{n-2}) - \end{aligned}$$

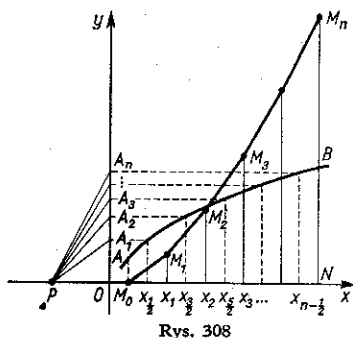
$$-\frac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \dots + \Delta^4 y_{n-3}) + \\ + \frac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \dots + \Delta^6 y_{n-4})],$$

gdy n jest parzyste, oraz

$$\int_a^b y dx = h \left[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{11}{720} \left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{317} \left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} \right) \right].$$

Ostatniego składnika w tych wzorach zazwyczaj nie oblicza się i służy on tylko do przybliżonego oszacowania błędu obliczeń dokonanych według danego wzoru.

Metoda graficzna. Jeżeli funkcję $y = f(x)$ przedstawia wykres AB (rys. 308), to całkę $\int_a^b f(x) dx$ równą polu $M_0 ABN$, gdzie $OM_0 = a$ i $ON = b$, można znaleźć graficznie w następujący sposób:



Rys. 308

4° Z punktu M_0 prowadzimy odcinek $M_0 M_1$ równoległy do odcinka PA_1 aż do przecięcia z rzędną $f(x_1)$ w punkcie M_1 , potem z punktu M_1 prowadzimy odcinek $M_1 M_2$ równoległy do odcinka PA_2 aż do

1° $M_0 N$ dzielimy na $2n$ równych części za pomocą punktów $x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \dots, x_{n-1/2}, x_{n-1}$; im więcej weźmiemy punktów podziału, tym bardziej dokładny będzie wynik.

2° W punktach podziału $x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{n-1/2}$ wykreślamy rzędne krzywej i przenosimy je na oś Oy ; są to odcinki $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$.

3° Na lewej części osi Ox odkładamy odcinek OP dowolnej długości i łączymy punkt P z punktami $A_1, A_2, \dots, A_n$.

przecięcia z rzędną $f(x_i)$ w punkcie M_i , następnie kreślimy $M_2 M_3 \parallel PA_3$ itd., wreszcie kreślimy $M_{n-1} M_n \parallel PA_n$ aż do przecięcia z ostatnią rzędną $f(b)$ w punkcie M_n .

Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest liczbowo równa iloczynowi długości odcinków OP przez odcinek NM_n ; ze swobody dobierania długości OP korzystamy do regulowania wielkości rysunku (im mniejsze jest miejsce na rysunek w kierunku pionowym, tym dłuższy należy obrać odcinek OP). Jeżeli $OP = 1$, to mamy

$$\int_a^b f(x) dx = NM_n,$$

a łamana $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$ przedstawia w przybliżeniu wykres funkcji pierwotnej względem funkcji $f(x)$ (całkę nieoznaczoną $\int f(x) dx$).

Obliczenie całki za pomocą planimetru. Planimetr jest to przyrząd, który pozwala wyznaczyć pole ograniczone dowolną krzywą i w ten sposób obliczyć całkę oznaczoną funkcji $y = f(x)$ określonej za pomocą wykresu. Planimetry specjalnego typu obliczają nie tylko $\int y dx$, ale także $\int y^2 dx$ i $\int y^3 dx$.

Integratory. Istnieją przyrządy rysujące wykresy funkcji pierwotnej

$$Y = \int_a^x f(t) dt$$

na podstawie wykresu funkcji danej $y = f(x)$; są to tak zwane integratory.

10. Zastosowania całek oznaczonych

Ogólna zasada zastosowania całek oznaczonych do obliczania wielkości geometrycznych, fizycznych i innych.

1° Obliczaną wielkość A rozkładamy w pewien sposób na wielką ilość n małych wielkości:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

z warunkiem, że przy nieograniczonym wzrastaniu n każda z wielkości a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) będzie malała do zera.

2° Każdą wielkość a_i zastępujemy wielkością $\tilde{a}_i$ (bliższą a_i), którą oblicza się według znanego wzoru; błąd $a_i = a_i - \tilde{a}_i$ powinien być wielkością nieskończenie małą rzędu wyższego niż wielkość a_i , tzn. wielkości a_i i $\tilde{a}_i$ są nieskończenie małymi wielkościami równoważnymi.

3° Wielkość $\tilde{u}_i$ wyrażamy za pomocą pewnej zmiennej x , wybranej tak, żeby $\tilde{u}_i$ przybrało postać $f(x_i)\Delta x_i$, gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

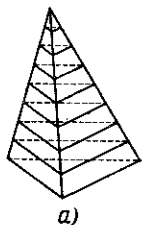
4° Szukaną wielkość obliczamy jako granicę sumy

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

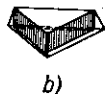
gdzie $a = x_0$ i $b = x_n$ są końcami przedziału zmiennej x .

Przykład. Obliczmy objętości ostrosłupa o podstawie S i wysokości H .

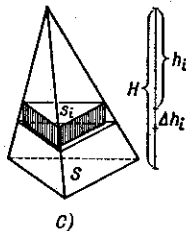
1° Dany ostrosłup o szukanej objętości V dzielimy płaszczyznami równoległymi do podstawy na n ostrosłupów ściętych o objętościach odpowiednio $v_1, v_2, \dots, v_n$ (rys. 309a), przy czym przy nieograniczonym wzrastaniu n każda z objętości v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) będzie dążyła do zera. Wysokość H będzie przy tym podzielona na n części punktami (licząc od wierzchołka do podstawy): $0 = h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n = H$.



a)



b)



c)

Rys. 309

2° Każdy z ostrosłupów ściętych v_i zastępujemy graniastostłupem o tej samej wysokości $h = h_{i+1} - h_i$ i o podstawie S_i równej górnej (mniejszej) podstawie ostrosłupa ściętego (rys. 309b); objętość odrzucona jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż v_i .

3° Wzór na objętość $\tilde{v}_i$ bierzemy w postaci $\tilde{v}_i = S_i \Delta h_i$, gdzie h_i (rys. 309c) jest odległością górnej podstawy od wierzchołka ostrosłupa, a $\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$, i uwzględniając proporcję $S_i : S = h_i^2 : H^2$ otrzymujemy

$$\tilde{v}_i = \frac{S h_i^2}{H^2} \Delta h_i.$$

4° Szukaną objętość V obliczamy jako granicę sumy:

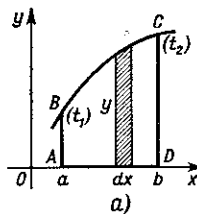
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{S h_i^2}{H^2} \Delta h_i = \int_0^H \frac{S h^2}{H^2} dh = \frac{1}{3} SH.$$

Podstawowe zastosowania w geometrii.

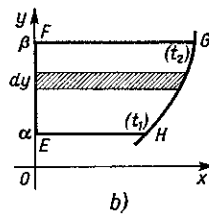
Pole. Wzór na pole trapezu krzywoliniowego (rys. 310a), jeżeli równanie krzywej jest dane w postaci jawnej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, lub w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

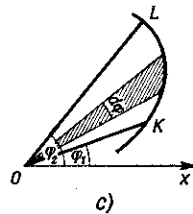
Wzór na pole trapezu krzywoliniowego (rys. 310b), gdy równanie



a)



b)



c)

Rys. 310

krzywej dane jest w postaci $x = g(y)$, $a \leq y \leq \beta$, lub w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$S_{EFGH} = \int_a^\beta g(y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \psi'(t) dt.$$

Wzór na pole wycinka krzywoliniowego (rys. 310c), gdy krzywa jest wyznaczona przez równanie we współrzędnych biegunowych $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$:

$$S_{OKL} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi.$$

Obliczanie pól figur bardziej skomplikowanych przeprowadza się za pomocą całki krzywoliniowej (str. 522) lub całki podwójnej (str. 535).

Długość łuku. Wzór na długość łuku krzywej (rys. 311a), gdy równanie krzywej jest dane w postaci jawnej $y = f(x)$ lub $x = g(y)$ albo w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$:

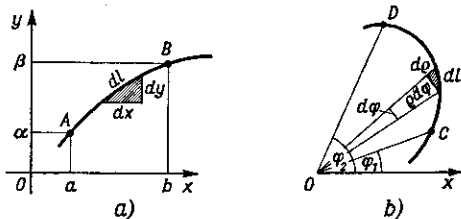
$$\begin{aligned} L(\widetilde{AB}) &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{[g'(y)]^2 + 1} dy = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

lub $L = \int dl$, gdzie dl jest różniczką łuku: $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Jeżeli krzywa (rys. 311b) jest wyznaczona równaniem we współrzędnych biegunowych $\varrho = \varrho(\varphi)$, to

$$L(\widetilde{CD}) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

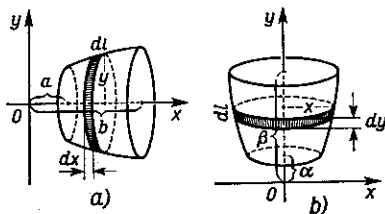
lub $L = \int dl$, gdzie dl jest różniczką łuku: $dl^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + d\varrho^2$.



Rys. 311

Pole powierzchni. Wzór na pole powierzchni utworzonej przez obrót krzywej $y = f(x)$ dookoła osi Ox (rys. 312a):

$$S = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Rys. 312

lub przez obrót krzywej $x = f(y)$ dookoła osi Oy (rys. 312b):

$$S = 2\pi \int_a^b x dl = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy.$$

Obliczanie pola powierzchni ograniczających ciała bardziej złożone — patrz str. 535 i 539.

Objętość. Wzór na objętość ciała utworzonego przez obrót krzywej $y = f(x)$ dookoła osi Ox (rys. 312a):

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

lub przez obrót krzywej $x = g(y)$ dookoła osi Oy (rys. 312b):

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Wzór na objętość ciała, gdy pole jego przekroju prostopadłego do osi Ox jest funkcją $S = f(x)$ zmiennej x (rys. 313):

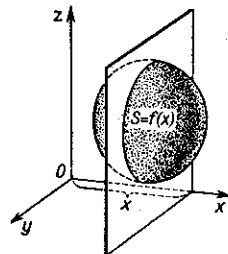
$$V = \int_a^b f(x) dx.$$

Obliczanie objętości brył bardziej skomplikowanych przeprowadza się za pomocą całki podwójnej lub potrójnej (patrz str. 527, 535, 536).

Zastosowania w mechanice i fizyce.

Drogę przebytą przez punkt od momentu początkowego t_0 do momentu końcowego T , gdy prędkość ruchu jest zmienną zależną od czasu $v = f(t)$, określa się według wzoru

$$S = \int_{t_0}^T v dt.$$



Rys. 313

Pracę wykonaną przez siłę F na przesunięcie ciała od punktu $x = a$ do punktu $x = b$ po prostej Ox pokrywającej się z kierunkiem siły, gdy wielkość siły jest zmienną $F = f(x)$, określa się według wzoru (rys. 314):

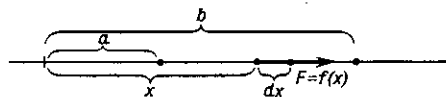
$$A = \int_a^b F dx \quad (1).$$

Parcie wywierane przez ciecz o ciężarze właściwym γ na jedną stronę zanurzonej w cieczy płytki pionowej, gdy odległość x punktów płytki od poziomu cieczy zmienia się od a do b (rys. 315), obliczamy według wzoru

$$P = \int_a^b \gamma xy dx,$$

(1) W ogólnym przypadku, gdy kierunek siły nie pokrywa się z kierunkiem ruchu, a także gdy ciało porusza się po torze krzywoliniowym, pracę oblicza się jako całkę krzywoliniową (patrz str. 669).

gdzie y jest długością poziomego przekroju płytki stanowiącą funkcję $y = f(x)$ zmiennej x .



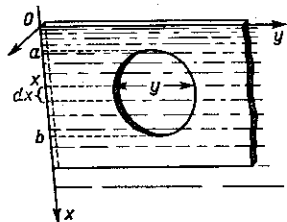
Rys. 314

Moment bezwładności.

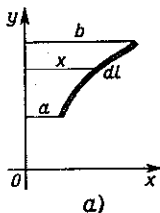
1° Moment bezwładności łuku krzywej jednorodnej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, względem osi Oy (rys. 316a) oblicza się według wzoru

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

gdzie δ jest gęstością liniową łuku.



Rys. 315



Rys. 316

2° Moment bezwładności jednorodnej figury płaskiej (rys. 316b) względem osi Oy wyznacza się według wzoru

$$I_y = \delta \int_a^b x^2 y dx,$$

gdzie y jest długością przekroju równoległego do osi Oy , a δ jest gęstością powierzchniową figury (patrz także str. 535).

Środek ciężkości C łuku (rys. 317a) jednorodnej krzywej płaskiej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ma współrzędne

$$x_C = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{L}, \quad y_C = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{L},$$

gdzie L jest długością łuku (patrz str. 497).

Środek ciężkości krzywej zamkniętej (rys. 317b):

$$x_C = \frac{\int_a^b x (\sqrt{1+y_1'^2} + \sqrt{1+y_2'^2}) dx}{L},$$

$$y_C = \frac{\int_a^b (y_1 \sqrt{1+y_1'^2} + y_2 \sqrt{1+y_2'^2}) dx}{L},$$

gdzie $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ są to równania górnej i dolnej części konturu, a L jest długością całego konturu.

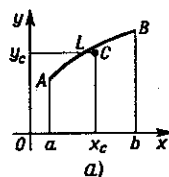
Pierwsze twierdzenie Guldina. Pole powierzchni bryły powstającej przy obrocie płaskiej krzywej dokoła osi leżącej w płaszczyźnie krzywej i nie przecinającej tej krzywej równa się iloczynowi długości L krzywej przez długość okręgu opisanego przy tym obrocie przez środek ciężkości krzywej:

$$S_{obr} = L \cdot 2\pi y_C.$$

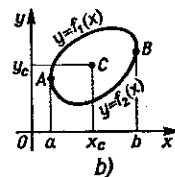
Środek ciężkości C jednorodnego trapezu krzywoliniowego (rys. 317c) ma współrzędne

$$x_C = \frac{\int_a^b xy dx}{S},$$

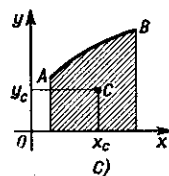
$$y_C = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{S},$$



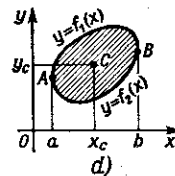
a)



b)



c)



d)

Rys. 317

gdzie S jest polem trapezu, $y = f(x)$ jest równaniem krzywej AB .

Środek ciężkości dowolnej figury płaskiej (rys. 317d) ma współrzędne

$$x_C = \frac{\int_a^b x (y_1 - y_2) dx}{S}, \quad y_C = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx}{S},$$

gdzie $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ są równaniami górnej i dolnej części konturu, a S jest polem figury.

Drugie twierdzenie Guldina. Objętość bryły utworzonej przez

obrót figury płaskiej dokoła osi leżącej w płaszczyźnie figury i nie przecinającej tej figury równa się iloczynowi pola S figury przez długość okręgu opisanego przy tym obrocie przez środek ciężkości tej figury:

$$V_{\text{obr}} = S \cdot 2\pi y_G.$$

O środkach ciężkości figur płaskich i brył patrz str. 535 i 536 (całki wielokrotne).

11. Całki niewłaściwe

Wiadomości ogólne. Najprostszymi uogólnieniami pojęcia całki oznaczonej (str. 484) są *całki niewłaściwe* ⁽¹⁾.

Dwa podstawowe typy całek niewłaściwych:

1° Całka o nieskończonych granicach całkowania. Obszarem oznaczoności funkcji podcałkowej jest półoś domknięta $\langle a, \infty \rangle$, $(-\infty, a]$ albo też cała prosta liczbowa $(-\infty, \infty)$.

2° Całki funkcji nieciągłych. Funkcja podcałkowa jest ciągła w całym przedziale od a do b z wyjątkiem pewnej skończonej ilości jego punktów zwanych *punktami osobliwymi*.

Mogą zdarzyć się również kombinacje obu typów.

Całki o nieskończonych granicach całkowania.

Określenia. Niech obszarem oznaczoności funkcji będzie półoś domknięta $\langle a, \infty \rangle$. Przyjmujemy określenie

$$(1) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx.$$

Jeżeli ta granica istnieje, to całka (1) *istnieje*, czyli jest *zbieżna* i nazywa się *całką niewłaściwą*. Jeżeli zaś granica nie istnieje, to całka (1) *nie istnieje*, czyli jest *rozbieżna*. W przypadku gdy $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx = \infty$, stosuje się oznaczenie

$$\int_a^\infty f(x) dx = \infty;$$

całka ta jest rozbieżna.

Analogicznie określa się *całki niewłaściwe* funkcji określonej na

⁽¹⁾ Pojęcie całki może być uogólnione również na bardziej skomplikowane przypadki, w których obszarem oznaczoności funkcji (obszarem całkowania) jest zbiór wartości pewnej funkcji (*całka Stieltjesa*).

półosi domkniętej $(-\infty, b]$ albo na całej prostej liczbowej $(-\infty, \infty)$:

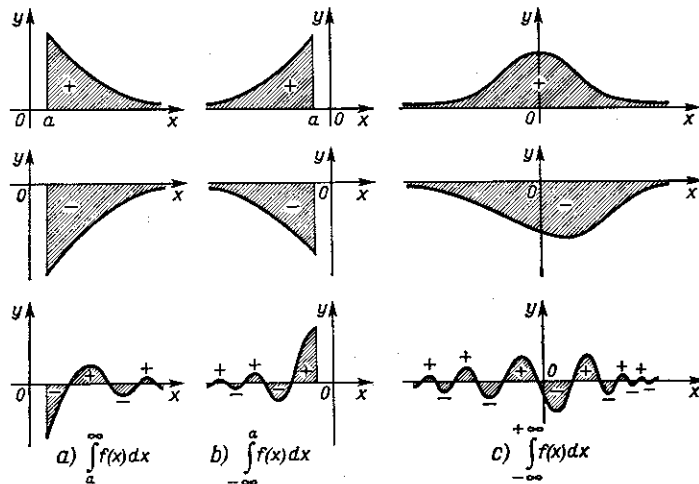
$$(2) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx,$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B f(x) dx.$$

Liczby A i B dążą do nieskończoności niezależnie jedna od drugiej. Jeżeli granica (3) nie istnieje, ale istnieje

$$(4) \quad \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^A f(x) dx,$$

to granicę (4) nazywamy *wartością główną całki niewłaściwej*.



Rys. 318

Interpretacja geometryczna całek o nieskończonych granicach całkowania. Całki (1), (2), (3) są to granice pól figur podanych na rysunku 318a, b, c.

Przykłady.

- $$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln |B| = \infty \quad (\text{całka rozbieżna}),$$
- $$2. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B} \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{całka zbieżna}),$$
- $$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} (\arctg B - \arctg A) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \left(-\frac{1}{2} \pi \right) = \pi \quad (\text{całka zbieżna}).$$

Jeśli granice (1), (2), (3) trudno jest wyznaczyć bezpośrednio albo jeżeli chodzi tylko o ustalenie, czy całka jest zbieżna czy nie, to można zastosować którykolwiek z dostatecznych kryteriów zbieżności całek.

Dostateczne kryteria zbieżności całek. Rozważamy tu tylko całki typu (1). Dla całki typu (2) można dokonać zamiany zmiennych $x = -z$ i sprowadzić całkę do typu (1):

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(-x) dx.$$

Natomiast całkę (3) rozkłada się na sumę dwóch całek typu (2) i (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx,$$

gdzie c jest liczbą dowolną.

Kryterium 1. Jeżeli istnieje całka $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, to istnieje również całka (1). W tym przypadku całkę (1) nazywamy *zbieżną bezwzględnie*, a funkcję $f(x)$ nazywamy *całkowalną bezwzględnie* na półosi domkniętej $\langle a, \infty \rangle$.

Kryterium 2. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są dodatnie i spełniają warunek $f(x) \leq \varphi(x)$ w przedziale $a < x < \infty$, to ze zbieżności całki $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$, a z rozbieżności całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$.

W szczególności przyjmując $\varphi(x) = 1/x^a$ i biorąc pod uwagę, że $\int_a^{\infty} (1/x^a) dx$ jest zbieżna dla $a > 1$ (wtedy równa się $1/(a-1)a^{a-1}$), a jest rozbieżna dla $a \leq 1$, można sprowadzić powyższe kryterium do następującego:

Kryterium 3. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją dodatnią w przedziale $a \leq x < \infty$ i jeżeli istnieje taka liczba $a > 1$, że przy dostatecznie wielkich wartościach x jest $f(x) \cdot x^a \leq c < \infty$, to całka (1) jest zbieżna; jeżeli zaś funkcja $f(x)$ jest dodatnia i istnieje taka liczba $a \leq 1$, że $f(x) \cdot x^a \geq c > 0$, to całka (1) jest rozbieżna.

Przykład.
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx.$$

Przyjmując $a = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \cdot x^{1/2} = \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1$. Dana całka jest więc rozbieżna.

Związek całek niewłaściwych z szeregiem nieskończonymi. Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ jest dowolnym ciągiem nieskończonym nieograniczenie wzrastającym, tzn. jeżeli

$$(A) \quad a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

i funkcja $f(x)$ jest dodatnia w przedziale $a \leq x < \infty$, to zagadnienie zbieżności całki (1) można sprowadzić do zagadnienia zbieżności szeregu

$$(B) \quad \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx + \dots$$

Jeżeli szereg (B) jest zbieżny, to całka (1) jest zbieżna i równa się sumie tego szeregu; jeżeli szereg (B) jest rozbieżny, to rozbieżna jest również całka (1). Daje to możliwość wykorzystania kryteriów zbieżności szeregów do badania zbieżności całek. (Kryterium całkowe zbieżności szeregów (str. 378) sprowadzało zagadnienie zbieżności szeregów do zagadnienia zbieżności całki nieoznaczonej).

Całki funkcji nieciągłych.

Określenia. Niech obszarem oznaczoności funkcji będzie przedział prawostronnie otwarty $\langle a, b \rangle$ albo też cały przedział domknięty $\langle a, b \rangle$, ale w punkcie b granica $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$. W jednym i w drugim przypadku przyjmujemy określenie

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Jeżeli granica ta istnieje, to całka (1) istnieje, czyli jest zbieżna i nazywa się *całką niewłaściwą*. Jeżeli zaś granica ta nie istnieje, to całka

(1) nie istnieje i jest rozbieżna. W przypadku gdy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \infty$, stosuje się oznaczenie

$$\int_a^b f(x) dx = \infty;$$

całka ta jest rozbieżna.

Całka (1) zawsze istnieje, jeśli funkcja $f(x)$ jest przedziałami ciągła i ograniczona w przedziale prawostronnie otwartym $\langle a, b \rangle$. W dalszym toku będziemy zakładali, że funkcja $f(x)$ jest nieograniczona, tzn. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$.

Analogicznie określa się *całkę niewłaściwą* funkcji oznaczonej w przedziale lewostronnie otwartym $\langle a, b \rangle$ lub w całym przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, ale granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Wreszcie jeżeli funkcja $f(x)$ jest oznaczona w całym przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ z wyjątkiem jego punktu wewnętrznego c ($a < c < b$), tzn. jeżeli jest oznaczona w przedziale prawostronnie otwartym $\langle a, c \rangle$ i w przedziale lewostronnie otwartym $\langle c, b \rangle$, albo jeżeli jest oznaczona również w punkcie c , ale $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, to *całkę niewłaściwą* określamy w sposób następujący:

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx \quad (').$$

Liczby ε i δ dążą do zera niezależnie jedna od drugiej. Jeśli całka (3) nie istnieje, ale istnieje

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right),$$

to granicę (4) nazywamy *wartością główną całki niewłaściwej*.

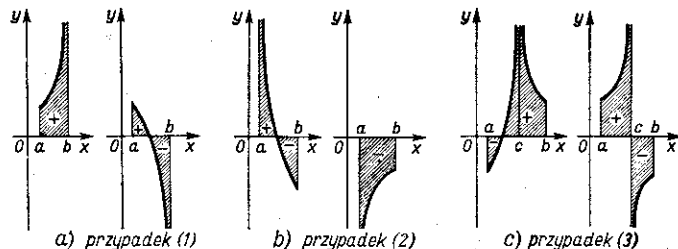
Interpretacja geometryczna całek funkcji nieciągłych. Całki (1), (2) i (3) są to pola figur nieograniczonych mających postać przedstawioną na rysunku 319 (krzywa ma asymptotę pionową).

(') Analogicznie do przypadku (1) będziemy w całkach (2) i (3) zakładali, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$.

Przykłady. 1. $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; przypadek (2), punkt osobliwy $x = 0$;

mamy

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{b} \quad (\text{całka zbieżna}).$$



Rys. 319

2. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$; przypadek (1), punkt osobliwy $x = \pi/2$; mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \operatorname{tg} x dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln \cos 0 - \ln \cos(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon)] = \infty \quad (\text{całka rozbieżna}). \end{aligned}$$

3. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; przypadek (3), punkt osobliwy $x = 0$; mamy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{2} (\varepsilon^{2/3} - 1) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{3}{2} (4 - \delta^{2/3}) = \frac{9}{2} \quad (\text{całka zbieżna}). \end{aligned}$$

4. $\int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-1} dx$; przypadek (3), punkty osobliwe $x = -1$ i $x = 1$;

mamy

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-1} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \int_{-1+\delta}^{1-\gamma} + \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{1+\gamma}^2 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|x^2-1| \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \dots = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln|1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1| - \ln 3] + \dots = \infty \end{aligned}$$

(całka rozbieżna).

O zastosowaniu podstawowego wzoru rachunku całkowego. Przy obliczaniu całek niewłaściwych z punktami osobliwymi typu (3) nie należy podstawowego wzoru rachunku całkowego (str. 488)

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x),$$

stosować mechanicznie, bez uwzględnienia punktów osobliwych wewnątrz przedziału całkowania $\langle a, b \rangle$, może to bowiem doprowadzić do błędów. Na przykład stosując wzór podstawowy do przykładu 4 otrzymujemy

$$\int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln|x^2-1| \Big|_{-2}^{+2} = \ln 3 - \ln 3 = 0,$$

gdy tymczasem całka jest rozbieżna.

Reguła ogólna: twierdzenie podstawowe tylko wtedy można stosować do przypadku (3), gdy funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ jest w punkcie osobliwym ciągła.

W przykładzie 4 to nie zachodzi: funkcja $\ln|x^2-1|$ jest nieciągła w punktach $x = -1$ i $x = +1$; natomiast w przykładzie 3 funkcja $\frac{3}{2}x^{2/3}$ jest w punkcie $x = 0$ ciągła i dlatego można do przykładu 3 zastosować twierdzenie podstawowe:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^8 = \frac{3}{2} (8^{2/3} - 1^{2/3}) = \frac{9}{2}.$$

Dostateczne kryteria zbieżności całki funkcji nieciągłej.

1. Jeżeli istnieje całka $\int_a^b |f(x)| dx$, to również istnieje całka $\int_a^b f(x) dx$, którą w tym przypadku nazywamy *całką zbieżną bezwzględnie*, a funk-

cję $f(x)$ nazywamy *funkcją całkowaną bezwzględnie* w danym przedziale.

2. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją dodatnią w przedziale prawostronnie otwartym $\langle a, b \rangle$ i jeżeli istnieje taka liczba $a < 1$, że przy wartościach x dostatecznie bliskich b zachodzi nierówność $f(x)(b-x)^a \leq c < \infty$, to całka (1) jest zbieżna, a jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i istnieje taka liczba $a > 1$, że przy x dostatecznie bliskich b zachodzi nierówność $f(x)(b-x)^a > c > 0$, to całka (1) jest rozbieżna.

12. Całki zależne od parametru

Określenie. Całka oznaczona

$$(1) \quad \int_a^b f(x, y) dx = F(y)$$

jest funkcją zmiennej y zwanej w tym przypadku *parametrem*.

Funkcja $F(y)$ w wielu wypadkach nie jest funkcją elementarną. Całka (1) może być całką w zwykłym sensie albo całką niewłaściwą o nieskończonych granicach całkowania, albo całką funkcji nieciągłej $f(x, y)$.

Przykład. Mamy

$$F(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad (\text{całka jest zbieżna dla } y > 0).$$

Jest to tak zwana *funkcja gamma* albo *całka Eulera drugiego rodzaju*.

Różniczkowanie pod znakiem całki. Jeżeli funkcja (1) jest określona w przedziale $c \leq y \leq e$ i funkcja ta jest ciągła w prostokącie $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq e$ i ma w tym obszarze pochodną cząstkową $\partial f / \partial y$, to dla dowolnego y w przedziale $\langle c, e \rangle$ zachodzi wzór

$$(2) \quad \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Jest to *różniczkowanie pod znakiem całki*.

Przykład. Przy $y > 0$ w dowolnym przedziale zachodzi wzór

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_0^1 \arctg \frac{x}{y} dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\arctg \frac{x}{y} \right) dx = \\ &= - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Istotnie,

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2},$$

$$\frac{d}{dy} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}.$$

Przy $y = 0$ warunek ciągłości funkcji nie jest spełniony; pochodna cząstkowa nie istnieje.

Uogólnienie wzoru (2) na przypadek, gdy również granice całkowania zależą od parametru. Jeżeli przy tych samych założeniach funkcje $\alpha(y)$ i $\beta(y)$ są określone w przedziale $\langle c, e \rangle$ i mają ciągłe pochodne $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ i jeżeli krzywe $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ nie wychodzą z prostokąta $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq e$, to wzór (2) może być uogólniony w sposób następujący:

$$(2') \quad \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y),$$

Całkowanie pod znakiem całki. Jeśli funkcja (1) jest określona w przedziale $\langle c, e \rangle$ i funkcja $f(x, y)$ jest w prostokącie $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq e$ ciągła, to zachodzi wzór

$$(3) \quad \int_c^e \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^e f(x, y) dy \right) dx.$$

Jest to całkowanie pod znakiem całki.

Przykład y. 1. $f(x, y) = x^y$ ($0 \leq x \leq 1$, $a \leq y \leq b$; $a > 0$). Przy $a > 0$ warunek ciągłości funkcji jest spełniony. Funkcja x^y jest nieciągła w punkcie $x = 0$, $y = 0$, zatem

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx.$$

Lewa strona wzoru daje $\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}$; prawa strona daje

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \text{ całka nieoznaczona nie może być wyznaczona przez funk-}$$

cje elementarne, ale całka oznaczona została znaleziona

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{1+b}{1+a} \quad (0 < a < b).$$

2. $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$). W punkcie $x = 0$, $y = 0$ funkcja jest nieciągła. Wzór (3) nie może być zastosowany. Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \pi,$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = -\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} \pi.$$

13. Tablice niektórych całek oznaczonych

Całki funkcji wykładniczych

(w połączeniu z funkcjami algebraicznymi, trygonometrycznymi i logarytmicznymi).

$$1. \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad \text{gdy } a > 0, \quad n > -1 \quad (1);$$

w szczególności przy n naturalnym całka ta równa się $\frac{n!}{a^{n+1}}$.

$$2. \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}, \quad a > 0, \quad n > -1 \quad (1);$$

w szczególności przy n naturalnym parzystym ($n = 2k$) całka ta równa się $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+1/2}}$, a przy n nieparzystym ($n = 2k+1$)

całka równa się $\frac{k!}{2a^{k+1}}$.

$$3. \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a > 0.$$

(1) O funkcji gamma patrz str. 204; tablice wartości funkcji $\Gamma(x)$ patrz str. 87.

$$4. \int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}, \quad a > 0.$$

$$5. \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2}, \quad a > 0.$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{1}{6} \pi^2.$$

$$7. \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{1}{12} \pi^2.$$

$$8. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx = \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

$$9. \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma \approx -0,5772 \quad (1).$$

Całki funkcji trygonometrycznych
(w połączeniu z algebraicznymi)

$$10. \int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2\beta+1} x dx = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(a+\beta+2)} = \\ = \frac{1}{2} B(a+1, \beta+1) \quad (2);$$

wzór ten jest prawdziwy przy dowolnych a i β ; można z niego korzystać dla znajdowania całek

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}, \quad \text{itd.}$$

(1) γ jest to stała Eulera (patrz str. 358).

(2) $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ jest to tak zwana funkcja beta albo całka Eulera pierwszego rodzaju, a $\Gamma(x)$ jest to funkcja gamma, czyli całka Eulera drugiego rodzaju (patrz str. 204).

Gdy a i β są naturalne, wzór (10) można napisać w postaci

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2\beta+1} x dx = \frac{a! \beta!}{2(a+\beta+1)!}.$$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } a > 0, \\ -\frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

$$12. \int_0^a \frac{\cos ax}{x} dx = \infty, \quad a \text{ jest to dowolna liczba.}$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } a > 0, \\ -\frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \left| \frac{b}{a} \right|, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

$$15. \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } |a| < 1, \\ \frac{1}{4} \pi, & \text{gdy } |a| = 1, \\ 0, & \text{gdy } |a| > 1. \end{cases}$$

$$16. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \pi.$$

$$17. \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \pi e^{-|ab|} \quad (\text{znak jest zgodny ze znakiem } b).$$

$$18. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-|a|}$$

$$19. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{1}{2} \pi |a|.$$

$$20. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \pi.$$

$$21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}, \quad |k| < 1.$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{k} \arcsin k, \quad |k| < 1,$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{k^2} (K-E)^{(1)}, \quad |k| < 1.$$

$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{k^2} [E - (1-k^2)K]^{(2)}, \quad |k| < 1.$$

$$25. \int_0^{\pi} \frac{\cos ax}{1-2b \cos x + b^2} dx = \frac{\pi b^a}{1-b^2}, \quad a \text{ całkowite } \geq 0, \quad |b| < 1.$$

Całki funkcji logarytmicznych

(w połączeniu z algebraicznymi i trygonometrycznymi)

$$26. \int_0^1 \ln |\ln x| dx = -\gamma = -0,5772^{(2)} \quad (\text{sprowadza się do całki 9}).$$

$$27. \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \frac{1}{6} \pi^2 \quad (\text{sprowadza się do całki 6}).$$

$$28. \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx = -\frac{1}{12} \pi^2 \quad (\text{sprowadza się do całki 7}).$$

$$29. \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{1}{8} \pi^2.$$

$$30. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{8} \pi \ln 2.$$

⁽¹⁾ E i K są to całki eliptyczne zupełne (patrz str. 438 i tablicę na str. 93).

⁽²⁾ γ jest to stała Eulera (patrz str. 358).

$$31. \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{x} \right)^a dx = \Gamma(a+1)^{(1)}, \quad -1 < a < \infty.$$

$$32. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{1}{2} \pi \ln 2.$$

$$33. \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = -\frac{1}{2} \pi^2 \ln 2.$$

$$34. \int_0^{\pi/2} \sin x \ln \sin x dx = \ln 2 - 1.$$

$$35. \int_0^{\pi} \ln(a \pm b \cos x) dx = \pi \ln \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 - b^2}), \quad a \geq b > 0.$$

$$36. \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab \cos x + b^2) dx = \begin{cases} 2\pi \ln a, & a \geq b > 0, \\ 2\pi \ln b, & b \geq a > 0. \end{cases}$$

$$37. \int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x dx = 0.$$

$$38. \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \frac{1}{8} \pi \ln 2.$$

Całki funkcji algebraicznych

$$39. \int_0^1 x^a (1-x)^\beta dx = 2 \int_0^1 x^{2a+1} (1-x^2)^\beta dx = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(a+\beta+2)} = B(a+1, \beta+1)^{(2)} \quad (\text{sprowadza się do całki 10}).$$

⁽¹⁾ $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma (patrz str. 204 i tablicę na str. 87).

⁽²⁾ $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ jest to funkcja beta albo całka Eulera pierwszego rodzaju, $\Gamma(x)$ jest to funkcja gamma albo całka Eulera drugiego rodzaju (patrz str. 204).

$$40. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad a < 1.$$

$$41. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi \operatorname{ctg} a\pi, \quad a < 1.$$

$$42. \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}, \quad 0 < a < b.$$

$$43. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a \Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)} \quad (1).$$

$$44. \int_0^1 \frac{dx}{1+2x \cos a + x^2} = \frac{a}{2 \sin a}, \quad 0 < a < \frac{1}{2} \pi.$$

$$45. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x \cos a + x^2} = \frac{a}{\sin a}, \quad 0 < a < \frac{1}{2} \pi.$$

C. CAŁKI KRZYWOLINIOWE, WIELOKROTNE I POWIERZCHNIOWE

Pojęcie całki oznaczonej (patrz str. 484 i 485) może być uogólnione w różnych kierunkach.

Obszarem całkowania zwykłej całki oznaczonej był przedział domknięty $\langle a, b \rangle$ prostej liczbowej. Jeżeli za drogę całkowania przyjmujemy pewien łuk linii krzywej (płaskiej lub przestrzennej), to otrzymamy *całkę krzywoliniową*; jeżeli za obszar całkowania przyjmujemy pewien obszar płaski, to otrzymamy *całkę podwójną*; a jeżeli weźmiemy płat krzywopowierzchniowy, to będziemy mieli *całkę powierzchniową*; wreszcie jeżeli za obszar całkowania przyjmujemy pewien obszar przestrzenny, to otrzymamy *całkę potrójną*.

(1) $\Gamma(x)$ jest to funkcja gamma (patrz str. 204 i tablicę na str. 87).

14. Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (całki po łuku krzywej)

Określenie. *Całką krzywoliniową pierwszego rodzaju* (1)

$$\int_{(K)} f(x, y) ds$$

funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ (określonej w pewnym obszarze spójnym (2)) wziętą po łuku $K = \overline{AB}$ krzywej płaskiej, określonej swoim równaniem (łuk ten znajduje się w tym samym obszarze i nazywa się *drogą całkowania*), nazywamy liczbę, którą otrzymuje się w sposób następujący (rys. 320):

1° Łuk AB rozkładamy na n łuków elementarnych dowolnymi punktami $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ następującymi po sobie, w kierunku od początku łuku $A = A_0$ do jego końca $B = A_n$;

2° wewnątrz (albo na jednym z końców) każdego łuku elementarnego $A_{i-1} A_i$ wybieramy dowolny punkt M_i o współrzędnych ξ_i, η_i ;

3° w każdym z wybranych punktów M_i mnożymy wartość funkcji $f(\xi_i, \eta_i)$ przez długość łuku elementarnego $A_{i-1} A_i = \Delta s_{i-1}$ (długości te przyjmuje się za dodatnie);

4° dodajemy wszystkie otrzymane n iloczynów $f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_{i-1}$;

5° obliczamy granicę otrzymanej sumy

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_{i-1}$$

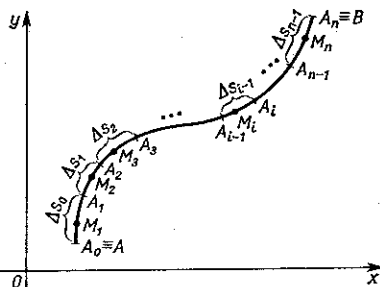
gdy długości wszystkich łuków elementarnych Δs_{i-1} dążą do zera (a więc $n \rightarrow \infty$).

Jeżeli granica taka istnieje i nie zależy od doboru punktów A_i i M_i , to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową pierwszego rodzaju* funkcji $f(x, y)$ wziętą po drodze K :

$$(A) \quad \int_{(K)} f(x, y) ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_{i-1}.$$

(1) Zwaną też *całką krzywoliniową nieskierowaną*.

(2) O obszarze spójnym dwóch zmiennych patrz str. 369.



Rys. 320

Analogicznie określa się *całkę krzywoliniową pierwszego rodzaju* dla funkcji trzech zmiennych $u = f(x, y, z)$ wziętą po łuku K krzywej przestrzennej:

$$(B) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_{i-1}.$$

Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ albo $f(x, y, z)$ jest ciągła, a krzywa K na łuku AB jest ciągła i ma w sposób ciągły zmieniającą się styczną, to całka krzywoliniowa pierwszego rodzaju (A) lub (B) istnieje (tzn. wymienione granice istnieją i nie zależą od doboru punktów A_i i M_i).

Obliczanie całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju sprowadza się do obliczania całki oznaczonej. Jeśli równania drogi całkowania dane są w postaci parametrycznej (patrz str. 302 i 312) $x = x(t)$, $y = y(t)$ albo (dla krzywej przestrzennej) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, to w przypadku (A):

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

oraz w przypadku (B):

$$\int_{(K)} f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt;$$

t_0 jest to wartość parametru t w punkcie A , a T w punkcie B , przy czym punkty A i B należy obrać w taki sposób, żeby było $t_0 < T$.

Jeśli równania drogi całkowania dane są w postaci jawnej $y = \varphi(x)$, a dla krzywej przestrzennej $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, i jeżeli a i b są odpowiednio odciętymi punktów A i B , przy czym $a < b$ (¹), to w przypadku (A):

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx$$

oraz w przypadku (B):

$$\int_{(K)} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x), \psi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2} dx.$$

(¹) Przy tym zakłada się, że łuk K krzywej ma taki kształt, iż każdemu punktowi jego rzutu na oś Ox odpowiada jeden tylko punkt łuku K (tzn. punkt krzywej jest jednoznacznie określony przez jego rzut na oś Ox). Jeśli to nie zachodzi, to łuk K krzywej rozkładamy na kilka takich części, żeby każda z nich miała wskazaną powyżej własność; całkę krzywoliniową wziętą po całym łuku K uważa się wtedy za sumę całek wziętych po wszystkich z kolei częściach tego łuku.

Zastosowanie całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju.

Długość odcinka krzywoliniowego K :

$$L(K) = \int_{(K)} ds.$$

Masa niejednorodnego odcinka krzywoliniowego K , gdy δ jest zmienną gęstością liniową, przy czym $\delta = f(x, y)$ dla krzywej płaskiej i $\delta = f(x, y, z)$ dla krzywej przestrzennej;

$$M(K) = \int_{(K)} \delta ds.$$

15. Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (całki wzdłuż rzutu i całki ogólnej postaci)

Określenia. *Całką krzywoliniową drugiego rodzaju*

$$(A_x) \quad \int_{(K)} f(x, y) dx$$

lub

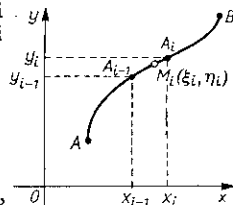
$$(B_x) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dx$$

funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ lub funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ określonej w pewnym przedziale spójnym płaskim lub przestrzennym, wziętą wzdłuż rzutu na oś Ox pewnego łuku $K = AB$ krzywej płaskiej lub przestrzennej, leżącej w obszarze oznaczoności funkcji, nazywamy liczbę otrzymywaną w taki sam sposób jak całkę krzywoliniową pierwszego rodzaju (patrz str. 517, 518) — z tą tylko różnicą, że w stadium 3^o mnożymy wartości funkcji $f(\xi_i, \eta_i)$ lub odpowiednio $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nie przez długości łuków krzywej $A_{i-1}A_i$, ale przez długości rzutów tych łuków na oś Ox (rys. 321):

$$\text{rzut}_x \widehat{A_{i-1}A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1},$$

a więc

$$(A_x) \quad \int_{(K)} f(x, y) dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_{i-1},$$



Rys. 321

$$(B_x) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_{i-1}.$$

Analogicznie określa się *całki drugiego rodzaju* wzięte wzdłuż rzutu łuku K krzywej na oś Oy , a w przestrzeni również całkę wzdłuż rzutu na oś Oz :

$$(A_y) \quad \int_{(K)} f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_{i-1},$$

$$(B_y) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_{i-1},$$

$$(B_z) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_{i-1}.$$

Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ lub $f(x, y, z)$ jest ciągła, a krzywa jest na łuku K ciągła i ma w sposób ciągły zmieniającą się styczną, to całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (A_x) , (A_y) , (B_x) , (B_y) , (B_z) istnieją.

Obliczanie całek krzywoliniowych drugiego rodzaju sprowadza się do obliczania całek oznaczonych. Jeżeli równania drogi całkowania na płaszczyźnie dane są w postaci parametrycznej (patrz str. 283 i 302) $x = x(t)$, $y = y(t)$, a w przestrzeni w postaci $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, to całki (A_x) , (A_y) , (B_x) , (B_y) , (B_z) oblicza się według wzorów następujących:

$$(A_x) \quad \int_{(K)} f(x, y) dx = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) x'(t) dt,$$

$$(A_y) \quad \int_{(K)} f(x, y) dy = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) y'(t) dt,$$

$$(B_x) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dx = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt,$$

$$(B_y) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dy = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt,$$

$$(B_z) \quad \int_{(K)} f(x, y, z) dz = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt;$$

we wzorach tych t_0 i T są wartościami parametru t odpowiadającymi początkowi A i końcowi B drogi całkowania, przy czym w odróżnieniu

od całek pierwszego typu nie wymaga się tu, żeby było $t_0 < T$; przy przedstawieniu punktów A i B (czyli przy zmianie kierunku drogi całkowania na przeciwny) całki zmieniają znak na przeciwny.

Jeżeli równania drogi całkowania dane są w postaci jawnej $y = \varphi(x)$ dla krzywej płaskiej lub $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ dla krzywej przestrzennej, przy czym a i b są odpowiednio odciętymi punktu początkowego A i końcowego B drogi całkowania (w tym przypadku warunek $a < b$ nie obowiązuje), to we wzorach (A_x) – (B_z) za parametr t służy odcięta x .

Całka krzywoliniowa ogólnej postaci ⁽¹⁾. Jeżeli w pewnym obszarze spójnym dane są dwie funkcje dwóch zmiennych $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ albo trzy funkcje trzech zmiennych $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ oraz łuk K pewnej krzywej płaskiej lub przestrzennej, to *całką krzywoliniową ogólnej postaci* nazywamy sumę całek krzywoliniowych drugiego rodzaju wzdłuż dwóch lub trzech rzutów łuku K na ośiach współrzędnych, a więc

$$\int_{(K)} P dx + Q dy = \int_{(K)} P dx + \int_{(K)} Q dy$$

dla krzywej płaskiej oraz

$$\int_{(K)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(K)} P dx + \int_{(K)} Q dy + \int_{(K)} R dz$$

dla krzywej przestrzennej.

Własności całki krzywoliniowej.

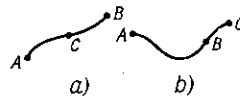
1. Całkę krzywoliniową po łuku AB danej krzywej można rozłożyć na dwie całki krzywoliniowe za pomocą wewnętrznego punktu C tej krzywej, leżącego wewnątrz lub zewnątrz łuku AB :

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AC} P dx + Q dy + \int_{CB} P dx + Q dy$$

(rys. 322a, b). Podobne wzory można napisać dla przypadku krzywej przestrzennej.

2. Przy całkowaniu po tejże drodze, ale w kierunku przeciwnym, całka zmienia znak na przeciwny:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy;$$



Rys. 322

podobnie w przypadku krzywej przestrzennej.

⁽¹⁾Wektorowy wykład teorii całki krzywoliniowej ogólnej postaci oraz interpretację mechaniczną takiej całki patrz str. 669.

3. Wartość całki krzywoliniowej w przypadku ogólnym zależy zarówno od punktów końcowych A i B jak też od łączącej je drogi całkowania:

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy \neq \int_{ADB} Pdx + Qdy$$

(rys. 323); podobnie jest dla krzywej przestrzennej.

Przykłady. 1. $I = \int_{(K)} xydx + yzdy + xzdz$, gdzie (K) jest jednym zwojem linii śrubowej $x = acost$, $y = asint$, $z = bt$ (patrz str. 327) od $t_0 = 0$ do $T = 2\pi$:

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2 b t \sin t \cos t + ab^2 t \cos t) dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 b.$$

2. $I = \int_{(K)} y^2 dx + (xy - x^2) dy$, gdzie (K) jest łukiem paraboli $y^2 = 9x$ od punktu $A(0, 0)$ do punktu $B(1, 3)$:

$$I = \int_0^3 \left[\frac{2}{9} y^3 + \left(\frac{1}{9} y^3 - \frac{1}{81} y^4 \right) \right] dy = \frac{123}{20}.$$

Cyrkulacja. Cyrkulacją albo *całką okrężną* nazywamy całkę krzywoliniową po konturze zamkniętym i oznaczamy ją symbolem

$$\oint_{(C)} Pdx + Qdy \quad \text{lub} \quad \oint_{(C)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

gdzie (C) oznacza zamkniętą drogę całkowania (kontur), to znaczy linię, której koniec B pokrywa się z początkiem A . W ogólnym przypadku cirkulacja nie równa się zeru.

Pole figury płaskiej można napisać w postaci cirkulacji

$$S = \frac{1}{2} \oint_{(C)} (x dy - y dx),$$

gdzie C oznacza kontur ograniczający daną figurę płaską, przy czym drogę całkowania obiega się w kierunku dodatnim, to znaczy takim, przy którym obszar figury zostaje po lewej stronie drogi całkowania.

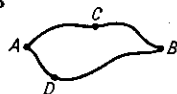
Warunek niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania (całkowalności różniczki zupełnej).

Przypadek dwuwymiarowy. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby całka krzywoliniowa

$$\int P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

gdzie P i Q są funkcjami ciągłymi określonymi w obszarze jednopójnym, zależała tylko od punktu początkowego A i punktu końcowego B drogi całkowania, a nie zależała od łączącej je krzywej, leżącej w obszarze oznaczoności funkcji P i Q , tzn. żeby przy dowolnych A i B i dowolnych drogach całkowania ACB i ADB (rys. 323) zachodziła równość

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy,$$



Rys. 323

jest istnienie takiej funkcji dwóch zmiennych $U(x, y)$, której różniczką zupełną $dU(x, y)$ byłoby wyrażenie podcałkowe

$$(1) \quad Pdx + Qdy = dU,$$

to znaczy

$$(2) \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Taką funkcję $U(x, y)$ nazywamy *funkcją pierwotną* ⁽¹⁾ różniczki zupełnej $Pdx + Qdy$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia funkcji pierwotnej wyrażenia $Pdx + Qdy$ (czyli *warunkiem całkowalności różniczki zupełnej* $Pdx + Qdy$) jest równość

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

pod warunkiem ciągłości tych pochodnych cząstkowych.

Przypadek trójwymiarowy. Warunek konieczny i dostateczny niezależności całki krzywoliniowej

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

od drogi całkowania łączącej dane punkty A i B jest analogiczny: musi istnieć funkcja pierwotna $U(x, y, z)$ taka, żeby

$$(1') \quad Pdx + Qdy + Rdz = dU,$$

to znaczy

$$(2') \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

⁽¹⁾ Funkcja pierwotna $U(x, y)$ jest to potencjał pola wektorowego $Pi + Qj$ (w innej terminologii jest to potencjał opatrzonego znakiem „-” patrz str. 670).

Warunek całkowalności polega w tym przypadku na równoczesnym spełnieniu trzech równości

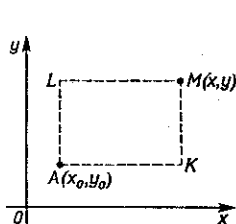
$$(3') \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

pod warunkiem ciągłości tych pochodnych cząstkowych.

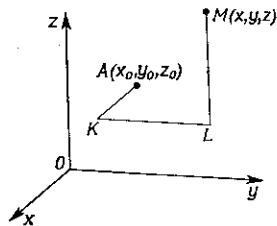
Znajdowanie funkcji pierwotnej. Przy spełnieniu warunku (3) funkcja pierwotna $U(x, y)$ równa się całce krzywoliniowej

$$U = \int_{AM} Pdx + Qdy$$

po dowolnej drodze całkowania $\widetilde{AM}$, leżącej w obszarze, w którym spełniony jest warunek (3), i łączącej dowolnie ustalony punkt A



Rys. 324



Rys. 325

o współrzędnych x_0, y_0 z punktem zmiennym M o współrzędnych bieżących x, y . W praktyce za drogę całkowania najdogodniej jest przyjąć jedną z dwóch linii łamanych AKM lub ALM o bokach równoległych do osi współrzędnych, jeżeli taka łamana nie wykracza poza obszar, w którym spełniony jest warunek (3) (rys. 324). Daje to dwa wzory na obliczenie funkcji pierwotnej $U(x, y)$ dla różniczki zupełnej $Pdx + Qdy$:

$$(4_1) \quad U = \int_{AK} + \int_{KM} + U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta + C,$$

$$(4_2) \quad U = \int_{AL} + \int_{LM} + U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y Q(x_0, \eta) d\eta + \int_{x_0}^x P(\xi, y) d\xi + C.$$

W przypadku trójwymiarowym przy spełnieniu warunku (3') oblicza się w sposób analogiczny funkcję pierwotną $U(x, y, z)$ według następującego wzoru (rys. 325):

$$(4') \quad U = \int_{AK} + \int_{KL} + \int_{LM} + U(x_0, y_0, z_0) = \\ = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{z_0}^z R(x, y, \zeta) d\zeta + C$$

albo według pięciu analogicznych wzorów odpowiadających innym możliwym liniom łamanym o bokach równoległych do osi współrzędnych.

Przykłady. 1. $Pdx + Qdy = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2}.$

Warunek (3) jest spełniony: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Stosujemy wzór (4₂) przyjmując w nim $x_0 = 0, y_0 = 1$ (nie można wziąć punktu $x_0 = 0, y_0 = 0$, gdyż w punkcie tym funkcje P i Q nie są ciągłe). Mamy

$$U = \int_1^y \frac{0}{0^2 + \eta^2} d\eta + \int_0^x \frac{-y}{\xi^2 + y^2} d\xi + U(0, 1) = -\arctg \frac{x}{y} + C = \\ = \arctg \frac{y}{x} + C_1.$$

$$2. \quad Pdx + Qdy + Rdz = z \left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \\ + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz.$$

Warunki (3') są spełnione. Stosujemy wzór (4') przyjmując $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$:

$$U = \int_1^x 0 d\xi + \int_1^y 0 d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2 + \zeta^2} - \frac{1}{xy} \right) d\zeta + C = \arctg \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

Całka okrężna wzdłuż płaskiego konturu (całka krzywoliniowa różniczki $Pdx + Qdy$ po płaskiej krzywej zamkniętej) przy spełnieniu warunku (3) równa się zeru, jeżeli wewnątrz danego konturu nie ma punktów, w których jedna z funkcji $P, Q, \partial P/\partial y$ lub $\partial Q/\partial x$ jest nieciągła albo nieoznaczona.

16. Całki podwójne i potrójne

Całka podwójna. Całką podwójną funkcji dwóch zmiennych $u = f(x, y)$ ⁽¹⁾ rozciągniętą na obszar płaski domknięty S i oznaczaną symbolem

$$\int_S f(x, y) dS \quad \text{albo} \quad \iint_S f(x, y) dS$$

nazywamy liczbę otrzymywaną w sposób następujący:

1° obszar całkowania S (rys. 326) rozkładamy w dowolny sposób na n obszarów elementarnych $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$;

2° wewnątrz lub na brzegu każdego obszaru elementarnego wybieramy w sposób dowolny jakiś jeden punkt $M_i(x_i, y_i)$;

3° wartość funkcji $u = f(x_i, y_i)$ mnożymy przez pole ΔS_i odpowiedniego obszaru elementarnego ΔS_i ;

4° wszystkie iloczyny postaci $f(x_i, y_i) \Delta S_i$ dodajemy;

5° znajdujemy granicę otrzymanej w ten sposób sumy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i,$$

gdy każdy obszar elementarny ΔS_i ściąga się do punktu ⁽²⁾, a zatem ilość ich n nieograniczenie wzrasta.

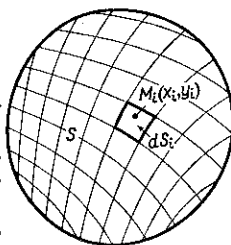
Jeżeli granica ta istnieje i nie zależy ani od sposobu rozkładania obszaru S na obszary elementarne, ani od doboru punktów $M_i(x_i, y_i)$, to granicę tę nazywamy *całką podwójną* funkcji u rozciągniętą na obszar S , który nazywamy w tym przypadku *obszarem całkowania*:

$$(1) \quad \int_S f(x, y) dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w całym domkniętym obszarze całkowania (to znaczy z włączeniem punktów brzegowych), to całka (1) istnieje.

⁽¹⁾ Funkcję u uważa się tutaj za funkcję punktu, to znaczy funkcję (patrz str. 367), która może być określona nie tylko we współrzędnych prostokątnych.

⁽²⁾ Warunek, że obszary elementarne ΔS_i dążą do zera, nie jest wystarczający. Otóż do granicy 0 powinna dążyć średnica każdego z obszarów elementarnych ΔS_i , czyli odległość między najbardziej od siebie oddalonymi punktami obszaru ΔS_i . Na przykład pole prostokąta przy nieograniczonym zmniejszaniu jednego z boków dąży do granicy 0, ale średnica tego prostokąta pozostaje skończona.

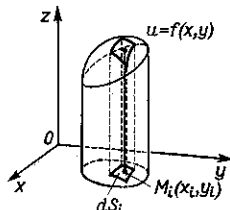


Rys. 326

Interpretacja geometryczna całki podwójnej. Całka podwójna jest to objętość bryły cylindrycznej (rys. 327) ograniczonej 1° podstawą S na płaszczyźnie Oxy , 2° powierzchnią cylindryczną, której kierującą jest kontur podstawy S , a tworzącymi są proste równoległe do osi Oz , 3° powierzchnią o równaniu $z = f(x, y)$. Każdy

element $f(x_i, y_i) \Delta S_i$ sumy $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ daje

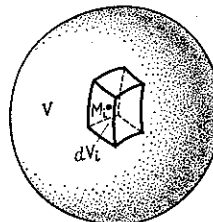
objętość dV_i pryzmatycznego słupka o podstawie ΔS_i i wysokości $f(x_i, y_i)$. Objętość otrzymuje się ze znakiem „+” lub „-” zależnie od tego, czy odpowiednia część powierzchni $z = f(x, y)$ leży nad płaszczyzną Oxy , czy też pod nią. Jeśli powierzchnia ta przecina płaszczyznę Oxy , to objętość bryły jest sumą algebraiczną poszczególnych elementów dodatnich i ujemnych.



Rys. 327

Całka potrójna. Całkę potrójną funkcji $u = f(x, y, z)$ rozciągniętą na obszar przestrzenny domknięty V i oznaczoną symbolem

$$\int_V f(x, y, z) dV \quad \text{albo} \quad \iiint_V f(x, y, z) dV$$



Rys. 328

określa się podobnie jak całkę podwójną: Obszar V (rys. 328) rozkładamy w sposób dowolny na obszary elementarne ΔV_i (gdzie $i = 1, 2, \dots, n$) i rozważamy iloczyny postaci $f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$, gdzie $M_i(x_i, y_i, z_i)$ jest punktem dowolnie obranym wewnątrz lub na brzegu obszaru elementarnego ΔV_i , a ΔV_i jest objętością tego obszaru elementarnego. *Całką potrójną* nazywamy granicę sumy takich iloczynów dla wszystkich obszarów elementarnych ΔV_i , gdy każdy z tych obszarów elementarnych ściąga się do punktu ⁽¹⁾, a więc ich ilość n rośnie nieograniczenie — jeżeli taka granica istnieje i nie zależy ani od sposobu rozkładania obszaru V na obszary elementarne, ani od doboru punktów M_i :

$$\int_V f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\Delta V_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (2).$$

⁽¹⁾ Ściąga się do punktu w tym samym sensie, jak przy całce podwójnej, tzn. że do granicy 0 dąży nie tylko objętość obszaru elementarnego, ale również jego średnica, czyli odległość między najbardziej oddalonymi punktami tego obszaru.

⁽²⁾ Analogicznie określa się całkę n -krotną w n -wymiarowej przestrzeni liczbowej.

Twierdzenie o istnieniu całki potrójnej dla funkcji ciągłej trzech zmiennych $f(x, y, z)$ jest analogiczne do odpowiedniego twierdzenia o istnieniu całki podwójnej.

17. Obliczanie całek wielokrotnych

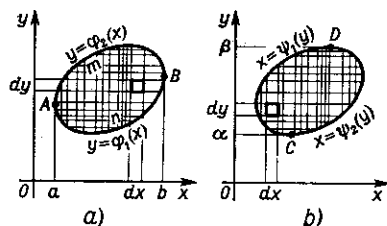
Obliczanie całki podwójnej lub potrójnej sprowadza się do kolejnego obliczania dwóch lub trzech całek oznaczonych. Można to wykonać różnymi sposobami, zależnie od wyboru układu współrzędnych.

Całka podwójna.

We współrzędnych prostokątnych. Obszar całkowania S rozkładamy za pomocą linii współrzędnych na prostokąty (rys. 329 a). Sumowanie iloczynów $f(x, y)dS$ przeprowadza się najpierw we wszystkich prostokątach wzdłuż każdego pasa pionowego, a następnie we wszystkich pasach pionowych. Analitycznie:

$$\int_S f(x, y) dS = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

gdzie a i b są odciętymi skrajnego lewego i skrajnego prawego punktu obszaru całkowania S , a $y = \varphi_1(x)$ oraz $y = \varphi_2(x)$ są równaniami krzywych stanowiących dolny brzeg (ANB) i górny brzeg (AMB) obszaru S



Rys. 329

w przedziale $a \leq x \leq b$; przyjęto pomijać nawias i pisać powyższy wzór w postaci

$$\int_S f(x, y) dS = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx,$$

przy czym wewnętrzną całkę (stojącą na drugim miejscu) odnosimy do tej zmiennej, której różniczka jest również wewnętrzna (tzn. stoi na pierwszym miejscu). Zauważmy, że iloczyn różniczek $dydx$ jest

polem dS obszaru elementarnego we współrzędnych prostokątnych, a pierwsze całkowanie przeprowadza się w założeniu, że x jest wielkością stałą.

Obliczenie we współrzędnych prostokątnych można przeprowadzić również w kierunku przeciwnym (patrz rys. 329 b):

$$\int_S f(x, y) dS = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Przykład. $I = \int_S xy^2 dS$, gdzie S jest to obszar ograniczony parabolą $y = x^2$ i prostą $y = 2x$ (rys. 330).

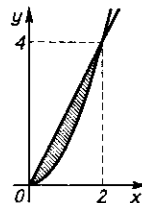
Mamy

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 dy dx = \int_0^2 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{2x} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (8x^4 - x^7) dx = \frac{32}{5}$$

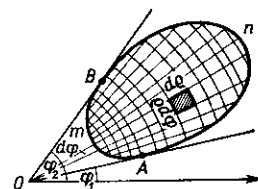
albo też

$$I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy = \int_0^4 y^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 y^2 \left(y - \frac{1}{4} y^2 \right) dy = \frac{32}{5}.$$

We współrzędnych biegunowych. Obszar S rozkładamy za pomocą linii współrzędnych na obszary elementarne ograniczone dwoma łukami kół mających środek w biegunie i dwoma odcinkami



Rys. 330



Rys. 331

półprostych wychodzących z bieguna (rys. 331); funkcję podcałkową należy wyrażać we współrzędnych biegunowych $\omega = f(\varrho, \varphi)$. Sumowanie przeprowadzamy najpierw wzdłuż każdego wycinka kołowego, a potem we wszystkich wycinkach kołowych.

Analitycznie:

$$(1) \quad \int_S f(\varrho, \varphi) dS = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\varrho, \varphi) \varrho d\varrho d\varphi,$$

gdzie φ_1 i φ_2 są to amplitudy skrajnych promieni wodzących stycznych do obszaru S , przy czym $\varphi_1 < \varphi_2$, a $\varrho = \varrho_1(\varphi)$ i $\varrho = \varrho_2(\varphi)$ są to równania biegunowe brzegu wewnętrznego (AmB) i brzegu zewnętrznego (AnB) obszaru S w przedziale $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Iloczyn $\varrho d\varrho d\varphi$ wyraża pole dS obszaru elementarnego we współrzędnych biegunowych.

Odwrotny porządek całkowania jest rzadko stosowany.

Przykład. $I = \int_S \varrho \sin^2 \varphi dS$, gdzie S jest półkolem $\varrho = 3 \cos \varphi$,

$$0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi \text{ (rys. 332).}$$

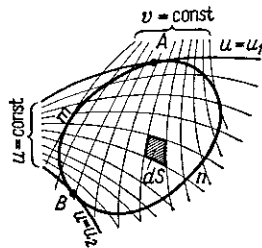


Rys. 332

Mamy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \cos \varphi} \varrho \sin^2 \varphi d\varrho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_0^{3 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

W dowolnych współrzędnych krzywoliniowych u, v , określonych wzorami $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (patrz str. 257). Obszar



Rys. 333

całkowania rozkładamy za pomocą linii współrzędnych $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ (rys. 355) na obszary elementarne, funkcję podcałkową wyrażamy przez współrzędne u, v i przeprowadzamy sumowanie wzdłuż jednego pasa (na przykład $v = \text{const}$), a następnie we wszystkich pasach.

Analitycznie:

$$(2) \quad \int_S f(u, v) dS = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u, v) |D| dv du,$$

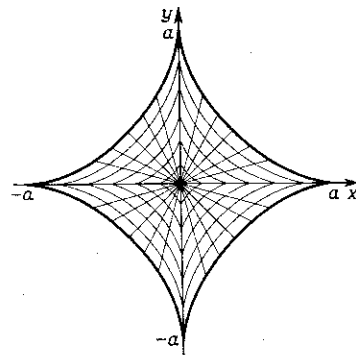
gdzie u_1 i u_2 są to współrzędne skrajnych linii współrzędnych stycznych do brzegu obszaru S i ograniczających obszar całkowania S , moduł $|D|$ jest bezwzględną wartością jacobianu

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

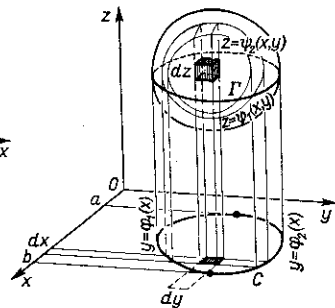
a $|D| dv du$ jest polem dS obszaru elementarnego we współrzędnych krzywoliniowych u, v .

Wzór (1) jest szczególnym przypadkiem wzoru (2), albowiem dla współrzędnych biegunowych mamy $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ i jacobian $D = \varrho$.

Doboru współrzędnych krzywoliniowych u i v dokonuje się w taki sposób, ażeby granice całkowania we wzorze (2) były możliwie najprostsze.



Rys. 334



Rys. 335

Przykład. $I = \int_S f(x, y) dS$, gdzie S jest obszarem ograniczonym asteroidą $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Wprowadzamy współrzędne krzywoliniowe $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$. Linie współrzędnych $u = c_1$ stanowi rodzina asteroid podobnych $x = c_1 \cos^3 t$, $y = c_1 \sin^3 t$ (rys. 334); liniami współrzędnych $v = c_2$ są półproste $y = kx$, gdzie $k = \tan^3 c_2$. Wówczas

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u \cos^2 v \sin v \\ \sin^3 v & 3u \sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3u \sin^2 v \cos^2 v,$$

skąd

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(x(u, v), y(u, v)) 3u \sin^2 v \cos^2 v dv du.$$

Całka potrójna.

We współrzędnych prostokątnych. Przestrzenny obszar całkowania rozkładamy za pomocą powierzchni współrzędnych (w danym przypadku za pomocą płaszczyzn współrzędnych) na prostopadłościany (rys. 335) i sumowanie iloczynów $f(x, y, z) dV$ przeprowadzamy najpierw we wszystkich prostopadłościanach wzdłuż słupka pionowego (sumowanie względem z) potem we wszystkich słupkach wzdłuż płyty równoległej do osi Ox i Oz (tzn. sumujemy względem y), wreszcie we wszystkich takich płytach (sumowanie względem x).

Analitycznie:

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

We wzorze tym $z = \psi_1(x, y)$ i $z = \psi_2(x, y)$ są równaniami dolnej i górnej części powierzchni ograniczającej obszar całkowania V ; powierzchnie te łączą się na krzywej Γ , wzdłuż której styka się z obszarem V powierzchnia walca opisanego na V i mającego tworzące równoległe do osi Oz . Równania $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$ są równaniami górnego i dolnego łuku krzywej C stanowiącej rzut krzywej Γ na płaszczyznę Oxy ; łuki te łączą się w punktach styczności konturu C ze skrajnymi stycznymi o równaniach $x = a$ i $x = b$.

Całkę powyższą można napisać bez nawiasów w postaci

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx,$$

przy czym całkowanie zaczynamy od wewnętrznej całki (trzeciej z rzędu), do której należy wewnętrzna różniczka dz (pierwsza z kolei),

potem obliczamy drugą całkę, do której należy druga różniczka dy i w końcu obliczamy pierwszą całkę, do której należy ostatnia różniczka dx .

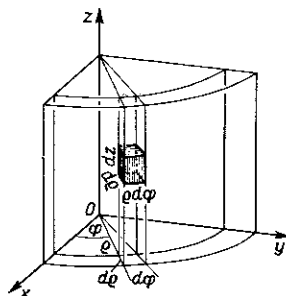
Tak jak przy całkach podwójnych, kolejność całkowania jest obojętna, a więc obliczanie całki potrójnej można dokonywać sześcioma sposobami.

Przykład. $I = \int_V (y^2 + z^2) dV$, gdzie V jest obszarem domkniętym mającym kształt ostrosłupa ograniczonego płaszczyznami współrzędnych oraz płaszczyzną $x + y + z = 1$.

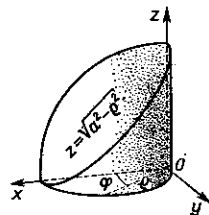
Mamy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dz dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dz \right) dy \right] dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

We współrzędnych cylindrycznych. Obszar całkowania rozkładamy na obszary elementarne za pomocą powierzchni współrzędnych $\varrho = \text{const}$ (walce obrotowe), $\varphi = \text{const}$ (półpłaszczyzny), $z = \text{const}$ (płaszczyzny). Objętość obszaru elementarnego $dV = \varrho dz d\varphi d\varrho$



Rys. 336



Rys. 337

(rys. 336). Funkcję podcałkową należy wyrazić we współrzędnych cylindrycznych: $f(\varrho, \varphi, z)$. Wówczas

$$(1) \quad \int_V f(\varrho, \varphi, z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\varrho, \varphi, z) \varrho dz d\varphi d\varrho.$$

Przykład. $I = \int_V dV$, gdzie V jest obszarem ograniczonym płaszczyznami współrzędnych Oxy i Oxz , powierzchnią cylindryczną $x^2 + y^2 = ax$ oraz powierzchnią kuli $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (rys. 337) ⁽¹⁾.

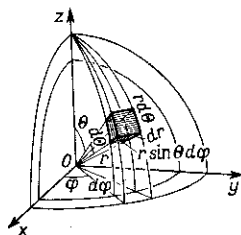
Mamy

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}, \quad \varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = a \cos \varphi, \\ \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \pi,$$

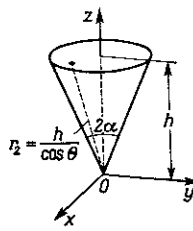
skąd

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, dz d\rho d\varphi = \\ = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{a \cos \varphi} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} dz \right) \rho \, d\rho \right] d\varphi = \frac{1}{18} a^3 (3\pi - 4).$$

We współrzędnych sferycznych. Obszar całkowania rozkładamy na obszary elementarne za pomocą powierzchni współrzędnych $r = \text{const}$ (powierzchnie kuliste), $\varphi = \text{const}$ (półpłaszczyzny) i $\theta =$



Rys. 338



Rys. 339

$= \text{const}$ (powierzchnia stożkowa). Objętość obszaru elementarnego $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ (rys. 338). Funkcję podcałkową należy wyrazić we współrzędnych sferycznych. Wówczas

$$(2) \quad \int_V f(r, \varphi, \theta) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

⁽¹⁾ Ponieważ w danym przypadku $f(x, y, z) = 1$, przeto całka wyraża objętość opisanej bryły.

Przykład. $I = \int_V \frac{\cos \theta}{r^2} dV$, gdzie V jest to obszar w postaci stożka ograniczonego powierzchnią współrzędnych $\varphi = \alpha$ i płaszczyzną współrzędnych $z = h$ (rys. 339).

Mamy

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{h}{\cos \theta}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi,$$

skąd

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{h/\cos \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta \left(\int_0^{h/\cos \theta} dr \right) d\theta \right] d\varphi = 2\pi h (1 - \cos \alpha).$$

W dowolnych współrzędnych krzywoliniowych u, v, w , określonych wzorami

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

(patrz str. 280). Obszar całkowania rozkładamy na obszary elementarne za pomocą powierzchni współrzędnych

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const}.$$

Objętość obszaru elementarnego

$$dV = |D| du dv dw, \quad \text{gdzie} \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Funkcję podcałkową należy wyrazić przez współrzędne u, v, w :

$$(3) \quad \int_V f(u, v, w) dV = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u, v)}^{w_2(u, v)} f(u, v, w) |D| dw dv du.$$

Wzory (1) i (2) są szczególnymi przypadkami wzoru (3); dla współrzędnych cylindrycznych $D = \rho$, dla współrzędnych sferycznych $D = r^2 \sin \theta$.

Dobór współrzędnych krzywoliniowych dokonuje się w taki sposób, żeby granice całkowania we wzorze (3) były jak najprostsze.

18. Zastosowania całek wielokrotnych

Całki podwójne

Wielkość	Ozna- czenie	Wzór ogólny	We współrzędnych prostokątnych	We współrzędnych biegunowych
Pole płaskiej figury	S	$\int_S dS$	$\iint dxdy$	$\iint \rho d\rho d\varphi$
Pole płata powierzchniowego ⁽¹⁾	Σ	$\int_S \frac{dS}{\cos \gamma}$	$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$	$\iint \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} d\rho d\varphi$
Objętość bryły cylindrycznej ⁽²⁾	V	$\int_S z dS$	$\iint z dxdy$	$\iint \rho z d\rho d\varphi$
Moment bezwładności płaskiej figury względem osi Ox	I_x	$\int_S y^2 dS$	$\iint y^2 dxdy$	$\iint \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi$
Moment bezwładności płaskiej figury względem bieguna O	I_O	$\int_S \rho^2 dS$	$\iint (x^2 + y^2) dxdy$	$\iint \rho^3 d\rho d\varphi$
Masa płaskiej figury o gęstości powierzchniowej jako funkcji parametru	M	$\int_S \delta dS$	$\iint \delta dxdy$	$\iint \delta \rho d\rho d\varphi$
Współrzędne środka ciężkości płaskiej figury jednorodnej	x_C	$\frac{\int_S x dS}{S}$	$\frac{\iint x dxdy}{\iint dxdy}$	$\frac{\iint \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi}{\iint \rho d\rho d\varphi}$
	y_C	$\frac{\int_S y dS}{S}$	$\frac{\iint y dxdy}{\iint dxdy}$	$\frac{\iint \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi}{\iint \rho d\rho d\varphi}$

⁽¹⁾ Patrz str. 537; w danym przypadku S oznacza rzut powierzchni na płaszczyznę Oxy , a γ kąt utworzony z osią Oz przez normalną do elementu powierzchniowego.

⁽²⁾ Patrz str. 527

Całki potrójne

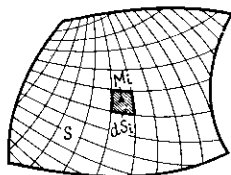
Wielkość	Ozna- czenie	Wzór ogólny	We współrzędnych prostokątnych	We współrzędnych cylindrycznych	We współrzędnych sferycznych
Objętość bryły	V	$\int_V dV$	$\iiint dxdydz$	$\iiint \rho dz d\rho d\varphi$	$\iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
Moment bezwładności bryły względem osi Oz	I_z	$\int_V \rho^2 dV$	$\iiint (x^2 + y^2) dxdydz$	$\iiint \rho^3 dz d\rho d\varphi$	$\iiint r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi$
Masa bryły o gęstości δ jako funkcji parametru	M	$\int_V \delta dV$	$\iiint \delta dxdydz$	$\iiint \delta \rho dz d\rho d\varphi$	$\iiint \delta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
Współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej	x_C	$\frac{\int_V x dV}{V}$	$\frac{\iiint x dxdydz}{\iiint dxdydz}$		
	y_C	$\frac{\int_V y dV}{V}$	$\frac{\iiint y dxdydz}{\iiint dxdydz}$		
	z_C	$\frac{\int_V z dV}{V}$	$\frac{\iiint z dxdydz}{\iiint dxdydz}$		

19. Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju⁽¹⁾

(całki po płacie powierzchniowym)

Określenie. Całką powierzchniową pierwszego rodzaju $\int_S f(x, y, z) dS$ funkcji trzech zmiennych $u = f(x, y, z)$, określonej w pewnym obszarze spójnym, wziętą po płacie S danej powierzchni należącym do tego samego obszaru, nazywamy liczbę otrzymywaną w sposób następujący:1° płat S (rys. 340) rozkładamy w sposób dowolny na n płatów elementarnych;2° wewnątrz lub na brzegu każdego płata elementarnego wybieramy dowolnie jakiś punkt $M_i(x_i, y_i, z_i)$;3° wartość funkcji $f(x_i, y_i, z_i)$ w punkcie M_i mnożymy przez pole odpowiednie płata elementarnego dS_i ;4° otrzymane iloczyny $f(x_i, y_i, z_i) dS_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dodajemy;5° znajdujemy granicę otrzymanej sumy $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) dS_i$, gdy każdy płat elementarny ściąga się do punktu ⁽²⁾, a więc ilość ich n nieograniczenie wzrasta.Jeżeli granica taka istnieje i nie zależy ani od sposobu podziału płata S na płaty elementarne, ani od doboru punktów $M_i(x_i, y_i, z_i)$, to nazywamy ją *całką powierzchniową pierwszego rodzaju*:

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) dS_i.$$

Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła w rozważanym obszarze, a funkcje występujące w równaniach powierzchni są ciągłe i mają ciągłe pochodne, to całka powierzchniowa pierwszego rodzaju istnieje.**Obliczanie całki powierzchniowej pierwszego rodzaju** sprowadza się do obliczania całki podwójnej po obszarze płaskim (patrz str. 528–532).⁽¹⁾ Całki te są uogólnieniem całek podwójnych (str. 526), podobnie jak całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (str. 517) są uogólnieniem prostych całek oznaczonych (str. 527).⁽²⁾ W tym samym sensie, jak to było rozumiane dla całki podwójnej (patrz notkę na str. 526).

Rys. 340

Jeżeli równanie powierzchni S dane jest w postaci jawnej $z = \varphi(x, y)$, to

$$(1) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \iint_{S'} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

gdzie S' jest rzutem płata S na płaszczyznę Oxy , $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$ ⁽¹⁾.Ponieważ równanie normalnej do powierzchni $z = \varphi(x, y)$ ma postać

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

(patrz str. 332), przeto $1/\sqrt{1+p^2+q^2} = \cos \gamma$, gdzie γ jest to kąt między kierunkiem normalnej i osią Oz ⁽²⁾; dlatego równanie (1) można pisać w postaci

$$(2) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y)) \frac{dS_{xy}}{\cos \gamma},$$

gdzie S_{xy} jest rzutem płata S na płaszczyznę Oxy .Jeżeli równanie powierzchni dane jest w postaci parametrycznej $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (rys. 341), to

$$(3) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

gdzie E , F i G są określone na stronie 333, $\sqrt{EG - F^2} du dv = dS$ (pole płata elementarnego), a Δ jest obszarem zmienności argumentów u , v , odpowiadającym danemu płatowi S . Całkę (3) oblicza się za pomocą dwukrotnego całkowania według wzoru

$$(4) \quad \int_S \Phi(u, v) dS = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u, v) \sqrt{EG - F^2} dv du,$$

⁽¹⁾ Przy tym zakłada się, że płat S jest tego rodzaju, iż każdemu punktowi jego rzutu S' na płaszczyznę Oxy odpowiada jedynie punkt płata S (tzn. że każdy punkt płata S jest jednoznacznie określony przez jego rzut na płaszczyznę Oxy). Jeżeli to nie zachodzi, to płat S rozkładamy na kilka części, z których każda spełnia powyższe założenia, i za całkę powierzchniową po całym płacie S uważa się sumę całek powierzchniowych wziętych po wszystkich częściach płata S .Powyższe ograniczenia są potrzebne, jeżeli powierzchnia S jest określona równaniami postaci parametrycznej.⁽²⁾ Kąt ten przy obliczaniu całki powierzchniowej pierwszego rodzaju uważa się zawsze za ostry: $\cos \gamma > 0$.

gdzie u_1, u_2 są współrzędnymi skrajnych linii współrzędnych $u = \text{const}$, między którymi znajduje się płat S (rys. 341), a $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ są równaniami dwóch łuków AmB i AnB krzywej płata S .

Wzór (1) jest szczególnym przypadkiem wzoru (3) przy

$$u = x, \quad v = y, \quad E = 1 + p^2, \quad F = pq, \\ G = 1 + q^2.$$

Zastosowanie całki powierzchniowej pierwszego rodzaju.

1. Pole krzywoliniowego płata S wyraża się wzorem

$$|S| = \int_S dS.$$

2. Masa niejednorodnego krzywoliniowego płata S , gdy gęstość powierzchniowa δ jest funkcją punktu ($\delta = f(x, y, z)$), wyraża się wzorem

$$M_S = \int_S \delta dS.$$

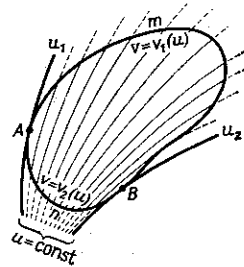
20. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju (całki po rzucie płata)

Pojęcie powierzchni zorientowanej. Zazwyczaj powierzchnia ma dwie strony, z których jedną można dowolnie nazwać *dodatnią* , a drugą — *ujemną* (¹). Powierzchnię, w której jedna strona została uznana za dodatnią, nazywamy *zorientowaną* . W powierzchni zamkniętej, nie przecinającej się sama z sobą i zawierającej wewnątrz pewien obszar przestrzenny (jak na przykład powierzchnia kuli lub elipsoidy) za stronę dodatnią przyjmuje się zazwyczaj zewnętrzną stronę powierzchni, a za ujemną — wewnętrzną.

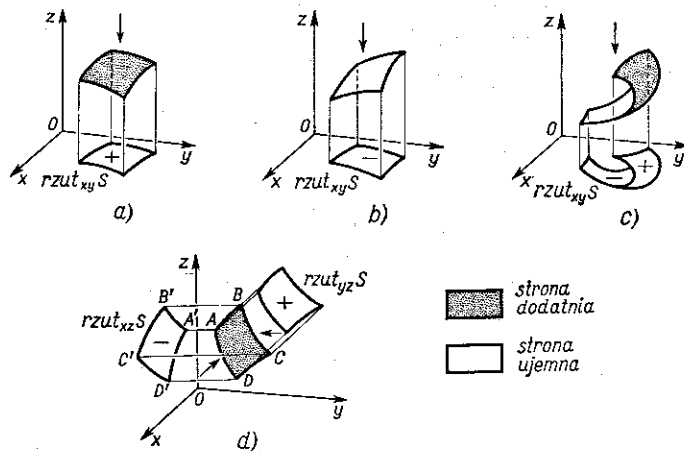
Rzut płata zorientowanego na płaszczyznę współrzędnych. Rzutując ograniczony płat S powierzchni zorientowanej na płaszczyznę współrzędnych, na przykład Oxy , można uznać $\text{rzut}_{xy} S$ za dodatni lub ujemny według następującej zasady (²) (rys. 342):

(¹) Istnieją powierzchnie, w których nie można wyróżnić dwóch stron (na przykład wstęga Möbiusa); w analizie matematycznej nie rozważa się takich powierzchni.

(²) Rozważamy tu przypadek rzutowania płata S na płaszczyznę współrzędnych Oxy , w którym każdemu punktowi rzutu płata odpowiada jeden określony punkt płata. (Przypisek tłumacza).



Rys. 341



Rys. 342

Jeżeli patrząc na płaszczyznę współrzędnych Oxy od strony dodatniego kierunku trzeciej osi współrzędnych (w danym przypadku z dodatniego kierunku osi Oz , czyli z góry) widzimy dodatnią stronę płata S , to uważamy $\text{rzut}_{xy} S$ za dodatni (rys. 342a), a w przeciwnym przypadku — za ujemny (rys. 342b). Jeżeli powierzchnia jest tak umieszczona, że część tej powierzchni jest widziana z góry od strony dodatniej, a część od strony ujemnej, to $\text{rzut}_{xy} S$ uważamy za sumę algebraiczną rzutów części powierzchni widzianej od strony dodatniej i części widzianej od strony ujemnej (rys. 342c). Na rysunku 342d podany jest $\text{rzut}_{xz} S$ oraz $\text{rzut}_{yz} S$ tego samego płata S , przy czym jeden z tych rzutów jest dodatni, a drugi ujemny.

Rzut zamkniętej powierzchni zorientowanej na dowolną płaszczyznę współrzędnych jest równy zeru.

Określenie całki powierzchniowej drugiego rodzaju po rzucie płata na płaszczyznę współrzędnych Oxy . Całką powierzchniową drugiego rodzaju

$$\int_S f(x, y, z) dx dy$$

funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$, określonej w pewnym obszarze spójnym, wziętą po rzucie płata zorientowanego S leżącego w tym samym obszarze na płaszczyznę współrzędnych Oxy , nazywamy liczbę, którą otrzymujemy w taki sam sposób, jak całkę powierzchniową pierwszego rodzaju (patrz str. 538) — z tą tylko różnicą, że w stadium 3° wartość

$f(x_i, y_i, z_i)$ funkcji w punkcie M_i mnożymy nie przez pole płata elementarnego ΔS_i , ale przez rzut $r_{xy} \Delta S_i$ elementarnego obszaru zorientowanego ΔS_i na płaszczyznę współrzędnych Oxy , przy czym należy uwzględnić znak tego rzutu (patrz wyżej):

$$(1_{xy}) \quad \int_S f(x, y, z) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) r_{xy} \Delta S_i.$$

Analogicznie określa się całki powierzchniowe drugiego rodzaju po rzucie danego płata S na płaszczyznę Oyz i Oxz :

$$(1_{yz}) \quad \int_S f(x, y, z) dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) r_{yz} \Delta S_i,$$

$$(1_{zx}) \quad \int_S f(x, y, z) dz dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) r_{zx} \Delta S_i.$$

Twierdzenie o istnieniu. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju (1_{xy}) , (1_{yz}) , (1_{zx}) istnieją, jeżeli funkcja $f(x, y, z)$, a także funkcje wyrażające równanie powierzchni są ciągłe i mają ciągłe pochodne.

Obliczanie całek powierzchniowych drugiego rodzaju sprowadza się do obliczania całek podwójnych. Jeżeli równanie dane jest w postaci jawnej $z = \varphi(x, y)$, to całkę (1_{xy}) oblicza się według następującego wzoru:

$$(2_{xy}) \quad \int_S f(x, y, z) dx dy = \int_{r_{xy} S} f(x, y, \varphi(x, y)) dS_{xy},$$

gdzie S_{xy} oznacza rzut danego płata S na płaszczyznę Oxy .

Analogicznie oblicza się całki powierzchniowe funkcji $f(x, y, z)$ po rzucie zorientowanym płata S na płaszczyznę współrzędnych Oyz i Oxz ; a więc

$$(2_{yz}) \quad \int_S f(x, y, z) dy dz = \int_{r_{yz} S} f(\varphi(y, z), y, z) dS_{yz},$$

gdzie $x = \varphi(y, z)$ jest równaniem powierzchni S rozwiązaniem względem x , a $S_{yz} = r_{yz} S$, oraz

$$(2_{zx}) \quad \int_S f(x, y, z) dz dx = \int_{r_{zx} S} f(\chi(z, x), z) dS_{zx},$$

gdzie $y = \chi(z, x)$ jest równaniem powierzchni S rozwiązaniem względem y , a $S_{zx} = r_{zx} S$.

Przy zmianie orientacji powierzchni (przy zamianie dodatniej strony na ujemną i na odwrot) całka po rzucie płata zmienia znak na przeciwny.

Jeżeli równanie powierzchni dane jest w postaci parametrycznej $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, to całki (1_{xy}) , (1_{yz}) , (1_{zx}) oblicza się według wzorów

$$(3_{xy}) \quad \int_S f(x, y, z) dx dy = \int_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

$$(3_{yz}) \quad \int_S f(x, y, z) dy dz = \int_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv,$$

$$(3_{zx}) \quad \int_S f(x, y, z) dz dx = \int_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv,$$

gdzie $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ są jacobianami par funkcji x, y, z względem u, v , a Δ jest obszarem zmienności argumentów u, v odpowiadającym danemu platomu S .

Całka powierzchniowa ogólnej postaci. Jeżeli w pewnym obszarze spójnym dane są trzy funkcje trzech zmiennych $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ oraz płat S powierzchni zorientowanej, to *całką powierzchniową ogólnej postaci* nazywamy sumę całek drugiego rodzaju wziętych po wszystkich rzutach płata S na płaszczyznę współrzędnych:

$$\int_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int_S P dy dz + \int_S Q dz dx + \int_S R dx dy \quad (1).$$

Wzór ogólny sprowadzający całkę powierzchniową ogólnej postaci do zwykłej całki podwójnej:

$$\begin{aligned} \int_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \int_{\Delta} \left(P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \end{aligned}$$

gdzie $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ itd. i Δ mają wyżej podane znaczenia.

Własności całki powierzchniowej.

1. Jeżeli obszar całkowania, czyli płat S , rozłożymy w jakikolwiek sposób na części S_1, S_2 , to

(1) Wykład wektorowy całki powierzchniowej postaci ogólnej — patrz w rozdziale Teoria pola (str. 671).

$$\begin{aligned} \int_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \int_{S_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy + \int_{S_2} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned}$$

2. Przy zmianie orientacji powierzchni (przy zamianie dodatniej strony na ujemną i na odwrót) całka powierzchniowa zmienia znak na przeciwny:

$$\int_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \int_{S^-} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

gdzie przez S^+ i S^- jest oznaczona ta sama powierzchnia, ale o orientacjach przeciwnych.

3. Całka powierzchniowa zależy w ogólnym przypadku zarówno od linii ograniczającej płat S , jak i od samej powierzchni; całki po płatach S_1 i S_2 napiętych na ten sam kontur krzywoliniowy C (rys. 343) w przypadku ogólnym nie są równe.

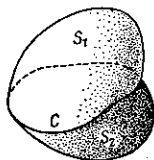
O b j ę t o ś ć V bryły ograniczonej powierzchnią zamkniętą S może być obliczana jako całka powierzchniowa:

$$V = \frac{1}{3} \int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

gdzie powierzchnia S jest tak zorientowana, że jej strona dodatnia jest stroną zewnętrzną.

21. Wzory Stokesa, Greena i Ostrogradskiego-Gaussa ⁽¹⁾

Wzór Stokesa (wyrażenie całki krzywoliniowej przez całkę powierzchniową). Jeżeli S jest powierzchnią zorientowaną, leżącą w pewnym obszarze spójnym i ograniczoną konturem K , a P, Q, R



Rys. 343



Rys. 344

są funkcjami trzech zmiennych x, y, z określonymi w tym samym obszarze, to zachodzi **wzór Stokesa**

⁽¹⁾ Wykład wektorowy tych twierdzeń patrz w rozdziale Teoria pola (str. 679, 680).

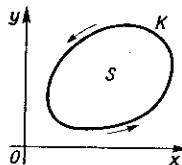
$$\begin{aligned} (1) \quad \int_K P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \quad (1), \end{aligned}$$

gdzie całkę krzywoliniową po lewej stronie równości bierze się wzdłuż konturu K w kierunku, który dla obserwatora patrzącego od dodatniej strony powierzchni S jest kierunkiem przeciwnym obiegowi wskazówek zegara (rys. 344).

Wzór Greena jest to szczególny przypadek wzoru Stokesa dla funkcji dwóch zmiennych w obszarze płaskim (jest to wyrażenie całki krzywoliniowej wzdłuż płaskiego konturu przez całkę podwójną). Jeżeli S jest płaskim płatem leżącym wewnątrz pewnego obszaru i ograniczonym konturem K , a P i Q są funkcjami dwóch zmiennych x i y określonymi w tym samym obszarze, to zachodzi związek

$$(2) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

gdzie całkę krzywoliniową po lewej stronie wzoru bierze się po konturze w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara (rys. 345).



Rys. 345

Wzór Ostrogradskiego-Gaussa (wyrażenie całki potrójnej przez całkę powierzchniową). Jeżeli S jest powierzchnią zamkniętą zorientowaną (której strona dodatnia jest stroną zewnętrzną) ograniczającą pewien obszar przestrzenny V , a P, Q, R są funkcjami trzech zmiennych określonymi w obszarze jednospójnym zawierającym tę powierzchnię, to zachodzi **wzór Ostrogradskiego-Gaussa**

$$(3) \quad \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (1).$$

⁽¹⁾ Twierdzenie to jest prawdziwe pod warunkiem istnienia i ciągłości funkcji P, Q, R oraz ich pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

IV. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

1. Pojęcia ogólne

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie zawierające funkcje niewiadome, zmienne niezależne oraz pochodne funkcji niewiadomych (lub ich różniczki).

Przykłady. 1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0$.

2. $x d^2 y dx - dy (dx)^2 = e^y (dy)^3$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$.

Jeżeli funkcje niewiadome zależą od jednej zmiennej niezależnej, to równanie różniczkowe nazywamy *zwyczajnym* (przykłady 1, 2). Jeżeli funkcje niewiadome zależą od kilku zmiennych niezależnych, to równanie różniczkowe nazywamy równaniem różniczkowym *częstkowym* (przykład 3). Rzędem równania różniczkowego nazywamy najwyższy z rzędów pochodnych lub różniczek występujących w równaniu (równanie 1 jest równaniem rzędu pierwszego, a równania 2 i 3 są rzędu drugiego).

Całka równania różniczkowego jest to jedno lub kilka równań, które wiążą funkcje niewiadome ze zmiennymi niezależnymi w ten sposób, że przy podstawieniu do danego równania różniczkowego znalezionych funkcji niewiadomych i ich pochodnych (lub różniczek), równanie to jest tożsamościowo spełnione.

Znajdowanie całek równania różniczkowego nazywamy *całkowaniem* tego równania. Całkę wyrażającą w sposób jawny funkcję niewiadomą przez zmienne niezależne nazywamy *rozwiązaniem* równania różniczkowego.

Całki równań różniczkowych mogą zawierać pewne dowolne stałe lub dowolne funkcje, a więc całki równania różniczkowego są niejednoznaczne. Zazwyczaj na dowolne funkcje nakładane są pewne warunki dodatkowe zwane *warunkami początkowymi* lub *brzegowymi*, które polegają na tym, że funkcje niewiadome, a także pewne ich pochodne powinny przybierać z góry dane wartości przy niektórych, określonych

wartościach zmiennych niezależnych. Przy tych warunkach dodatkowych rozwiązanie zadania może się stać jednoznaczne. Na przykład równanie różniczkowe zwyczajne

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ma (przy pewnych ograniczeniach) jedyne rozwiązanie, jeżeli zażądamy, żeby $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ przybierały pewne, z góry dane wartości przy $x = a$ (dokładniej patrz str. 562).

Całka równania różniczkowego jest *ogólna*, jeżeli przez odpowiedni dobór dowolnych stałych i dowolnych funkcji można z niej otrzymać całkę szczególną odpowiadającą dowolnym warunkom początkowym lub brzegowym, przy których rozwiązanie jest jednoznaczne. Równanie różniczkowe może posiadać tzw. *rozwiązanie osobliwe*, które nie da się wyprowadzić z całki ogólnej, przy żadnych wartościach dowolnych stałych i dowolnych funkcji (patrz str. 555).

A. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

2. Równania rzędu pierwszego

Wiadomości teoretyczne.

Twierdzenie Cauchy'ego (o istnieniu całki). Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , tzn. w obszarze $|x - x_0| < a$ i $|y - y_0| < b$, to istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie równania

$$(a) \quad y' = f(x, y)$$

przybierające przy $x = x_0$ wartość $y = y_0$, oznaczone i ciągłe w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Jeżeli ponadto w obszarze tym spełniony jest *warunek Lipschitza*

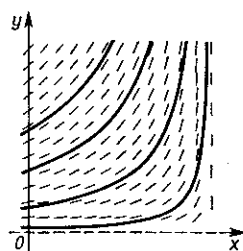
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N |y_1 - y_2|,$$

gdzie N nie zależy od x, y_1 i y_2 , to rozwiązanie równania jest jedyne i jest funkcją ciągłą względem y_0 .

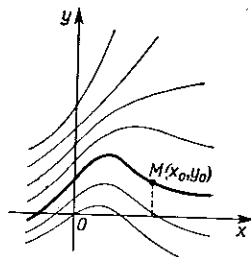
Warunek Lipschitza jest na pewno spełniony, jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w rozważanym obszarze ograniczoną pochodną cząstkową $\partial f / \partial y$ (przykłady, w których założenia twierdzenia Cauchy'ego nie są spełnione, patrz str. 555).

Pole kierunkowe. Jeżeli przez punkt $M(x, y)$ przechodzi wykres rozwiązania $y = \varphi(x)$ równania różniczkowego $y' = f(x, y)$, to współczynnik kątowny stycznej do wykresu w tym punkcie (równy dy/dx) może być wyznaczony bezpośrednio z równania różniczkowego, a więc równanie różniczkowe wyznacza w każdym punkcie kierunek stycznej do wykresu rozwiązania tego równania. Zbiór tych kierunków tworzy *pole kierunkowe* (rys. 346). Punkt wraz z oznaczonym w tym punkcie kierunkiem nazywamy *elementem* pola kierunkowego.

Całkowanie równania różniczkowego sposobem geometrycznym polega na łączeniu elementów pola kierunkowego w *krzywe całkowe*, do których styczne mają w każdym punkcie kierunek pokrywający się z kierunkiem pola w tym punkcie.



Rys. 346



Rys. 347

W wielu zagadnieniach zachodzi potrzeba rozpatrywania pola, w którym występują kierunki pionowe, co odpowiada nieskończonemu wielkim wartościom funkcji $f(x, y)$. W takich wypadkach zmienia się rolę zmiennej niezależnej x i zmiennej zależnej y , przy czym równanie czyta się jako równanie

$$(b) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

równoważne danemu. W obszarze, w którym spełnione są założenia twierdzenia Cauchy'ego dla równań postaci (a) lub (b), przez każdy punkt $M(x_0, y_0)$ przechodzi jedna krzywa całkowa (rys. 347).

Zbiór wszystkich krzywych całkowych zależy od jednego parametru i równanie tej rodziny, tzn. całka ogólna równania różniczkowego rzędu pierwszego, zawiera jedną stałą dowolną. Aby z całki ogólnej $F(x, y, C) = 0$ otrzymać całkę szczególną $y = \varphi(x)$ spełniającą warunek $y_0 = \varphi(x_0)$, należy wyznaczyć C z równania

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

Podstawowe metody całkowania.

Rozdzielanie zmiennych. Jeżeli równanie można doprowadzić do postaci

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0,$$

to można je przedstawić w postaci

$$R(x)dx + S(y)dy = 0,$$

gdzie zmienne x i y są *rozdzielone*; w tym celu należy podzielić całe równanie przez $P(x)N(y)$ i całka ogólna będzie miała postać

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C.$$

Jeżeli przy pewnych wartościach $\bar{x}$ i $\bar{y}$ funkcje $P(x)$ i $N(y)$ przybierają wartość zero, to rozwiązaniami są również całki $x = \bar{x}$ i $y = \bar{y}$.

Przykład. Niech $xdy + ydx = 0$; wtedy

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C, \quad \ln y + \ln x = C = \ln c, \quad yx = c^{(1)}.$$

Równania jednorodne. Jeżeli $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami jednorodnymi swych argumentów tego samego stopnia (patrz str. 371), to w równaniu $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ zmienne będą rozdzielone (patrz wyżej) po wprowadzeniu zamiast y nowej zmiennej u za pomocą podstawienia $y = ux$.

Przykład. $y^2 dx + x(x-y)dy = 0$.

Przyjmując, że $x \neq 0$, podstawiamy $y = ux$ i otrzymujemy $dy = udx + xdu$. Stąd

$$u^2 x^2 dx + x^2(1-u)(xdu + udx) = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{(1-u)du}{u} = 0,$$

$$\ln x + \ln u - u = C = \ln c, \quad ux = ce^u, \quad y = ce^{y/x}.$$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $x = 0$. Bezpośrednie sprawdzenie wykazuje, że prosta $x = 0$ jest również jedną z krzywych całkowych.

Równanie różniczkowe zupełne. Równanie postaci

$$(*) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

⁽¹⁾ Gdy rozwiązanie danego równania różniczkowego piszemy w postaci $\ln y + \ln x = C$, wydawać się może, iż ograniczamy rozważany obszar przez wprowadzanie warunków $x > 0$ i $y > 0$ (gdyż w dziedzinie liczb rzeczywistych tylko przy tych warunkach $\ln y$ i $\ln x$ mają sens liczbowy). Tymczasem ostateczne rozwiązanie dane w postaci $xy = c$ ograniczeń tych nie zawiera. Można by uniknąć tego chwilowego ograniczenia obszaru oznaczoności funkcji w sposób następujący: całkując równanie

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

piszemy $\ln |y| + \ln |x| = \ln |c|$, gdzie c jest dowolną liczbą różną od 0; stąd kolejno otrzymujemy $\ln |xy| = \ln |c|$, $|xy| = |c|$, wreszcie $xy = c$.

W końcu można sprawdzić, że również $x = 0$ i $y = 0$ wyznaczają całkę równania, a więc najogólniejszą całkę można przedstawić w postaci $xy = c$, gdzie c jest dowolne. (Przypisek tłumacza).

nazywamy *równaniem różniczkowym zupełnym*, jeżeli istnieje funkcja $\Phi(x, y)$ taka, że

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y)$$

(patrz str. 392), tzn. że $M(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$ i $N(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$.

Jeżeli w pewnym obszarze jednospójnym funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są ciągle i mają ciągle pochodne rzędu pierwszego wraz ze swoimi pochodnymi cząstkowymi rzędu pierwszego, to równość

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by równanie (*) było równaniem różniczkowym zupełnym. W tym przypadku $\Phi(x, y) = C$ będzie rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (*). Funkcję $\Phi(x, y)$ można znaleźć według wzoru (patrz str. 524, wzór (4₂)):

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta,$$

gdzie x_0 i y_0 są dowolnymi stałymi.

Czynnikiem całkującym nazywamy taką funkcję $\mu(x, y)$, że równanie różniczkowe $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ po pomnożeniu przez $\mu(x, y)$ staje się równaniem różniczkowym zupełnym. Funkcja $\mu(x, y)$ spełnia równanie

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

przy czym każde rozwiązanie szczególne tego równania można przyjąć za czynnik całkujący.

Jeżeli znany jest czynnik całkujący μ równania różniczkowego (*), które po pomnożeniu przez ten czynnik przekształca się w równanie $d\Phi(x, y) = 0$, to ogólna postać czynnika całkującego jest $\tilde{\mu} = \mu f(\Phi)$, gdzie f oznacza dowolną funkcję.

P r z y k ł a d. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

Równanie określające czynnik całkujący jest

$$-x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (x^2 + y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 2.$$

Szukamy czynnika całkującego niezależnego od y ; wtedy

$$x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2, \quad \text{skąd} \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Mnożąc dane równanie różniczkowe przez μ otrzymujemy

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Przyjmując $x_0 = 1, y_0 = 0$ znajdujemy całkę ogólną

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right) d\xi - \int_0^y d\eta = C, \quad \text{czyli} \quad x - \frac{y}{x} = C_1.$$

R ó w n a n i e l i n i o w e. Równanie postaci

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

w którym funkcja niewiadoma i jej pierwsza pochodna występują w postaci liniowej, czyli w pierwszej potęgę, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego*. Równanie to ma czynnik całkujący

$$\mu = e^{\int P(x) dx}.$$

Całkę ogólną znajduje się według wzoru

$$(**) \quad y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + C \right).$$

Jeżeli we wzorze tym całkowanie nieoznaczone zastąpimy wszędzie całkowaniem w granicach od x_0 do x (¹), to otrzymamy rozwiązanie, które przybiera wartość C przy $x = x_0$.

Jeżeli znane jest jakiegokolwiek rozwiązanie szczególne $y_1(x)$ równania różniczkowego liniowego, to rozwiązanie ogólne tego równania znajduje się według wzoru

$$y = y_1 + C e^{-\int P dx}.$$

Jeżeli znane są dwa rozwiązania szczególne liniowo niezależne (patrz str. 565) $y_1(x)$ i $y_2(x)$, to rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego znaleźć można bez całkowania według wzoru $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

P r z y k ł a d. Znajdźmy rozwiązanie równania $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$ spełniające warunki początkowe $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Obliczamy $e^{\int_0^x (-\operatorname{tg} x) dx} = \cos x$ i ze wzoru (**) otrzymujemy

$$y = \frac{1}{\cos x} \int_0^x \cos^2 x dx = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right) = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2 \cos x}.$$

(¹) Patrz str. 424 i 425.

Równanie Bernoulliego. Równanie postaci

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

nazywamy *równaniem Bernoulliego*; sprowadzamy je do równania liniowego dzieląc przez y^n i wprowadzając nową zmienną $z = y^{-n+1}$.

Przykład. $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$.

Mamy tu $n = \frac{1}{2}$. Dzieląc równanie przez $\sqrt{y}$ i wprowadzając nową zmienną $z = \sqrt{y}$ otrzymujemy $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. Dalej mamy $e^{\int P dx} = \frac{1}{x^2}$, gdzie $P = -\frac{2}{x}$. Według wzoru na rozwiązanie równania liniowego mamy

$$z = x^2 \left(\int \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{x^2} dx + C \right) = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right);$$

stąd

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right)^2.$$

Równanie Riccatiego. Równanie postaci

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

nosi nazwę *równania Riccatiego*; nie może ono być w ogólnym przypadku scałkowane w *kwadraturach* (tzn. znalezienie rozwiązania tego równania nie może być sprowadzone do skończonej ilości całkowań). Jeżeli natomiast znane jest jedno rozwiązanie szczególne y_1 równania Riccatiego, to przez wprowadzenie nowej zmiennej z za pomocą wzoru $y = y_1 + \frac{1}{z}$ można sprowadzić równanie Riccatiego do równania liniowego. Jeżeli znamy jeszcze jedno rozwiązanie y_2 równania Riccatiego, to $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania liniowego względem zmiennej z , co pozwala na uproszczenie całkowania tego równania. Jeżeli dla równania Riccatiego znane są trzy rozwiązania szczególne y_1, y_2 i y_3 , to jego całka ogólna ma postać

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C.$$

Przez zamianę zmiennych $y = \frac{u}{P(x)} + \beta(x)$ równanie Riccatiego

może być doprowadzone do postaci kanonicznej $\frac{du}{dx} = u^2 + R(x)$.

Przez podstawienie $y = -\frac{v'}{P(x)v}$ można sprowadzić równanie Riccatiego do równania liniowego rzędu drugiego $Pv'' - (P' + PQ)v' + P^3Rv = 0$.

Przykład. $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$.

Dokonyjemy zamiany zmiennych $y = z + \beta(x)$. Po dokonaniu zamiany współczynnik przy pierwszej potęgce zmiennej z będzie równy $2\beta(x) + \frac{1}{x}$, zatem współczynnik ten zniknie, jeśli przyjmiemy $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$; otrzymamy $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Narzuca się myśl szukania rozwiązania szczególnego w postaci $z_1 = \frac{a}{x}$. Po podstawieniu znajdu-

jemy $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$, skąd dwa rozwiązania szczególne: $z_1 = -\frac{3}{2x}$, $z_2 = \frac{5}{2x}$. Dokonyjemy nowej zamiany zmiennych $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$; otrzymujemy $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Korzystając z rozwiązania szczególnego tego równania $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$ znajdujemy jego rozwiązanie ogólne $u = \frac{1}{4}x + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$, skąd

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^5 + C_1x}.$$

Równania postaci $F(x, y, y') = 0$ (y' nie jest wyrażone w sposób jawny). Wprowadźmy oznaczenie $p = dy/dx$; mamy wtedy równanie $F(x, y, p) = 0$. Jeżeli w pewnym punkcie $M(x_0, y_0)$ równanie $F(x_0, y_0, p) = 0$ ma n pierwiastków rzeczywistych $p_1, p_2, \dots, p_n$, przy czym w punkcie $x = x_0, y = y_0, p = p_i$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, funkcja $F(x, y, p)$ i jej pierwsze pochodne są ciągłe i $\partial F / \partial p \neq 0$, to przez punkt $M(x_0, y_0)$ przechodzi n krzywych całkowych.

Jeżeli dane równanie $F(x, y, y') = 0$ można rozwiązać względem y' , to daje ono alternatywę n równań o postaci poprzednio rozważanej i rozwiązując te równania otrzymamy n rodzin krzywych całkowych.

Jeżeli dane równanie różniczkowe można napisać w postaci $x = \varphi(y, y')$ lub $y = \psi(x, y')$, to wprowadzając oznaczenie $y' = p$ i uważając p za zmienną pomocniczą, po zróżniczkowaniu względem y lub względem x , otrzymamy równanie dla dp/dy lub dp/dx rozwiązane względem pochodnej. Rozwiązanie tego równania wraz z równaniem pierwotnym wyznacza w postaci parametrycznej szukane rozwiązanie.

Przykład. $x = yy' + y'^2$.

Oznaczamy $y' = p$, mamy wtedy równanie $x = py + p^2$. Różniczkujemy względem y i podstawiając $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p) \frac{dp}{dy}, \quad \text{czyli} \quad \frac{dy}{dp} - \frac{py}{1-p^2} = \frac{2p^2}{1-p^2}.$$

Jest to równanie liniowe względem zmiennej y . Rozwiązując to równanie otrzymujemy

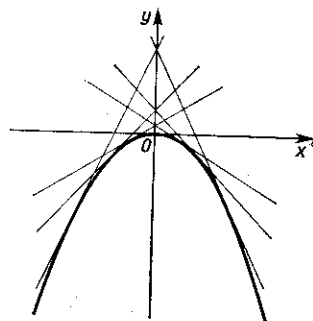
$$y = -p + \frac{c + \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}$$

i dołączając pierwotne równanie $x = py + p^2$ otrzymujemy szukane rozwiązanie w postaci parametrycznej.

Równanie Lagrange'a. Równanie postaci

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0,$$

zwane równaniem Lagrange'a, może być scałkowane w kwadraturach wyżej podanym sposobem. Jeżeli $a(p) + b(p)p = 0$ przy $p = p_0$, to $a(p_0)x + b(p_0)y + c(p_0) = 0$ jest całką osobliwą równania Lagrange'a (patrz niżej).



Rys. 348

Jeżeli $a(p) + b(p)p = 0$, to mamy równanie Clairauta, które zawsze można doprowadzić do postaci $y = y'x + f(y')$. Jego rozwiązanie ogólne ma postać $y = Cx + f(C)$. Oprócz rozwiązania ogólnego (które w interpretacji geometrycznej daje rodzinę linii prostych zależnych od jednego parametru) równanie Clairauta ma jeszcze całkę osobliwą, którą otrzymuje się przez rugowanie C z równania $y = Cx + f(C)$ i z równania $0 = x + f'(C)$, które otrzymuje się z pierwszego równania przez różniczkowanie względem C ; w interpretacji

geometrycznej całka osobliwa jest to obwiednia danej rodziny prostych $y = Cx + f(C)$ (rys. 348, patrz str. 321).

Przykład. $y = xy' + y'^2$.

Całka ogólna: $y = Cx + C^2$. Różniczkując względem C mamy $0 = x + 2C$ i po wyrugowaniu C otrzymujemy całkę osobliwą $x^2 + 4y = 0$. Krzywe całkowite rozważanego równania różniczkowego są podane na rysunku 348.

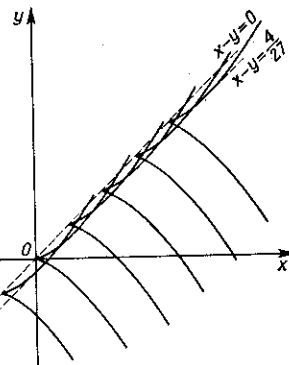
Całki osobliwe. Element (x_0, y_0, y'_0) nazywamy *elementem osobliwym*, jeżeli element ten oprócz równania $F(x, y, y') = 0$ spełnia także równanie $\partial F / \partial y' = 0$. Krzywą całkową utworzoną z elementów osobliwych nazywamy *krzywą całkową osobliwą*. We wszystkich jej punktach nie jest spełniona własność jednoznaczności rozwiązania (patrz twierdzenie Cauchy'ego, str. 547). Obwiednie (patrz str. 321) krzywych całkowych (rys. 348) są krzywymi całkowymi osobliwymi. Równanie krzywej całkowej osobliwej jest całką osobliwą, której z reguły nie można otrzymać z całki ogólnej przy żadnych wartościach dowolnej stałej. Dla znalezienia całki osobliwej równania różniczkowego $F(x, y, p) = 0$, gdzie $p = y'$, dołączamy do danego równania równanie $\partial F / \partial p = 0$ i rugujemy p . Jeżeli uzyskany związek będzie całką danego równania różniczkowego, będzie to całka osobliwa, przy czym dane równanie powinno być uprzednio (przy uwzględnieniu zespolonych wartości funkcji) doprowadzone do postaci nie zawierającej funkcji wieloznacznych, a w szczególności pierwiastków. Jeżeli znane jest równanie krzywych całkowych, czyli całka ogólna danego równania różniczkowego, to dla znalezienia obwiedni tej rodziny dających rozwiązanie osobliwe, mogą być zastosowane metody geometrii różniczkowej (patrz str. 321).

Przykład. $x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0$.

Równanie $\partial F / \partial p = 0$ ma postać $-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0$. Rugując p otrzymujemy alternatywę:

$$a. \quad x - y = 0 \quad \text{lub} \quad b. \quad x - y = \frac{4}{27}.$$

Równanie a nie jest rozwiązaniem, równanie b jest rozwiązaniem osobliwym. Rozwiązanie ogólne danego równania jest $(y - C)^3 = (x - C)^3$. Krzywe całkowite (parabole półsześcienne) oraz linie a i b pokazane są na rysunku 349.



Rys. 349

Punkty osobliwe równania różniczkowego. Dla równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey},$$

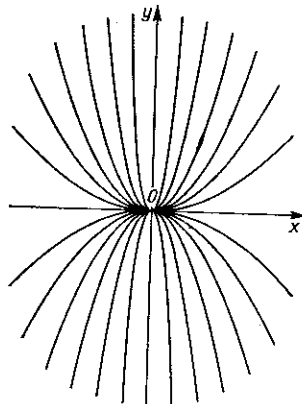
gdzie $ae - bc \neq 0$, punkt $(0, 0)$ jest *punktem osobliwym odosobnionym*, gdyż w punkcie tym nie są spełnione założenia twierdzenia Cauchy'ego

(patrz str. 547), które zachodzą w każdym innym punkcie dowolnie blisko leżącym⁽¹⁾. Zachowanie się krzywych całkowych w sąsiedztwie takiego punktu osobliwego zależy od pierwiastków równania charakterystycznego

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda + (bc - ae) = 0.$$

a mianowicie:

1° Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i mają jednakowe znaki, to punkt osobliwy jest *punktem węzłowym* równania różniczkowego. Krzywe całkowe leżące w pewnym otoczeniu punktu węzłowego przechodzą przez ten punkt i jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego nie są równe, krzywe całkowe, z wyjątkiem jednej, mają w tym punkcie wspólną styczną. Jeżeli natomiast równanie charakterystyczne ma pierwiastek dwukrotny, to albo wszystkie bez wyjątku krzywe całkowe mają wspólną styczną, albo przez punkt osobliwy przechodzi w każdym kierunku jedna tylko krzywa całkowa.



Rys. 350

Przykłady. 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$. Krzywe całkowe $y = Cx^2$ oraz $x = 0$ ⁽²⁾ (rys. 350).

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ma pierwiastek dwukrotny $\lambda = 1$. Krzywe całkowe $y = x \ln|x| + Cx$ (rys. 351).

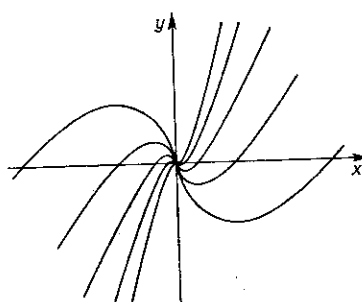
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ma pierwiastek dwukrotny $\lambda = 1$. Krzywe całkowe $y = Cx$ (rys. 352).

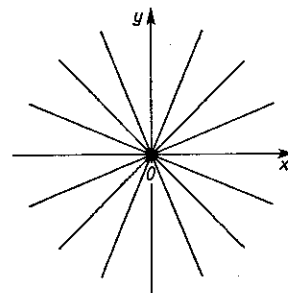
⁽¹⁾ Ściślej: założenia Cauchy'ego nie są spełnione również we wszystkich tych punktach, dla których $cx + ey = 0$, ale te założenia będą spełnione, gdy zmieniając rolę zmiennej niezależnej i zmiennej zależnej będziemy rozważali równanie

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ey}{ax + by}, \quad \text{gdzie } bc - ae \neq 0.$$

⁽²⁾ Prosta $x = 0$ także zawiera się w rozwiązaniu ogólnym, co widzimy, gdy napiszemy całkę ogólną w postaci $x^2 = C_1 y$.

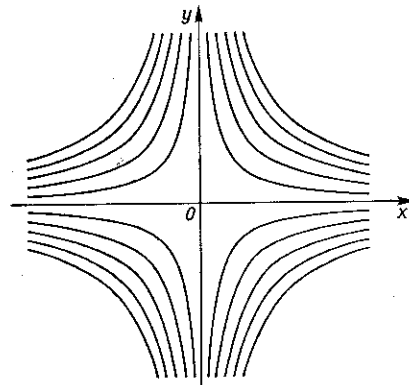


Rys. 351



Rys. 352

2° Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i mają różne znaki, to punkt osobliwy jest *punktem siodłowym* równania różniczkowego. Spośród krzywych całkowych leżących w pewnym otoczeniu punktu siodłowego tylko dwie krzywe całkowe przechodzą przez ten punkt (są one asymptotami pozostałych krzywych całkowych).



Rys. 353

Przykład. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

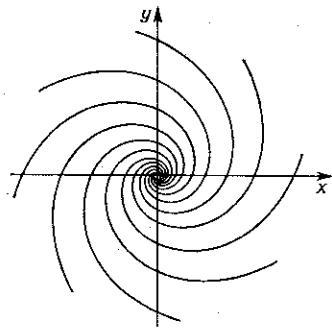
Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 1 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Krzywe całkowe $xy = C$ (rys. 353); gdy $C = 0$, mamy całki szczególne $x = 0$ i $y = 0$.

3° Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone sprzężone o części rzeczywistej różnej od 0, to punkt osobiwy jest *ogniskiem* równania różniczkowego. Krzywe całkowe leżące w pewnym otoczeniu ogniska nawijają się na ten punkt osobiwy (punkt asymptotyczny krzywych całkowych), wykonując przy tym nieskończenie wiele obrotów.

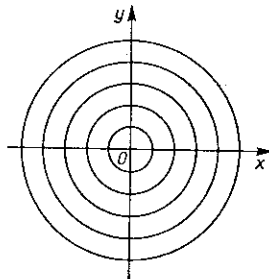
Przykład. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 1 + i$ i $\lambda_2 = 1 - i$. Krzywe całkowe mają we współrzędnych biegunowych równania $\varrho = Ce^{\theta}$, $C \neq 0$ (rys. 354).

4° Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są urojone, to punkt osobiwy jest *punktem wirowym* równania różniczkowego. Krzywe całkowe leżące w pewnym otoczeniu punktu wirowego są krzywymi zamkniętymi obejmującymi ten punkt.



Rys. 354



Rys. 355

Przykład. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 1 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$. Krzywe całkowe $x^2 + y^2 = C$ (rys. 355).

Dla równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

punktami osobiwymi są te punkty, w których równocześnie $P(x, y) = 0$ i $Q(x, y) = 0$. Zakładając, że funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ mają ciągłe

pochodne, można napisać dane równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)+P_1(x, y)}{c(x-x_0)+e(y-y_0)+Q_1(x, y)},$$

gdzie x_0, y_0 są współrzędnymi punktu osobiwego, a $P_1(x, y)$ i $Q_1(x, y)$ są nieskończenie małe rzędu wyższego względem odległości punktu (x, y) od punktu (x_0, y_0) . Wtedy charakter punktu osobiwego danego równania różniczkowego będzie na ogół taki sam jak charakter punktu osobiwego pierwszego równania przybliżającego, które się otrzymuje po odrzuceniu wyrazów $P_1(x, y)$ i $Q_1(x, y)$. Wyjątki: a) jeżeli punkt osobiwy pierwszego równania przybliżonego jest punktem wirowym, to punkt osobiwy podstawowego równania różniczkowego może być punktem wirowym albo ogniskiem; b) jeżeli $ae - bc = 0$, to dla określenia charakteru punktu osobiwego potrzebne jest badanie wyrazów wyższego rzędu.

Przybliżone metody całkowania równań różniczkowych.

Metoda kolejnych przybliżeń Picarda. Równanie $y' = f(x, y)$ z warunkiem początkowym $y = y_0$, gdy $x = x_0$, może być napisane w postaci

$$(1) \quad y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Jeżeli po prawej stronie zamiast y podstawimy jakąkolwiek funkcję $y_1(x)$, to po lewej stronie otrzymamy nową funkcję y_2 , różną od funkcji y_1 , jeżeli y_1 nie będzie rozwiązaniem danego równania. Podstawiając po prawej stronie równania (1) y_2 zamiast y otrzymamy funkcję y_3 itd.

Uzyskany w ten sposób ciąg funkcji $y_1, y_2, \dots$ jest w pewnym przedziale zawierającym punkt x_0 zbieżny do szukanego rozwiązania, jeżeli są spełnione założenia do twierdzenia Cauchy'ego (patrz str. 547). Metoda kolejnych przybliżeń nazywana bywa niekiedy *metodą iteracji* (porównaj str. 181).

Przykład. $y' = e^x - y^2$ z warunkiem początkowym $x_0 = 0, y_0 = 0$. Piszemy równanie w postaci całkowej

$$y = \int_0^x (e^x - y^2) dx.$$

Stosujemy metodę Picarda zaczynając od funkcji $y_0 = 0$ i otrzymujemy kolejno

$$y_1 = \int_0^x e^x dx = e^x - 1,$$

$$y_2 = \int_0^x [e^x - (e^x - 1)^2] dx = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2}$$

i tak dalej.

Zastosowanie szeregów. Jeżeli znane są wartości wszystkich pochodnych $y'_0, y''_0, \dots, y^{(n)}_0, \dots$ w punkcie początkowym x_0 , to można napisać rozwinięcie rozwiązania równania różniczkowego w szereg Taylora (patrz str. 413):

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}y^{(n)}_0 + \dots$$

Wartości tych pochodnych mogą być znalezione z równania różniczkowego za pomocą kolejnego różniczkowania i podstawiania warunków początkowych. Jeżeli dopuszczalne jest nieograniczone różniczkowanie równania, to otrzymany szereg będzie zawsze zbieżny w pewnym otoczeniu początkowej wartości argumentu x_0 .

Opisana metoda może być oczywiście zastosowana także do równań rzędu n .

W praktyce często wygodniej jest szukać rozwiązania w postaci szeregu o współczynnikach nieoznaczonych, które można będzie wyznaczyć na podstawie warunku, że szereg powinien spełniać dane równanie.

Przykład. $y' = e^x - y^2$ przy warunkach początkowych $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Pierwszy sposób. Załóżmy, że

$$y = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Podstawiając szereg do danego równania i korzystając ze wzoru na kwadrat szeregu (patrz str. 386) otrzymujemy

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + \dots) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots,$$

skąd mamy

$$a_1 = 1, \quad 2a_2 = 1, \quad 3a_3 + a_1^2 = \frac{1}{2}, \quad 4a_4 + 2a_1a_2 = \frac{1}{6}$$

itd. Rozwiązując kolejno otrzymane równania i podstawiając znalezione współczynniki do szeregu otrzymujemy

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

Drugi sposób. Podstawiając w równaniu $x = 0$ otrzymujemy $y'_0 = 1$. Dalej mamy $y'' = e^x - 2yy'$, skąd $y''_0 = 1, y''' = e^x - 2y'y'' - 2y''y'$, skąd $y'''_0 = -1; y^{(4)} = e^x - 6y'y'' - 2y''y''$, skąd $y^{(4)}_0 = -5$, itd.

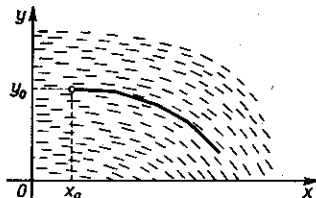
Według wzoru Taylora otrzymujemy

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

Graficzny sposób rozwiązywania równań różniczkowych opiera się na pojęciu pola kierunkowego (patrz str. 547). Krzywą całkową można w przybliżeniu przedstawić za pomocą linii łamanej (rys. 356) wychodzącej z danego punktu początkowego i utworzonej z niewielkich odcinków, z których każdy ma kierunek zgodny z kierunkiem pola kierunkowego w punkcie początkowym tego odcinka, który jest zarazem punktem końcowym poprzedniego odcinka.

Całkowanie numeryczne. Przy całkowaniu numerycznym równania $y = f(x, y)$ układa się kolejno tablicę wartości szukanej funkcji dla wartości argumentu $x_k = x_0 + kh$, gdzie $k = 1, 2, \dots$, a h oznacza stałą odstęp tabelaryczny. W tym celu zazwyczaj korzysta się z któregośkolwiek wzoru na przybliżone całkowanie dla obliczenia różnic

$$y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$



Rys. 356

Najczęściej stosowane są następujące wzory różnicowe (oznaczenia patrz na str. 819, 820):

$$(A) \quad y_{k+1} - y_k = h \left(f_{k+1} + \frac{1}{2} \Delta f_k + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{k-1} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{k-2} \right),$$

$$(B) \quad y_{k+1} - y_k = h \left(f_{k+1} - \frac{1}{2} \Delta f_k + \frac{1}{12} \Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{k-2} \right).$$

Znajdując według wzoru (A) pierwsze przybliżenie y_{k+1} obliczamy f_{k+1} i ze wzoru (B) znajdujemy drugie przybliżenie y_{k+1} . W podobny sposób może być obliczone trzecie przybliżenie, ale zazwyczaj staramy się tak dobrać odstęp tabelaryczny h , aby nie zachodziła potrzeba trzeciego przybliżenia.

Przykład. Otrzymane poniżej wyrazy szeregu dla rozwiązania równania $y' = e^x - y^2$ z warunkiem początkowym $x_0 = 0, y_0 = 0$ pozwalają obliczyć z czterema cyframi po przecinku wartości y dla $x_1 = 0,1, x_2 = 0,2$ i $x_3 = 0,3$. Dla obliczenia dalszych wartości y buduje się tablicę według następującego schematu (do kreski schodkowej):

x	y	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0,0000	1,0000	942	-147	-35
0,1	0,1048	1,0942	795	-182	-21
0,2	0,2183	1,1737	613	-203	
0,3	0,3389	1,2350	410		
0,4	0,4646	1,2760			

Jest rzeczą celową sprawdzenie wartości y_3 według wzoru (B):

$$y_3 = 0,2183 + 0,1(1,2350 - 0,0306 + 0,0015 + 0,0001) = 0,3389.$$

Dalej, dla $x_4 = 0,4$ według wzoru (A) otrzymujemy

$$y_4 - y_3 = 0,1(1,2350 + 0,0306 - 0,0076 - 0,0013) = 0,1257.$$

Obliczając według $y_4 = 0,4646$ wartość f_4 i przedłużając tablicę znajdujemy według wzoru (B)

$$y_4 - y_3 = 0,1(1,2760 - 0,0205 + 0,0017 + 0,0001) = 0,1257.$$

Ponieważ wartość y_4 jest zachowana, robimy krok następny itd.

Zamiast wzorów różnicowych (A) i (B) stosuje się również wzory

$$(A_1) \quad y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}).$$

$$(B_1) \quad y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}h(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}).$$

Opisane wyżej metody dają się łatwo przenieść na układy równań różniczkowych.

3. Równania wyższych rzędów oraz układy równań

Wiadomości teoretyczne.

Twierdzenie o istnieniu. Każde równanie rzędu n postaci

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

przez wprowadzenie nowych zmiennych

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

może być sprowadzone do układu n równań

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Bardziej ogólny układ równań

$$(*) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ma jedyny zespół rozwiązań $y_i = y_i(x)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, określony i ciągły w pewnym przedziale $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ i przybierający przy $x = x_0$ dane wartości początkowe

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

jeżeli funkcje $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ są ciągle względem wszystkich zmiennych i spełniają warunek Lipschitza:

$$|f_i(x, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \dots + |\Delta y_n|)$$

dla wartości x, y_i i $y_i + \Delta y_i$ leżących w pewnym otoczeniu danych wartości początkowych, przy czym K jest stałą dodatnią.

Odpowiednio do tego równanie $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ma jedynie rozwiązanie spełniające warunki początkowe $y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ dla $x = x_0$, ciągle wraz ze swoimi pochodnymi aż do rzędu $n-1$, jeżeli funkcja $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ jest ciągła i spełnia przytoczony powyżej warunek Lipschitza dla funkcji $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Rozwiązanie ogólne. Dla równania $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ rozwiązanie ogólne zawiera n niezależnych, dowolnych stałych:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

W interpretacji geometrycznej równanie to określa n -parametrową rodzinę krzywych całkowych. Poszczególne krzywe całkowe (wykresy odpowiednich rozwiązań szczególnych) otrzymuje się z tej rodziny przez odpowiedni dobór wartości dowolnych stałych $C_1, C_2, \dots, C_n$. Jeżeli całka szczególna ma spełniać wyżej podane warunki początkowe, to wartości $C_1, C_2, \dots, C_n$ określa się z równań

$$y(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \right]_{x=x_0} = y'_0,$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \right]_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Jeżeli te równania są sprzeczne, przy dowolnych wartościach początkowych w pewnym obszarze, to rozwiązanie nie jest w tym obszarze ogólne i dowolne stałe nie są niezależne.

Dla układu równań różniczkowych $(*)$ rozwiązanie ogólne także zawiera n dowolnych stałych i może być dane w postaci rozwiązanej względem niewiadomych funkcji:

$$y_1 = F_1(x, C_1, \dots, C_n), \quad y_2 = F_2(x, C_1, \dots, C_n), \dots,$$

$$y_n = F_n(x, C_1, \dots, C_n)$$

albo też w postaci rozwiązanej w postaci dowolnych stałych:

$$\varphi_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1, \quad \varphi_2(x, y_1, \dots, y_n) = C_2, \quad \dots, \quad \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n) = C_n.$$

W ostatnim przypadku każdy ze związków $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ wyznacza całkę pierwszą układu równań $(*)$. Całka pierwsza może być określona niezależnie od całki ogólnej jako związek między $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ przybierający wartość stałą, gdy zamiast $y_1, y_2, \dots, y_n$ podstawimy

którekolwiek rozwiązanie danego układu równań. Każda całka pierwsza układu (*) spełnia liniowe równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0,$$

i odwrotnie, każde rozwiązanie $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ jest całką pierwszą układu równań (*). Zespół n niezależnych (patrz str. 371) całek pierwszych układu równań (*) stanowi jego całkę ogólną.

Obniżenie rzędu równania. Jedną z podstawowych metod rozwiązywania równań różniczkowych rzędu n jest zamiana zmiennych doprowadzająca do równań prostszych, a w szczególności do równań niższego rzędu.

Równanie $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, nie zawierające w sposób jawny zmiennej x , sprowadza się do równania rzędu $n-1$ przez podstawienie $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$ itd.

Przykład. $yy'' - y'^2 = 0$.

Podstawiamy $p = y'$, $p \frac{dp}{dy} = y''$, skąd

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \quad y \frac{dp}{dy} - p = 0, \quad p = Cy = \frac{dy}{dx}, \quad y = C_1 e^{Cx}$$

(skracać przez p nie gubimy rozwiązania, gdyż dla $p = 0$ otrzymujemy $y = C_1$, co zawiera się w uzyskanym rozwiązaniu ogólnym przy $C = 0$).

Równanie $f(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, nie zawierające w sposób jawny zmiennej y , daje się sprowadzić do równania rzędu niższego przez podstawienie $y' = p$. Jeżeli w równaniu najniższą pochodną jest $y^{(k)}$, należy podstawić $y^{(k)} = p$.

Przykład. $y'' - xy''' + (y'')^3 = 0$.

Podstawienie $y'' = p$ prowadzi do równania Clairauta $p - x \frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3 = 0$ mającego rozwiązanie ogólne $p = C_1 x + C_2^3$. Stąd

$$y = \frac{1}{6} C_1 x^3 - \frac{1}{2} C_1^3 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Rozwiązanie osobliwe równania Clairauta $p = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x} x^{3/2}$ daje też rozwiązanie osobliwe wyjściowego równania

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{315} x^{7/2} + C_1 x + C_2.$$

Równanie $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, gdzie f jest funkcją jednorodną względem $y, y', \dots, y^{(n)}$ (patrz str. 371), daje się sprowadzić do równania rzędu niższego przez wprowadzenie nowej funkcji $z = y'/y$ (tj. $y = e^{\int z dx}$).

Przykład. $yy'' - y'^2 = 0$.

Wprowadzamy $z = \frac{y'}{y}$, skąd $\frac{dz}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0$, zatem $z = C_1$, skąd

$$\ln y = C_1 x + C_2, \quad \text{czyli} \quad y = C e^{C_1 x}, \quad \text{gdzie} \quad \ln C = C_2.$$

Równanie $y^{(n)} = f(x)$. Przez kolejne całkowanie otrzymuje się rozwiązanie ogólne w postaci

$$y = C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1} + \psi(x),$$

gdzie

$$\psi(x) = \int \int \dots \int f(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

We wzorze tym x_0 nie jest dodatkową stałą dowolną. Zmiana x_0 powoduje zmianę stałej C_k , gdyż $C_k = \frac{1}{(k-1)!} y^{(k-1)}(x_0)$.

Równanie liniowe. Równaniem liniowym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$(L) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = F,$$

gdzie a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) oraz F (prawa część równania) są funkcjami zmiennej x , o których będziemy zakładali, że są to funkcje ciągłe w pewnym przedziale. Jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są stałymi, równanie takie nazywamy **równaniem o współczynnikach stałych**. W przypadku gdy $F = 0$, równanie liniowe nazywamy **jednorodnym**, a w przeciwnym przypadku nazywamy je **niejednorodnym**.

Zespół rozwiązań $y_1, y_2, \dots, y_n$ równania liniowego jednorodnego nazywamy **podstawowym układem rozwiązań**, jeżeli funkcje te są w rozważanym przedziale **liniowo niezależne**, tzn. jeżeli żadna ich kombinacja liniowa $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ przy dowolnych wartościach $C_1, C_2, \dots, C_n$, z wyjątkiem przypadku $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, nie staje się równa zero tożsamościowo (tzn. dla wszystkich wartości x w danym przedziale). Rozwiązania $y_1, y_2, \dots, y_n$ równania liniowego jednorodnego tworzą podstawowy układ rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy **wronskian** tych rozwiązań

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera. Dla dowolnego układu rozwiązań równania liniowego jednorodnego zachodzi wzór Liouville'a

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(x) dx},$$

wobec czego wronskian W może być równy zeru tylko tożsamościowo, tzn. tylko wtedy, gdy $W(x_0)$ równa się zeru. Jeżeli funkcje $y_1, y_2, \dots, y_n$ tworzą podstawowy układ rozwiązań, to $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego jednorodnego.

Gdy znane jest jedno rozwiązanie szczególne y_1 równania liniowego jednorodnego, można obniżyć rząd równania z zachowaniem jego liniowości przez wprowadzenie nowej niewiadomej funkcji $u = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right)$.

Twierdzenie o nakładaniu. Jeżeli y_1 i y_2 są rozwiązaniami dwóch równań postaci (L), których prawe strony wynoszą odpowiednio F_1 i F_2 , a lewe strony są jednakowe, to suma tych rozwiązań $y = y_1 + y_2$ jest rozwiązaniem takiego samego równania, którego prawa strona jest $F = F_1 + F_2$.

Stąd wynika, że dla otrzymania ogólnego rozwiązania równania jednorodnego wystarczy do któregośkolwiek jego rozwiązania szczególnego dodać rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania jednorodnego.

Twierdzenie o rozkładaniu. Jeżeli równanie (L) ma współczynniki rzeczywiste oraz $F = F_1 + iF_2$, gdzie F_1 i F_2 są funkcjami rzeczywistymi, to równanie ma rozwiązanie zespolone $y = y_1 + iy_2$, gdzie y_1 i y_2 są rozwiązaniami równania (L), w którym prawa strona jest odpowiednio równa F_1 lub F_2 .

Rozwiązanie równania niejednorodnego (L) w przypadku, gdy znany jest układ podstawowy rozwiązań odpowiedniego równania jednorodnego, można wyznaczyć za pomocą kwadratur jedną z następujących metod:

Metoda uziemiennia stałych. Pisząc szukane rozwiązanie w postaci $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ będziemy uważali $C_1, C_2, \dots, C_n$ nie za stałe, lecz za funkcje zmiennej x . Żądając spełnienia warunków

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n &= 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ C_1 y_1^{(n-2)} + C_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C_n y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}$$

i podstawiając y do równania (L) otrzymujemy

$$C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = F.$$

Rozwiązując układ równań liniowych znajdziemy pochodne $C_1', C_2', \dots, C_n'$, a stąd za pomocą kwadratur wyznaczmy $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Metoda Cauchy'ego. W rozwiązaniu ogólnym $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ równania jednorodnego określamy stałe w taki sposób, żeby dla $x = x_0$ było

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-2)} = 0, \quad y^{(n-1)} = F(a),$$

gdzie a jest dowolnym parametrem. Jeżeli oznaczymy teraz otrzymane w ten sposób rozwiązanie równania jednorodnego przez $\varphi(x, a)$, to

$$y = \int_{x_0}^x \varphi(x, a) da$$

będzie rozwiązaniem szczególnym równania (L) przybierającym wraz ze swymi pochodnymi $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ wartość zero przy $x = x_0$.

4. Rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zapis operatorowy. Równanie (L) (patrz str. 565) można napisać w sposób symboliczny w postaci

$$P_n(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = F,$$

gdzie D jest operatorem różniczkowania:

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Jeżeli współczynniki a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są stałe, wyrażenie $P_n(D)$ jest wielomianem stopnia n względem operatora D (o współczynnikach liczbowych).

Rozwiązanie równania jednorodnego $P_n(D)y = 0$. Dla otrzymania rozwiązania ogólnego należy znaleźć pierwiastki $r_1, r_2, \dots, r_n$ równania algebraicznego $P_n(r) = 0$, zwanego *równaniem charakterystycznym* (patrz str. 174-182). Każdemu pierwiastkowi r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) odpowiada rozwiązanie $e^{r_i x}$ równania $P_n(D)y = 0$. Jeżeli r_i jest pierwiastkiem k -krotnym, to funkcje $x e^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, \dots, x^{k-1} e^{r_i x}$ są także rozwiązaniami tego równania. Kombinacja liniowa rozwiązań odpowiadających wszystkim pierwiastkom r_i z uwzględnieniem ich krotności, czyli funkcja

$$\begin{aligned} y = & (C_1^{(1)} + C_2^{(1)} x + \dots + C_{k_1}^{(1)} x^{k_1-1}) e^{r_1 x} + \dots + \\ & + (C_1^{(i)} + C_2^{(i)} x + \dots + C_{k_i}^{(i)} x^{k_i-1}) e^{r_i x} + \dots, \end{aligned}$$

gdzie k_i oznacza krotność pierwiastka r_i , przy czym $k_1 + k_2 + \dots +$

$+k_i + \dots = n$, stanowiąc będzie rozwiązanie ogólne równania jednorodnego.

Jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego (o współczynnikach rzeczywistych) są pierwiastki zespolone, to mogą to być tylko liczby zespolone parami sprzężone (np. $r_1 = a + i\beta$, $r_2 = a - i\beta$) i wtedy w odpowiednich wyrażach rozwiązania ogólnego zamiast funkcji $e^{r_1 x}$ i $e^{r_2 x}$ należy wziąć funkcje $e^{ax} \cos \beta x$ i $e^{ax} \sin \beta x$. Otrzymywane przy tym wyrażenia postaci $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ mogą być napisane również w postaci $A \cos(\beta x + \varphi)$, gdzie A i φ są dowolnymi stałymi.

Przykład. $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$.

Równanie charakterystyczne $r^6 + r^4 - r^2 - 1 = 0$ ma pierwiastki: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = r_4 = i$, $r_5 = r_6 = -i$. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x$$

lub

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A_1 \cos(x + \varphi_1) + x A_2 \cos(x + \varphi_2).$$

W teorii drgań i w innych zastosowaniach jest często ważną rzeczą stwierdzenie, czy każde rozwiązanie danego jednorodnego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach dąży do zera, gdy $x \rightarrow +\infty$. Będzie to zachodziło, gdyż części rzeczywiste wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego będą ujemne.

Twierdzenie Hurwita. Wszystkie pierwiastki równania

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0, \quad \text{gdzie } a_0 > 0,$$

będą miały części rzeczywiste ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczniki

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

gdzie $a_m = 0$ przy $m > n$, będą dodatnie.

Rozwiązanie równania niejednorodnego o stałych współczynnikach może być znalezione metodą uźmienniania stałych lub metodą Cauchy'ego (patrz str. 567); inną metodą jest metoda operatorowa (patrz str. 576). Najłatwiej wyznacza się rozwiązanie szczególne takiego równania, gdy prawa jego strona ma specjalną postać.

Specjalna postać prawej strony równania niejednorodnego. W niektórych wypadkach rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego $P_n(D)y = F(x)$ może być łatwo znalezione sposobem algebraicznym.

Jeżeli $F(x) = Ae^{kx} = P_n(k) \neq 0$, to rozwiązaniem szczególnym jest $y = Ae^{kx}/P_n(k)$. Jeżeli k jest m -krotnym pierwiastkiem równania cha-

rakterystycznego, tzn. jeżeli $P_n(k) = P_n'(k) = \dots = P_n^{(m-1)}(k) = 0$, to rozwiązaniem szczególnym równania jest $y = Ax^m e^{kx}/P_n^{(m)}(k)$.

Posługując się twierdzeniem o rozkładaniu (str. 566) można wykonać te wzory również w przypadku, gdy $F(x) = Ae^{kx} \cos \omega x$ lub $Ae^{kx} \sin \omega x$. Odpowiednie rozwiązanie szczególne otrzymuje się jako część rzeczywistą i część urojoną rozwiązania tego samego równania, gdy po prawej stronie jest

$$F(x) = Ae^{kx}(\cos \omega x + i \sin \omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}.$$

Przykład y. 1. Równanie $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ ma rozwiązanie szczególne $y = -\frac{1}{2}xe^{2x}$, gdyż $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ oraz $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$.

2. Dla równania $y'' + y' + y = e^x \sin x$ rozwiązanie szczególne $y_1 = \frac{1}{13}e^x(2 \sin x - 3 \cos x)$ otrzymuje się jako część urojoną rozwiązania

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x(\cos x + i \sin x)}{2 + 3i}$$

równania $(D^2 + D + 1)y = e^{(1+i)x}$.

Jeżeli prawa część $F(x)$ ma postać $Q_p(x)e^{kx}$, gdzie $Q_p(x)$ jest wielomianem stopnia p , to zawsze można znaleźć rozwiązanie szczególne takiej samej postaci, tzn. $y = R(x)e^{kx}$. Jeżeli k jest m -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to $R(x)$ jest wielomianem stopnia p pomnożonym przez x^m . Pisząc to rozwiązanie ze współczynnikami nieoznaczonymi w wielomianie $R(x)$ i żądając, by rozwiązanie to spełniło dane równanie, otrzymujemy liniowe równanie algebraiczne dla wyznaczenia niewiadomych współczynników ⁽¹⁾.

Przykład. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 6x + 2x \sin x$.

Równanie charakterystyczne ma pierwiastki $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = -1$. W myśl twierdzenia o nakładaniu (patrz str. 566) można szukać osobno rozwiązań szczególnych odpowiadających każdemu ze składników prawej strony równania. Przyjmując $y_1 = x^2(ax + b)$ i podstawiając do danego równania otrzymujemy $12a + 2b + 6ax = 6x$, skąd $a = 1$, $b = -6$. Podobnie dla drugiego składnika przyjmujemy $y_2 = (cx + d) \sin x + (fx + g) \cos x$, co daje $(2g + 2f - 6c + 2f)x \sin x - (2c + 2d + 6f + 2cx) \cos x = 2x \sin x$, a stąd $c = 0$, $d = -3$, $f = 1$, $g = -1$. Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$y = c_1 + c_2 x - 6x^2 + x^3 + (c_3 x + c_4)e^{-x} - 3 \sin x + (x - 1) \cos x.$$

⁽¹⁾ Metodę powyższą można stosować w szczególności w przypadku, gdy $F(x) = Q_p(x)$, tj. gdy $k = 0$, a także w przypadkach gdy $F(x) = Q_p(x)e^{ix} \cos \omega x$ lub $F(x) = Q_p(x)e^{ix} \sin \omega x$, co odpowiada wartości $k = r \pm i\omega$. W ostatnim przypadku należy szukać rozwiązania w postaci

$$y = x^m e^{rx} [M_p(x) \cos \omega x + N_p(x) \sin \omega x].$$

Podstawiając te funkcje do danych równań otrzymujemy

$$P_1x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3),$$

$$P_2x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3),$$

$$P_3x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3),$$

skąd

$$P_1 = 5C_2, \quad P_2 = C_2, \quad P_3 = 7C_2, \quad Q_1 = 5C_3 - 6C_2,$$

$$Q_2 = C_3, \quad Q_3 = 7C_3 - 11C_2.$$

Ostatecznie mamy rozwiązanie ogólne danego układu równań

$$y_1 = (5C_2x + 5C_3 - 6C_2)e^x,$$

$$y_2 = C_1e^{6x} + (C_2x + C_3)e^x,$$

$$y_3 = 2C_1e^{6x} + (7C_2x + 7C_3 - 11C_2)e^x.$$

Układy równań jednorodnych rzędu pierwszego. Ogólna postać układu równań liniowych jednorodnych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach jest następująca:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}y'_k + \sum_{k=1}^n b_{ik}y_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jeżeli wyznacznik $|a_{ik}|^{(1)}$ nie jest równy zeru, to ten układ równań może być sprowadzony do układu normalnego. Rozwiązanie układu może być jednak otrzymane bezpośrednio z danego układu równań taką samą metodą jak w przypadku układu normalnego. Równanie charakterystyczne przybierze postać $|a_{ik}r + b_{ik}| = 0$, a współczynniki A_i w rozwiązaniu (*) odpowiadające pierwiastkowi jednokrotnemu r_j wyznacza się w tym przypadku z równań

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}r_j + b_{ik})A_k = 0, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Poza tym metoda szukania rozwiązania jest ta sama, co w przykładzie układu normalnego.

Przypadek $|a_{ik}| = 0$ wymaga dodatkowego badania.

P r z y k ł a d $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = 0, \quad y'_1 + 8y_1 - 3y_2 = 0.$

Równanie charakterystyczne

$$\begin{vmatrix} 5r+4 & -2r-1 \\ r+8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0$$

ma pierwiastki $r_1 = 1$ i $r_2 = -2$. Obliczamy współczynniki A_i i A_2

⁽¹⁾ Jest to skrócone oznaczenie wyznacznika o elementach a_{ik} .

dla $r_1 = 1$ mamy $9A_1 - 3A_2 = 0$, skąd $A_2 = 3A_1 = 3C_1$. Podobnie dla $r_2 = -2$ otrzymujemy $A_4 = 2A_3 = 2C_2$. Stąd rozwiązanie ogólne

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x}, \quad y_2 = 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}.$$

Układy równań niejednorodnych rzędu pierwszego. Ogólna postać układu równań liniowych niejednorodnych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach jest następująca:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}y'_k + \sum_{k=1}^n b_{ik}y_k = F_i(x), \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Twierdzenie o nakładaniu. Jeżeli $y_j^{(1)}$ i $y_j^{(2)}$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, są rozwiązaniami dwóch układów równań niejednorodnych różniących się tylko prawymi stronami, równymi odpowiednio $F_i^{(1)}$ i $F_i^{(2)}$, to funkcja $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, będzie rozwiązaniem takiego samego układu równań, ale mających po prawych stronach $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$.

Wynika stąd, że dla otrzymania ogólnego rozwiązania układu równań niejednorodnych wystarczy do jego rozwiązania szczególnego dodać rozwiązanie ogólne odpowiedniego układu równań jednorodnych.

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne układu równań niejednorodnych, można zastosować metodę *uzmiennienia stałych*:

Rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych podstawia się do układu niejednorodnego zastępując dowolne stałe $C_1, C_2, \dots, C_n$ funkcjami niewiadomymi $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$, przy czym w wyrażeniach na pochodne y'_k zjawiają się wyrazy zawierające pochodne nowych, niewiadomych funkcji $C_k(x)$. Po podstawieniu do danego układu równań zostaną po lewych stronach równań tylko te dodatkowe wyrazy, pozostałe zaś wyrazy ulegną redukcji, gdyż $y_1, y_2, \dots, y_n$ stanowią, w myśl założenia, rozwiązaniem układu równań jednorodnych. A więc dla znalezienia $C'_k(x)$ otrzymamy niejednorodny układ algebraicznych równań liniowych. Rozwiązując ten układ równań i dokonując n całkowań znajdziemy funkcje $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Następnie podstawiając te funkcje zamiast stałych $C_1, C_2, \dots, C_n$ w rozwiązaniu jednorodnego układu równań otrzymamy szukane rozwiązanie szczególne danego układu równań niejednorodnych.

P r z y k ł a d. $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = e^{-x}, \quad y'_1 + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}.$

Rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań (patrz str. 572) jest $y_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}$. Podstawiając to rozwiązanie do danego układu równań niejednorodnych i uważając C_1 i C_2 za funkcje zmiennej x otrzymujemy

$$5C'_1e^x + 5C'_2e^{-2x} - 6C'_1e^x - 4C'_2e^{-2x} = e^{-x}, \quad C'_1e^x + C'_2e^{-2x} = 5e^{-x},$$

czyli

$$C_2 e^{-2x} - C_1 e^x = e^{-x}, \quad C_1 e^x + C_2 e^{-2x} = 5e^{-x}.$$

Stąd $2C_1 e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + c_1$ oraz $2C_2 e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + c_2$, gdzie c_1 i c_2 są dowolnymi stałymi. Biorąc $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$ (gdyż szukamy rozwiązania szczególnego) otrzymujemy $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$.
Rozwiązanie ogólne

$$y_1 = 2e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad y_2 = 3e^{-x} + 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}.$$

W przypadku gdy prawe strony równań mają postać specjalną $Q_p(x)e^{kx}$ można z powodzeniem zastosować metodę współczynników nieoznaczonych, podobnie jak dla jednego równania rzędu n (patrz str. 568).

Układy równań rzędu drugiego. Podane wyżej metody można zastosować do układów równań liniowych wyższych rzędów. W szczególności dla układu równań

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k'' + \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^n c_{ik} y_k = 0, \quad \text{gdzie } i = 1, 2, \dots, n,$$

można także szukać rozwiązań szczególnych postaci $y_i = A_i e^{r_i x}$, gdzie wykładniki r_i wyznacza się z równania charakterystycznego $|a_{ik} r^2 + b_{ik} r + c_{ik}| = 0$, a współczynniki A_i znajduje się z odpowiednich równań algebraicznych liniowych jednorodnych.

6. Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych

Transformata funkcji. Transformata danej funkcji (oryginału) $\varphi(t)$ według Carsona-Heaviside'a nazywamy funkcję zmiennej zespolonej p określoną wzorem

$$(*) \quad f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt,$$

przy czym dla $t < 0$ przyjmujemy $\varphi(t) = 0$, a dla $t > 0$ zakładamy, że jest spełniona nierówność $|\varphi(t)| < M e^{at}$, gdzie M i a są pewnymi stałymi dodatnimi.

Za pomocą metod teorii funkcji zmiennej zespolonej można otrzymać wzór na przekształcenie odwrotne, które jednoznacznie określa funkcję $\varphi(t)$ (oryginał), gdy znana jest jej transformata $f(p)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{s-ir}^{s+ir} e^{pt} \frac{f(p)}{p} dp,$$

gdzie s dobiera się w taki sposób, żeby wszystkie punkty osobliwe

funkcji podcałkowej znajdowały się na lewo od prostej $\operatorname{Re} p = s$ (o całkowaniu funkcji zmiennej zespolonej patrz str. 639).

Związek (*) będziemy pisali w postaci $f(p) \doteq \varphi(t)$ ⁽¹⁾.

W tablicy na str. 578 i 579 przytoczone są niektóre prostsze funkcje i ich transformaty.

Ze wzoru (*) można otrzymać następujące wzory:

$$\frac{d\varphi}{dt} \doteq p f(p) - \varphi(0)p, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} \doteq p^2 f(p) - p^2 \varphi(0) - p\varphi'(0), \quad \dots$$

$$\dots, \quad \frac{d^n \varphi}{dt^n} \doteq p^n f(p) - p^n \varphi(0) - p^{n-1} \varphi'(0) - \dots - p \varphi^{(n-1)}(0) \quad (2),$$

$$\int_0^t \varphi(t) dt \doteq \frac{1}{p} f(p), \quad \varphi(at) \doteq f(p/a) \quad (a = \text{const} > 0).$$

Jeżeli $\varphi_1(t) \doteq f_1(p)$, $\varphi_2(t) \doteq f_2(p)$, to

$$a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t) \doteq a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p).$$

Twierdzenie o przesunięciu. Jeżeli $\varphi(t) \doteq f(p)$, to

$$e^{-at} \varphi(t) \doteq \frac{p}{p+a} f(p+a).$$

Twierdzenie o opóźnieniu. Jeżeli $\varphi(t) \doteq f(p)$ i $\lambda > 0$, to

$$e^{-\lambda p} f(p) \doteq \begin{cases} \varphi(t-\lambda) & \text{przy } t > \lambda, \\ 0 & \text{przy } t < \lambda. \end{cases}$$

Twierdzenie Borela. Jeżeli $\varphi_1(t) \doteq f_1(p)$, $\varphi_2(t) \doteq f_2(p)$, to

$$\int_0^t \varphi_1(t-\tau) \varphi_2(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} f_1(p) f_2(p).$$

Funkcja impulsowa. Oryginałem dla transformaty $f(p) =$
 $= p$ jest tzw. *funkcja delta* (*funkcja Diraca*) $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{przy } t \neq 0, \\ +\infty & \text{przy } t = 0, \end{cases}$$

przy czym $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$. Funkcję tę można określić inaczej, np.

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t, h), \quad \text{gdzie } f(t, h) = \begin{cases} 1/h & \text{dla } 0 < t < h, \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ i } t > h. \end{cases}$$

Funkcja delta służy do przedstawienia krótkotrwałych impulsów (mechanicznych, elektrycznych itp., patrz przykład 3 na str. 577).

⁽¹⁾ Funkcja $f(p)/p$ nosi nazwę *transformaty funkcji $\varphi(t)$ według Laplace'a*.

⁽²⁾ Przy tym zakłada się, że $d^n \varphi / dt^n$ spełnia wprowadzone wyżej nierówności dla funkcji mających transformatę

Metoda operatorowa. Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych polega w zasadzie na tym, że od równania dla funkcji niewiadomej przechodzi się do równania dla jej transformaty (tzw. *równanie pomocnicze*). Nie jest to już równanie różniczkowe, ale algebraiczne. Po uzyskaniu transformaty znajduje się według niej funkcję szukaną. A więc podstawowa trudność metody operatorowej tkwi nie w rozwiązaniu równania, ale w przejściu od funkcji do jej transformaty i na odwrót.

Równanie liniowe o stałych współczynnikach

$$L_n(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = F(t),$$

gdzie D jest operatorem różniczkowania względem zmiennej niezależnej t . Niech $y(t) \rightarrow y(p)$, $F(t) \rightarrow F(p)$. Wtedy na mocy wzorów ze str. 575 otrzymujemy równanie pomocnicze

$$\begin{aligned} (**) \quad L_n(p)y &= F(p) + (p^n y_0 + p^{n-1} y'_0 + \dots + p y_0^{(n-1)}) + \\ &+ a_1(p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y'_0 + \dots + p y_0^{(n-2)}) + \\ &+ \dots + a_{n-2}(p^2 y_0 + p y'_0) + a_{n-1} p y_0 = F(p) + M(p), \end{aligned}$$

gdzie $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ są wartościami funkcji y i jej pochodnych przy $t = 0$. W najprostszym przypadku, gdy $y_0 = y'_0 = y_0^{(n-1)} = 0$, jest $M(p) = 0$; rozwiązanie odpowiadające tym warunkom początkowym nazywamy *rozwiązaniem normalnym*. Ze wzoru (**) wynika, że

$$y = \frac{F(p) + M(p)}{L_n(p)}.$$

Dla znalezienia y można w wielu wypadkach korzystać z rozkładu na ułamki proste (patrz str. 159 i 160) i ze wzorów (2) - (9) w tabeli na str. 578 i 579; ponieważ wzory te zawierają w liczniku czynnik p , to rozkłada się zazwyczaj ułamek o mianowniku $p L_n(p)$ i wynik mnoży się przez p . W najprostszym przypadku, gdy wszystkie pierwiastki p_k mianownika $L_n(p)$ są różne, a licznik jest wielomianem $P_m(p)$ stopnia nie wyższego niż n , postępowanie to doprowadza do wzoru na rozkład Heaviside'a:

$$\frac{P_m(p)}{L_n(p)} \leftarrow \frac{P_m(0)}{L_n(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{P_m(p)}{p L'_n(p)} \right]_{p=p_k} e^{p_k t}.$$

Jeżeli $F(p)/L_n(p)$ nie jest funkcją wymierną, to rozkłada się na ułamki proste funkcję $1/p L_n(p)$ i korzysta się ze wzorów

$$\frac{F(p)}{p-a} \leftarrow \int_0^t e^{at} F(x) e^{-ax} dx$$

lub

$$\frac{\bar{F}(p)}{(p-a)^m} \leftarrow \frac{e^{at}}{(m-1)!} \int_0^t F(x) e^{-ax} (t-x)^{m-1} dx.$$

Jeżeli równanie $L_n(p) = 0$ ma pierwiastki zespolone, użycie ostatnich wzorów może w pośrednich obliczeniach doprowadzić do wielkości zespolonych, jednak końcowy wynik można zawsze przedstawić w postaci rzeczywistej.

Przykłady. 1. Znajdźmy rozwiązanie normalne równania $y''' - y'' - y' + y = t$.

Mamy $L(p) = (p+1)(p-1)^2$, $M(p) = 0$, $\bar{F}(p) = 1/p$;

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{p(p+1)(p-1)^2} = \frac{p}{p^2(p+1)(p-1)^2} = \\ &= \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p+1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{(p-1)^2}. \end{aligned}$$

Stąd na podstawie wzorów (1), (2) i (9) na str. 578 i 579 otrzymujemy

$$y = t + 1 + \frac{1}{4} e^{-t} + \left(\frac{1}{2} t - \frac{5}{4} \right) e^t.$$

2. Znajdźmy rozwiązanie ogólne równania $y'' + m^2 y = a \sin mt$.

Mamy $L(p) = p^2 + m^2$, $\bar{F}(p) = \frac{amp}{m^2 + p^2}$, $M(p) = p^2 y_0 + p y'_0$, skąd

$$\bar{y} = \frac{amp}{(p^2 + m^2)^2} + \frac{p^2 y_0 + p y'_0}{p^2 + m^2}.$$

Aby skorzystać ze wzorów podanych w tablicy na str. 578 i 579, przekształcamy pierwszy składnik do postaci $A \frac{p(p^2 - m^2)}{(p^2 + m^2)^2} + B \frac{pm}{p^2 + m^2}$. Po znalezieniu A i B metodą współczynników nieoznaczonych otrzymamy na podstawie wzorów (3), (4) i (8) na str. 579 rozwiązanie

$$y = \left(y_0 - \frac{a}{2m} t \right) \cos mt + \frac{a + 2my'_0}{2m^2} \sin mt.$$

3. Znajdźmy prawo ruchu punktu materialnego m pod działaniem impulsu chwilowego A przyłożonego w chwili $t = 0$; współrzędna początkowa $x_0 = 0$, a prędkość początkowa $x'_0 = 0$.

Równanie ruchu $m \frac{d^2 x}{dt^2} = A \delta(t)$. Równanie pomocnicze $m p^2 \bar{x} =$

$$= A p. \text{ Stąd } \bar{x} = \frac{A}{m p}, \text{ tj. } x = \frac{A t}{m}.$$

Układy równań liniowych o stałych współczynnikach. Po zastąpieniu każdego równania układu odpowiednim równaniem pomocniczym, podobnie jak to było wyżej pokazane dla jednego równania, rozwiązuje się układ równań algebraicznych liniowych względem transformat funkcji niewiadomych; zakłada się przy tym, że wyznacznik układu równań jest różny od zera ⁽¹⁾. Dla przejścia od transformata do oryginałów korzysta się zazwyczaj, jak i dla jednego równania, z metody rozkładu na ułamki proste.

Przykład. $(5D+4)y_1 - (2D+1)y_2 = e^{-x}$, $(D+8)y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$ z warunkiem początkowym $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$ dla $x = 0$.

Równania pomocnicze

$$(5p+4)\bar{y}_1 - (2p+1)\bar{y}_2 = \frac{p}{p+1} + 5py_{10} - 2py_{20},$$

$$(p+8)\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 = \frac{5p}{p+1} + py_{10}.$$

Rozwiązując te równania względem $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ otrzymujemy po rozkładzie na ułamki proste

$$\bar{y}_1 = \frac{2p}{p+1} + (3y_{10} - y_{20} - 3) \frac{p}{p+2} + (-2y_{10} + y_{20} + 1) \frac{p}{p-1},$$

$$\bar{y}_2 = \frac{3p}{p+1} + (6y_{10} - 2y_{20} - 6) \frac{p}{p+2} + (-6y_{10} + 3y_{20} + 3) \frac{p}{p-1},$$

skąd

$$y_1 = 2e^{-x} + (3y_{10} - y_{20} - 3)e^{-2x} + (1 - 2y_{10} + y_{20})e^x,$$

$$y_2 = 3e^{-x} + (6y_{10} - 2y_{20} - 6)e^{-2x} + (3 - 6y_{10} + 3y_{20})e^x.$$

O zastosowaniu metod geometrycznych do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych patrz str. 612.

Tablica transformat funkcji według Carsona-Heaviside'a

Numer	$\varphi(t)$ ($t > 0$) ⁽²⁾	$f(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t) dt$
1	$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$	$\frac{1}{p^n}$
2	e^{-at}	$\frac{p}{p+a}$

⁽¹⁾ Przypadek, gdy wyznacznik jest równy zeru, zdarza się bardzo rzadko i wymaga dodatkowego omówienia.

⁽²⁾ Przy $t < 0$ przyjmuje się zawsze $\varphi(t) = 0$.

Tablica transformat funkcji według Carsona-Heaviside'a

Numer	$\varphi(t)$ ($t > 0$)	$f(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t) dt$
3	$\sin kt$	$\frac{pk}{p^2 + k^2}$
4	$\cos kt$	$\frac{p^2}{p^2 + k^2}$
5	$e^{-at} \sin kt$	$\frac{pk}{(p+a)^2 + k^2}$
6	$e^{-at} \cos kt$	$\frac{p(p+a)}{(p+a)^2 + k^2}$
7	$t \sin kt$	$\frac{2kp^2}{(p^2 + k^2)^2}$
8	$t \cos kt$	$\frac{p(p^2 - k^2)}{(p^2 + k^2)^2}$
9	$e^{-at} \frac{t^n}{n!}$	$\frac{p}{(p+a)^{n+1}}$
10	$\frac{(2t)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi t}}$	$\frac{\sqrt{p}}{p^n}$ (n naturalne)
11	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\sqrt{p} e^{-a\sqrt{p}}$ ($a > 0$)
12	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$pe^{-a\sqrt{p}}$
13	$1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right)$ ($a > 0$) ⁽¹⁾	$e^{-a\sqrt{p}}$
14	$\mathcal{J}_0(t)$ ⁽²⁾	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
15	$I_0(t)$ ⁽²⁾	$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}$
16	$\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$	$\ln(1+p)$

⁽¹⁾ Określenie funkcji $\Phi(x)$ patrz na str. 94.

⁽²⁾ Funkcje Bessela $\mathcal{J}(x)$ i $I(x)$ patrz na str. 582 i 583.

7. Równania liniowe rzędu drugiego

Metody ogólne.

Równanie $y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x)$. Rozwiązanie ogólne powyższego równania w przypadku, gdy $F(x) = 0$ (równanie jednorodne), ma postać $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, gdzie y_1 i y_2 są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami szczególnymi (patrz str. 566). Jeżeli znane jest jedno rozwiązanie szczególne y_1 , to drugie rozwiązanie szczególne można wyznaczyć według wzoru

$$(*) \quad y_2 = A y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx,$$

gdzie A jest stałą dowolną; wzór ten jest wnioskiem ze wzoru Liouville'a (patrz str. 566). Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego może być w tym przypadku otrzymane według wzoru

$$y = \frac{1}{A} \int_{x_0}^x F(\xi) e^{\int p(\xi) d\xi} (y_2(x) y_1(\xi) - y_1(x) y_2(\xi)) d\xi,$$

gdzie y_1 i y_2 są wyżej wymienionymi rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego o takiej samej lewej stronie.

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego, można również zastosować metodę uziemiennia stałych (patrz str. 566).

Jeżeli w równaniu $s(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x)$ funkcje $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ i $F(x)$ są wielomianami albo mogą być rozwinięte w szeregi potęgowe względem $x - x_0$, zbieżne w pewnym obszarze, i $s(x_0) \neq 0$, to rozwiązania tego równania mogą być również rozwinięte w szeregi według potęg $x - x_0$, zbieżne w tym samym obszarze. Rozwiązania te znaleźć można metodą współczynników nieoznaczonych. Piszemy szukane rozwiązanie w postaci szeregu

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

i podstawiamy do danego równania, a następnie przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach $x - x_0$ otrzymujemy równania dla wyznaczenia współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots$

Przykład. $y'' + xy = 0$. Podstawiając

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, \\ y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots$$

otrzymujemy równania

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 + a_0 = 0, \quad \dots, \quad n(n-1)a_n + a_{n-3} = 0, \quad \dots$$

Rozwiązując kolejno te równania otrzymujemy

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = -\frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad a_5 = 0, \quad \dots,$$

skąd

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots \right) + \\ + a_1 \left(x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \right),$$

gdzie a_0 i a_1 są stałymi dowolnymi.

Równanie $x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0$. Jeżeli funkcje $p(x)$ i $q(x)$ mogą być rozwinięte w szeregi potęgowe względem x , zbieżne w pewnym obszarze, to metodą współczynników nieoznaczonych można znaleźć rozwiązanie postaci

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

przy czym wartości wykładnika r znajduje się z równania określającego

$$r(r-1) + p(0)r + q(0) = 0.$$

Jeżeli równanie określające ma dwa pierwiastki różne i ich różnica nie jest równa liczbie całkowitej, to otrzymamy dwa niezależne rozwiązania danego równania. W przeciwnym przypadku metoda współczynników nieoznaczonych daje tylko jedno rozwiązanie.

Podany na str. 580 wzór (*) może być wykorzystany bądź do bezpośredniego znalezienia drugiego rozwiązania, bądź do wyznaczenia postaci, w której można znaleźć to rozwiązanie metodą współczynników nieoznaczonych.

Przykład. Dla równania Bessela (patrz niżej) przy n całkowitym można znaleźć metodą współczynników nieoznaczonych tylko jedno rozwiązanie postaci

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k}, \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0,$$

pokrywające się z funkcją $J_n(x)$ z dokładnością do czynnika stałego. Ponieważ w tym przypadku $e^{-\int p dx} = 1/x$, to drugie rozwiązanie według wzoru (*) ma postać

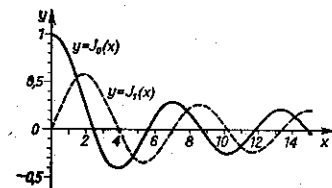
$$y_2 = A y_1 \int \frac{dx}{x \cdot x^{2n} (\sum a_k x^{2k})^2} = \\ = A y_1 \int \frac{\sum c_k x^{2k}}{x^{2n+1}} dx = B y_1 \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k}.$$

Obliczanie kolejnych współczynników c_k i d_k według a_k jest kłopotliwe, ale ostatnie wyrażenie może być wykorzystane do znalezienia rozwiązania metodą współczynników nieoznaczonych (jest oczywiste, że taką postać ma rozwinięcie w szereg funkcji $Y_n(x)$, patrz dalej).

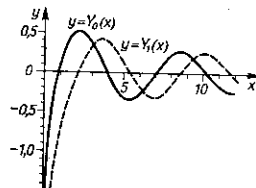
Równanie Bessela $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Równanie określające $r(r-1) + r - n^2 = r^2 - n^2 = 0$, skąd $r = \pm n$. Podstawiając do danego równania $y = x^n(a_0 + a_1 x + \dots)$ i przyrównując do zera współczynnik przy x^{n+k} otrzymujemy $k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0$. Przy $k=1$ otrzymujemy $(2n+1)a_1 = 0$. Biorąc k równe 2, 3, ... otrzymujemy $a_{2m+1} = 0$, gdzie $m = 1, 2, \dots$, a więc

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}, \quad \dots,$$

przy czym a_0 jest stałą dowolną.



Rys. 357



Rys. 358

Funkcje Bessela. Otrzymany powyżej szereg po podstawieniu $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ (1) określa funkcję Bessela (funkcję walcową) pierwszego rodzaju rzędu n :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{1}{2} x \right)^{n+2k}. \end{aligned}$$

Wykresy funkcji J_0 i J_1 przedstawione są na rysunku 357.

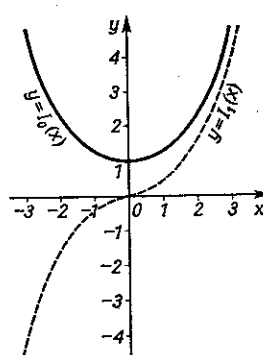
Rozwiązanie ogólne równania Bessela w przypadku, gdy n nie jest liczbą całkowitą, ma postać $y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$, gdzie funkcję $J_{-n}(x)$ określa szereg, który otrzymuje się z przytoczonego powyżej szeregu dla $J_n(x)$ przez zamianę n na $-n$. Gdy n jest całkowite, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. W tym przypadku w rozwiązaniu ogólnym należy za-

(1) O funkcji Γ patrz str. 204.

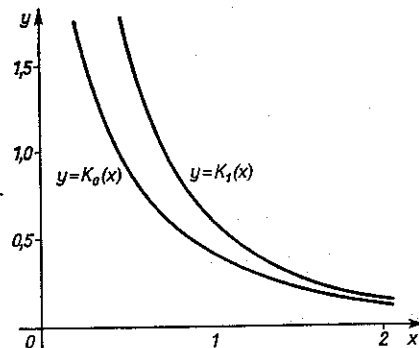
stać $J_{-n}(x)$ funkcją Bessela drugiego rodzaju $Y_n(x)$ (funkcją Webera) określoną wzorem

$$Y_n(x) = \lim_{m \rightarrow n} \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (1).$$

Wykresy funkcji Y_0 i Y_1 przedstawione są na rysunku 358.



Rys. 359



Rys. 360

W niektórych zastosowaniach spotyka się funkcje Bessela z argumentem urojonym; przy tym zazwyczaj rozważa się iloczyny $i^{-n} J_n(ix)$, które oznaczają się symbolem $I_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2}}{1! \Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+4}}{2! \Gamma(n+3)} + \dots$$

Funkcje te stanowią rozwiązania równania różniczkowego

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0.$$

Jako drugie rozwiązanie tego równania bierze się zazwyczaj funkcję Macdonalda

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}.$$

Wyrażenie to dąży do określonej granicy, gdy n dąży do liczby całkowitej.

Wykresy funkcji I_0 i I_1 są podane na rysunku 359, a wykresy funkcji K_0 i K_1 na rysunku 360. Tablice wartości funkcji $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ patrz na stronicach 88-90.

(1) Niekiedy funkcja ta oznaczana jest symbolem $N_n(x)$.

Podstawowe wzory dla funkcji Bessela:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad \frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x),$$

przy czym wzory te są także prawdziwe dla funkcji $Y_n(x)$;

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x}, \quad \frac{dI_n(x)}{dx} = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x);$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2nK_n(x)}{x}, \quad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x).$$

Dla n całkowitego mamy wzory

$$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi,$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \varphi) \sin(2n+1)\varphi d\varphi,$$

albo w postaci zespolonej

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi.$$

Funkcje $J_{n+1/2}(x)$ wyrażają się przez funkcje elementarne, w szczególności

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Stąd wyrażenia dla $J_{n+1/2}(x)$ przy dowolnym n całkowitym mogą być otrzymane za pomocą kolejnego stosowania przytoczonych wyżej wzorów rekurencyjnych.

Przy wielkich wartościach x zachodzą następujące wzory asymptotyczne:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4} \pi \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4} \pi \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

gdzie $O(1/x)$ oznacza nieskończenie małą tego samego rzędu co $1/x$ (patrz str. 361).

Równanie Legendre'a $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Przy n całkowitym jednym z rozwiązań tego równania są wielomiany Legendre'a (funkcje kuliste):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n((x^2-1)^n)}{dx^n}.$$

W szczególności dla $n = 0, 1, \dots, 7$ otrzymujemy wielomiany

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

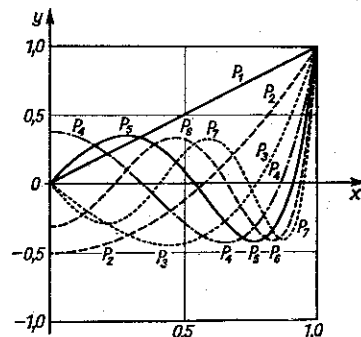
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x);$$

wykresy tych wielomianów podane są na rys. 361, a tablice wartości znajdują się na str. 91.



Rys. 361

Podstawowe własności wielomianów Legendre'a:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$

$$(x^2-1) \frac{dP_n(x)}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{dla } m \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} (P_m(x))^2 dx = \frac{2}{2m+1}.$$

Wielomiany Legendre'a można otrzymać rozkładając w szereg według potęg z funkcję

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \dots (|z| < 1).$$

Równanie hipergeometryczne

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (a + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - a\beta y = 0,$$

gdzie a, β i γ są parametrami, obejmuje wielką ilość ważnych przypadków szczególnych. Na przykład przy $a = n+1, \beta = -n, \gamma = 1$ i $x = \frac{1}{2}(1-z)$ równanie to przekształca się w równanie Legendre'a.

Jeżeli γ jest różne od zera i od liczby całkowitej ujemnej, to rozwiązaniem szczególnym równania hipergeometrycznego jest *szereg hipergeometryczny*

$$(1) \quad F(a, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{a \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \dots + \\ + \frac{a(a+1) \dots (a+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \dots (\gamma+n)} x^{n+1} + \dots,$$

bezwzględnie zbieżny, gdy $|x| < 1$ ⁽¹⁾. Jeżeli $2-\gamma$ jest różne od zera i od liczby całkowitej ujemnej, to rozwiązaniem szczególnym równania hipergeometrycznego jest

$$y = x^{1-\gamma} F(a+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x).$$

W wielu przypadkach szereg hipergeometryczny można sprowadzić do prostych funkcji elementarnych, na przykład

$$F(1, \beta, \beta, x) = F(a, 1, a, x) = \frac{1}{1-x}, \quad F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n,$$

$$F(1, 1, 2, -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

8. Zagadnienia brzegowe

Sformułowane zagadnienia. W wielu przypadkach, szczególnie w związku z rozwiązywaniem równań fizyki matematycznej (patrz str. 599) zachodzi potrzeba — w odróżnieniu od rozważanych powyżej zagadnień z warunkami początkowymi — rozwiązywania tzw. *zagadnień brzegowych*, w których szukane rozwiązanie równania różniczkowego powinno spełniać pewne warunki na końcach danego przedziału zmienności zmiennej niezależnej. Ograniczymy się tu do rozpatrzenia następującego zagadnienia brzegowego:

⁽¹⁾ Zbieżność szeregu hipergeometrycznego (1) dla $x = 1$ i $x = -1$ zależy od liczby $\delta = \gamma - a - \beta$. Przy $x = 1$ szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny, gdy $\delta > 0$, a rozbieżny, gdy $\delta \leq 0$; przy $x = -1$ szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny, gdy $\delta > 0$, warunkowo zbieżny, gdy $-1 < \delta \leq 0$, i rozbieżny, gdy $\delta \leq -1$.

Znaleźć rozwiązanie $y(x)$ samosprężonego równania różniczkowego

$$(*) \quad [py']' - qy + \lambda ey = f,$$

spełniające warunki jednorodne

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0,$$

przy czym w przedziale $a \leq x \leq b$ ⁽¹⁾ funkcje $p(x), p'(x), q(x), e(x), f(x)$ są ciągłe i przy tym $p(x) > p_0 > 0, e(x) > e_0 > 0$; wielkość λ jest stała (parametr równania). Przyjmując $f = 0$ otrzymujemy zagadnienie brzegowe *jednorodne* odpowiadające danemu zagadnieniu *niejednorodnemu*.

Równanie rzędu drugiego $Ay'' + By' + Cy + \lambda Ry = F$ może być sprowadzone do postaci $(*)$ za pomocą mnożenia przez p/A , gdzie $p = e^{(\int B/A) dx}$, jeżeli w rozważanym przedziale $A \neq 0$. Przy tym $q = -pC/A, e = pR/A$.

Zadanie znalezienia rozwiązania spełniającego *niejednorodne* warunki $A_0 y(a) + B_0 y'(a) = C_0, A_1 y(b) + B_1 y'(b) = C_1$ sprowadza się do zagadnienia z warunkami jednorodnymi, ale z inną prawą stroną $f(x)$, przez prostą zmianę niewiadomej funkcji $y = z + u$, gdzie u jest dowolną, dwukrotnie różniczkowalną funkcją, spełniającą *niejednorodne* warunki brzegowe, a z jest nową funkcją niewiadomą, spełniającą oczywiście odpowiednie warunki brzegowe *jednorodne*.

Zagadnienie Sturma-Liouville'a. Przy ustalonej wartości parametru λ zachodzi co następuje: albo zagadnienie *niejednorodne* ma rozwiązanie przy dowolnych $f(x)$ i wtedy to rozwiązanie jest jedyne, a odpowiednie zadanie *jednorodne* ma tylko trywialne (tożsamościowo równe zero) rozwiązanie, albo odpowiednie zadanie *jednorodne* ma nietrywialne (różne od zera) rozwiązania i wtedy zadanie *niejednorodne* jest rozwiązywalne nie dla wszystkich prawych stron równania, a w przypadku istnienia rozwiązania nie jest ono jednoznaczne. Te wartości parametru λ , przy których zachodzi drugi wypadek (zadanie *jednorodne* ma nietrywialne rozwiązania), nazywamy *wartościami własnymi* danego zagadnienia brzegowego, a odpowiednie rozwiązania nietrywialne nazywamy *funkcjami własnymi* odpowiadającymi danej wartości własnej. Zagadnienie znalezienia wartości własnych i funkcji własnych równania $(*)$ nosi nazwę *zagadnienia Sturma-Liouville'a*.

Podstawowe własności funkcji własnych i wartości własnych.

1° Wartości własne zagadnienia brzegowego tworzą ciąg liczb rzeczywistych $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ dążący do nieskończoności. Funkcja własna odpowiadająca wartości własnej λ_n ma dokładnie n zer w przedziale $a < x < b$.

⁽¹⁾ W dalszym ciągu będziemy zakładali, że przedział (a, b) jest skończony. W przypadku przedziału nieskończonego wyniki ulegają istotnej zmianie.

2° Jeżeli $y(x)$ i $z(x)$ są funkcjami własnymi odpowiadającymi danej wartości brzegowej λ , to $y(x) = cz(x)$, gdzie c jest stałą.

3° Jeżeli $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są funkcjami własnymi odpowiadającymi wartościom własnym λ_1 i λ_2 , to

$$\int_a^b y_1(x) y_2(x) \varrho(x) dx = 0.$$

Jest to *ortogonalność z wagą* $\varrho(x)$.

4° Jeżeli w równaniu (*) współczynniki $p(x)$ i $q(x)$ zastąpimy przez $\tilde{p}(x) \geq p(x)$ i $\tilde{q}(x) \geq q(x)$, to liczby własne nie zmniejszą się, tzn. $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$, gdzie $\tilde{\lambda}_n$ i λ_n są n -tymi wartościami własnymi równania zmienionego, i równania pierwotnego. Jeżeli współczynnik $\varrho(x)$ zastąpimy przez $\tilde{\varrho}(x) \geq \varrho(x)$, to liczby własne nie powiększą się, tzn. $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$, przy czym n -ta wartość własna zależy w sposób ciągły od współczynników równania, tzn. dostatecznie małym zmianom współczynników odpowiadają dowolnie małe zmiany n -tej wartości własnej.

5° Przy zmniejszeniu przedziału $a \leq x \leq b$ wartości własne nie maleją.

Rozwinięcie według funkcji własnych. Obierzmy dla każdego λ_n taką funkcję własną $\varphi_n(x)$, żeby

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \varrho(x) dx = 1$$

(taką funkcję własną nazywamy *funkcją unormowaną*).

Z każdą funkcją $g(x)$ określoną w przedziale $a \leq x \leq b$ można związać szereg Fouriera według funkcji własnych danego zagadnienia brzegowego:

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b g(x) \varphi_n(x) \varrho(x) dx,$$

jeżeli napisane całki mają sens.

Twierdzenie o rozwinięciu. Jeżeli funkcja $g(x)$ ma ciągłą pochodną i spełnia warunki brzegowe rozważanego zagadnienia, to szereg Fouriera funkcji $g(x)$ według funkcji własnych zagadnienia brzegowego jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny do $g(x)$.

Przykłady funkcji własnych i rozwinięć według funkcji własnych patrz na str. 603–608.

Równość Parsewala

$$\int_a^b [g(x)]^2 \varrho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

zachodzi zawsze, gdy całka po lewej stronie ma sens. W tym przypadku szereg Fouriera funkcji $g(x)$ według funkcji własnych zagadnienia brzegowego jest zbieżny do $g(x)$ *przeciętnie* z kwadratem, to znaczy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left(g(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right)^2 \varrho(x) dx = 0.$$

Przypadki osobliwe. Przy stosowaniu metody Fouriera do rozwiązywania zagadnień fizyki matematycznej często powstają zagadnienia brzegowe rozważanego powyżej typu z tą jednak różnicą, że w końcowych punktach przedziału $a \leq x \leq b$ mogą zachodzić osobliwości równania różniczkowego, na przykład funkcja $p(x)$ przybiera wartość zero. W takich punktach osobliwych nakłada się pewne ograniczenia na zachowanie się rozwiązania, jak np. ciągłość lub skończoność rozwiązania albo przybieranie wartości nieskończonej rzędu nie wyższego od danego. Warunki te odgrywają rolę jednorodnego warunku brzegowego (patrz str. 602). Ponadto w niektórych zagadnieniach brzegowych zachodzi potrzeba rozważania warunków brzegowych jednorodnych wiążących wartości funkcji i jej pochodnej na różnych końcach przedziału. Najważniejsze z takich warunków są warunki $y(a) = y(b)$, $p(a)y'(a) = p(b)y'(b)$, które w przypadku $p(a) = p(b)$ można uważać za warunki okresowości. Dla zagadnienia granicznego z takimi warunkami słuszne jest wszystko wyżej powiedziane z wyjątkiem tezy 2° (patrz str. 588).

B. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

9. Równania rzędu pierwszego

Równania liniowe. Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym rzędu pierwszego nazywamy równanie

$$(1) \quad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y,$$

gdzie z jest funkcją niewiadomą zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_n$, a $X_1, X_2, \dots, X_n$ oraz Y są danymi funkcjami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jeżeli w równaniu (1) funkcje $X_1, X_2, \dots, X_n$ oraz Y zależą również od z , to równanie nazywamy *quasi-liniowe*. Jeżeli $Y = 0$, to równanie

$$(1a) \quad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

nazywamy *jednorodne*.

Zagadnienie całkowania równania liniowego jednorodnego jest

Całki tego układu równania są $lx+my+nz=C_1$, $x^2+y^2+z^2=C_2$. Charakterystyki są okręgami o środkach leżących na prostej, która przechodzi przez początek współrzędnych i ma cosinusy kierunkowe

proporcjonalne do l, m, n . Powierzchniami całkowymi są powierzchnie obrotowe, których osią obrotu jest ta prosta.

2. Znaleźć powierzchnię całkową równania $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$, przechodzącą przez krzywą $x = 0, z = \varphi(y)$.

Równania charakterystyk $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$. Charakterystyki przechodzące przez punkt (x_0, y_0, z_0) mają równania $y = x - x_0 + y_0, z = z_0 e^{x-x_0}$. Przyjmując $x_0 = 0, z_0 = \varphi(y_0)$ znajdujemy $y = x + y_0, z = e^x \varphi(y_0)$; jest to przedstawienie parametryczne szukanej powierzchni całkowej. Rugując y_0 otrzymujemy $z = e^x \varphi(y-x)$.

Równania nieliniowe. Postać ogólna równania cząstkowego rzędu pierwszego jest

$$(3) \quad F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Rozwiązanie równania (3) $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_n)$, zależne od n parametrów $a_1, a_2, \dots, a_n$, których jacobian (patrz str. 372) $\frac{\partial(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \dots, \varphi_{x_n})}{\partial(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ nie jest równy zeru dla rozważanych wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$, nazywamy *całką zupełną* równania (3).

Całkowanie równania (3) sprowadza się do całkowania tzw. *charakterystycznego układu równań różniczkowych*

$$(4) \quad \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \dots + p_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z},$$

gdzie

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Rozwiązanie charakterystycznego układu równań (4), spełniające dodatkowo warunek $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, nazywamy *wstęgami charakterystycznymi*.

Kanoniczne układy równań. Często wygodniej bywa rozważać równanie nie zawierające w sposób jawny niewiadomej funkcji z . Przejście do takiego równania osiąga się przez wprowadzenie dodatkowej zmiennej niezależnej $x_{n+1} = z$ oraz takiej niewiadomej funkcji $V(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$, że równanie $V(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C$ określa z jako funkcję uwikłaną zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Przy tym zamiast

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ w równaniu (3) podstawiamy $-\frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeżeli ponadto rozwiążemy równanie różniczkowe względem którejś pochodnej cząstkowej funkcji V oznaczając ją przez x i odpowiednio zmieniając numerację pozostałych zmiennych niezależnych, to równanie (3) przybiera postać

$$(3') \quad p + H(x_1, x_2, \dots, x_n, x, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

gdzie

$$p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Układ charakterystycznych równań różniczkowych przechodzi wtedy w układ

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

oraz

$$(6) \quad \frac{dV}{dx} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Równania (5) same przez się stanowią oznaczony układ $2n$ równań różniczkowych zwyczajnych. Układ taki, odpowiadający dowolnej funkcji $H(x_1, x_2, \dots, x_n, x, p_1, p_2, \dots, p_n)$ o $2n+1$ zmiennych, nazywamy *kanonicznym układem równań różniczkowych*. Do układów równań tej postaci prowadzą liczne zadania mechaniki i fizyki teoretycznej. Znajomość całki zupełnej

$$V = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x, a_1, a_2, \dots, a_n) + a$$

równania (3') daje możliwość znalezienia ogólnego rozwiązania kanonicznego układu równań (5), gdyż równania

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

o $2n$ parametrach a_i i b_i wyznaczają $2n$ -parametrowe rozwiązanie kanonicznego układu równań (5).

Równanie Clairauta. Zagadnienie znalezienia całki zupełnej jest szczególnie proste w przypadku, gdy równanie ma postać

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + f(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

gdzie

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

jest to tzw. *równanie Clairauta*. Całką zupełną takiego równania jest

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dowolnymi parametrami.

Przykład. (Zagadnienie dwóch ciał). Ruch dwóch punktów materialnych wzajemnie się przyciągających według prawa Newtona odbywa się stale w jednej płaszczyźnie. Dlatego obierając położenie początkowe jednego z punktów w początku współrzędnych można napisać równania ruchu w następującej postaci:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad V = -\frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ten układ równań po wprowadzeniu funkcji Hamiltona

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

przechodzi w układ kanoniczny równań różniczkowych

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

względem wielkości $x, y, p = dx/dt, q = dy/dt$. Odpowiednim równaniem cząstkowym jest równanie

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Po przejściu do współrzędnych biegunowych ϱ, φ nietrudno wykryć, że to równanie ma całkę zupełną

$$z = -at - b\varphi + c - \int_0^{\varrho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}} dr,$$

zależną od parametrów a, b, c . Dlatego z równań $\partial z / \partial a = -t_0, \partial z / \partial b = -\varphi_0$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne układu równań (*).

Przypadek dwóch zmiennych niezależnych ($x_1 = x, x_2 = y, p_1 = p, p_2 = q$). W tym przypadku wstęgę charakterystyczną można interpretować geometrycznie jako krzywą, w której każdym punkcie (x, y, z) określona jest płaszczyzna $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$, styczna do krzywej. Znaleźnienie powierzchni całkowitej równania

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

przechodzącej przez daną krzywą (zagadnienie Cauchy'ego) sprowadza się do poprowadzenia przez punkty krzywej początkowej tych

wstęgę charakterystycznych, których odpowiednia płaszczyzna jest styczna do tej krzywej. Wartości p i q w punktach krzywej początkowej są przy tym określone związkami $F(x, y, z, p, q) = 0$ i $p dx + q dy = dz$, które w przypadku równania nieliniowego mają, ogólnie biorąc, kilka rozwiązań. Dlatego przy formułowaniu zagadnienia Cauchy'ego dla uzyskania określonego rozwiązania należy wzdłuż krzywej początkowej przyjąć parę funkcji ciągłych p i q spełniających dwa wskazane związki.

Przykład. Dla równania $pq = 1$ i krzywej początkowej $y = x^3, z = 2x^2$ można wzdłuż krzywej przyjąć $p = x$ i $q = 1/x$. Charakterystyczny układ równań ma postać

$$\frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Wstęga charakterystyczna z warunkami początkowymi x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 przy $t = 0$ jest $x = x_0 + q_0 t, y = y_0 + p_0 t, z = 2p_0 q_0 t + z_0, p = p_0, q = q_0$. W przypadku gdy $p_0 = x_0, q_0 = 1/x_0$, krzywa należąca do wstęgi charakterystycznej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0) krzywej początkowej ma postać

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}, \quad y = x_0^3 + tx_0, \quad z = 2t + 2x_0^2.$$

Rugując parametry x_0, t znajdujemy $z^2 = 4xy$.

Jeżeli wzdłuż krzywej początkowej przyjmujemy inne, dopuszczalne wartości p i q , biorąc na przykład $p = 3x, q = 1/3x$, to w wyniku otrzymamy inne rozwiązanie.

Powierzchnia obwodząca jednoparametrową rodzinę powierzchni całkowitych jest również powierzchnią całkową. Korzystając z tej okoliczności można rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego za pomocą całki zupełnej, wyłączając jednoparametrową rodzinę rozwiązań, stycznych do danych płaszczyzn w punktach krzywej początkowej i znajdując powierzchnię obwodzącą tę rodzinę powierzchni.

Przykład. Przypuśćmy, że dla równania $z - px - qy + pq = 0$ (równanie Clairauta) trzeba znaleźć powierzchnię całkową przechodzącą przez krzywą $y = x, z = x^2$.

Rozważane równanie ma całkę zupełną $z = ax + by - ab$. Ponieważ wzdłuż krzywej początkowej należy przyjąć $p = q = x$, przeto warunek $a = b$ wyznacza potrzebną rodzinę jednoparametrową powierzchni. Znajdując powierzchnię obwodzącą tę rodzinę otrzymujemy $z = \frac{1}{4}(x+y)^2$.

Równania z różniczkami zupełnymi (równania Pfaffa). Równanie z różniczkami zupełnymi ma postać

$$(7) \quad dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

gdzie $f_1, f_2, \dots, f_n$ są danymi funkcjami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n, z$. Równanie to nazywamy *całkowalne w sposób zupełny*, jeżeli istnieje jedyny związek między $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ zawierający dowolną stałą, z którego dane równanie (7) wynika jako wniosek. W tym przypadku istnieje jedyne rozwiązanie $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ równania (7) przyjmujące daną wartość z^0 przy wartościach początkowych $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ zmiennych niezależnych. Gdy $n = 2, x_1 = x, x_2 = y$, oznacza to, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi jedna i tylko jedna powierzchnia całkowa.

Równanie (7) jest całkowalne w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy są tożsamościowo spełnione względem wszystkich zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ następujące związki w ilości $\frac{1}{2}n(n-1)$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z}, \quad \text{gdzie } i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Jeżeli równanie (7) jest dane w postaci symetrycznej

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n = 0,$$

to warunkiem całkowalności w sposób zupełny są tożsamości

$$f_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) + f_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) + f_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

dla wszystkich kombinacji wskaźników i, j, k .

W przypadku całkowalności w sposób zupełny znalezienie rozwiązania równania (7) sprowadza się do całkowania jednego równania zwyczajnego o $n-1$ parametrach.

10. Równania liniowe rzędu drugiego

Postać ogólna równania liniowego rzędu drugiego w przypadku dwóch zmiennych niezależnych x, y i funkcji niewiadomej u jest

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

gdzie współczynniki A, B, C, a, b, c oraz wyraz wolny f są danymi funkcjami zmiennych x i y .

Klasyfikacja równań. Charakter rozwiązania takiego równania w znacznym stopniu jest określony przez znak wyróżnika $\delta = AC - B^2$. Równanie (1) nazywamy *równaniem hiperbolicznym* w pewnym obszarze, jeżeli w tym obszarze $\delta < 0$; *parabolicznym*, jeśli w rozważanym obszarze zachodzi równość tożsamościowa $\delta = 0$; wreszcie *eliptycznym*, jeżeli w rozważanym obszarze $\delta > 0$.

Jeżeli δ zmienia znak w rozważanym obszarze, to równanie (1) nazywamy *równaniem typu mieszanego* albo *równaniem hiperboliczno-eliptycznym*. Znak wyróżnika pozostaje nie zmieniony przy dowolnym przekształceniu zmiennych niezależnych (zmiana układu współrzędnych na płaszczyźnie Oxy). Dlatego typ równania jest niezmiennikiem względem wyboru zmiennych niezależnych.

Charakterystykami równania (1) nazywamy krzywe całkowe równania różniczkowego

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A}.$$

Równanie hiperboliczne ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych, równanie paraboliczne ma jedną rodzinę charakterystyk rzeczywistych, a równanie eliptyczne nie ma charakterystyk rzeczywistych. Równanie otrzymane z równania (1) przez wprowadzenie nowych zmiennych niezależnych ma te same charakterystyki co równanie (1). Jeżeli rodzina charakterystyk pokrywa się z rodziną linii współrzędnych, to w równaniu (1) nie występuje wyraz zawierający drugą pochodną funkcji niewiadomej względem odpowiedniej zmiennej niezależnej. Przy tym w przypadku równania parabolicznego nie występuje też wyraz zawierający pochodną mieszaną.

Postać kanoniczna równania. Za pomocą wprowadzenia nowych zmiennych niezależnych $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ można równanie (1) sprowadzić do jednej z trzech postaci kanonicznych:

$$(a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0 \quad (\delta < 0, \text{ równanie hiperboliczne}),$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0 \quad (\delta = 0, \text{ równanie paraboliczne}),$$

$$(c) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0 \quad (\delta > 0, \text{ równanie eliptyczne}),$$

gdzie kropkami zaznaczono wyrazy nie zawierające pochodnych cząstkowych rzędu drugiego funkcji niewiadomej.

Jeżeli w przypadku równania hiperbolicznego oberzemy dwie rodziny charakterystyk za rodziny linii współrzędnych nowego układu współrzędnych, to znaczy przyjmujemy $\xi_1 = \varphi(x, y), \eta_1 = \psi(x, y)$, gdzie $\varphi(x, y) = \text{const}, \psi(x, y) = \text{const}$ (są to równania rodzin charakterystyk), to równanie przybierze postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \dots = 0.$$

Ta postać również nosi nazwę *postaci kanonicznej równania hiperbolicznego*. Od tej postaci za pomocą zamiany $\xi = \xi_1 + \eta_1, \eta = \xi_1 - \eta_1$,

można przejść do postaci kanonicznej (a). Dla sprowadzenia równania parabolicznego do postaci kanonicznej (b) wystarczy za rodzinę $\xi = \text{const}$ obrać jedną w tym przypadku rodzinę charakterystyk, przyjmując za η dowolną, niezależną od ξ funkcję zmiennych x i y . Jeżeli współczynniki $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ są funkcjami analitycznymi (patrz str. 631), to równanie charakterystyk w przypadku równania eliptycznego wyznacza dwie rodziny krzywych zespolonych sprzężonych $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$. Równanie sprowadza się do postaci kanonicznej (c) za pomocą podstawienia $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = i(\varphi - \psi)$.

Wszystko co zostało powiedziane o klasyfikacji równań i o sprowadzeniu do postaci kanonicznej może być zastosowane do równań nieco ogólniejszego typu

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Przypadek, gdy ilość zmiennych niezależnych jest większa od dwóch. Liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, w których ilość zmiennych niezależnych jest większa od dwóch, ma postać

$$(2) \quad \sum_{i, k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \dots = 0,$$

gdzie a_{ik} są danymi funkcjami zmiennych niezależnych, a kropkami zaznaczone są wyrazy, w których nie występują pochodne rzędu drugiego funkcji niewiadomej.

Równania (2) nie można już sprowadzić za pomocą przekształceń zmiennych niezależnych do postaci prostych, normalnych. Jednakże i dla tych równań można podać ważną w zastosowaniach klasyfikację, podobną do wyżej przytoczonej.

Równania o stałych współczynnikach. Jeżeli współczynniki w równaniu (2) są stałe, to równanie to można za pomocą liniowej zamiany jednorodnej zmiennych niezależnych sprowadzić do następującej postaci normalnej:

$$(2') \quad \sum_i \kappa_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \dots = 0,$$

gdzie wszystkie współczynniki κ_i są równe ± 1 lub 0 .

Jeżeli wszystkie współczynniki κ_i są różne od zera i mają ten sam znak, to równanie nazywamy *eliptycznym*. Jeżeli wszystkie współczyn-

niki κ_i są różne od zera i jeden z nich ma znak różny od pozostałych, to równanie nazywamy *hiperbolicznym* (¹). Jeżeli jeden ze współczynników κ_i jest równy zeru, a pozostałe są różne od zera i mają ten sam znak, to równanie nazywamy *parabolicznym*.

Jeżeli w równaniu liniowym stałe są nie tylko współczynniki przy pochodnych wyższych rzędów, ale również współczynniki przy pierwszych pochodnych funkcji niewiadomej, to za pomocą zamiany funkcji niewiadomej w równaniu można się uwolnić od wyrazów z pochodnymi rzędu pierwszego względem tych zmiennych, dla których $\kappa_i \neq 0$. W tym celu wystarczy przyjąć

$$u = v \exp \left(-\frac{1}{2} \sum \frac{b_k}{\kappa_k} x_k \right),$$

gdzie b_k jest współczynnikiem przy $\partial u / \partial x_k$ we wzorze (2'), a sumowanie rozciąga się na wszystkie $\kappa_k \neq 0$. A więc wszystkie równania różniczkowe o stałych współczynnikach w przypadku równania eliptycznego mogą być sprowadzone do postaci $\Delta v + kv = g$, a w przypadku równania hiperbolicznego do postaci $\partial^2 v / \partial t^2 - \Delta v + kv = g$, gdzie Δ jest operatorem Laplace'a:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

Sformułowanie zagadnienia. Badanie różnych zadań fizycznych w ośrodkach ciągłych (zjawisk mechanicznych, elektrycznych, cieplnych) doprowadza do równań różniczkowych cząstkowych, które z tego powodu zwane są *równaniami fizyki matematycznej*. Przy tym najważniejsze, najczęściej spotykane są równania liniowe rzędu drugiego. Dla rozwiązywania zagadnienia fizycznego sprowadzającego się do równań różniczkowych cząstkowych żąda się zazwyczaj takiego rozwiązania równania różniczkowego, które spełnia pewne dodatkowe tzw. *warunki graniczne* (początkowe i brzegowe). Zespół tych warunków powinien określać rozwiązanie w sposób jednoznaczny. Ponadto, co jest nie mniej ważne, rozwiązanie powinno być stabilne (trwałe) przy nieznacznych zmianach warunków początkowych i brzegowych, tj. powinno zmieniać się dowolnie mało, gdy zmiany warunków początkowych i brzegowych będą dostatecznie małe. W tym przypadku mówimy, że zagadnienie zostało sformułowane w *sposób poprawny*. Tylko przy spełnieniu tego warunku można uważać, że matematyczne zadanie rozwiązania równania różniczkowego może być zastosowane do opisu realnych zjawisk. Przy tym okazuje się, że dla równań hiperbolicznych, do których w szczególności prowadzi badanie drgań ośrodków ciągłych, poprawne jest ujęcie sprawy według zagadnienia Cauchy'ego: ustalenie na początkowej *rozmaitości* (na krzywej, na powierzchni) wartości poszu-

(¹) Jeżeli w równaniu występują co najmniej dwa współczynniki dodatnie i co najmniej dwa współczynniki ujemne, to równanie nazywamy *ultrahyperboliczne*.

kiwanej funkcji oraz jej pochodnej w kierunku nie stycznym (w szczególności w kierunku normalnym). Natomiast dla równań eliptycznych, do których prowadzi badanie procesów stacjonarnych i równowagi w ośrodkach ciągłych, poprawne jest ujęcie sprawy według zagadnienia brzegowego: ustalenie wartości funkcji niewiadomej (lub jej pochodnej w kierunku normalnym) na granicy rozważanego obszaru zmienności zmiennych niezależnych, przy czym jeżeli rozważany obszar jest nieograniczony, to zazwyczaj nakłada się pewne założenia dotyczące zachowania się funkcji w nieskończoności, tzn. na zachowanie się funkcji przy nieograniczonym wzrastaniu argumentów.

Warunki niejednorodne i równania niejednorodne. Rozwiązanie równania liniowego (jednorodnego lub niejednorodnego) przy niejednorodnych warunkach początkowych lub brzegowych (patrz str. 587) może być sprowadzone do rozwiązywania równania różniącego się od danego równania tylko wyrazem wolnym od funkcji niewiadomej, ale już przy warunkach jednorodnych. W tym celu wystarczy poszukiwaną funkcję zastąpić różnicą między tą funkcją a dowolną funkcją mającą ciągle pochodne rzędu drugiego i spełniającą dane warunki.

Rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego przy danych warunkach początkowych lub brzegowych niejednorodnych jest sumą rozwiązania tego samego równania przy warunkach zerowych oraz rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego przy warunkach danych.

Wreszcie rozwiązywanie równania liniowego niejednorodnego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = g(x, t) \quad (1)$$

przy warunkach początkowych jednorodnych $(u)_{t=0} = 0$, $(\partial u / \partial t)_{t=0} = 0$ sprowadza się następującym sposobem do rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego dla odpowiedniego równania jednorodnego

$$u = \int_0^t \varphi(x, t; \tau) d\tau,$$

gdzie $\varphi(x, t; \tau)$ jest to rozwiązanie równania $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0$ przy warunkach $(u)_{t=\tau} = 0$, $(\partial u / \partial t)_{t=\tau} = g(x, \tau)$.

(1) W równaniu tym x jest symbolicznym oznaczeniem n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w przestrzeni n -wymiarowej, a $L[u]$ jest liniowym wyrażeniem różniczkowym zawierającym ewentualnie pochodną $\partial u / \partial t$, ale nie zawierającym pochodnych wyższych rzędów względem t .

Równania najczęściej spotykane.

Równanie falowe, czyli równanie rozchodzenia się drgań w ośrodku jednorodnym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(x, t),$$

gdzie x oznacza symbolicznie zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$ w przestrzeni n -wymiarowej, a prawa strona równania $Q(x, t)$ jest równa zeru w przypadku braku sił wymuszających.

Dla równania jednorodnego, tzn. $Q(x, t) = 0$, rozwiązanie spełniające warunki początkowe $(u)_{t=0} = \varphi(x)$, $(\partial u / \partial t)_{t=0} = \psi(x)$ jest określone następującymi wzorami:

dla $n = 3$:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left(\iint_{S_{at}} \frac{\varphi(a_1, a_2, a_3)}{t} d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\varphi(a_1, a_2, a_3)}{t} d\sigma \right),$$

gdzie całkowanie rozciąga się na powierzchnię kuli o równaniu $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + (a_3 - x_3)^2 = a^2 t^2$ (wzór Kirchhoffa);

dla $n = 2$:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \left(\iint_{k_{at}} \frac{\varphi(a_1, a_2) da_1 da_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (a_1 - x_1)^2 - (a_2 - x_2)^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{k_{at}} \frac{\varphi(a_1, a_2) da_1 da_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (a_1 - x_1)^2 - (a_2 - x_2)^2}} \right),$$

gdzie całkowanie rozciąga się na koło $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 \leq a^2 t^2$ (wzór Poissona);

dla $n = 1$:

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(a) da$$

(wzór d'Alemberta).

Jeżeli równanie wyjściowe jest niejednorodne, to do prawych stron tych wzorów należy odpowiednio dodać:

dla $n = 3$ (tzw. potencjał opóźniony):

$$\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - r/a)}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

gdzie $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$;

dla $n = 2$:

$$\frac{1}{2\pi a} \iint_K \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}},$$

gdzie K jest to obszar przestrzeni $\xi_1 \xi_2 \tau$ określony nierównościami $0 \leq \tau \leq t, (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leq a^2(t - \tau)^2$;

dla $n = 1$:

$$\frac{1}{2a} \int_T Q(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

gdzie T jest trójkątem $0 \leq \tau \leq t, |\xi - x_1| \leq a|t - \tau|$.

Z przytoczonych wzorów wynika, że a jest prędkością rozchodzenia się zakłócenia.

Równanie rozchodzenia się ciepła w ośrodku jednorodnym:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = Q(x, t) \quad (1).$$

We wzorze tym prawa strona $Q(x, t)$ jest równa zeru w przypadku braku źródeł ciepła i ciał pochłaniających. Dla tego równania formuluje się zazwyczaj następujące zagadnienie Cauchy'ego; znaleźć rozwiązanie ograniczone przy $t > 0$ mając warunek $(u)_{t=0} = f(x)$. Warunek ograniczoneści rozwiązania zapewnia jednoznaczność rozwiązania.

Dla równania jednorodnego mamy ⁽¹⁾

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(a_1, \dots, a_n) \times \\ \times \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}{4a^2 t}\right) da_1 \dots da_n.$$

Gdy $Q(x, t) \neq 0$, do prawej strony powyższej równości należy dodać

$$\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(a_1, \dots, a_n)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}{4a^2 \tau}\right) da_1 \dots da_n \right] d\tau.$$

Zagadnienie znalezienia $u(x, t)$ dla $t < 0$, gdy dane są wartości $u(x, 0)$, jest (jak się okazuje) sformułowane w sposób niepoprawny.

⁽¹⁾ Δ jest operatorem Laplace'a względem n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ (patrz str. 599).

⁽²⁾ Przypominamy, że $\exp x = e^x$.

Równanie teorii potencjału:

$$\Delta u = -4\pi q \quad (1),$$

gdzie q jest daną funkcją punktu (równanie Poissona). Gdy $q = 0$, otrzymujemy równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ (patrz str. 682).

Metody całkowania.

Rozdzielenie zmiennych. Dla wielu równań różniczkowych fizyki matematycznej można za pomocą specjalnych podstawień otrzymać, jeżeli nie cały zbiór rozwiązań, to rodzinę rozwiązań zależną od dowolnych parametrów. W równaniach różniczkowych liniowych, w szczególności rzędu drugiego, często można zastosować podstawienie

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n).$$

Aby wyznaczyć każdą z funkcji $\varphi_k(x_k)$, rozdzielamy zmienne po podstawieniu takiego iloczynu do równania wyjściowego (patrz przykłady); otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne liniowe. Aby przy tym rozwiązanie równania wyjściowego spełniało żądane warunki graniczne jednorodne, może się okazać wystarczające, by część funkcji $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)$ spełniała pewne warunki brzegowe.

Z uzyskanych rozwiązań można za pomocą sumowania, różniczkowania i całkowania otrzymywać nowe rozwiązania. Przy tym należy tak dobrać parametry, żeby były spełnione pozostałe warunki brzegowe i początkowe (patrz przykłady). Należy pamiętać, że otrzymane tą metodą rozwiązanie w postaci szeregu albo całki niewłaściwej jest rozwiązaniem tylko formalnym; po jego otrzymaniu należy koniecznie sprawdzić, czy rozwiązanie to ma sens (tzn. czy szereg lub całka niewłaściwa są zbieżne) i czy rozwiązanie to spełnia dane równanie i warunki graniczne (tzn. czy jest dopuszczalne jego różniczkowanie wyraz po wyrazie, przejście do granicy itd.).

We wszystkich następujących przykładach szeregi i całki niewłaściwe są zbieżne, jeżeli na funkcje wyrażające warunki początkowe nałożone zostaną odpowiednie ograniczenia (na przykład ciągłość drugiej pochodnej w przykładach 1 i 2).

Przykłady. 1. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

spełniające warunki początkowe $(u)_{t=0} = f(x), (\partial u / \partial t)_{t=0} = \varphi(x)$ i warunki brzegowe $(u)_{x=0} = 0, (u)_{x=l} = 0$ (drgania zamocowanej struny).

Poszukujemy rozwiązania w postaci $u = X(x)T(t)$. Podstawiając

⁽¹⁾ Δ jest operatorem Laplace'a względem n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ (patrz str. 599).

do równania otrzymujemy $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ (zmienne są rozdzielone). Ponieważ lewa strona nie zależy od x , a prawa od t , przeto każda z nich jest wielkością stałą. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda^2$ ⁽¹⁾ otrzymujemy $X'' + \lambda^2 X = 0$, $T'' + a^2 \lambda^2 T = 0$. Ponadto z warunków brzegowych mamy $X(0) = X(l) = 0$. A więc $X(x)$ jest funkcją własną zagadnienia brzegowego Sturm-Liouville'a, a λ^2 jest wartością własną tego zagadnienia (patrz str. 587). Z równania na X oraz warunków brzegowych znajdujemy $X(x) = C \sin \lambda x$, przy czym $\sin \lambda l = 0$, tj. $\lambda = n\pi/l$, gdzie $n = 1, 2, \dots$. Całkując teraz równanie $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$ otrzymujemy rozwiązanie szczególne równania wyjściowego w postaci

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Żądając, żeby suma $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ przy $t = 0$ była równa $f(x)$, a pochodna

$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ była równa $\varphi(x)$, otrzymujemy, korzystając ze wzoru na rozwinięcie w szereg Fouriera według sinusów (patrz str. 759):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

2. Badanie drgań podłużnych pręta, którego jeden z końców jest swobodny, a do drugiego końca w chwili początkowej przyłożona została stała siła p , prowadzi do rozpatrzonego w przykładzie 1 równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z warunkami początkowymi $(u)_{t=0} = f(x)$, $(\partial u / \partial t)_{t=0} = \varphi(x)$, ale z warunkami brzegowymi niejednorodnymi $(\partial u / \partial x)_{x=0} = 0$ (dla swobodnego końca) i $(\partial u / \partial x)_{x=l} = kp$. Warunki te można zastąpić jednorodnymi $(\partial z / \partial x)_{x=0} = (\partial z / \partial x)_{x=l} = 0$ wprowadzając zamiast u nową funkcję niewiadomą $z = u - kpx^2/2l$, ale wtedy równanie różniczkowe staje się niejednorodne:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}.$$

⁽¹⁾ Z dalszych wywodów wynika, że przy dodatnich wartościach tej stałej warunki brzegowe nie mogą być spełnione.

Rozwiązania jego będziemy szukali w postaci $z = v + w$, gdzie v spełnia równanie różniczkowe jednorodne oraz warunki brzegowe i początkowe dla z , tzn. $(z)_{t=0} = f(x) - \frac{1}{2} kpx^2$, $(\partial z / \partial t)_{t=0} = \varphi(x)$, a w spełnia równanie różniczkowe niejednorodne oraz warunki początkowe i brzegowe zerowe. Łatwo zauważyć, że $w = ka^2 pt^2/2l$.

Przyjmując $v = X(x)T(t)$ i podstawiając do równania otrzymujemy jak wyżej $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$. Całkując równanie dla X z warunkami brzegowymi $X'(0) = X'(l) = 0$ znajdziemy funkcje własne danego zagadnienia $X_n = \cos(n\pi x/l)$ oraz odpowiednie wartości własne $\lambda_n^2 = -n^2\pi^2/l^2$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Postępując dalej jak w przykładzie poprzednim otrzymamy ostatecznie

$$u = \frac{ka^2 pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l} b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n} \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

gdzie a_n i b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera według cosinusów w przedziale $(0, l)$ funkcji $f(x) - \frac{kpx^2}{2}$ i $\frac{l}{a\pi} \varphi(x)$ (patrz str. 759).

3. Zagadnienie drgań membrany zamocowanej wzdłuż brzegu prowadzi do równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

albo we współrzędnych biegunowych (patrz str. 404):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

przy warunkach $(u)_{t=0} = f(r, \varphi)$, $(\partial u / \partial t)_{t=0} = F(r, \varphi)$, $(u)_{r=R} = 0$.

Niech $u = U(r)\Phi(\varphi)T(t)$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$\frac{U''}{U} + \frac{U'}{rU} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}.$$

Stąd, jak wyżej, $T'' + a^2 \lambda^2 T = 0$ i

$$\frac{r^2 U'' + rU'}{U} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu^2, \quad \text{czyli} \quad \Phi'' + \nu^2 \Phi = 0.$$

Z warunków $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ znajdujemy

$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad r^2 = n^2,$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$

Dla wyznaczenia U i λ mamy $[rU']' - \frac{n^2}{r} U = -\lambda^2 r U$ przy warunku $U(R) = 0$. Dołączając naturalny warunek ograniczoności $U(r)$ przy $r = 0$ i dokonując podstawienia $\lambda r = z$ znajdujemy

$$z^2 U'' + z U' + (z^2 - n^2) U = 0, \quad \text{tzn.} \quad U(r) = \mathcal{J}_n(z) = \mathcal{J}_n\left(\mu \frac{r}{R}\right),$$

gdzie $\mathcal{J}_n$ jest funkcją Bessela (patrz str. 582), przy czym $\lambda = \mu/R$, $\mathcal{J}_n(\mu) = 0$.

Niech μ_{nk} będzie k -krotnym zerem dodatnim funkcji $\mathcal{J}_n(z)$. Układ funkcji $U_{nk}(r) = \mathcal{J}_n\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right)$, gdzie $k = 1, 2, \dots$, jest układem zupełnym wszystkich funkcji własnych, samosprężonego zagadnienia Sturm-Liouville'a, ortogonalnych z wagą r (patrz str. 588).

Rozwiązanie naszego zagadnienia ma postać szeregu podwójnego

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_{nk} \cos n\varphi + b_{nk} \sin n\varphi) \cos \frac{\alpha \mu_{nk} t}{R} + (c_{nk} \cos n\varphi + d_{nk} \sin n\varphi) \sin \frac{\alpha \mu_{nk} t}{R} \right) \mathcal{J}_n\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right).$$

Z warunków początkowych przy $t = 0$ otrzymujemy

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} \cos n\varphi + b_{nk} \sin n\varphi) \mathcal{J}_n\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right),$$

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \mu_{nk}}{R} (c_{nk} \cos n\varphi + d_{nk} \sin n\varphi) \mathcal{J}_n\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right),$$

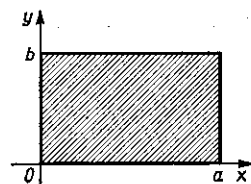
skąd

$$a_{nk} = \frac{2}{\pi R^2 \mathcal{J}_n^2(\mu_{nk})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r, \varphi) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \mathcal{J}_n\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right) r dr,$$

z tym, że przy $n = 0$ znajdująca się w liczniku dwójka powinna być zastąpiona jedynką. Wzory określające współczynniki c_{nk} i d_{nk} otrzymuje się ze wzorów dla a_{nk} i b_{nk} zastępując $f(r, \varphi)$ przez $F(r, \varphi)$ i mnożąc przez $R/\alpha \mu_{nk}$.

4. *Zagadnienie Dirichleta* (patrz str. 682) dla prostokąta $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (rys. 362). Znaleźć funkcję $u(x, y)$ spełniającą równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ oraz warunki $u(0, y) = \varphi_1(y)$, $u(a, y) = \varphi_2(y)$, $u(x, 0) = \psi_1(x)$, $u(x, b) = \psi_2(x)$.

Rozwiążmy zadanie najpierw dla przypadku $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$. Podstawiając do równania $u = X(x) Y(y)$ otrzymujemy $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$. Ponieważ $X(0) = X(a) = 0$, przeto $X = C \sin \lambda x$, $\lambda = n\pi/a$, gdzie $n = 1, 2, \dots$. Pisząc rozwiązanie ogólne równania $Y'' - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y = 0$



Rys. 362

w postaci

$$Y = a_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} y,$$

otrzymujemy rozwiązanie szczególne równania $\Delta u = 0$, spełniające warunek $u(0, y) = u(a, y) = 0$, w postaci

$$u_n = \left(a_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \right) \sinh \frac{n\pi}{a} x.$$

Podstawiając teraz $u = \sum u_n$ znajdujemy z warunków przy $y = 0$ i $y = b$, że

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \right) \sinh \frac{n\pi}{a} x,$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx.$$

Rozwiązując analogiczne zadanie dla $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ znajdziemy rozwiązanie ogólnego zadania, biorąc sumę dwóch znalezionych rozwiązań.

5. *Rozchodzenie się ciepła w pręcie jednorodnym*, którego jeden koniec jest w nieskończoności, a na drugim końcu jest utrzymywana stała temperatura. Trzeba znaleźć ograniczone rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdzie $0 \leq x < +\infty$, $t \geq 0$, przy warunkach $(u)_{t=0} = f(x)$, $(u)_{x=0} = 0$

(stałą temperaturę na końcu pręta przyjmujemy za równą zeru). Podstawiając do równania $u = X(x)T(t)$ otrzymujemy $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$.

Stąd $T(t) = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}$. Z warunku ograniczoneści rozwiązania wynika, że $\lambda^2 \geq 0$. Ponieważ $X(0) = 0$, przeto $X(x) = C \sin \lambda x$. A więc $u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$. We wzorze tym λ jest dowolną liczbą rzeczywistą i dlatego można rozważać rozwiązanie postaci

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x d\lambda.$$

Z warunku $(u)_{t=0} = f(x)$ znajdujemy $f(x) = \int_0^\infty C(\lambda) \lambda \sin \lambda x d\lambda$. Ostat-

nia równość będzie spełniona, gdy przyjmiemy $C(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \sin \lambda s ds$ (patrz str. 759). Podstawiając $C(\lambda)$ i $u(x, t)$ otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda s \sin \lambda x d\lambda \right) ds,$$

albo zastępując iloczyn sinusów połową różnicy cosinusów (patrz str. 236) i korzystając ze wzoru 5 na stronie 512:

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(s) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right] ds.$$

Metoda Riemanna rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego dla równania hiperbolicznego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F.$$

Znajdujemy funkcję Riemanna $v(x, y; \xi, \eta)$, gdzie ξ i η są uważane za parametry, spełniające równanie jednorodne sprzężone⁽¹⁾

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0$$

⁽¹⁾ Równaniem sprzężonym z równaniem liniowym

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

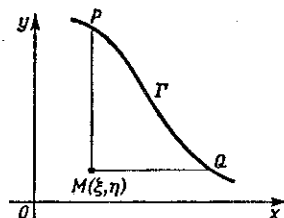
nazywamy równanie

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 (a_{ik}v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial(b_i v)}{\partial x_i} + cv = 0.$$

oraz warunki

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = \exp\left(\int_\xi^x b(s, \eta) ds\right), \quad v(\xi, y; \xi, \eta) = \exp\left(\int_\eta^y a(\xi, s) ds\right).$$

Funkcję $u(\xi, \eta)$, która spełnia równanie wyjściowe i na danej krzywej Γ (rys. 363, krzywa regularna Γ nie powinna mieć stycznych równoległych do osi współrzędnych, tzn. nie powinna być styczna do charakterystyk) wraz ze swoją pochodną w kierunku normalnej do tej krzywej (patrz str. 304) przybiera dane wartości, znajdujemy według wzoru



Rys. 363

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (uv)_P + \frac{1}{2} (uv)_Q -$$

$$- \int_{QP} \left[buv + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx -$$

$$- \left[auv + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dy + \iint_{PMQ} Fv dx dy.$$

We wzorze tym całkę krzywoliniową można obliczyć, gdyż według wartości na łuku funkcji i jej pochodnej (w kierunku nie stycznym) można znaleźć wartości obu pochodnych cząstkowych. Często przy formułowaniu zagadnienia Cauchy'ego zamiast pochodnej w kierunku normalnej daje się na krzywej wartości jednej z pochodnych cząstkowych funkcji poszukiwanej. W tym przypadku dogodnie jest korzystać z innej postaci wzoru Riemanna:

$$u(\xi, \eta) = (uv)_P - \int_{QP} \left(buv - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \left(auv + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \iint_{PMQ} Fv dx dy,$$

jeżeli na krzywej Γ dane są wartości $\partial u / \partial y$.

Przykład. Równanie rozchodzenia się prądu elektrycznego po przewodach (równanie telegraficzne) ma postać

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdzie $a > 0$, a b i c są stałe.

Za pomocą zamiany funkcji niewiadomej $u = ze^{-(b/a)t}$ równanie to sprowadzamy do postaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z,$$

gdzie $m^2 = 1/a$, $n^2 = (b^2 - ac)/a^2$, a przez zamianę zmiennych niezależnych $\xi = \frac{n}{m}(mt+x)$, $\eta = \frac{n}{m}(mt-x)$ sprowadzamy do postaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} z = 0.$$

Funkcja Riemanna $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ powinna spełniać to równanie i przybierać wartość jeden przy $\xi = \xi_0$ i przy $\eta = \eta_0$. Jeżeli będziemy szukali v w postaci $v = f(w)$, gdzie $w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, to $f(w)$ jest rozwiązaniem równania

$$w \frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} - \frac{1}{4} f = 0$$

z warunkiem początkowym $f(0) = 1$. Za pomocą zamiany $w = a^2$ równanie to sprowadza się do równania Bessela rzędu zerowego

$$\frac{d^2 f}{da^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{df}{da} - f = 0$$

(patrz str. 582), zatem $v = I_0(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)})$.

Jeżeli trzeba znaleźć rozwiązanie równania wyjściowego spełniające warunki początkowe $(z)_{t=0} = f(x)$, $(\partial z / \partial t)_{t=0} = g(x)$, to podstawiając do wzoru Riemanna znaną wartość v i wracając do dawnych zmiennych otrzymujemy

$$\begin{aligned} z(x, t) = & \frac{1}{2} [f(x-mt) + f(x+mt)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-mt}^{x+mt} \left(g(s) \frac{I_0[(n/m)\sqrt{m^2 t^2 - (s-x)^2}]}{m} - \right. \\ & \left. - f(s) \frac{nt I_1[(n/m)\sqrt{m^2 t^2 - (s-x)^2}]}{\sqrt{m^2 t^2 - (s-x)^2}} \right) ds. \end{aligned}$$

Metoda Greena rozwiązywania zagadnienia brzegowego dla równań eliptycznych jest w znacznym stopniu podobna do metody Riemanna rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego dla równań hiperbolicz-

nych. Jeżeli trzeba znaleźć funkcję $u(x, y)$ spełniającą w pewnym obszarze równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

i przybierającą na brzegu tego obszaru dane wartości, to najpierw znajdujemy funkcję Greena $G(x, y; \xi, \eta)$ spełniającą warunki następujące (ξ, η uważa się za parametry):

1° $G(x, y; \xi, \eta)$ wszędzie z wyjątkiem punktu $x = \xi, y = \eta$ spełnia równanie jednorodne sprzężone⁽¹⁾

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial(aG)}{\partial x} - \frac{\partial(bG)}{\partial y} + cG = 0;$$

2° funkcja $G(x, y; \xi, \eta)$ ma postać $U \ln(1/r) + V$, gdzie U i V są funkcjami ciągłymi w całym obszarze wraz z pochodnymi rzędu drugiego, przy czym U przybiera wartość jeden w punkcie $x = \xi, y = \eta$, a $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$;

3° na brzegu rozważanego obszaru funkcja $G(x, y; \xi, \eta)$ jest równa zeru.

Za pomocą funkcji Greena rozwiązanie zagadnienia brzegowego wyznaczone jest wzorem

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & \frac{1}{2\pi} \int_S u(x, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \eta) ds - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_D f(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy, \end{aligned}$$

gdzie D jest rozważanym obszarem, S jest jego brzegiem, na którym funkcja jest — według założenia — dana, $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną w kierunku normalnej skierowanej do wnętrza obszaru.

Warunek 3° zależy od rodzaju formułowania zagadnienia. Na przykład, jeżeli na brzegu obszaru zamiast wartości funkcji niewiadomej dane są wartości jej pochodnej w kierunku normalnej do brzegu obszaru, to z warunku 3° należy zażądać, żeby na brzegu obszaru stało się równe zeru wyrażenie

$$\frac{\partial G}{\partial n} - (a \cos \alpha + b \cos \beta) G,$$

⁽¹⁾ Patrz notkę na str. 608.

gdzie α i β oznaczają kąty utworzone z osiami współrzędnych przez wewnętrzną normalną do brzegu obszaru. Rozwiązanie w tym przypadku określone jest wzorem

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} G ds - \frac{1}{2\pi} \iint_D f G dx dy.$$

Metodę Greena stosować można także do równań liniowych z trzema zmiennymi niezależnymi, mających postać

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + eu = f.$$

Aby znaleźć rozwiązanie tego równania przybierające dane wartości na brzegu rozważanego obszaru, konstruujemy, podobnie jak wyżej, funkcję Greena — z tą zmianą, że teraz zależy ona od trzech parametrów ξ, η, ζ ; równanie sprzężone, które teraz spełnia funkcja Greena, ma postać

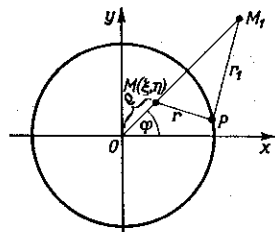
$$\Delta G - \frac{\partial(aG)}{\partial x} - \frac{\partial(bG)}{\partial y} - \frac{\partial(cG)}{\partial z} + eG = 0$$

i w warunku 2° żąda się, by funkcja G miała postać $U(1/r) + V$, gdzie $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Rozwiązanie zagadnienia dane jest przy tym wzorem

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S u \frac{\partial G}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_D f G dx dy dz.$$

Zarówno w metodzie Riemanna jak i w metodzie Greena trzeba najpierw znaleźć pewne specjalne rozwiązanie równania różniczkowego, za pomocą którego może być potem otrzymane rozwiązanie przy dowolnych warunkach brzegowych. Istotna różnica między funkcją Greena i funkcją Riemanna polega na tym, że gdy ostatnia zależy tylko od postaci lewej strony równania różniczkowego, to funkcja Greena zależy również od rozważanego obszaru. Znajdowanie funkcji Greena — nawet wtedy, gdy znane jest jej istnienie — praktycznie trudnym, w związku z czym metodę Greena stosuje się przeważnie w badaniach teoretycznych.

Przykłady. 1. Dla równania Laplace'a $\Delta u = 0$, w przypadku, gdy



Rys. 364

rozważanym obszarem jest koło, funkcja Greena dla zagadnienia Dirichleta może być łatwo skonstruowana. Jeżeli promień okręgu jest R i punkt M_1 jest symetryczny względem okręgu do punktu $M(\xi, \eta)$, tzn. punkty M i M_1 leżą na jednej półprostej wychodzącej ze środka okręgu O i $OM \cdot OM_1 = R^2$, to funkcja Greena wyraża się wzorem

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{r_1}{R},$$

gdzie $r = MP$, $r_1 = OM_1$ (rys. 364), a $P(x, y)$ jest dowolnym punktem okręgu.

Przytoczony powyżej wzór na rozwiązanie zagadnienia Dirichleta daje w tym przypadku po podstawieniu normalnej pochodnej funkcji Greena i po pewnych przeróbkach tzw. całkę Poissona

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\varphi - \varphi)} u(\varphi) d\varphi$$

(oznaczenia te same co poprzednio $\xi = \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$, $u(\varphi)$ jest daną na okręgu funkcją określającą wartości brzegowe niewiadomej funkcji u).

2. Analogicznie konstruuje się funkcję Greena dla zagadnienia Dirichleta w przypadku równania Laplace'a w przestrzeni, jeżeli rozważanym obszarem jest kula o promieniu R . Wtedy funkcja Greena ma postać

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1 \varrho},$$

gdzie $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ jest to odległość punktu (ξ, η, ζ) od środka kuli, r oznacza odległość punktu (x, y, z) od punktu (ξ, η, ζ) , r_1 odległość punktu (x, y, z) od punktu $(R\xi/\varrho, R\eta/\varrho, R\zeta/\varrho)$, symetrycznego do punktu (ξ, η, ζ) względem powierzchni kuli. Całka Poissona przybiera wtedy (przy tych samych oznaczeniach) postać

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{R^2 - \varrho^2}{Rr^3} u ds.$$

Metoda operatorowa. Podobnie jak przy rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych w rozwiązywaniu równań cząstkowych może być z powodzeniem zastosowana metoda operatorowa, oparta na przejściu od funkcji pierwotnej do jej transformaty (patrz str. 574). Przy tym funkcję poszukiwaną rozważa się jako funkcję jednej ze zmiennych, uważając pozostałe zmienne za parametry. Dla transformaty funkcji poszukiwanej otrzymuje się w ten sposób równanie róż-

niczowe (tzw. równanie pomocnicze) zawierające o jedną zmienną niezależną mniej niż równanie wyjściowe. W szczególności jeżeli równanie wyjściowe zawiera dwie zmienne niezależne, to dla transformaty funkcji poszukiwanej otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne. Jeżeli z otrzymanego równania można znaleźć transformatę funkcji poszukiwanej, to oryginał znajduje się bądź według tabeli transformat, bądź według wzoru na odwrócenie funkcji.

Przykłady. 1. Rozważmy rozchodzenie się ciepła w ciele stałym, z jednej strony ograniczonym ($x > 0$), na brzegu którego ($x = 0$) temperatura zmienia się według prawa $u = k \cos \omega t$ dla $t > 0$, a w chwili $t = 0$ temperatura ciała równa się zeru.

Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

w obszarze $x > 0, t > 0$, przy warunkach $(u)_{t=0, x>0} = 0, (u)_{x=0, t>0} = k \cos \omega t$. Równanie pomocnicze ma postać

$$a^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - p \bar{u} = 0, \quad x > 0$$

z warunkiem $\bar{u} = kp^2/(p^2 + \omega^2)$ przy $x = 0$. Rozwiązanie równania pomocniczego, ograniczone przy $x \rightarrow \infty$, jest

$$\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{x}{a} \sqrt{p}\right).$$

Korzystając ze wzoru 12 na stronie 579 i z twierdzenia Borela (patrz str. 575) dla przejścia od transformaty do funkcji otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos \omega \tau \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

2. Pręt o długości l jest w stanie spoczynku, a jego koniec $x = 0$ jest zamocowany. W chwili $t = 0$ do swobodnego końca pręta przyłożono siłę S (na jednostkę powierzchni).

Zadanie badania drgań takiego pręta sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

w obszarze $0 < x < l, t > 0$ przy warunkach początkowych $(u)_{t=0} = 0, (\partial u / \partial t)_{t=0} = 0$, gdzie $0 < x < l$, i warunki brzegowe $(u)_{x=0} = 0$,

$(\partial u / \partial x)_{x=l} = S/E$, gdzie E jest modulem Younga. Równanie pomocnicze ma postać

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} \bar{u} = 0$$

z warunkami $(\bar{u})_{x=0} = 0, (d\bar{u}/dx)_{x=l} = S/E$. Rozwiązaniem jest funkcja

$$\bar{u} = \frac{Sa}{Ep} \cdot \frac{\sinh(px/a)}{\cosh(pl/a)}.$$

Za pomocą rozkładu transformaty u na ułamki proste albo za pomocą wzoru na odwrócenie można stąd otrzymać

$$u(x, t) = \frac{Sx}{E} - \frac{8Sl}{\pi^2 E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

Metody przybliżone. Przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień związanych z całkowaniem równań różniczkowych cząstkowych znajdują szerokie zastosowanie rozmaite metody przybliżone, zarówno analityczne, dające przybliżone wyrażenie analityczne dla funkcji poszukiwanej, jak i numeryczne, za pomocą których można bezpośrednio otrzymać wartości przybliżone funkcji poszukiwanej dla pewnych określonych wartości argumentów.

Podstawa *metod numerycznych* polega na zastąpieniu pochodnych ilorazami przyrostów skończonych, w wyniku czego równanie różniczkowe przechodzi w układ równań algebraicznych, który w przypadku wyjściowego równania liniowego jest liniowym układem równań.

Poza tym wielkie rozpowszechnienie ma tzw. *metoda modelowania*, oparta na tym, że jedno i to samo równanie różniczkowe opisuje rozmaite zjawiska fizyczne. Dla rozwiązania danego równania buduje się model, w którym odbywa się jeden z procesów opisywanych danym równaniem, i wartości funkcji poszukiwanej otrzymuje się bezpośrednio na modelu. Zazwyczaj model zawiera elementy, które można zmieniać w pewnych granicach, i dlatego zachodzi możliwość rozwiązywania na modelu zadań dotyczących wielu równań różniczkowych.

CZĘŚĆ PIATA
DODATKOWE ROZDZIAŁY ANALIZY

I. LICZBY ZESPOLONE
I FUNKCJE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

1. Pojęcia podstawowe

Jednostka urojona. Formalnie określa się *jednostkę urojoną* i ⁽¹⁾ jako liczbę, której kwadrat równa się -1 . Wprowadzenie jednostki urojonej prowadzi do uogólnienia pojęcia liczby, mianowicie do *liczb zespolonych*, które odgrywają wielką rolę w algebrze i analizie, i znajdują konkretne interpretacje w pewnych zagadnieniach geometrycznych i fizycznych.

Liczby zespolone. *Postać ogólna* liczby zespolonej: $a = \alpha + \beta i$, gdzie α i β może przybierać dowolne wartości rzeczywiste. Liczbę α nazywamy *częścią rzeczywistą*, a liczbę β — *częścią urojoną* liczby zespolonej a . Oznaczenia

$$\alpha = \operatorname{re} a, \quad \beta = \operatorname{ima}^{(2)}.$$

Gdy $\beta = 0$, wtedy $a = \alpha$ (liczba rzeczywista jest szczególnym przypadkiem liczby zespolonej); gdy $\alpha = 0$, wtedy $a = \beta i$ (*liczba urojona*, szczególny przypadek liczby zespolonej).

Interpretacja geometryczna. Podobnie jak liczby rzeczywiste można przedstawić za pomocą punktów na prostej liczbowej, tak liczby zespolone przedstawia się za pomocą punktów na płaszczyźnie: liczbę

$$a = \alpha + \beta i$$

przedstawia punkt o odciętej α i rzędnej β (rys. 365). Liczby rzeczywiste są przedstawione za pomocą punktów na osi odciętych (oś rzeczywista), a liczby urojone za pomocą punktów na osi rzędnych (oś urojona).

Ponieważ każdy punkt płaszczyzny jest wyznaczony za pomocą wektora wodzącego tego punktu (patrz str. 647), przeto każdej liczbie

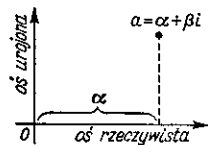
⁽¹⁾ i od łacińskiego słowa *imaginarius*: urojony. W elektrotechnice zamiast i używa się litery j (aby nie pomylić z oznaczeniem i dla natężenia prądu).

⁽²⁾ Skrót re od łacińskiego *realis*: rzeczywisty, skrót ima od łacińskiego słowa *imaginarius*: urojony.

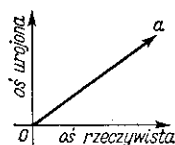
zespolonej odpowiada określony wektor leżący na płaszczyźnie i prowadzący z bieguna do punktu odpowiadającego danej liczbie zespolonej (rys. 366). A więc liczby zespolone mogą być przedstawione bądź za pomocą punktów, bądź za pomocą wektorów.

Równość liczb zespolonych. Równość dwóch liczb zespolonych definiuje się w sposób następujący: dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste są równe i ich części urojone są równe. W interpretacji geometrycznej dwie liczby zespolone są równe, jeżeli odpowiadające im punkty mają równe odcięte i równe rzędne. W przypadku przeciwnym liczby są nierówne; pojęcie „większa liczba” i „mniejsza liczba” w dziedzinie liczb zespolonych nie istnieje.

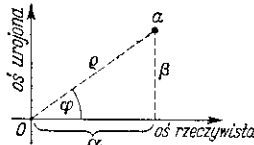
Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Wyrażenie $a = \alpha + \beta i$ nazywamy *postacią algebraiczną* zapisu liczby zespolonej;



Rys. 365



Rys. 366



Rys. 367

jeżeli zamiast współrzędnych kartezjańskich punktu przedstawiającego liczbę zespoloną wprowadzimy jego współrzędne biegunowe (patrz str. 256), to otrzymamy *postać trygonometryczną* zapisu liczby zespolonej (rys. 367):

$$a = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie ρ , czyli długość promienia wodzącego, nazywa się *modułem* albo *bezwzględną wartością* liczby zespolonej i oznacza się symbolem $|a|$, a φ , czyli kąt między osią biegunową a promieniem wodzącym, wyrażony w mierze łukowej, nazywa się *argumentem* liczby zespolonej i oznacza się symbolem $\arg a$:

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a.$$

Związek między ρ , φ i α , β jest taki sam jak między współrzędnymi biegunowymi i współrzędnymi kartezjańskimi punktu na płaszczyźnie (patrz str. 258), mianowicie w przypadku gdy $\rho \neq 0$, mamy związki

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \quad \beta = \rho \sin \varphi;$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

liczba 0 ma moduł $\rho = 0$, a argument jest nieoznaczony. Każda liczba zespolona różna od zera ma nieskończenie wiele argumentów różniących się o wielokrotność liczby 2π . *Wartością główną* argumentu liczby zespolonej nazywamy jej argument zawarty w przedziale $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Postać wykładnicza. Często stosuje się następującą postać zapisu liczby zespolonej a o module ρ i argumentie φ : $a = \rho e^{i\varphi}$ jest to tzw. *postać wykładnicza* liczby zespolonej (¹).

Przykład. Liczbę $1 + i\sqrt{3}$ można napisać w następujących postaciach:

$$1. 1 + i\sqrt{3} \quad (\text{postać algebraiczna}),$$

$$2. 2 \left(\cos \frac{1}{3} \pi + i \sin \frac{1}{3} \pi \right) \quad (\text{postać trygonometryczna}),$$

$$3. 2e^{(1/3)\pi i} \quad (\text{postać wykładnicza}).$$

Jeżeli nie będziemy się ograniczali do wartości głównej argumentu, to daną liczbę można też napisać w postaci

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left[\cos \left(\frac{1}{3} \pi + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{3} \pi + 2k\pi \right) \right] = 2e^{(\pi/3 + 2k\pi)i},$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$

Liczby zespolone sprzężone. Dwie liczby zespolone nazywamy *sprzężonymi* (oznaczamy a i $\bar{a}$), jeżeli mają części rzeczywiste równe, a części urojone różnią się tylko znakiem:

$$\operatorname{re} \bar{a} = \operatorname{re} a, \quad \operatorname{im} \bar{a} = -\operatorname{im} a.$$

W interpretacji geometrycznej punkty przedstawiające dwie liczby sprzężone są symetryczne względem osi odciętych. Moduły liczb zespolonych sprzężonych są równe, a suma ich argumentów jest wielokrotnością liczby 2π (w szczególności może być równa zeru):

$$a = \alpha + \beta i = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

$$\bar{a} = \alpha - \beta i = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}.$$

2. Działania algebraiczne na liczbach zespolonych

Dodawanie i odejmowanie. Dodawanie i odejmowanie dwóch liczb zespolonych określa się wzorami

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i,$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) - (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) i.$$

W interpretacji geometrycznej dla otrzymania wektora przedstawiającego sumę lub różnicę liczb zespolonych należy wykonać doda-

(¹) Dalsze szczegóły patrz na str. 624.

wanie lub odejmowanie wektorów przedstawiających dane liczby (rys. 368, patrz str. 648).

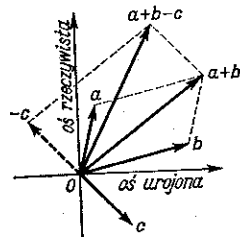
Mnożenie. Mnożenie dwóch liczb zespolonych określa się wzorem

$$(a_1 + \beta_1 i)(a_2 + \beta_2 i) = (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2) + (a_1 \beta_2 + \beta_1 a_2) i.$$

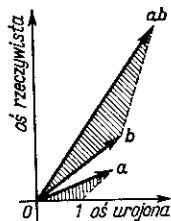
Jeżeli liczby dane są w postaci trygonometrycznej, to

$$[\varrho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [\varrho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

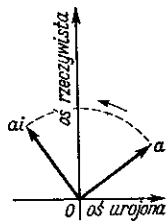
tzn. moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów, a za argument iloczynu można przyjąć sumę argumentów czynników.



Rys. 368



Rys. 369



Rys. 370

W interpretacji geometrycznej otrzymamy wektor przedstawiający iloczyn ab , gdy wektor a obrócimy w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara o kąt $\arg b$, a następnie pomnożymy jego długość przez $|b|$. Iloczyn ab można również otrzymać za pomocą konstrukcji trójkąta podobnego (rys. 369). W szczególności przy mnożeniu liczby a przez i wektor przedstawiający liczbę a obraca się w kierunku przeciwnym obiegowi wskazówek zegara o kąt $\frac{1}{2}\pi$, nie zmieniając swej długości (rys. 370).

Dzielenie. Dzielenie dwóch liczb zespolonych określa się jako działanie odwrotne do mnożenia. W postaci algebraicznej

$$\frac{a_1 + \beta_1 i}{a_2 + \beta_2 i} = \frac{a_1 a_2 + \beta_1 \beta_2}{a_2^2 + \beta_2^2} + \frac{a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2}{a_2^2 + \beta_2^2} i,$$

gdzie $a_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. W postaci trygonometrycznej

$$\frac{\varrho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\varrho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

gdzie $\varrho_2 \neq 0$, tzn. moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych równa się ilorazowi modułu dzielnej przez moduł dzielnika, a za argument ilorazu można przyjąć różnicę argumentów dzielnej i dzielnika. Dzielenie przez zero jest niemożliwe.

W interpretacji geometrycznej otrzymamy wektor przedstawiający iloraz a/b , gdy wektor a obrócimy w kierunku obiegu wskazówki zegara o kąt $\arg b$, a następnie podzielimy jego długość przez $|b|$. W szczególności punkt przedstawiający odwrotność $1/b$ liczby zespolonej l otrzymamy znajdując punkt symetryczny do punktu b względem okręgu o równaniu $\varrho = 1$, a następnie przekształcimy go symetrycznie względem osi biegunowej; czynności te odpowiadają wzorowi

$$\frac{1}{\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{\varrho} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Ogólna reguła wykonywania czterech działań arytmetycznych. Formalnie obliczenia na liczbach zespolonych $a + \beta i$ wykonuje się tak samo jak na zwykłych dwumianach, przy czym przyjmuje się $i^2 = -1$. Przy dzieleniu jednej liczby zespolonej przez drugą ruguje się urojoność w mianowniku (analogicznie do rugowania niewymierności w mianowniku) mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną z mianownikiem i korzystając ze wzoru $(a + \beta i)(a - \beta i) = a^2 + \beta^2$, co daje liczbę rzeczywistą.

Przykład. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i} + \frac{10+7i}{5i} &= \\ &= \frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i} + \frac{(10+7i)i}{5i \cdot i} = \\ &= \frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i} + \frac{7-10i}{5} = \\ &= \frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} + \frac{7-10i}{5} = \\ &= \frac{-2(-43-201i)}{10} + \frac{7-10i}{5} = \frac{1}{5}(50+191i) = 10+38,2i. \end{aligned}$$

Potęgowanie. Podnoszenie liczby zespolonej do potęgi n wykonuje się według wzoru de Moivre'a

$$[\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

tzn. podnosi się moduł do potęgi n , a argument mnoży się przez n .

Wzór de Moivre'a stosować można przy n całkowitym lub ułamkowym, dodatnim lub ujemnym. Przy n ułamkowym należy uwzględnić wieloznaczność wyniku (patrz dalej).

W szczególności mamy $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, i ogólnie: $i^{4n+k} = i^k$.

Pierwiastkowanie. Wyciąganie pierwiastka stopnia n , jako działanie odwrotne do potęgowania, wykonuje się według wzoru Moivre'a dla ułamkowego wykładnika potęgi, tzn. jeżeli $a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oraz n jest liczbą naturalną, to

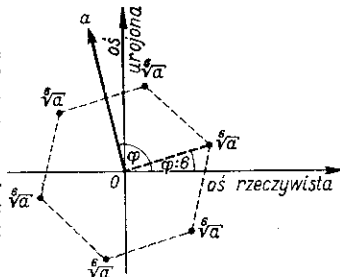
$$(*) \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Uwaga. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie liczb zespolonych oraz podnoszenie liczb zespolonych do potęgi o wykładniku całkowitym są działaniami jednoznaczными, natomiast wyciąganie pierwiastka stopnia n , gdzie n jest liczbą naturalną, daje zawsze n różnych wartości. Jeżeli bowiem we wzorze $(*)$ podstawiać będziemy $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, to $\arg \sqrt[n]{a}$ przybierać będzie wartości

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

różniące się o $2\pi/n$; przy dalszych wartościach k wartości $\arg \sqrt[n]{a}$ będą się okresowo powtarzały.

W interpretacji geometrycznej punkty przedstawiające $\sqrt[n]{a}$ są wierzchołkami n -kąta foremnego mającego środek w biegunie (na rysunku 371 pokazano 6 wartości $\sqrt[6]{a}$).



Rys. 371

Funkcje algebraiczne zmiennej zespolonej. Jeżeli wielkość z jest zmienną zespoloną (tzn. jest wielkością przybierającą dowolne wartości zespolone $z = x + yi$), to wynik wykonania na wielkości z (i ewentualnie na pewnych stałych) określonych działań algebraicznych jest *funkcją algebraiczną* $w = f(z)$ zmiennej zespolonej $z^{(1)}$.

Przykłady. Mamy

$$w = az + b, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = z^2, \quad w = \frac{z+i}{z-i}, \quad w = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

⁽¹⁾ Ogólniej: funkcja algebraiczna w może być określona w sposób uwikłany równaniem

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \dots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

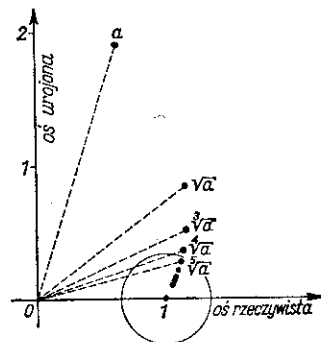
które nie zawsze może być rozwiązane w sposób jawny (w pierwiastkach) względem w .

3. Elementarne funkcje przestępne

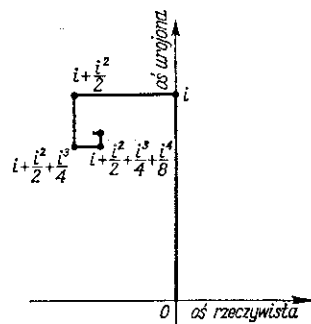
Szeregi o wyrazach zespolonych. Ciąg nieskończony liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ ma granicę z , co piszemy

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

jeżeli poczynając od pewnego n mamy $|z - z_n| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, tzn. jeżeli poczynając od pewnego n wszystkie punkty przedstawiające liczby $z_n, z_{n+1}, \dots$ leżą w kole o środku z i promieniu ε .



Rys. 372



Rys. 373

Przykład. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ przy dowolnym a (tu przez $\sqrt[n]{a}$ rozumiemy tę wartość pierwiastka, która ma najmniejszy argument nieujemny, patrz rys. 372).

Szereg nieskończony o wyrazach zespolonych

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny do liczby s (suma szeregu), jeżeli $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

W przypadku zbieżności szeregu koniec linii łamanej łączącej punkty przedstawiające $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ zbliża się nieograniczenie do punktu s .

Przykłady. 1. $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \frac{i^4}{4} + \dots$, 2. $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2^2} + \dots$

(rys. 373).

Szereg jest *zbieżny bezwzględnie*, jeżeli zbieżny jest szereg utworzony z modułów jego wyrazów:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

Szereg zbieżny nazywamy *zbieżnym warunkowo*, jeżeli szereg utworzony z modułów jego wyrazów jest rozbieżny.

W przykładzie 1 szereg jest zbieżny warunkowo, a w przykładzie 2 jest zbieżny bezwzględnie.

Szereg funkcyjny

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

określa pewną funkcję argumentu z dla tych wartości z , przy których szereg ten jest zbieżny.

Szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

gdzie a_i są stałymi zespolonymi, albo jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich wartości z (na całej płaszczyźnie), albo jest zbieżny bezwzględnie dla wartości leżących wewnątrz pewnego koła zbieżności o środku w początku współrzędnych, a na zewnątrz tego koła jest rozbieżny; promień tego koła nazywamy *promieniem zbieżności* tego szeregu ⁽¹⁾.

Na przykład dla szeregu $1 + z + z^2 + \dots$ promień zbieżności $R = 1$

Funkcja wykładnicza. Dla zmiennej zespolonej z przyjmujemy następujące określenie *funkcji wykładniczej*:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Szereg ten jest zbieżny na całej płaszczyźnie. Dla wykładnika zespolonego y mamy $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ (*wzór Eulera*); na przykład $e^{\pi i} = -1$. W przypadku ogólnym

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

tnz. $\operatorname{re} e^z = e^x \cos y$, $\operatorname{im} e^z = e^x \sin y$, $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Stąd wynika *postać wykładnicza* liczby zespolonej

$$a + bi = e^{\varphi i + 2k\pi i}.$$

Funkcja e^z jest okresowa, o okresie $2\pi i$; a więc $e^z = e^{z+2k\pi i}$,

Przykład. $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = -1$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

⁽¹⁾ Zbieżność szeregu dla punktów leżących na okręgu koła zbieżności wymaga w poszczególnym przypadku dodatkowego badania.

Uogólnione wzory Eulera

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-zi} = \cos z - i \sin z,$$

gdzie z jest dowolną liczbą zespoloną (o funkcjach trygonometrycznych patrz niżej).

Logarytm naturalny. Przyjmujemy określenie

$$w = \operatorname{Ln} z, \quad \text{jeżeli} \quad z = e^w.$$

Jeżeli $z = \rho e^{i\varphi}$, to

$$\operatorname{Ln} z = \ln \rho + (\varphi + 2k\pi)i,$$

tnz. $\operatorname{re}(\operatorname{Ln} z) = \ln \rho$, $\operatorname{im}(\operatorname{Ln} z) = \varphi + 2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Funkcja $\operatorname{Ln} z$ jest wieloznaczna. Jeżeli ograniczymy się do wartości głównej argumentu φ (patrz str. 617), to otrzymamy *wartość główną* logarytmu $\operatorname{Ln} z$, którą oznaczamy $\ln z$:

$$\ln z = \ln \rho + i\varphi, \quad \text{gdzie} \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Funkcja $\operatorname{Ln} z$ istnieje dla wszystkich liczb zespolonych z wyjątkiem zera.

Uogólnioną funkcję wykładniczą a^z , gdzie $a \neq 0$, określamy wzorem

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Funkcja a^z jest wieloznaczna; jej wartością główną jest $e^{z \ln a}$.

Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne. Dla zmiennej zespolonej z przyjmujemy następujące określenia funkcji trygonometrycznych:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2},$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Szeregi te są zbieżne na całej płaszczyźnie.

Funkcje $\sin z$ i $\cos z$ są okresowe o okresie 2π , funkcje $\sinh z$ i $\cosh z$ są okresowe o okresie $2\pi i$.

Oto wyrażenia funkcji zmiennej urojonej:

$$\sin yi = i \sinh y, \quad \cos yi = \cosh y, \quad \sinh yi = i \sin y, \quad \cosh yi = \cos y.$$

Wzory zachodzące dla funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych zmiennej rzeczywistej (str. 234-237 i 249-251) są prawdziwe również dla funkcji zmiennej zespolonej. W szczególności obliczanie $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ dla $z = x + yi$ odbywa się według wzorów na $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\sinh(a+b)$, $\cosh(a+b)$. Na przykład

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

zatem

$$\operatorname{re}(\cos z) = \cos(\operatorname{re} z) \cosh(\operatorname{im} z), \quad \operatorname{im}(\cos z) = -\sin(\operatorname{re} z) \sinh(\operatorname{im} z).$$

Funkcje $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tgh} z$, $\operatorname{ctgh} z$ określa się wzorami:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Odwrotne funkcje trygonometryczne i hiperboliczne, tzn. $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arctgh} z$ i $\operatorname{Arsinh} z$, $\operatorname{Arcosh} z$, $\operatorname{Artgh} z$, $\operatorname{Arctgh} z$, określa się podobnie jak dla zmiennej rzeczywistej, ale z uwzględnieniem wieloznaczności (*). Na przykład $w = \operatorname{Arcsin} z$, jeżeli $z = \sin w$.

Funkcje te są nieskończenie wielowartościowe i wyrażają się przez logarytmy za pomocą wzorów:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{Arsinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \quad \operatorname{Arcosh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Artgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{Arctgh} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1}, \quad \operatorname{Arctgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Wartości główne odwrotnych funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych wyrażają się takimi samymi wzorami przez funkcje Ln , tzn. przez wartość główną funkcji Ln :

$$\operatorname{arcsin} z = -i \operatorname{ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{arsinh} z = \operatorname{ln}(z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$\operatorname{arccos} z = -i \operatorname{ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \quad \operatorname{arcosh} z = \operatorname{ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{artgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{arctgh} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{ln} \frac{iz+1}{iz-1}, \quad \operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

(*) Patrz str. 242 i 252.

W poniższej tabeli przytoczone są części rzeczywiste, części urojone, moduły i argumenty funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych zmiennej zespolonej $z = x \pm iy$.

Wyrażenia dla $\operatorname{re} w$ oraz $\operatorname{im} w$

Funkcja $w = f(x \pm iy)$	Część rzeczywista $\operatorname{re} w$	Część urojona $\operatorname{im} w$
$\sin(x \pm iy)$	$\sin x \cosh y$	$\pm \cos x \sinh y$
$\cos(x \pm iy)$	$\cos x \cosh y$	$\mp \sin x \sinh y$
$\operatorname{tg}(x \pm iy)$	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y}$	$\pm \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$
$\sinh(x \pm iy)$	$\sinh x \cos y$	$\pm \cosh x \sin y$
$\cosh(x \pm iy)$	$\cosh x \cos y$	$\pm \sinh x \sin y$
$\operatorname{tgh}(x \pm iy)$	$\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$	$\pm \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$

Wyrażenia dla $\varrho = |w|$ oraz $\varphi = \arg w$

Funkcja $w = f(x \pm iy)$	Moduł $\varrho = w $	Argument $\varphi = \arg w$
$\sin(x \pm iy)$	$\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$	arg φ oblicza się według wzorów $\cos \varphi = \frac{\operatorname{re} w}{\varrho}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{im} w}{\varrho}$
$\cos(x \pm iy)$	$\sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$	
$\sinh(x \pm iy)$	$\sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}$	
$\cosh(x \pm iy)$	$\sqrt{\cosh^2 x + \cos^2 y}$	

4. Równania krzywych w postaci zespolonej

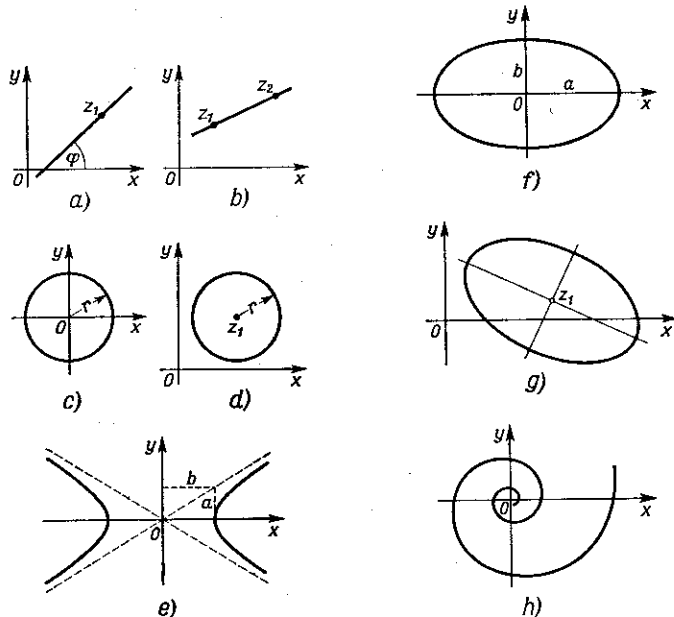
Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej. Funkcję $z = f(t)$, gdzie $z = x + iy$, a t jest zmienną rzeczywistą, przedstawiają punkty z tworzące przy zmianie t pewną krzywą. **Równania parametryczne** tej krzywej są $x = x(t)$, $y = y(t)$; **równanie w postaci zespolonej** $z = f(t)$.

Przykłady (krzywych danych w postaci zespolonej).

1. **Linia prosta** przechodząca przez punkt z_1 i tworząca z osią Ox kąt φ (rys. 374a) ma równanie $z = z_1 + te^{i\varphi}$, a przechodząca przez dwa punkty z_1 i z_2 (rys. 374b) ma równanie $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$.

2. Okrąg o promieniu r i środku w początku współrzędnych (rys. 374c) ma równanie $z = re^{it}$, a o promieniu r i środku w punkcie z_1 (rys. 374d) ma równanie $z = z_1 + re^{it}$.

3. Hiperbola w postaci kanonicznej (rys. 374e) ma równanie $z = a \cosh t + ib \sinh t$ albo $z = ce^t + \bar{c}e^{-t}$, gdzie c i $\bar{c}$ są sprzężzonymi liczbami zespolonymi, tzn. $c = \frac{1}{2}(a+bi)$, $\bar{c} = \frac{1}{2}(a-bi)$.



Rys. 374

4. Elipsa w postaci kanonicznej (rys. 374f) ma równanie $z = a \cos t + ib \sin t$ albo $z = ce^{it} + \bar{c}e^{-it}$, gdzie $c = \frac{1}{2}(a+ib)$, $\bar{c} = \frac{1}{2}(a-ib)$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a w postaci ogólnej (środek elipsy w punkcie z_1 , a osie obrócone o pewien kąt, rys. 374g) ma równanie $z = z_1 + ce^{it} + \bar{c}e^{-it}$, gdzie c i $\bar{c}$ są dowolnymi liczbami zespolonymi określającymi długości osi elipsy oraz kąt obrotu osi.

5. Spirala logarytmiczna (rys. 374h) ma równanie $z = ae^{bt}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami zespolonymi.

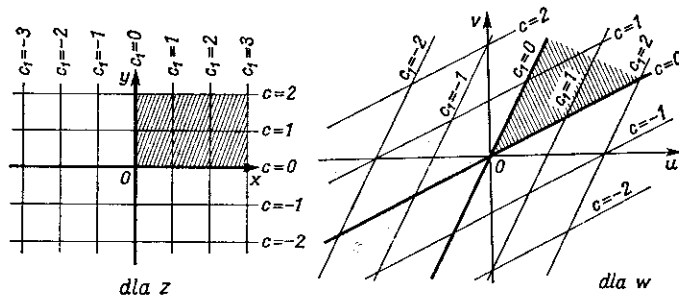
5. Funkcje zmiennej zespolonej

Odwzorowanie płaszczyzny. Funkcja $w = f(z)$, gdzie $z = x + yi$ i $w = u + vi$, jest określona, gdy znane są dwie funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Funkcja zmiennej zespolonej dokonuje odwzorowania płaszczyzny z na płaszczyznę w (¹); każdy punkt z_1 przechodzi w odpowiedni punkt w_1 , utwory geometryczne płaszczyzny z (krzywe, obszary) przy przejściu do płaszczyzny w przekształcają się w inne utwory. Krzywa $x = x(t)$, $y = y(t)$ przechodzi w krzywą $u = u(x(t), y(t))$, $v = v(x(t), y(t))$, gdzie t jest parametrem zmiennym.

Linie współrzędnych $y = c$ przechodzą w linie $u = u(x, c)$, $v = v(x, c)$, gdzie x jest parametrem zmiennym; linie współrzędnych $x = c_1$ przechodzą w linie $u = u(c_1, y)$, $v = v(c_1, y)$, gdzie y jest parametrem zmiennym.



Rys. 375

Przykład (odwzorowania). $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (rys. 375). Linie współrzędnych $y = c$ przechodzą w linie $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, czyli w proste $v = \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}c$; analogicznie, linie $x = c_1$ przechodzą w proste $v = 2u - 3c_1$; obszar zakreskowany na płaszczyźnie z przechodzi w obszar zakreskowany na płaszczyźnie w .

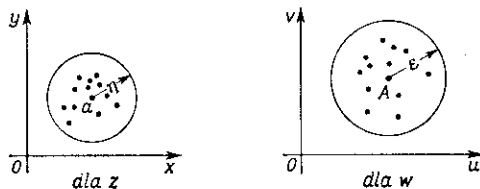
Granica, ciągłość, pochodna. Pojęcia granicy, ciągłości i pochodnej funkcji zmiennej zespolonej $w = f(z)$ określa się formalnie tak samo jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej (patrz str. 354, 362 i 388).

(¹) Jeżeli funkcja $w = f(z)$ jest wieloznaczna (np. $\sqrt[n]{z}$, $\text{Ln } z$, $\text{Arcsin } z$, $\text{Arctg } z$), to obszarem wartości w jest zbiór kilku lub nieskończenie wielu płaszczyzn nałożonych jedna na drugą, każdej wartości funkcji odpowiada punkt leżący na jednej z płaszczyzn. Płaszczyzny te są złączone między sobą wzdłuż pewnych linii i tworzą tzw. wielolistną powierzchnię Riemanna.

Liczbę zespoloną A nazywamy *granicą* funkcji $f(z)$ przy z dążącym do a i piszemy

$$(*) \quad A = \lim_{z \rightarrow a} f(z),$$

jeżeli dla dowolnie małej liczby dodatniej ε można wskazać taką dodatnią liczbę η , że dla dowolnej liczby zespolonej z spełniającej warunek $|a-z| < \eta$ (z wyjątkiem, być może, przypadku $z = a$), spełniony jest warunek $|A-f(z)| < \varepsilon$.



Rys. 376

Sens geometryczny (rys. 376): każdemu punktowi z (z wyjątkiem, być może, punktu a), leżącemu wewnątrz koła o promieniu η odpowiada w odwzorowaniu określonym funkcją $w = f(z)$ punkt w , leżący wewnątrz koła o środku A i promieniu ε .

Jeżeli funkcja $w = f(z)$ ma granicę przy $z \rightarrow a$ i przy tym

$$(**) \quad \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a),$$

tzn. jeżeli granica funkcji równa się wartości funkcji, którą funkcja ta przybiera przy granicznej wartości zmiennej niezależnej, to funkcję w nazywamy *ciągłą w punkcie a*. Określeniu temu jest równoważne określenie następujące: funkcja $w = f(z)$ jest *ciągła w punkcie z*, jeżeli z warunku $|Δz| \rightarrow 0$ wynika warunek

$$|Δw| = |f(z+Δz) - f(z)| \rightarrow 0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{Δz \rightarrow 0} Δw = 0,$$

co oznacza, że nieskończenie mały przyrostowi zmiennej niezależnej odpowiada nieskończenie mały przyrost funkcji.

Pochodną $w' = f'(z)$ danej funkcji $w = f(z)$ nazywamy funkcję określoną przy danej wartości z równością

$$(***) \quad w' = f'(z) = \lim_{Δz \rightarrow 0} \frac{f(z+Δz) - f(z)}{Δz}.$$

Funkcję, dla której istnieje w danym punkcie granica (***) nazywamy *różniczkowalną* lub *holomorficzną w punkcie a*. (Sens geometryczny

modułu i argumentu pochodnej funkcji zmiennej zespolonej patrz niżej str. 634).

Funkcje analityczne. Jeżeli funkcja $w = f(z)$ jest różniczkowalna we wszystkich punktach pewnego otoczenia punktu z_0 (tzn. we wszystkich punktach koła o środku z_0 i dowolnie małym promieniu), to funkcję tę nazywamy *analityczną w punkcie z_0* . Funkcję nazywamy *analityczną w obszarze spójnym* (patrz str. 369), jeżeli jest analityczna we wszystkich punktach tego obszaru.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym ⁽¹⁾ na to, aby funkcja $u(x, y) + i v(x, y) = f(x + yi)$ była analityczna, jest spełnienie tzw. warunków Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Przykład. Funkcja $w = z^2$, skąd $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, jest analityczna na całej płaszczyźnie, a funkcja $w = u + vi$, określona równaniami $u = 2x + y$, $v = x + 2y$, nie jest nigdzie analityczna.

W przypadku gdy funkcja $w = u(x, y) + i v(x, y)$ jest funkcją analityczną, funkcje u i v są *funkcjami harmonicznymi* zmiennych rzeczywistych x i y , tzn. spełniają równanie Laplace'a (patrz str. 682). Znając funkcję harmoniczną u można z dokładnością do stałego czynnika wyznaczyć *sprzężoną* z nią funkcję harmoniczną v z warunków Cauchy-Riemanna:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x), \quad \text{gdzie} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Analogicznie można według v wyznaczyć u .

Punkty, w których funkcja jest analityczna, nazywamy *regularnymi*. Jeżeli funkcja jest analityczna w pewnym obszarze, z wyjątkiem niektórych jego punktów, to takie punkty nazywamy *osobliwymi*. Przykłady i klasyfikację punktów osobliwych patrz na stronie 632. Funkcje elementarne (algebraiczne i przestępne, patrz str. 350) są analityczne na całej płaszczyźnie, z wyjątkiem niektórych odosobnionych punktów osobliwych.

Funkcje analityczne mają we wszystkich punktach regularnych pochodne dowolnego rzędu. Pochodne funkcji elementarnych zmiennej zespolonej oblicza się według tych samych reguł, co pochodne tych samych funkcji zmiennej rzeczywistej.

Moduł funkcji analitycznej. W różnych zagadnieniach teorii zastosowań funkcji zmiennej zespolonej istotną rolę odgrywa *wartość bezwzględna (moduł)* funkcji

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y).$$

⁽¹⁾ Aby warunek był dostateczny, potrzeba jeszcze, żeby pochodne cząstkowe występujące w warunku Cauchy-Riemanna były w rozważanym obszarze ciągłe.

Powierzchnię $|w| = \varphi(x, y)$, gdzie $|w|$ jest trzecią współrzędną wystawioną w punkcie $z = x + yi$, nazywamy *rzeźbą* funkcji.

Przykład. Dla funkcji $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ rzeźba ma równanie

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}.$$

Rzeźba ta pokazana jest na rysunku 377a. Rysunek 377b przedstawia rzeźbę funkcji $w = e^{1/z}$.

Ponieważ moduł funkcji jest wielkością nieujemną, więc jej rzeźba leży zawsze ponad płaszczyzną z , z wyjątkiem punktów, w których $|f(z)| = 0$, a więc $f(z) = 0$; takie wartości z , czyli pierwiastki równania $f(z) = 0$, nazywamy *zerami* funkcji $f(z)$.

Funkcję nazywamy *ograniczoną* w danym obszarze, jeżeli istnieje taka stała liczba dodatnia N , że $|f(z)| < N$ dla dowolnego punktu z tego obszaru, a jeżeli taka liczba N nie istnieje, to funkcję nazywamy *nieograniczoną*.

Podstawowe twierdzenia o module funkcji analitycznych.

1. Jeżeli $w = f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze domkniętym, to jej moduł osiąga maksimum na brzegu tego obszaru.

2. Jeżeli $w = f(z)$ jest funkcją analityczną na całej płaszczyźnie i ograniczoną, to funkcja ta jest stała: $f(z) = \text{const}$ (*twierdzenie Liouville'a*).

Punkty osobliwe. Jeżeli funkcja $w = f(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $z = a$ ⁽¹⁾ i ograniczona w tym otoczeniu, to mogą zachodzić dwa przypadki:

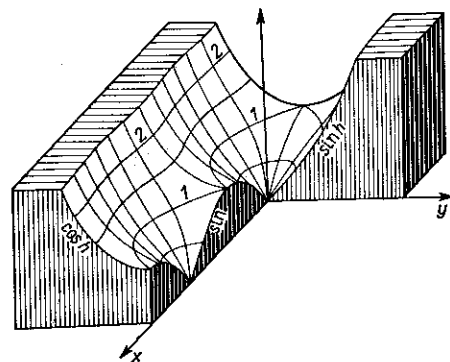
1° $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. W tym przypadku funkcja $f(z)$ jest analityczna również w punkcie a .

2° $f(a)$ ma inną wartość niż $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ albo funkcja $f(z)$ nie jest oznaczona w punkcie a . Taki punkt a jest punktem osobliwym; nazywamy go *punktem osobliwości usuwalnej*, gdyż zastępując w tym punkcie $f(a)$ liczbą $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ uczynimy funkcję $f(z)$ analityczną również w punkcie a ⁽²⁾.

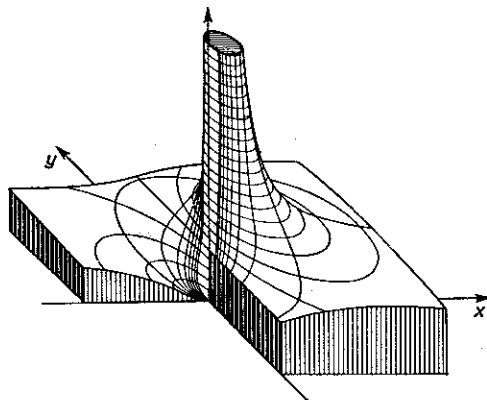
Jeżeli zaś funkcja $w = f(z)$, analityczna w otoczeniu punktu $z = a$, nie jest ograniczona w tym otoczeniu, to punkt a jest punktem osobliwym, i mogą przy tym zachodzić dwa przypadki:

⁽¹⁾ To znaczy wewnątrz dowolnie małego koła o środku w punkcie a , z wyjątkiem, być może, samego punktu a .

⁽²⁾ Przypadek ten jest analogiczny do przypadku punktu osobliwości usuwalnej funkcji zmiennej rzeczywistej (patrz str. 364).



a) $|\sin(x+yi)|$



b) $|e^{1/(x+yi)}|$

Rys. 377

1° $|f(z)| \rightarrow \infty$, gdy z dąży do punktu a po dowolnej drodze. Taki punkt nazywamy *biegunem*. W tym przypadku wprowadza się oznaczenia $f(a) = \infty$. O *rzędzie* bieguna patrz stronica 642 i 643.

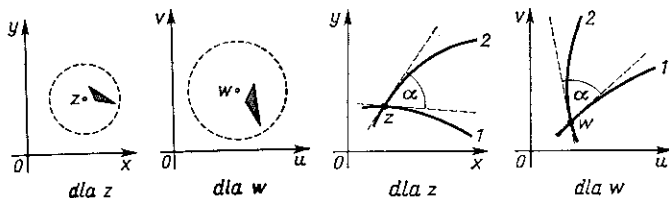
2° $|f(z)|$ przy zbliżaniu się do punktu a nie dąży do żadnej liczby: ciągi $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n), \dots$ mają różne granice w zależności od wy-

boru punktów z_n dążących do punktu a . Taki punkt a nazywamy **punktem istotnie osobliwym** (¹).

Przykład. Dla funkcji $w = 1/(z-a)$ punkt a jest biegunem, dla funkcji $w = e^{1/z}$ punkt 0 jest punktem istotnie osobliwym (patrz rys. 377b).

Odwzorowania konforemne. Odwzorowanie płaszczyzny realizowane przez funkcję analityczną ma następujące ważne własności w otoczeniu punktu z , dla którego $w' \neq 0$:

1° Wektory wszystkich kierunków wychodzące z punktu z , jeżeli długości tych wektorów są dostatecznie małe, mają długości pomnożone



Rys. 378

Rys. 379

po przekształceniu przez jedną i tę samą liczbę $|w'|$ z dokładnością do nieskończenie małych wyższego rzędu.

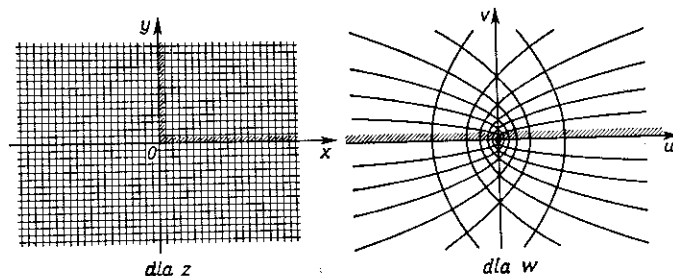
2° Wektory te zostają po przekształceniu obrócone o jeden i ten sam kąt $\arg w'$.

W ten sposób figury w dostatecznie małych obszarach przekształcają się na figury do siebie podobne — zachowują kształt (rys. 378). Takie przekształcenie nazywamy **konforemne**. Figury o rozmiarach skończonych ulegają zniekształceniom, ale kąty między dwiema krzywymi zachowują się (*konserwatywność kątów*, rys. 379). W szczególności linie współrzędnych $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ przekształcają się w dwie rodziny krzywych wzajemnie ortogonalnych. A więc za pomocą funkcji analitycznych można otrzymać nieskończenie wiele układów współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych. Odwrotnie, dla dowolnego przekształcenia konforemnego istnieje pewna siatka krzywych ortogonalnych, która przekształca się w siatkę prostokątną kartezjańską. W przykładzie $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (str. 629) ortogonalność nie była zachowana. W przykładzie $w = z^2$ ortogonalność jest zachowana, przy czym linie współrzędnych przechodzą w dwie rodziny parabol współ-

(¹) W tym przypadku można wskazać taki ciąg $\{z_n\}$, dążący do punktu a , że ciąg $\{f(z_n)\}$ będzie dążył do dowolnej, z góry danej liczby zespolonej (z wyłączeniem, co najwyżej, jednej liczby zespolonej).

ogniskowych (rys. 380). W punkcie $z = 0$ mamy $w' = 0$ i przekształcenie przestaje być konforemne. Pierwsza ćwiartka współrzędnych przechodzi w górną półpłaszczyznę.

Odwzorowania konforemne znajdują zastosowanie w elektrotechnice, w hydrodynamice, w aerodynamice i w innych zagadnieniach stosowanych.



Rys. 380

6. Najprostsze odwzorowania konforemne

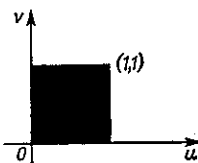
Podajemy tu najczęściej stosowane odwzorowania konforemne, przy czym podawany jest wykres tej siatki krzywych ortogonalnych (*siatka izotermiczna*), która przekształca się w kartezjańską siatkę prostokątną. Kreskowaniem zaznaczone zostały brzegi obszaru przechodzącego w górną półpłaszczyznę. Czarnym kolorem zaznaczono na rysunku 381 obszar przechodzący w kwadrat o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Funkcja liniowa $w = az + b$, gdzie $a = \rho e^{i\varphi}$ (rys. 382a). Przekształcenie może być rozłożone na trzy przekształcenia:

- 1° $t = e^{i\varphi} z$ (obróć płaszczyznę o kąt φ);
- 2° $s = \rho t$ (podobieństwo w stosunku ρ);
- 3° $w = s + b$ (przesunięcie równoległe o wektor b).

W wyniku figury na płaszczyźnie z przekształcają się w figury do nich podobne, przy czym obracają się o pewien kąt i przesuwają o pewien wektor. Punkty $z_1 = b/(1-a)$ i $z_2 = \infty$ przechodzą same w siebie.

Inwersja $w = 1/z$ (rys. 382b). Punkt o promieniu wodzącym ρ i argumentie φ przekształca się w punkt o promieniu wodzącym $1/\rho$



Rys. 381

i argumentu $-\varphi$. Przekształcenie składa się z inwersji względem okręgu $\varrho = 1$ (¹) i odbicia zwierciadlanego względem osi Ox . Koła przekształcają się w koła (przy czym prostą uważa się za szczególny przypadek koła, mianowicie o promieniu ∞). Punkt O przechodzi w ∞ i nawzajem (²); punkty 1 i -1 zostają na miejscu. W punkcie $z = 0$ przekształcenie nie jest konforemne.

Funkcja homograficzna $w = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad-bc \neq 0$

(rys. 382c). Przekształcenie to może być rozłożone na trzy przekształcenia:

1° $t = cz+d$ (funkcja liniowa);

2° $s = \frac{1}{t}$ (inwersja);

3° $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} s$ (funkcja liniowa).

W wyniku funkcja homograficzna przekształca okrąg na okrąg (przy czym linię prostą uważa się za szczególny przypadek okręgu). Dwa punkty spełniające równanie $z = (az+b)/(cz+d)$ pozostają na miejscu.

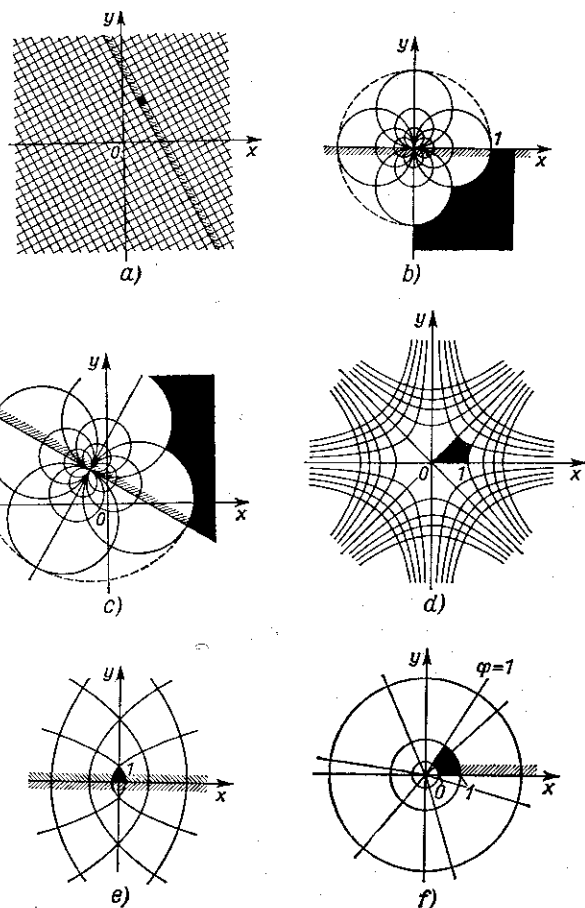
Funkcja kwadratowa $w = z^2$ (rys. 382d). Cała płaszczyzna z przechodzi w dwulistną płaszczyznę w . Siatka izotermiczna płaszczyzny z składa się z dwóch rodzin hiperbol $u = x^2 - y^2$ i $v = 2xy$. W punkcie $z = 0$ przekształcenie przestaje być konforemne. Punkty 0 i 1 zostają na miejscu.

Pierwiastek kwadratowy $w = \sqrt{z}$ (rys. 382e). Funkcja jest dwu-znaczna; cała płaszczyzna przechodzi: 1° w górną półpłaszczyznę; 2° w dolną półpłaszczyznę. Siatka izotermiczna płaszczyzny z składa się z dwóch rodzin parabol współogniskowych o ognisku w początku współrzędnych i osiach skierowanych w dodatnim i ujemnym kierunku osi Ox . W punkcie $z = 0$ przekształcenie przestaje być konforemne. Punkty 0 i 1 nie zmieniają miejsca.

Logarytm $w = \text{Ln} z$ (rys. 382f). Mamy $u = \ln \varrho$, $v = \varphi + 2k\pi$. Siatka izotermiczna składa się z okręgów $\ln \varrho = \text{const}$ i półprostych $\varphi = \text{const}$, czyli jest siatką współrzędnych biegunowych. Funkcja ta

(¹) Inwersją względem danego okręgu o promieniu R nazywamy przekształcenie punktów płaszczyzny, przy którym punkt M_1 leżący w odległości d_1 od środka okręgu przechodzi w punkt M_2 leżący na tym samym promieniu OM_1 albo na jego przedłużeniu w odległości $OM_2 = d_2 = R^2/d_1$; punkt M_2 przechodzi przy tym w punkt M_1 . Punkty leżące na zewnątrz okręgu przechodzą w punkty wewnętrzne i na odwrót.

(²) Przyjmuje się, że na płaszczyźnie zmiennej zespolonej istnieje jeden punkt w nieskończoności; oznacza się go symbolem ∞ . (Przypisek tłumacza.)

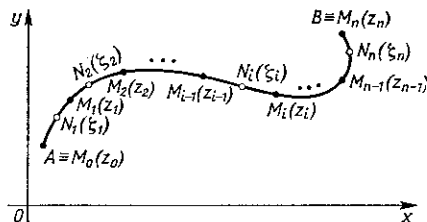


Rys. 382

jest nieskończenie wieloznaczna; dla głównej wartości logarytmu cała płaszczyzna przechodzi w pas ograniczony prostymi $v = -\pi$ i $v = \pi$, z włączeniem ostatniej prostej.

7. Całki w dziedzinie zmiennej zespolonej

Określenie. Całką funkcji zmiennej zespolonej $w = f(z)$ wziętą po łuku $\overline{AB}$ krzywej położonej na płaszczyźnie z (droga całkowania) nazywamy liczbę zespoloną, którą otrzymujemy w następujący sposób (rys. 383):



Rys. 383

1° łuk $\overline{AB}$ dzielimy na n części za pomocą dowolnych punktów pośrednich ⁽¹⁾

$$M_1(z_1), M_2(z_2), \dots, M_{n-1}(z_{n-1}),$$

przy czym dla jednolitości oznaczamy $A = M_0(z_0)$, $B = M_n(z_n)$;

2° wewnątrz (lub na końcu) każdego łuku $\overline{M_{i-1}M_i}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, wybieramy dowolny punkt $N_i(\zeta_i)$;

3° w punktach ζ_i obliczamy wartości funkcji $f(z)$ i mnożymy je przez odpowiednie różnice $z_i - z_{i-1}$ (przyrosty zmiennej niezależnej);

4° sumujemy n otrzymanych iloczynów $f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1})$;

5° znajdujemy granicę sumy

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}),$$

gdy $n \rightarrow \infty$ i wszystkie przyrosty zmiennej niezależnej dążą do zera.

Jeżeli ta granica istnieje i nie zależy od wyboru punktów M_i , a także od wyboru punktów N_i , to nazywamy ją *całką funkcji $f(z)$ po łuku $\overline{AB}$* i oznaczamy

$$(*) \quad \int_{\overline{AB}} f(z) dz.$$

⁽¹⁾ Liczba zespolona znajdująca się w nawiasie po nazwie punktu jest wartością zmienną.

Własności całki. Całka $(*)$ ma te same własności co całka krzywoliniowa drugiego typu (patrz str. 521): przy zmianie orientacji drogi całkowania całka zmienia znak; jeżeli drogę całkowania rozdzielimy na kilka części, to całka po całej tej drodze równa jest sumie całek po kolejnych częściach tej drogi.

Oszacowanie całki. Jeżeli długość łuku $\overline{AB}$ równa się s i dla każdej wartości z na tej drodze $|f(z)|$ nie przewyższa dodatniej liczby M , tzn. $|f(z)| \leq M$, to

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(z) dz \right| \leq Ms.$$

Obliczanie całki. Jeżeli funkcja podcałkowa $f(z)$ ma postać $u(x, y) + iv(x, y)$, a droga całkowania $\overline{AB}$ jest określona równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, przy czym wartości parametru t na początku i na końcu drogi całkowania są odpowiednio równe t_A i t_B , to całka $(*)$ wyraża się przez całki krzywoliniowe funkcji zmiennej rzeczywistej:

$$\int_{\overline{AB}} f(z) dz = \int_{\overline{AB}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\overline{AB}} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

które oblicza się według prawideł podanych na stronicach 520, 521.

Niezależność całki od drogi całkowania. Aby całka $(*)$ funkcji zmiennej zespolonej określonej w obszarze jednospójnym ⁽¹⁾ nie zależała od drogi łączącej dwa ustalone punkty $A(z_A)$ i $B(z_B)$, potrzeba i wystarcza, by funkcja była analityczna w tym obszarze, tzn. by spełniała warunki Cauchy-Riemanna (patrz str. 631). Jeśli przy spełnieniu tych warunków ustalimy punkt początkowy drogi całkowania $A_0(z_0)$, a punkt końcowy $M(z)$ drogi całkowania będzie zmienny, to całka $(*)$ będzie funkcją zmiennej z :

$$\int_{A_0M} f(z) dz = F(z),$$

przy czym $F'(z) = f(z)$; funkcję $F(z)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji analitycznej $f(z)$. Funkcja pierwotna zależy od wyboru punktu początkowego A_0 ; postać ogólna wszystkich funkcji pierwotnych $f(z)$ jest

$$F(z) + C = \int f(z) dz,$$

gdzie po prawej stronie jest *całka nieoznaczona*.

⁽¹⁾ O obszarze spójnym patrz str. 369. W przypadku obszaru wielospójnego warunek może okazać się niewystarczający.

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych zmiennej zespolonej oblicza się według tych samych reguł co całki tych samych funkcji zmiennej rzeczywistej.

Podstawowy wzór rachunku całkowego. Całka (*) funkcji analitycznej $f(z)$ równa się przyrostowi funkcji pierwotnej przy przejściu od początkowego punktu drogi całkowania do punktu końcowego:

$$\int_{AB} f(z) dz = F(z_B) - F(z_A).$$

Całka po konturze. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w całym obszarze jednopórnym, którego brzegiem jest kontur C , to całka tej funkcji po konturze C jest równa zero (*twierdzenie Cauchy'ego*); jeżeli zaś obszar ten zawiera punkty osobliwe, to wartość całki oblicza się według twierdzenia o residuach (patrz str. 643).

W szczególności dla funkcji $f(z) = 1/(z-a)$, mającej jedyny punkt osobliwy $z = a$, całka po konturze C zawierającym wewnątrz punkt a (rys. 384) równa się

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Wzory całkowe Cauchy'ego. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w pewnym obszarze jednopórnym, którego brzegiem jest kontur C , to jej wartość w dowolnym punkcie z tego obszaru, a także wartości jej pochodnych dowolnego rzędu, wyrażają się przez wartości tej funkcji na konturze C (rys. 385) za pomocą następujących wzorów *Cauchy'ego*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

$$(**) \quad f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta,$$

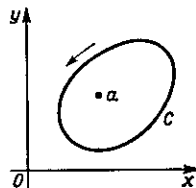
.....

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

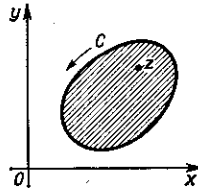
gdzie ζ jest zmienną całkowania, a całki bierze się po konturze C w kierunku dodatnim.

Jeżeli zaś funkcja $f(z)$ jest analityczna w całym obszarze płaszczyzny leżącym na zewnątrz konturu C , to wartości funkcji $f(z)$ i jej pochodnych w dowolnym punkcie z tego obszaru (rys. 386) wyraża się tymi samymi wzorami (**), ale całki po konturze C bierze się w kierunku ujemnym (tzn. w kierunku obiegu wskazówki zegara).

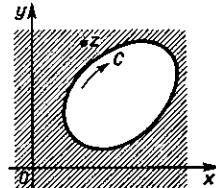
Wzory całkowe Cauchy'ego umożliwiają znalezienie wartości niektórych całek oznaczonych.



Rys. 384



Rys. 385



Rys. 386

Przykład. Przyjmując $f(z) = e^z$ (jest to funkcja analityczna na całej płaszczyźnie), a za drogę całkowania C przyjmując okrąg koła o środku z i promieniu r (okrąg o równaniu $\zeta = z + re^{i\varphi}$, patrz str. 628), otrzymujemy na podstawie ostatniego ze wzorów (**) równość

$$\begin{aligned} e^z &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{z+re^{i\varphi}}}{r^{n+1} e^{i\varphi(n+1)}} i r e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{z+r\cos\varphi+i(r\sin\varphi-n\varphi)} d\varphi, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r^n}{n!} &= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi+i(r\sin\varphi-n\varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi} \cos(r\sin\varphi-n\varphi) d\varphi + i \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi} \sin(r\sin\varphi-n\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Ponieważ część urojona jest równa zero, otrzymujemy wartość całki

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi} \cos(r\sin\varphi-n\varphi) d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

8. Rozwinięcie funkcji analitycznych w szeregi potęgowe

Szereg Taylora. Każda funkcja $f(z)$, analityczna wewnątrz pewnego koła o środku a , może być w każdym punkcie tego koła w sposób jednoznaczny przedstawiona w postaci szeregu potęgowego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

gdzie współczynnikami c_n rozwinięcia są liczby zespolone określone wzorem

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

W ten sposób otrzymujemy szereg Taylora:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

Rozwinięcia funkcji e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ w szeregi potęgowe patrz stronie 624-626.

Szereg Laurenta. Każda funkcja $f(z)$, analityczna wewnątrz pewnego pierścienia między dwoma okręgami o wspólnym środku a ⁽¹⁾ może być w sposób jednoznaczny przedstawiona w postaci szeregu potęgowego, tzw. szeregu Laurenta:

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \\ = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots + \\ + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \dots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \dots,$$

gdzie współczynnikami c_n rozwinięcia są liczby zespolone wyrażone wzorem

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} (\zeta-a)^{-n-1} f(\zeta) d\zeta,$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a $\tilde{C}$ jest pewnym konturem leżącym wewnątrz pierścienia i obieganym w kierunku dodatnim.

Punkty osobliwe krzywej analitycznej. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu a ⁽²⁾, to charakter punktu a określa się na podstawie wyglądu rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta $(*)$ w otoczeniu tego punktu w sposób następujący:

⁽¹⁾ Promień wewnętrznego koła może być równy zeru i wtedy pierścień staje się kołem z wyjątkiem środkiem.

⁽²⁾ Patrz notka ⁽¹⁾ na str. 632.

1° Jeżeli szereg $(*)$ nie zawiera potęg $z-a$ o wykładnikach ujemnych (tzn. jeżeli dla $n < 0$ jest $c_n = 0$), to szereg Laurenta staje się szeregiem Taylora ⁽¹⁾ i funkcja $f(z)$ jest analityczna również w punkcie a , jeżeli $f(a) = c_0$ albo też a jest punktem osobliwości usuwalnej.

2° Jeżeli szereg $(*)$ zawiera skończoną ilość potęg $z-a$ o wykładnikach ujemnych, tzn. jeżeli istnieje taki wskaźnik $-m < 0$, że $c_{-m} \neq 0$, a dla $n < -m$ wszystkie c_n są równe zeru, to punkt a nazywamy *biegunem* (patrz str. 633) m -krotnym funkcji $f(z)$ albo *biegunem rzędu m* .

3° Jeżeli szereg $(*)$ zawiera nieskończenie wiele potęg $z-a$ o wykładnikach ujemnych, to punkt a jest *punktem istotnie osobliwym* (patrz str. 634).

Residua. W przypadkach 2° i 3° współczynnik c_{-1} przy $(z-a)^{-1}$ w szeregu Laurenta nazywamy *residuum* funkcji $f(z)$ w punkcie $z = a$:

$$(1) \quad \text{res } f(z)_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} f(\zeta) d\zeta.$$

Z określenia (1) wynika następujące twierdzenie, które umożliwia obliczanie całek po konturze zawierającym wewnątrz punkty osobliwe (str. 640):

Twierdzenie o residuach. Całka po konturze C w kierunku dodatnim

$$\int_C f(z) dz$$

funkcji $f(z)$ analitycznej w całym obszarze jednoczołnym, którego brzegiem jest dany kontur, z wyjątkiem skończonej ilości punktów $a_1, a_2, \dots, a_k$ (rys. 387) równa się sumie residuów funkcji $f(z)$ w powyższych punktach pomnożonej przez $2\pi i$:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [\text{res } f(z)_{z=a_1} + \text{res } f(z)_{z=a_2} + \dots + \text{res } f(z)_{z=a_k}].$$

Residuum funkcji w biegunie m -krotnym może być obliczone według wzoru

$$(2) \quad \text{res } f(z)_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \Big|_{z=a}.$$

⁽¹⁾ W tym przypadku współczynniki szeregu, na podstawie wzorów Cauchy'ego, na str. 640, są równe

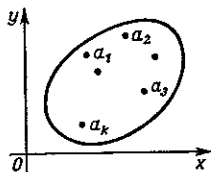
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} (\zeta-a)^{-n-1} f(\zeta) d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$

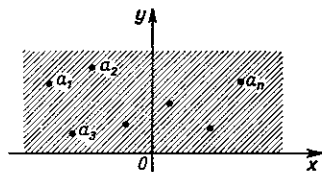
Jeżeli $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, gdzie $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ są funkcjami analitycznymi w punkcie $z = a$ i a jest pierwiastkiem jednokrotnym (patrz str. 174) równania $\psi(z) = 0$, ale nie jest pierwiastkiem równania $\varphi(z) = 0$ (tzn. $\psi(a) = 0$, ale $\varphi(a) \neq 0$ i $\varphi'(a) \neq 0$), to punkt $z = a$ jest biegunem jednokrotnym funkcji $f(z)$ i wzór (2) daje

$$\operatorname{res} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right]_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Jeżeli a jest m -krotnym pierwiastkiem równania $\psi(z) = 0$, ale nie jest pierwiastkiem równania $\varphi(z) = 0$ (tzn. jeżeli $\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(m-1)}(a) = 0$, ale $\psi^{(m)}(a) \neq 0$ i $\varphi(a) \neq 0$), to punkt $z = a$ jest biegunem m -krotnym funkcji $f(z)$.



Rys. 387



Rys. 388

Zastosowanie do obliczania całek oznaczonych. Teoria residuów umożliwia znalezienie pewnych całek oznaczonych funkcji zmiennej rzeczywistej:

Jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną w całej górnej półpłaszczyźnie z wyjątkiem osi rzeczywistej, z wyjątkiem skończonej ilości punktów osobliwych $a_1, a_2, \dots, a_n$ leżących powyżej osi rzeczywistej (rys. 388), i liczba zero jest m -krotnym pierwiastkiem równania $f(1/z) = 0$, gdzie $m \geq 2$ ⁽¹⁾, to

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z)_{z=a_i}.$$

Przykład. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Równanie

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(1+1/x^2)^3} = \frac{x^6}{(x^2+1)^3} = 0$$

ma pierwiastek sześciokrotny $x = 0$. W górnej półpłaszczyźnie funkcja $w = 1/(1+z^2)^3$ ma jedyny punkt osobliwy $z = i$, który jest jej biegunem trzykrotnym ⁽¹⁾. Według wzoru (2)

$$\operatorname{res} \frac{1}{(1+z^2)^3} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3} \right]_{z=i}.$$

Obliczając $\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z-i}{1+z^2} \right)^3 = \frac{d^2}{dz^2} (z+i)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$ otrzymujemy

$$\operatorname{res} \frac{1}{(1+z^2)^3} \Big|_{z=i} = 6(z+i)^{-5} \Big|_{z=i} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16} i$$

według wzoru (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(-\frac{3}{16} i \right) = \frac{3}{8} \pi.$$

⁽¹⁾ Równanie $(1+z^2)^3 = 0$ ma dwa pierwiastki trzykrotne: i oraz $-i$, z których tylko i leży w górnej półpłaszczyźnie.

⁽¹⁾ Patrz str. 174.

II. RACHUNEK WEKTOROWY

A. ALGEBRA WEKTOROWA I FUNKCJE WEKTOROWE SKALARA

1. Pojęcia podstawowe

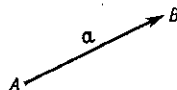
Wielkości skalarne i wektorowe. Wielkości, których wartości mogą być wyrażone liczbami dodatnimi, ujemnymi oraz zerem (*skalarami*) nazywamy *wielkościami skalarnymi* (np. masa, temperatura, praca), a wielkości, których wartości określa się przez podanie ich *wymiaru* oraz *kierunku w przestrzeni* nazywamy *wielkościami wektorowymi* (np. siła, prędkość, przyspieszenie, natężenie pola elektrycznego lub magnetycznego) i przedstawiamy za pomocą wektorów.

Wektor. Wektor (rys. 389) jest to odcinek mający określoną długość i określony kierunek. Wektor mający początek w punkcie A i koniec w punkcie B oznacza się przez $\overline{AB}$. Wektory oznacza się także małą literą półgrubą $\mathbf{a}$, lub małą literą z kreską na górze $\vec{a}$. Długość wektora $\overline{AB}$, $\mathbf{a}$ lub $\vec{a}$ oznacza się odpowiednio: AB , $|\mathbf{a}|$ lub a . Wektor zerowy $\mathbf{0}$ jest to wektor, którego koniec pokrywa się z początkiem; jego długość jest równa zeru, a kierunek jest nieoznaczony. Dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ uważa się za *równe*, jeżeli linie działania tych wektorów są równoległe, a wektory są jednakowo zorientowane i mają jednakowe długości⁽¹⁾.

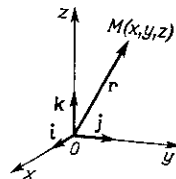
Wektory kolinearne są to wektory, których linie działania są równoległe do jednej i tej samej prostej (orientacje wektorów mogą być zgodne lub niezgodne). **Wektory komplanarne** są to wektory, których linie działania są równoległe do jednej i tej samej płaszczyzny. **Wektory przeciwne** są to wektory mające jednakowe długości a kierunki przeciwne: $\overline{AB} = \mathbf{a}$ i $\overline{BA} = -\mathbf{a}$. **Wektorem jednostkowym** na-

⁽¹⁾ Zgodnie z powyższym określeniem wektor nie ulegnie zmianie, gdy jego początek zostanie przeniesiony do dowolnego punktu przestrzeni, pod warunkiem, że linia działania wektora będzie równoległa do poprzedniej (albo ta sama), a orientacja i długość wektora będą takie same. Takie wektory nazywamy *wektorami swobodnymi*. W niektórych zagadnieniach mechaniki rozważa się wektory przyłączone początkiem do określonych punktów przestrzeni (układy wektorów *przyczepionych*), bądź też wektory, które można przesuwać po linii ich działania (układy wektorów *ślizgających*).

zywamy wektor o długości 1; wektor jednostkowy, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem wektora $\mathbf{a}$, oznaczamy $\mathbf{a}^0$ i nazywamy *wersorem* tego kierunku. Wektor $\mathbf{a}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0$, gdzie a oznacza długość wektora $\mathbf{a}$. Wersory mające kierunki osi współrzędnych prostokątnych Ox , Oy , Oz i zgodnie z nimi zorientowane⁽¹⁾ oznaczają się symbolami $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (rys. 390)

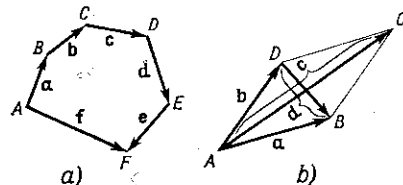


Rys. 389



Rys. 390

Wektor wodzący punktu. Położenie punktu M (rys. 390) można wyznaczyć za pomocą wektora $\overline{OM}$, którego początkiem jest początek współrzędnych O , a końcem punkt M , wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu M i oznaczamy symbolem $\mathbf{r}$. W tym przypadku punkt O nosi nazwę *bieguna*.



Rys. 391

Kombinacje liniowe wektorów. Sumą kilku wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{e}$ nazywamy wektor $\mathbf{f} = \overline{AF}$ zamykający linię łamaną $ABC \dots EF$ utworzoną z kolejnych wektorów, równych wektorom składowym (rys. 391a):

$$\overline{AB} = \mathbf{a}, \quad \overline{BC} = \mathbf{b}, \quad \dots, \quad \overline{EF} = \mathbf{e};$$

wektor $\overline{AF}$ nazywamy też *wypadkową* danych wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{e}$.

⁽¹⁾ W rozdziale niniejszym przyjęto prawoskrętny układ osi współrzędnych (patrz str. 279).

Sumą dwóch wektorów $\overline{AB} = \mathbf{a}$ i $\overline{AD} = \mathbf{b}$ (rys. 391b) jest wektor $\overline{AC} = \mathbf{c}$ stanowiący przekątną równoległoboku $ABCD$, wychodzącą z punktu A .

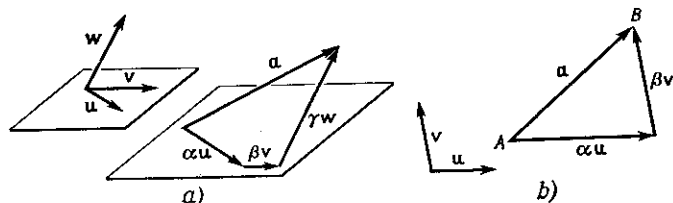
Dla sumy wektorów zachodzą następujące wzory:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||.$$

Różnicą $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy sumę wektorów $\mathbf{a}$ i $(-\mathbf{b})$; jest to przekątna DB na rysunku 391b: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$. Własności różnicy wektorów: $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (wektor zerowy), $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$.

Iloczynem wektora $\mathbf{a}$ przez skalar α (oznaczamy $\alpha\mathbf{a}$ lub $\mathbf{a}\alpha$) nazywamy wektor $\mathbf{b}$, kolinearny z wektorem $\mathbf{a}$ i mający długość $|\mathbf{b}| =$



Rys. 392

$= |\alpha| |\mathbf{a}|$ oraz orientację zgodną z wektorem $\mathbf{a}$, gdy $\alpha > 0$, a niezgodną, gdy $\alpha < 0$. Własności takiego iloczynu:

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha, \quad \alpha(\beta\mathbf{a}) = \alpha\beta\mathbf{a}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \quad \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Kombinacja liniowa wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{d}$ o odpowiednich współczynnikach skalarnych $\alpha, \beta, \dots, \delta$ jest to wektor

$$(\star) \quad \mathbf{l} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \dots + \delta\mathbf{d}.$$

Dowolny wektor $\mathbf{a}$ można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy

$$(\star\star) \quad \mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w},$$

gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ są danymi wektorami niekomplanarnymi (rys. 392a); składnik $\alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}, \gamma\mathbf{w}$ nazywamy *składowymi* wektora $\mathbf{a}$ wzdłuż kierunków $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, a współczynniki α, β, γ nazywamy *współrzędnymi* wektora $\mathbf{a}$ w odniesieniu do układu wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Każdy wektor $\mathbf{a}$ równoległy do danej płaszczyzny można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ są danymi wektorami niekolinearnymi, równoległymi do danej płaszczyzny (rys. 392b).

Współrzędne wektora.

Współrzędne kartezjańskie prostokątne. Zgodnie ze wzorem $(\star\star)$ każdy wektor $\overline{AB} = \mathbf{a}$ w przestrzeni może być w sposób jednoznaczny rozłożony na sumę wektorów równoległych do wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (patrz str. 648):

$$(1) \quad \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k};$$

skalary a_x, a_y, a_z nazywamy *współrzędnymi kartezjańskimi prostokątnymi* wektora $\mathbf{a}$ w układzie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i oznaczamy w sposób następujący:

$$(2) \quad \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z);$$

sposoby zapisów (2) i (1) są równoważne. Współrzędne prostokątne wektora są miarami rzutów tego wektora na osie współrzędnych Ox, Oy, Oz (rys. 393). Przy równoległym przesunięciu wektora jego współrzędne pozostają te same.

Współrzędne kombinacji liniowej kilku wektorów są równe odpowiednim kombinacjom liniowym współrzędnych tych wektorów: z równości wektorowej $(\star)$ wynikają trzy równości skalarne

$$(3) \quad \begin{aligned} k_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \dots + \delta d_x, \\ k_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \dots + \delta d_y, \\ k_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \dots + \delta d_z. \end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnych sumy lub różnicy wektorów $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ mamy

$$(4) \quad c_x = a_x \pm b_x, \quad c_y = a_y \pm b_y, \quad c_z = a_z \pm b_z.$$

Współrzędne prostokątne wektora wodzącego $\mathbf{r}$ punktu $M(x, y, z)$ są równe odpowiednim współrzędnym tego punktu:

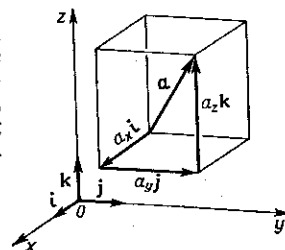
$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Współrzędne afiniczne. Uogólnieniem współrzędnych prostokątnych wektora są jego *współrzędne afiniczne* w układzie wersorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; współrzędnymi tymi są współczynniki a^1, a^2, a^3 $(^1)$ w rozkładzie wektora $\mathbf{a}$ według kierunków trzech niekomplanarnych wersorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$(1') \quad \mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3,$$

lub w zapisie równoważnym:

$$(2') \quad \mathbf{a}(a^1, a^2, a^3).$$



Rys. 393

$(^1)$ Nie należy górnych wskaźników mieszać z wykładnikami potęg. Takie oznaczenie współczynników jest dlatego dogodne, że skalary te są kontrawariantnymi współczynnikami wektora $\mathbf{a}$ (patrz str. 654).

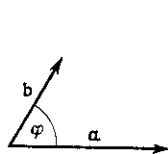
Wzory (1') i (2') przechodzą we wzory (1) i (2), gdy przyjmiemy $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

Analogicznie dla współrzędnych kombinacji liniowej wektorów (*) oraz sumy i różnicy wektorów (4) zachodzą wzory

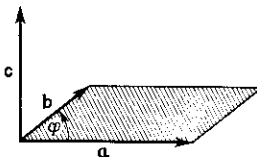
$$\begin{aligned} (3') \quad k^1 &= aa^1 + \beta b^1 + \dots + \delta d^1, \\ k^2 &= aa^2 + \beta b^2 + \dots + \delta d^2, \\ k^3 &= aa^3 + \beta b^3 + \dots + \delta d^3, \\ c^1 &= a^1 \pm b^1, \quad c^2 = a^2 \pm b^2, \quad c^3 = a^3 \pm b^3. \end{aligned}$$

2. Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy wektorów

Określenia. Iloczynem skalarnym ab wektorów a i b nazywamy skalar, określony równością $ab = ab \cos \varphi$, gdzie φ jest kątem między wektorami a i b , sprowadzonymi do wspólnego początku (rys. 394).



Rys. 394



Rys. 395

Iloczynem wektorowym $a \times b$ wektora a przez wektor b nazywamy wektor c , którego długość wynosi $ab \sin \varphi$, czyli równa się polu równoległoboku zbudowanego na wektorach a i b jako na bokach, a kierunek jest prostopadły do obu wektorów a i b , przy czym wektor c jest tak zorientowany, żeby wektory a, b, c stanowiły układ prawoskrętny. Mówimy, że trzy wektory a, b, c wychodzące ze wspólnego początku O stanowią *układ prawoskrętny*, jeżeli obserwator ustawiony wzdłuż wektora c głową w kierunku tego wektora widzi najkrótszy obrót wektora a do położenia wektora b w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówek zegara, czyli od prawej ręki ku lewej (rys. 395).

Własności iloczynów wektorów (1).

1. $ab = ba$ (prawo przemienności dla iloczynu skalarnego), ale $a \times b = -b \times a$ (przy zmianie kolejności czynników iloczyn wektorowy zmienia znak na przeciwny).

2. $a(ab) = (aa)b$ i $a(a \times b) = (aa) \times b$ (prawo łączności przy mnożeniu iloczynu skalarnego lub wektorowego przez skalar).

3. Iloczyn $a(bc)$ i $(ab)c$ są na ogół różne, a także iloczyny $a \times (b \times c)$ i $(a \times b) \times c$ są różne (prawo łączności wtedy nie zachodzi).

4. $a(b+c) = ab+ac$ i $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ (prawo rozdzielności).

(1) Będziemy tu mówili o wektorach niezerowych.

5. $ab = 0$, jeżeli $a \perp b$ (warunek prostopadłości wektorów).

6. $a \times b = 0$, jeżeli $a \parallel b$ (warunek kolinearności wektorów).

7. $aa = a^2 = a^2$, ale $a \times a = 0$.

Kombinacje liniowe wektorów można mnożyć skalarnie lub wektorowo jak zwykle wielomiany liniowe, z tym, że w przypadku przedstawienia czynników iloczynu wektorowego (na przykład przy redukcji wyrazów podobnych) należy zmienić znak iloczynu na przeciwny.

Przykłady.

$$\begin{aligned} 1. (3a+5b-2c)(a-2b-4c) &= \\ &= 3a^2+5ba-2ca-6ab-10b^2+4cb-12ac-20bc+8c^2 = \\ &= 3a^2-10b^2+8c^2-ab-14ac-16bc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (3a+5b-2c) \times (a-2b-4c) &= 3a \times a + 5b \times a - 2c \times a - \\ &- 6a \times b - 10b \times b + 4c \times b - 12a \times c - 20b \times c + 8c \times c = \\ &= 0 - 5a \times b + 2a \times c - 6a \times b + 0 - 4b \times c - 12a \times c - 20b \times c + 0 = \\ &= -11a \times b - 10a \times c - 24b \times c = 11b \times a + 10c \times a + 24c \times b. \end{aligned}$$

Kolejne mnożenie wektorów. Podwójny iloczyn wektorowy $a \times (b \times c)$ jest to wektor komplanarny względem wektorów b i c , który można obliczyć według wzoru

$$a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab).$$

Iloczyn mieszany wektorów $(a \times b)c$ jest to skalar równy objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach a, b, c jako na krawędziach, wziętej ze znakiem „+”, jeżeli wektory a, b, c tworzą układ prawoskrętny (patrz wyżej), a ze znakiem „-” w przypadku przeciwnym. Iloczyn mieszany $(a \times b)c$ pisze się zazwyczaj w postaci abc .

Zachodzą związki

$$abc = bca = cab = -acb = -bac = -cba;$$

tzn. cykliczne przestawienie czynników nie zmienia znaku iloczynu mieszanego, przestawienie dwóch czynników zmienia znak iloczynu.

Wzory dla iloczynów złożonych

$$(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (bc)(ad) \quad (\text{tożsamość Lagrange'a}),$$

$$abc \cdot efg = \begin{vmatrix} ae & af & ag \\ be & bf & bg \\ ce & cf & cg \end{vmatrix}$$

Wyrażenie iloczynów we współrzędnych prostokątnych. Jeżeli wektory a, b, c dane są współrzędnymi $a(a_x, a_y, a_z), b(b_x, b_y, b_z), c(c_x, c_y, c_z)$, to iloczyny wektorów oblicza się według wzorów:

$$(1) \quad ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{iloczyn skalarny}),$$

$$(2) \quad a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{iloczyn wektorowy}),$$

$$(3) \quad abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (\text{iloczyn mieszany}).$$

Wyrażenie iloczynów we współrzędnych afinicznych.

Współczynniki miarowe i wektory wzajemne. Jeżeli znane są współrzędne afiniczne dwóch wektorów a i b w układzie e_1, e_2, e_3 :

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3, \quad b = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3,$$

to dla obliczenia iloczynu skalarnego

$$(A) \quad ab = a^1 b^1 e_1 e_1 + a^2 b^2 e_2 e_2 + a^3 b^3 e_3 e_3 + \\ + (a^1 b^2 + a^2 b^1) e_1 e_2 + (a^2 b^3 + a^3 b^2) e_2 e_3 + (a^3 b^1 + a^1 b^3) e_3 e_1,$$

albo dla iloczynu wektorowego

$$(B) \quad a \times b = (a^2 b^3 - a^3 b^2) e_3 \times e_3 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) e_3 \times e_1 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_1 \times e_2$$

(ponieważ $e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$) potrzebna jest znajomość wartości iloczynów wersorów osi współrzędnych, branych parami, tzn. dla iloczynu skalarnego potrzebnych jest sześć liczb, tzw. *współczynników miarowych*:

$$g_{11} = e_1 e_1, \quad g_{22} = e_2 e_2, \quad g_{33} = e_3 e_3,$$

$$g_{12} = e_1 e_2 = e_2 e_1, \quad g_{23} = e_2 e_3 = e_3 e_2, \quad g_{31} = e_3 e_1 = e_1 e_3,$$

a dla iloczynu wektorowego potrzebne są trzy wektory, tzw. *wektory wzajemne* względem wektorów e_1, e_2, e_3 :

$$e^1 = \Omega(e_2 \times e_3), \quad e^2 = \Omega(e_3 \times e_1), \quad e^3 = \Omega(e_1 \times e_2),$$

gdzie współczynnik Ω , równy odwrotności iloczynu złożonego trzech wektorów: $\Omega = 1/e_1 e_2 e_3$, zostaje wprowadzony dla uproszczenia dalszych wzorów.

Tablice mnożenia wersorów osi współrzędnych:

Iloczyn skalarny

	e_1	e_2	e_3
e_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
e_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
e_3	g_{31}	g_{32}	g_{33}

$$(g_{kt} = g_{tk})$$

Iloczyn wektorowy
mnożniki

mnożne

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e^3/Ω	$-e^2/\Omega$
e_2	$-e^3/\Omega$	0	e^1/Ω
e_3	e^2/Ω	$-e^1/\Omega$	0

We współrzędnych prostokątnych (tzn. gdy $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$) współczynniki miarowe są następujące:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0, \quad \Omega = \frac{1}{ijk} = 1,$$

wektory wzajemne $e^1 = i, e^2 = j, e^3 = k$ pokrywają się z wersorami osi współrzędnych i tablice mnożenia tych wersorów mają postać

Iloczyn skalarny

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

mnożne

Iloczyn wektorowy
mnożniki

	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

Wyrażenie iloczynów we współrzędnych. Zgodnie ze wzorem (A) dla iloczynu skalarnego

$$(1'') \quad ab = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{mn} a^m a^n = g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \quad (1).$$

Dla współrzędnych prostokątnych wzór (1'') przechodzi we wzór (1) na stronie 651.

Zgodnie ze wzorem (B) dla iloczynu wektorowego mamy

$$(2'') \quad a \times b = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \begin{vmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} [(a^2 b^3 - a^3 b^2) e^1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) e^2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) e^3].$$

Dla współrzędnych prostokątnych wzór (2'') przechodzi we wzór (2) na stronie 651.

Dla iloczynu mieszanego mamy

(¹) Ostatnia część równania (1'') jest skróconym zapisem sumy przyjętym w rachunku tensorowym: zamiast całej sumy napisany jest tylko jej jeden wyraz ogólny, przy czym należy pamiętać, że indeks występujący w tym wzorze dwukrotnie (raz u góry, raz u dołu) oznaczony grecką literą (*wskaźnik sumowania*) przebiega wartości 1, 2, 3. A więc

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = g_{11} a^1 a^1 + g_{12} a^1 a^2 + g_{13} a^1 a^3 + g_{21} a^2 a^1 + g_{22} a^2 a^2 + g_{23} a^2 a^3 + g_{31} a^3 a^1 + g_{32} a^3 a^2 + g_{33} a^3 a^3.$$

$$(3'') \quad abc = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Dla współrzędnych prostokątnych wzór (3'') przechodzi we wzór (3) na stronie 652.

Równania wektorowe. Przyjmujemy oznaczenia: x wektor niewiadomy; a, b, c, d wektory wiadome; x, y, z skalary niewiadome; α, β, γ skalary wiadome.

$$1. x + a = b; \text{ stąd } x = b - a,$$

$$2. x\alpha = a, \alpha \neq 0; \text{ stąd } x = \frac{a}{\alpha}.$$

3. $xa = a$. Równanie nieoznaczone; jeżeli wszystkie wektory x spełniające to równanie sprowadzimy do wspólnego początku, to ich końce będą leżały na płaszczyźnie prostopadłej do wektora a . Równanie 3 nazywamy *równaniem wektorowym tej płaszczyzny*.

4. $x \times a = b$, gdzie $b \perp a$. Równanie nieoznaczone; jeżeli wektory x spełniające to równanie sprowadzimy do wspólnego początku, to ich końce będą leżały na prostej równoległej do wektora a . Równanie 4 nazywamy *równaniem wektorowym tej prostej*.

$$5. xa = a, x \times a = b, \text{ gdzie } b \perp a; \text{ stąd } x = \frac{aa + a \times b}{a^2}.$$

$$6. xa = a, xb = \beta, xc = \gamma;$$

stąd $x = \frac{a(b \times c) + \beta(c \times a) + \gamma(a \times b)}{abc} = \tilde{a}\tilde{a} + \tilde{\beta}\tilde{b} + \tilde{\gamma}\tilde{c}$, gdzie $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ są wektorami wzajemnymi względem wektorów a, b, c (patrz str. 652).

$$7. d = xa + yb + zc; \text{ stąd } x = \frac{dbc}{abc}, y = \frac{adc}{abc}, z = \frac{abd}{abc}.$$

$$8. d = x(b \times c) + y(c \times a) + z(a \times b); \text{ stąd}$$

$$x = \frac{da}{abc}, y = \frac{db}{abc}, z = \frac{dc}{abc}.$$

3. Współrzędne wektora kowariantne i kontrawariantne

Określenia. Współrzędne afiniczne a^1, a^2, a^3 wektora a w układzie e_1, e_2, e_3 , określone wzorem

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 = a^a e_a \quad (1),$$

nazywamy także *współrzędnymi kontrawariantnymi* tego wektora — w odróżnieniu od jego *współrzędnych kowariantnych*, którymi są współ-

(1) Patrz notkę na str. 653.

czynniki rozkładu wektora wzdłuż trzech wektorów e^1, e^2, e^3 wzajemnych względem wektorów e_1, e_2, e_3 (patrz str. 652). Współrzędne kowariantne wektora a oznaczamy przez a_1, a_2, a_3 :

$$a = a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3 = a_a e^a.$$

W układzie współrzędnych prostokątnych współrzędne kowariantne i kontrawariantne są identyczne.

Wyrażenie współrzędnych przez iloczyny skalarne. Współrzędna kowariantna wektora a równa się iloczynowi skalarnemu tego wektora przez odpowiedni wersor osi współrzędnych:

$$(a) \quad a_1 = a e_1, \quad a_2 = a e_2, \quad a_3 = a e_3.$$

Współrzędna kontrawariantna wektora a równa się iloczynowi skalarnemu tego wektora przez odpowiedni wektor wzajemny:

$$(b) \quad a^1 = a e^1, \quad a^2 = a e^2, \quad a^3 = a e^3.$$

W układzie współrzędnych prostokątnych wzory (a) i (b) są identyczne:

$$a_x = a_i, \quad a_y = a_j, \quad a_z = a_k.$$

Wyrażenie iloczynu skalarnego przez współrzędne. Wzór (1'') na stronie 653 podaje wyrażenie iloczynu skalarnego dwóch wektorów przez ich współrzędne kontrawariantne. We współrzędnych kowariantnych odpowiada mu wzór

$$ab = g^{ab} a_a b_b,$$

gdzie $g^{mn} = e^m e^n$ są współczynnikami miarowymi w układzie wektorów wzajemnych; współczynniki te są związane ze współczynnikami g_{mn} wzorem

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n} A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}.$$

gdzie A^{mn} jest minorem wyznacznika znajdującego się w mianowniku, otrzymanym przez skreślenie wiersza i kolumny, na przecięciu których znajduje się element g_{mn} .

Jeżeli wektor a jest określony za pomocą współrzędnych kontrawariantnych, a wektor b za pomocą współrzędnych kowariantnych, to ich iloczyn skalarny wynosi

$$ab = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^a b_a,$$

i analogicznie:

$$ab = a_a b^a.$$

Zastosowania algebry wektorowej do geometrii analitycznej (równania wektorowe płaszczyzny i prostej) strony 254 - 286 i strona 691.

Nazwa	Oznaczenie	Wzór wektorowy	Wzór geometrii analitycznej (we współrzędnych prostokątnych)
Długość wektora a	a	$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach a i b	S	$ a \times b $	$\sqrt{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2}$
Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach a, b, c	V	$ abc $	$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$
Kąt między wektorami a i b	$\cos \varphi$	$\frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2}}$	$\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

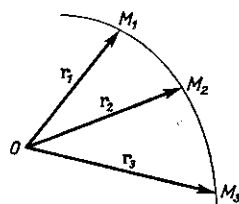
5. Funkcja wektorowa zmiennej skalarnej

Określenie. Wektor zmienny a nazywamy *funkcją wektorową zmiennej skalarnej* t , jeżeli każdej wartości t odpowiada określony wektor a . Oznaczenie:

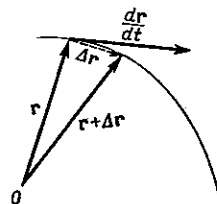
$$a = f(t).$$

Wyznaczenie funkcji wektorowej

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$



Rys. 396



Rys. 397

w układzie współrzędnych prostokątnych polega na wyznaczeniu trójki funkcji skalarnych jednej zmiennej skalarnej t :

$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Jeżeli wektor zmienny a przedstawiony jest za pomocą równego mu wektora wodzącego $\vec{OM} = r = r(t)$ punktu M , to przy zmianie zmiennej t punkt M zakreśli w przestrzeni krzywą (rys. 396) zwaną *hodoграфem* danej funkcji wektorowej; wyznaczenie tej krzywej realizuje się za pomocą trzech równości

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

więc

$$r = xi + yj + zk.$$

Pochodna funkcji wektorowej $a = f(t)$:

$$\frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

jest nową funkcją wektorową zmiennej t .

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji wektorowej: dr/dt jest wektorem stycznym do hodoграфu funkcji wektorowej $r(t)$ w danym punkcie (rys. 397); długość wektora dr/dt zależy od wyboru parametru t . Jeżeli t oznacza czas, to funkcja $r(t)$ wyznacza ruch punktu

M w przestrzeni, a wektor $d\mathbf{r}/dt$, zarówno co do wielkości jak i co do kierunku wyznacza prędkość tego ruchu. Jeżeli t oznacza długość łuku hodografu liczonego od pewnego punktu początkowego M_0 do punktu ruchomego M , to

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1.$$

Reguły różniczkowania wektorów:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt},$$

gdzie φ jest funkcją skalarną zmiennej t .

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

(czynniki nie wolno przestawiać, patrz str. 605).

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Jeżeli wektor $\mathbf{r}$ ma stałą długość, to

$$\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

(hodograf jest krzywą sferyczną i styczna jest prostopadła do wektora wodzącego).

Szereg Taylora funkcji wektorowej:

$$\mathbf{a}(t+h) = \mathbf{a}(t) + h \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} + \dots$$

Zbieżność tego szeregu (i dowolnego szeregu o wyrazach wektorowych) określa się tak samo jak zbieżność szeregu o wyrazach zespolonych (patrz str. 623). O rozwinięciu funkcji wektorowej w szereg Taylora można mówić tylko wtedy, gdy szereg ten jest zbieżny,

Różniczkę funkcji $\mathbf{a}(t)$ określamy wzorem

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t,$$

gdzie Δt jest dowolnym przyrostem zmiennej t .

B. TEORIA POLA

6. Pole skalarne

Funkcje punktów. Wielkość skalarną U , która w każdym punkcie M przestrzeni przybiera oznaczoną wartość $U = U(M)$, nazywamy *funkcją skalarną* punktu M albo *połem skalarnym* (na przykład pole temperatury, pole potencjałów, pole gęstości w ośrodku niejednorodnym).

Pole może być określone za pomocą skalarnej funkcji argumentu wektorowego, mianowicie wektora wodzącego $\mathbf{r}$ punktu M przy danym biegunie O (patrz str. 647):

$$(1) \quad U = U(\mathbf{r}).$$

Pole określone tylko dla punktów pewnej płaszczyzny nazywamy *połem płaskim* ⁽¹⁾.

Pole środkowe i pole osiowe. Jeżeli funkcja przybiera jednakowe wartości we wszystkich punktach leżących w tej samej odległości od pewnego stałego punktu $C(r_1)$, zwanego *środkiem*, to pole tej funkcji nazywamy *środkowym* lub *kulistym*; wartość U zależy tylko od odległości $CM = r$; na przykład $U = r$ (funkcja U wyraża odległość punktu M od bieguna O), $U = c/r^2$ (pole jasności w punkcie M przy punktowym źródle światła), ogólnie:

$$(2) \quad U = f(r).$$

Jeżeli funkcja U przybiera jedną i tę samą wartość we wszystkich punktach leżących w jednakowej odległości od prostej (osi pola), to takie pole nazywamy *połem osiowym* lub *cyldrycznym*.

Określenie pola w układzie współrzędnych. Określając punkt M za pomocą jego współrzędnych (prostokątnych x, y, z , cylindrycznych ϱ, φ, z albo sferycznych r, θ, φ) ⁽²⁾ otrzymujemy wyrażenie na pole skalarne w postaci funkcji trzech zmiennych:

$$(1a) \quad U = \Phi(x, y, z), \quad U = \Psi(\varrho, \varphi, z), \quad U = \theta(r, \theta, \varphi),$$

a dla pola płaskiego — w postaci funkcji dwóch zmiennych (we współrzędnych prostokątnych albo biegunowych):

$$(1b) \quad U = \Phi(x, y) \quad \text{lub} \quad U = \Psi(\varrho, \varphi),$$

przy czym zakłada się, że funkcje U we wzorach (1a) i (1b) są jednoznaczne i wszędzie ciągłe, z wyjątkiem ewentualnie poszczególnych

⁽¹⁾ Niekiedy *połem płaskim* nazywane jest pole określone dla punktów przestrzeni w taki sposób, że we wszystkich punktach prostej równoległej do danego kierunku funkcja ma stałą wartość. Jest to nazwa niewłaściwa, chociaż badanie pola w całej przestrzeni sprowadza się do badania pola w pewnej płaszczyźnie prostopadłej do danego stałego kierunku.

⁽²⁾ Patrz str. 280.

punktów, linii lub powierzchni nieciągłości. Wyrażenie pola środkowego we współrzędnych:

$$(2a) \quad U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = U(\sqrt{\varrho^2 + z^2}) = U(r),$$

dla pola osiowego:

$$(3) \quad U = U(\sqrt{x^2 + y^2}) = U(\varrho) = U(r \sin \theta);$$

dla badania pól środkowych najdogodniejsze są współrzędne sferyczne. a dla osiowych cylindryczne.

Powierzchnie i linie równych wartości pola. Punkty, w których funkcja (1) przybiera jedną i tę samą wartość, tworzą w przestrzeni *powierzchnie równych wartości* o równaniu

$$(4) \quad U = \text{const},$$

a więc we współrzędnych prostokątnych, cylindrycznych i sferycznych powierzchnie te mają równania

$$(4a) \quad U = \Phi(x, y, z) = c, \quad U = \Psi(\varrho, \varphi, z) = c, \quad U = \theta(r, \theta, \varphi) = c.$$

Przy różnych wartościach stałej $c = c_0, c_1, c_2$ otrzymuje się różne powierzchnie równych wartości pola $U = c_0, U = c_1, U = c_2$; przez każdy punkt pola przechodzi jedna taka powierzchnia, z wyjątkiem tych punktów, w których funkcja U nie jest jednoznacznie określona.

Przykłady. 1. Dla pola $U = \mathbf{cr} = c_x x + c_y y + c_z z$ z powierzchniami równych wartości pola są płaszczyzny wzajemnie równoległe.

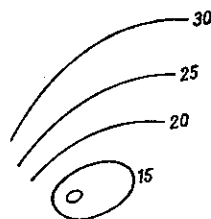
2. Dla pola $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ powierzchniami równych wartości pola są elipsoidy jednokładne względem bieguna O .

Powierzchniami równych wartości pola środkowego są współśrodkowe powierzchnie kuliste, a powierzchniami równych wartości pola osiowego są współosiowe walce obrotowe.

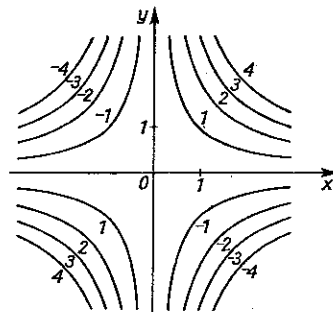
Dla pola płaskiego równanie $U = \text{const}$ określa linię równych wartości pola:

$$(4b) \quad U(x, y) = c, \quad U(\varrho, \varphi) = c.$$

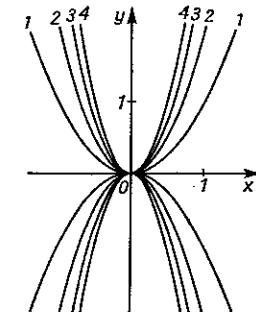
Na wykresach linii równych wartości pola przyjęto prowadzić w równych odstępach wartości stałej c (wartości c_1, c_2, c_3 stanowią postęp arytmetyczny) i na każdej z tych linii pisać się jej cechę c , czyli odpowiednią stałą wartości funkcji U (rys. 398), linie takie nazywamy *poziomicami pola*. Na przykład izobary (linie równych ciśnień) na mapie synoptycznej, warstwie (linie równych wysokości) na mapie



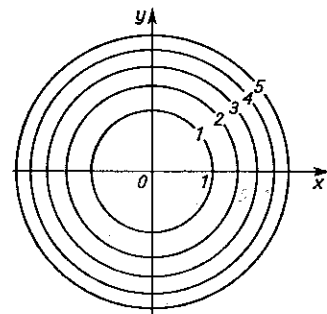
Rys. 398



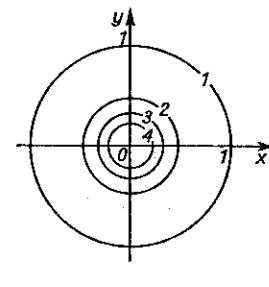
a)



b)



c)



d)

Rys. 399

Przykłady (rys. 399). 1. $U = xy$, 2. $U = \frac{y}{x^2}$, 3. $U = r^2$, 4. $U = \frac{1}{r}$.

7. Pole wektorowe

Funkcje wektorowe punktów. Wielkość wektorową V , która w każdym punkcie M przestrzeni przybiera określoną wartość, nazywamy *funkcją wektorową punktu* $V = V(M)$ albo inaczej: *polem wektorowym*.

topograficznej. W poszczególnych przypadkach linie równej wartości pola mogą się zdegenerować do odosobnionych punktów, a powierzchnie równych wartości pola do punktów i linii.

Przykłady: pole prędkości cieczy będącej w ruchu, pole sił, pole natężeń elektrycznych lub magnetycznych.

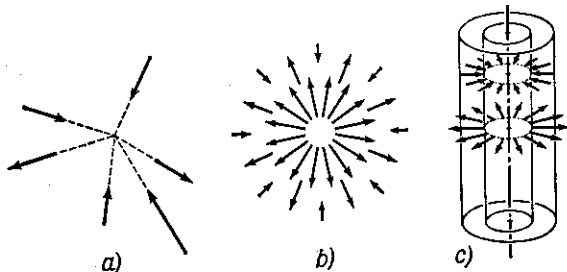
Pole wektorowe może być określone za pomocą wektorowej funkcji argumentu wektorowego $\mathbf{r}$:

$$(1) \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}).$$

Pole wektorowe jest *plaskie* ⁽¹⁾, jeżeli wszystkie wartości zarówno $\mathbf{r}$ jak $\mathbf{V}$ leżą w jednej płaszczyźnie.

Często występujące typy pól wektorowych.

Pole wektorowe środkowe (rys. 400a) jest to pole, w którym wszystkie wektory $\mathbf{V}$ leżą na prostych przechodzących przez stały punkt, zwany



Rys. 400

środkiem pola. Jeżeli biegun będzie się znajdował w środku pola, to takie pole określa się wzorem

$$\mathbf{V} = f(r)\mathbf{r},$$

gdzie $f(r)$ jest skalar, każdy wektor $\mathbf{V}$ ma kierunek wektora wodzącego $\mathbf{r}$ (zorientowanego zgodnie lub przeciwnie). Takie pole dogodnie jest wyrazić wzorem

$$\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

gdzie $\varphi(r)$ jest to długość wektora $\mathbf{V}$, a $\mathbf{r}/r$ jest wersorem tego wektora.

Pole wektorowe sferyczne (rys. 400b):

$$\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

jest to ważny przypadek szczególny pola środkowego, w którym dłu-

gość $\varphi(r)$ wektora $\mathbf{V}$ zależy tylko od długości wektora $\mathbf{r}$, a nie zależy od jego kierunku; na przykład pole grawitacyjne Newtona-Coulomba:

$$\mathbf{V} = \frac{c}{r^3} \mathbf{r} = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Dla pola płaskiego przypadek ten nazywamy *polem kołowym*.

Pole wektorowe cylindryczne (rys. 400c) jest to pole, w którym wszystkie wektory $\mathbf{V}$ leżą na prostych przecinających pewną stałą prostą, zwaną *osią pola*, i prostopadłych do tej osi, przy czym wektory w punktach leżących w jednakowej odległości od osi mają równe długości i są wszystkie skierowane od osi albo wszystkie ku osi. Jeżeli biegun umieścimy na osi pola o wersorze $\mathbf{c}$, to takie pole określa się wzorem

$$\mathbf{V} = \varphi(\varrho) \frac{\mathbf{r}'}{\varrho},$$

gdzie $\mathbf{r}'$ jest wektorem stanowiącym rzut wektora $\mathbf{r}$ na płaszczyznę prostopadłą do osi pola: $\mathbf{r}' = \mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c})$. W przecięciu tego pola płaszczyznami prostopadłymi do osi pola otrzymuje się jednakowe pola kołowe.

Określenie pola w układzie współrzędnych.

(1) można określić za pomocą trzech pól skalarnych $V^1(\mathbf{r})$, $V^2(\mathbf{r})$, $V^3(\mathbf{r})$, które są współczynnikami rozkładu wektora $\mathbf{V}$ wzdłuż trzech dowolnie obranych wektorów niekomplanarnych $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$(2) \quad \mathbf{V} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3.$$

Jeżeli za wersory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ przyjmujemy wersory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ osi Ox , Oy , Oz w układzie współrzędnych prostokątnych, a współczynniki V^1 , V^2 , V^3 wyrazimy przez współrzędne prostokątne x , y , z , to

$$(2a) \quad \mathbf{V} = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k},$$

tzn. pole wektorowe jest określone za pomocą trzech funkcji skalarnych trzech zmiennych (jest to określenie pola we współrzędnych prostokątnych).

We współrzędnych cylindrycznych wersory $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ są styczne do linii współrzędnych w każdym punkcie (rys. 401), a współczynniki są wyrażone przez współrzędne cylindryczne ϱ , φ , z :

$$(2b) \quad \mathbf{V} = V_\rho(\varrho, \varphi, z) \mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\varrho, \varphi, z) \mathbf{e}_\varphi + V_z(\varrho, \varphi, z) \mathbf{e}_z.$$

We współrzędnych sferycznych wersory $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ są styczne do linii współrzędnych w każdym punkcie (rys. 402) i po wyrażeniu współczynników przez współrzędne r , φ , θ otrzymujemy wzór

$$(2c) \quad \mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\varphi + V_\theta(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\theta.$$

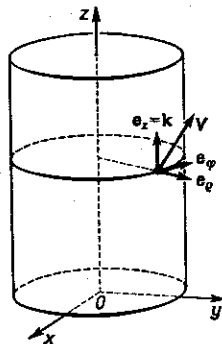
⁽¹⁾ Patrz notkę na str. 659. Analogicznie jest dla pola wektorowego.

W obu tych przypadkach wersory zmieniają swój kierunek przy przejściu od jednego punktu do drugiego, ale pozostają wzajemnie prostopadłe.

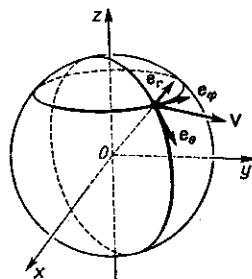
Wzory na przejście od jednego układu współrzędnych do innego.

Wyrażenie współrzędnych prostokątnych przez cylindryczne:

$$V_x = V_\rho \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi, \quad V_y = V_\rho \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi, \quad V_z = V_z.$$



Rys. 401



Rys. 402

Wyrażenie współrzędnych cylindrycznych przez prostokątne:

$$V_\rho = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\varphi = -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi, \quad V_z = V_z.$$

Wyrażenie współrzędnych prostokątnych przez sferyczne:

$$\begin{aligned} V_x &= V_r \sin \theta \cos \varphi - V_\theta \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi \cos \theta, \\ V_y &= V_r \sin \theta \sin \varphi + V_\theta \cos \varphi + V_\varphi \sin \varphi \cos \theta, \\ V_z &= V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Wyrażenie współrzędnych sferycznych przez prostokątne:

$$\begin{aligned} V_r &= V_x \sin \theta \cos \varphi + V_y \sin \theta \sin \varphi + V_z \cos \theta, \\ V_\theta &= -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi, \\ V_\varphi &= V_x \cos \theta \cos \varphi + V_y \cos \theta \sin \varphi - V_z \sin \theta. \end{aligned}$$

Wyrażenie sferycznego pola wektorowego we współrzędnych prostokątnych

$$V = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(xi + yj + zk).$$

Wyrażenie cylindrycznego pola wektorowego we współrzędnych prostokątnych

$$V = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})(xi + yj).$$

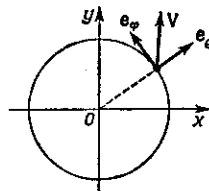
Do badania pól sferycznych najdogodniejsze są współrzędne sferyczne, mianowicie $V = V(r)e_r$, a do badania pól cylindrycznych współrzędne cylindryczne, a mianowicie $V = V(\rho)e_\rho$.

W przypadku pola płaskiego mamy (rys. 403):

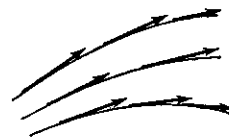
$$V = V_x(x, y)i + V_y(x, y)j = V_\rho(x, y)e_\rho + V_\varphi(x, y)e_\varphi,$$

a dla pola kołowego

$$V = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})(xi + yj) = \psi(\rho)e_\rho.$$



Rys. 403



Rys. 404

Linie sił. *Linia sił* pola wektorowego $V(r)$ nazywamy taką krzywą Γ , że w każdym jej punkcie $M(r)$ wektor $V(r)$ jest styczny do krzywej Γ (rys. 404). Przez każdy punkt pola przechodzi jedna linia sił. Linie sił wzajemnie nie przecinają się (z wyjątkiem punktów, w których funkcja V jest nieokreślona lub $V = 0$).

Przykłady. W polu środkowym linią sił przechodzącą przez dany punkt M jest półprosta wychodząca ze środka O i przechodząca przez punkt M . Liniami sił pola $V = c \times r$ są okręgi leżące w płaszczyznach prostopadłych do wersora c i mające środki na osi tego wersora.

Równania różniczkowe linii sił pola wyrażonego we współrzędnych prostokątnych (1):

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z},$$

a dla pola płaskiego

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}.$$

(1) O rozwiązywaniu tych równań różniczkowych patrz str. 511 i 524.

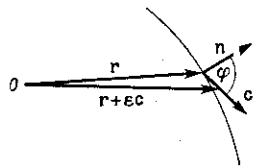
8. Gradient

Pochodna pola skalarnego. Pochodną pola skalarnego $U = U(\mathbf{r})$ w danym punkcie $\mathbf{r}$ względem wektora $\mathbf{c}$ (rys. 405) nazywamy granicę

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\varepsilon}.$$

Pochodną pola $U = U(\mathbf{r})$ w danym punkcie $\mathbf{r}$ w kierunku wersora $\mathbf{c}^0$ nazywamy pochodną $\frac{\partial U}{\partial c^0}$. Pochodne pola względem wektora $\mathbf{c}$ i jego wersora $\mathbf{c}^0$ w danym punkcie są związane wzorem

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial U}{\partial c^0}.$$



Rys. 405

Pochodna $\frac{\partial U}{\partial c^0}$ wyraża prędkość wzrastania funkcji U w każdym punkcie w kierunku wersora $\mathbf{c}^0$; spośród wszystkich pochodnych w danym punkcie w kierunku różnych wersorów największa jest pochodna $\frac{\partial U}{\partial n}$, gdzie $\mathbf{n}$

jest wersorem normalnej w danym punkcie do powierzchni równych wartości pola, zorientowanym w kierunku wzrastania funkcji U ; pochodna w innym kierunku wyraża się wzorem

$$\frac{\partial U}{\partial c^0} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\mathbf{c}^0, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial n} \cos \varphi.$$

Gradient pola skalarnego. Gradient pola skalarnego $U(\mathbf{r})$, oznaczamy symbolem $\text{grad } U$ lub $\nabla U^{(1)}$, jest to wektor określony w każdym punkcie pola, mający kierunek zgodny z kierunkiem normalnej do powierzchni równych wartości pola, zorientowany w kierunku wzrastania funkcji U i mający długość $\frac{\partial U}{\partial n}$.

A więc

$$\text{grad } U = \mathbf{n} \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Pochodna $\frac{\partial U}{\partial c^0}$ równa się rzutowi $\text{grad } U$ na kierunek $\mathbf{c}^0$.

$$\frac{\partial U}{\partial c^0} = \mathbf{c}^0 \text{ grad } U.$$

Współrzędne gradientu w układzie współrzędnych prostokątnych:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k},$$

⁽¹⁾ O operatorze ∇ (operator nabla) patrz str. 677.

w układzie współrzędnych cylindrycznych:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

w układzie współrzędnych sferycznych:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

W tych punktach pola, w których linie równych wartości pola, poprowadzone zgodnie z warunkiem podanym na stronie 660, występują gęściej, bezwzględna wartość gradientu jest większa; w punktach maksimum i minimum pola, w których to punktach powierzchnie i linie równej wartości pola degenerują się do punktu, gradient pola równa się zero: $\text{grad } U = 0$.

Różniczka pola skalarnego. Różniczką pola skalarnego nazywamy różniczkę zupełną funkcji U (patrz str. 393):

$$dU = \text{grad } U d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Reguły obliczania gradientu ⁽¹⁾.

$\text{grad } c = 0$, $\text{grad}(U_1 + U_2) = \text{grad } U_1 + \text{grad } U_2$, $\text{grad}(cU) = c \text{ grad } U$,

$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{ grad } U_2 + U_2 \text{ grad } U_1$, $\text{grad } \varphi(U) = \frac{d\varphi}{dU} \text{ grad } U$,

$\text{grad}(V_1 V_2) = (V_1 \text{ grad}) V_2 + (V_2 \text{ grad}) V_1 + V_1 \times \text{rot } V_2 + V_2 \times \text{rot } V_1$ ⁽²⁾;

w szczególności $\text{grad}(\mathbf{r}c) = c$.

Gradient pola środkowego: $\text{grad } U(\mathbf{r}) = U'(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}$ (pole sferyczne);

w szczególności $\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (pole wektorów jednostkowych).

Gradient jako pochodna przestrzenna. Pochodna przestrzenna pola skalarnego (patrz str. 674) jest to wektor stanowiący gradient tego pola. Własność tę można przyjąć za określenie gradientu:

$$\text{grad } U = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\oint U d\mathbf{S}}{v}.$$

⁽¹⁾ W tym miejscu i w dalszym tekście c i c są stałe.

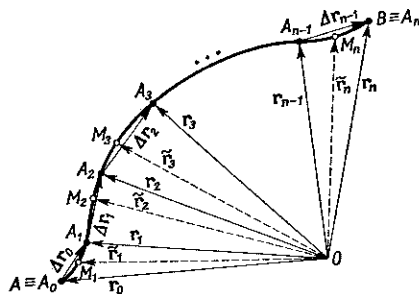
⁽²⁾ O wyrażeniach $(V \text{ grad}) W$ i $\text{rot } V$ patrz str. 678 i 675.

9. Całka krzywoliniowa i potencjał w polu wektorowym ⁽¹⁾

Określenie. Całką krzywoliniową funkcji wektorowej $V(r)$ wziętą po łuku $\overline{AB}$ oznaczoną symbolem

$$\int_{\overline{AB}} V(r) dr$$

nazywamy skalar P otrzymywany w sposób następujący:



Rys. 406

1° Drogę całkowania $\overline{AB}$ (rys. 406) rozkładamy za pomocą punktów

$A = A_0, A_1(r_1), A_2(r_2), \dots, A_{n-1}(r_{n-1}), A_n = B$ na n łuków elementarnych zastępowanych w przybliżeniu wektorami $r_i - r_{i-1} = \Delta r_{i-1}$;

2° Wewnątrz lub na brzegu łuku elementarnego $\overline{A_{i-1}A_i}$ obieramy jakiegokolwiek punkt M_i o wektorze wodzącym r_i ;

3° Wartości funkcji $V(r_i)$ w wybranym punkcie M_i mnożymy skalarnie przez wektor Δr_{i-1} ;

4° Wszystkie otrzymane n iloczynów $V(r_i)$ dodajemy;

5° Obliczamy granicę otrzymanej sumy

$$\sum_{i=1}^n V(r_i) \Delta r_{i-1},$$

gdy długość każdego wektora elementarnego Δr_{i-1} dąży do zera (zatem $n \rightarrow \infty$).

⁽¹⁾ W paragrafie tym dany jest wykład całki krzywoliniowej drugiego typu, postaci ogólnej.

Jeżeli taka granica istnieje i nie zależy od sposobu podziału drogi całkowania $\overline{AB}$ na łuki elementarne i od wyboru punktów M_i , to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową*:

$$\int_{\overline{AB}} V(r) dr = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V(r_i) \Delta r_{i-1}.$$

Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli funkcja $V(r)$ jest ciągła ⁽¹⁾ i łuk $\overline{AB}$ jest ciągły i ma w sposób ciągły zmieniającą się styczną, to całka krzywoliniowa $\int_{\overline{AB}} V(r) dr$ istnieje.

Interpretacja mechaniczna całki krzywoliniowej. Jeżeli pole V jest polem sił, to całka krzywoliniowa $P = \int_{\overline{AB}} V(r) dr$ wyraża pracę

wykonaną przez siłę V przy przesunięciu punktu materialnego po drodze $\overline{AB}$.

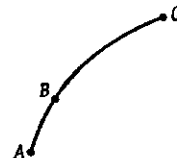
Własność całki krzywoliniowej. Zachodzą wzory (patrz rys. 407):

$$\int_{\overline{ABC}} V(r) dr = \int_{\overline{AB}} V(r) dr + \int_{\overline{BC}} V(r) dr$$

$$\int_{\overline{AB}} V(r) dr = - \int_{\overline{BA}} V(r) dr,$$

$$\int_{\overline{AB}} [V(r) + W(r)] dr = \int_{\overline{AB}} V(r) dr + \int_{\overline{AB}} W(r) dr,$$

$$\int_{\overline{AB}} c V(r) dr = c \int_{\overline{AB}} V(r) dr.$$



Rys. 407

Obliczanie całki krzywoliniowej określonej w układzie współrzędnych prostokątnych sprowadza się do obliczenia całki krzywoliniowej drugiego typu, w postaci ogólnej (patrz str. 520, 521):

$$\int_{\overline{AB}} V(r) dr = \int_{\overline{AB}} (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

⁽¹⁾ Dla ciągłości funkcji wektorowej konieczna jest ciągłość wszystkich trzech funkcji skalarnych występujących w roli współczynników w rozkładzie funkcji V wzdłuż wersorów e_1, e_2, e_3 .

Cyrkulacja. *Cyrkulacją* albo *całką okrężną* funkcji $V(\mathbf{r})$ w polu wektorowym nazywamy całkę krzywoliniową w tym polu wziętą po krzywej zamkniętej (konturze) C ; oznaczamy ją symbolem $\oint_C V d\mathbf{r}$.

Pole potencjalne. *Polem potencjalnym* albo *zachowawczym* nazywamy takie pole wektorowe, w którym całka krzywoliniowa $\int_{\overline{AB}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$

nie zależy od drogi całkowania $\overline{AB}$, a zależy tylko od położenia punktów A i B . Cyrkulacja w polu potencjalnym jest zawsze równa zeru. Pole potencjalne jest zawsze *bezwzględne*:

$$(1) \quad \operatorname{rot} V = 0$$

(patrz str. 680); równość ta wraz z warunkiem, by odpowiednie pochodne cząstkowe współrzędnych pola były ciągłe, stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, by pole było potencjalne.

W układzie współrzędnych prostokątnych warunek ten ma postać

$$(1a) \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (1);$$

dla pola płaskiego bierze się tylko pierwszy z powyższych warunków.

Potencjał pola zachowawczego. Jeżeli w polu potencjalnym ustalimy punkt początkowy $A(\mathbf{r}_0)$ i będziemy zmieniali punkt końcowy $B(\mathbf{r})$, to całka $\int_{\overline{AB}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, którą można napisać w postaci $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, jest funkcją skalarną wektora $\mathbf{r}$:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r})$$

i pole skalarne $\varphi(\mathbf{r})$ nazywamy *funkcją potencjalną* albo *potencjałem pola* $V(\mathbf{r})$ ⁽²⁾. Potencjał pola jest określony z dokładnością do stałego czynnika, który zależy od dolnej granicy całkowania $\mathbf{r}_0$; różnica potencjałów:

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

⁽¹⁾ Jest to warunek całkowności (patrz str. 423).

⁽²⁾ Jest to funkcja pierwotna (patrz str. 423). W fizyce *potencjałem* $\varphi(\mathbf{r})$ w punkcie $\mathbf{r}$ nazywa się niekiedy całką o znaku przeciwnym:

$$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

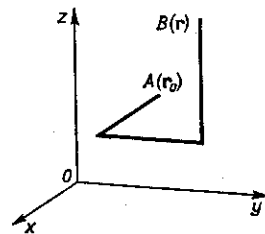
Związek między gradientem, całką krzywoliniową i potencjałem pola. Jeżeli $V(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{r})$, to $U(\mathbf{r})$ jest potencjałem pola $V(\mathbf{r})$ ⁽¹⁾, i odwrotnie.

Obliczenie potencjału U pola zachowawczego $V = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$ określonego we współrzędnych prostokątnych jest równoważne obliczeniu funkcji U na podstawie jej różniczki zupełnej $dU = V_x dx + V_y dy + V_z dz$, gdzie V_x, V_y, V_z muszą spełniać warunek (1a); funkcję U znajduje się z układu równań

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z.$$

W praktyce potencjał oblicza się za pomocą całkowania po łamanej (rys. 408) o bokach równoległych do osi współrzędnych (patrz obliczenie funkcji pierwotnej na str. 624):

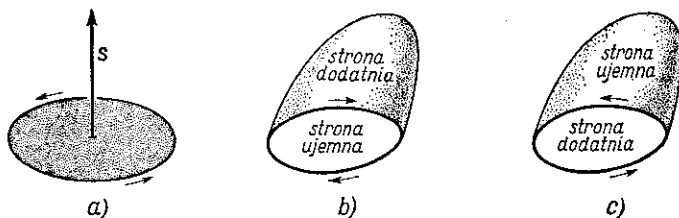
$$U = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} V d\mathbf{r} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^x V_x(x, y_0, z_0) dx + \\ + \int_{y_0}^y V_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z V_z(x, y, z) dz.$$



Rys. 408

10. Całki powierzchniowe ⁽²⁾

Wektor normalny. *Wektorem normalnym* do płaskiego płata zorientowanego Σ , ograniczonego konturem C (rys. 409a), nazywamy wektor $\mathbf{S}$, którego długość równa się polu S płata Σ , a kierunek jest prostopadły do płaszczyzny płata Σ i tak zorientowany, że jeżeli po-



Rys. 409

⁽¹⁾ Albo też: minus potencjał pola $V(\mathbf{r})$ (patrz notkę ⁽²⁾ na str. 670).

⁽²⁾ W paragrafie tym podany jest wektorowy wykład teorii całki powierzchniowej drugiego typu w postaci ogólnej.

czątek wektora S umieścimy na płacie Σ , to obserwator patrzący z końca wektora będzie widział dodatnią stronę płata Σ . (Przypominamy, że na dodatniej stronie płata dodatni kierunek konturu obiera się w taki sposób, żeby punkt obiegający kontur w tym kierunku zostawiał wewnętrzny obszar płata po lewej stronie.) Można to przenieść na dowolny płat krzywopowierzchniowy zorientowany, ograniczony pewnym konturem (rys. 409b i c).

Trzy rodzaje całek powierzchniowych (po płacie zorientowanym Σ ograniczonym pewnym konturem albo po powierzchni zamkniętej).

Definicje. *Całkami powierzchniowymi* w polu skalarnym lub wektorowym nazywamy wielkości utworzone w sposób następujący:

1° Płat Σ , na którym wybrana została strona dodatnia (w przypadku powierzchni zamkniętej za stronę dodatnią przyjmuje się stronę zewnętrzną), rozkładamy w dowolny sposób na n płatów elementarnych dS_i (rys. 410), z których każdy uważamy w przybliżeniu za płaski, i dla każdego takiego płata konstruujemy przynależny mu wektor oznaczony przez dS_i ;

2° wewnątrz lub na brzegu każdego płata elementarnego dS_i wybieramy dowolny punkt r_i ;

3° w przypadku pola skalarnego tworzymy iloczyn $U(r_i)dS_i$, a w przypadku pola wektorowego tworzymy iloczyn skalarny $V(r_i)dS_i$ lub iloczyn wektorowy $V(r_i) \times dS_i$;

4° iloczyny utworzone dla każdego z obszarów elementarnych dodajemy;

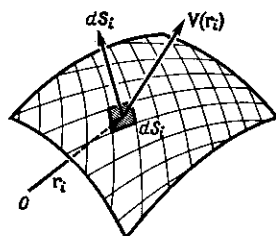
5° znajdujemy granicę utworzonej sumy, gdy dS_i lub dS_i dążą do granicy zero (a więc $n \rightarrow \infty$), pod warunkiem, że granica ta nie zależy od sposobu podziału płata Σ lub zamkniętej powierzchni całkowania na płaty elementarne ani od wyboru punktów r_i (1).

A. Strumień pola skalarnego:

$$P = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum U(r_i) dS_i = \int_{\Sigma} U(r) dS.$$

B. Strumień skalarny pola wektorowego:

$$Q = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum V(r_i) dS_i = \int_{\Sigma} V(r) dS.$$



Rys. 410

C. Strumień wektorowy pola wektorowego:

$$R = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum V(r_i) \times dS_i = \int_{\Sigma} V(r) \times dS \quad (1).$$

Obliczanie całki po płacie powierzchniowym we współrzędnych prostokątnych sprowadza się do obliczenia całek powierzchniowych drugiego typu (patrz str. 540) i wykonuje się według następujących wzorów:

$$A. \int_{\Sigma} U dS = \int_{\Sigma_{yz}} U dy dz \mathbf{i} + \int_{\Sigma_{xz}} U dz dx \mathbf{j} + \int_{\Sigma_{xy}} U dx dy \mathbf{k}.$$

$$B. \int_{\Sigma} V dS = \int_{\Sigma_{yz}} V_z dy dz + \int_{\Sigma_{xz}} V_y dz dx + \int_{\Sigma_{xy}} V_x dx dy.$$

$$C. \int_{\Sigma} V \times dS = \int_{\Sigma_{yz}} (V_z \mathbf{j} - V_y \mathbf{k}) dy dz + \int_{\Sigma_{xz}} (V_x \mathbf{k} - V_z \mathbf{i}) dz dx + \int_{\Sigma_{xy}} (V_y \mathbf{i} - V_x \mathbf{j}) dx dy.$$

We wzorach tych każdą z całek podwójnych rozciąga się na rzut płata Σ na odpowiednią płaszczyznę współrzędnych (2) (patrz rys. 411), przy czym w wyrażeniach podcałkowych należy jedną ze współrzędnych x, y, z wyrazić przez dwie pozostałe z równania powierzchni Σ .

Przykłady. A. $P = \int_{\Sigma} xyz dS$, gdzie

Σ jest częścią płaszczyzny $x+y+z=1$ zawartą między trzema płaszczyznami współrzędnych (stroną dodatnią płata Σ jest jego górna strona). Mamy

$$P = \iint_{yz} (1-y-z)yz dy dz \mathbf{i} + \iint_{zx} (1-x-z)xz dz dx \mathbf{j} + \iint_{xy} (1-x-y)xy dx dy \mathbf{k}.$$

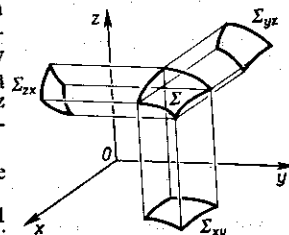
Obliczamy

$$\iint_{yz} (1-y-z)yz dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z)yz dy dz = \frac{1}{120};$$

(1) Dla każdej z tych całek zachodzi twierdzenie o istnieniu analogiczne do twierdzenia podanego na str. 542; dokładne sformułowanie tych twierdzeń pomijamy.

(2) Rzuty te opatruje się znakami „+” lub „-” według reguły podanej na str. 540.

(1) Płat elementarny dS_i ściąga się do punktu (patrz notka na str. 526).



Rys. 411

dwie pozostałe całki są analogiczne. W wyniku otrzymujemy

$$P = \frac{1}{120} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$B. Q = \int_{\Sigma} \mathbf{r} dS = \int \int_{yz} x dy dz + \int \int_{zx} y dz dx + \int \int_{xy} z dx dy,$$

gdzie płat Σ jest ten sam co w poprzednim przykładzie.

Mamy

$$\int \int_{xy} z dx dy = \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1-x-y) dy dx = \frac{1}{6};$$

pozostałe dwie całki oblicza się analogicznie. Wynik

$$Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$C. \mathbf{R} = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (dydz\mathbf{i} + dzdx\mathbf{j} + dxdy\mathbf{k})$$

po tym samym płacie Σ .

Analogiczne obliczenie daje $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Całki po powierzchni zamkniętej oznaczamy odpowiednio symbolami

$$\oint_{\Sigma} U dS, \quad \oint_{\Sigma} V dS, \quad \oint_{\Sigma} V \times dS.$$

11. Różniczkowanie przestrzenne

Określenie. Pochodnymi przestrzennymi pola skalarowego lub wektorowego w punkcie $\mathbf{r}$ nazywamy wielkości trzech postaci otrzymywane w sposób następujący:

1^o Punkt $\mathbf{r}$ pola skalarowego $U(\mathbf{r})$ albo pola wektorowego $V(\mathbf{r})$ otaczamy zamkniętą powłoką Σ ;

2^o obliczamy całki okrężne po powierzchni Σ :

$$\oint_{\Sigma} U(\mathbf{r}) dS, \quad \oint_{\Sigma} V(\mathbf{r}) dS \quad \text{lub} \quad \oint_{\Sigma} V(\mathbf{r}) \times dS;$$

3^o znajdujemy granicę stosunku tej całki do objętości obszaru v zawartego wewnątrz powłoki Σ , gdy obszar v ściąga się do punktu (w sensie podanym w notce na str. 526).

Pochodna przestrzenna pola skalarowego jest jego gradientem (patrz str. 667), a pochodne przestrzenne pola wektorowego (skalarne i wektorowe) prowadzą do pojęć rozbieżności i wirowości pola.

12. Rozbieżność pola wektorowego

Określenie. Rozbieżnością albo dywergencją pola wektorowego V , oznaczaną symbolem $\text{div } V$ lub ∇V ⁽¹⁾, nazywamy skalar określony w każdym punkcie pola, stanowiący pochodną przestrzenną skalarną pola wektorowego w danym punkcie $\mathbf{r}$:

$$\text{div } V = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\int_{\Sigma} V dS}{v}.$$

Wzory i reguły na obliczanie rozbieżności pola. We współrzędnych prostokątnych mamy:

$$\text{div } V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

we współrzędnych cylindrycznych:

$$\text{div } V = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

we współrzędnych sferycznych:

$$\text{div } V = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_{\theta}) \right).$$

Ponadto mamy związki:

$$\text{div } c = 0, \quad \text{div}(V_1 + V_2) = \text{div } V_1 + \text{div } V_2, \quad \text{div}(cV) = c \text{div } V,$$

$$\text{div}(UV) = U \text{div } V + V \text{grad } U, \quad \text{w szczególności: } \text{div } rc = \frac{rc}{r},$$

$$\text{div}(V_1 \times V_2) = V_2 \text{rot } V_1 - V_1 \text{rot } V_2.$$

Rozbieżność pola środkowego:

$$\text{div } \mathbf{r} = 3, \quad \text{div } \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{r} = 3\varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \varphi'(\mathbf{r}).$$

13. Wirowość pola wektorowego

Określenia. Wirowością albo rotacją pola wektorowego V , oznaczaną symbolem $\text{rot } V$, $\text{curl } V$ albo $\nabla \times V$ ⁽²⁾, nazywamy wektor określony w każdym punkcie pola i stanowiący pochodną przestrzenną wektorową tego pola, wziętą ze znakiem przeciwnym:

$$\text{rot } V = -\lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v} \int_{\Sigma} V \times dS \right) \quad (2).$$

⁽¹⁾ O symbolu ∇ (nabla) patrz str. 677.

⁽²⁾ Znak minus można usunąć przestawiając czynniki pod znakiem całki $\int dS \times V$ (patrz str. 650).

Inne określenie wirowości: *wirowością* lub *rotacją* pola wektorowego V nazywamy wektor utworzony w sposób następujący:

1° Przez dany punkt r prowadzimy niewielki płaski płat elementarny S (patrz rys. 412);

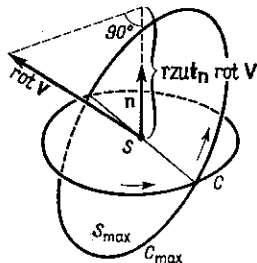
2° obliczamy cyrkulację $\oint_C V dr$ (patrz str. 670) wzdłuż konturu tego płata;

3° obliczamy granicę stosunku tej cyrkulacji do pola płata elementarnego S , gdy płat ten ściąga się do punktu, przy czym położenie płaszczyzny płata pozostaje niezmiennie;

4° zmieniając ustawienie płata znajdujemy takie ustawienie płata $S_{\max}$, przy którym otrzymana granica osiąga maksimum;

5° w punkcie r konstruujemy wektor $\text{rot } r$, którego długość równa się powyższemu maksimum, a kierunek jest zgodny z kierunkiem przynależnym do płata $S_{\max}$:

$$|\text{rot } V| = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C V dr}{S_{\max}} :$$



Rys. 412

rzt wektora $\text{rot } V$ na normalną do płata S wynosi

$$\text{rzt}_n \text{rot } V = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C V dr}{S} .$$

Wirowość pola potencjalnego równa się zeru (wniosek z twierdzenia Stokesa, patrz str. 679).

Linie sił pola $\text{rot } V$ nazywamy *liniami wirowymi pola* (patrz str. 665).

Wzory i reguły na obliczanie wirowości pola. We współrzędnych prostokątnych mamy:

$$\text{rot } V = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) k ,$$

we współrzędnych cylindrycznych:

$$\text{rot } V = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) e_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) e_z ,$$

we współrzędnych sferycznych:

$$\text{rot } V = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] e_r + \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] e_\varphi + \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right) \right] e_\theta .$$

Ponadto mamy związki

$$\text{rot} (V_1 + V_2) = \text{rot } V_1 + \text{rot } V_2, \quad \text{rot} (cV) = c \text{rot } V,$$

$$\text{rot} (UV) = U \text{rot } V + \text{grad } U \times V,$$

$$\text{rot} (V_1 \times V_2) = (V_2 \text{ grad}) V_1 - (V_1 \text{ grad}) V_2 + V_1 \text{ div } V_2 - V_2 \text{ div } V_1^{(1)}.$$

14. Operator Hamiltona ∇ , operator $(a\nabla)$ i operator Laplace'a Δ

Operator Hamiltona. Operator Hamiltona ∇ (nabla) jest to wektor symboliczny zastępujący symbole grad, div i rot:

$$\nabla U = \text{grad } U, \quad \nabla V = \text{div } V, \quad \nabla \times V = \text{rot } V.$$

Wprowadzenie tego symbolu upraszcza obliczenia w analizie wektorowej. Wyrażenie operatora Hamiltona we współrzędnych prostokątnych jest następujące:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k .$$

Wykonując formalnie mnożenie tego wektora przez skalar U albo przez wektor V (skalarnie lub wektorowo), wyrażone we współrzędnych prostokątnych, otrzymujemy wzory na gradient (str. 666), rozbieżność (str. 675) i wirowość (str. 675) we współrzędnych prostokątnych.

Reguły wykonywania obliczeń za pomocą operatora ∇ .

1. Jeżeli ∇ stoi przed kombinacją liniową $\sum a_i X_i$, gdzie a_i są stałe, a X_i są funkcjami punktu (skalarnymi lub wektorowymi), to

$$\nabla \left(\sum a_i X_i \right) = \sum a_i \nabla X_i .$$

2. Jeżeli ∇ stoi przed iloczynem funkcji punktu X, Y, Z (skalarnych lub wektorowych), to stosuje się po kolei do każdej z tych funkcji (przy czym nad tą funkcją pisze się znak $\downarrow$) i dodaje się wyniki:

$$\nabla (XYZ) = \nabla (\downarrow XYZ) + \nabla (X \downarrow YZ) + \nabla (XY \downarrow Z),$$

a następnie przekształca się otrzymane iloczyny według algebry wektorowej w taki sposób, żeby za operatorem ∇ znajdował się tylko czyn-

⁽¹⁾ O wyrażeniu $V \text{ grad}$ patrz str. 678.

nik opatrzone znakiem $\downarrow$; znak ten po wykonaniu obliczeń można pominąć.

Przykłady.

$$1. \operatorname{div}(UV) = \nabla(UV) = \nabla(U \cdot V) + \nabla(U \cdot V) = V \cdot \nabla U + U \cdot \nabla V = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} V.$$

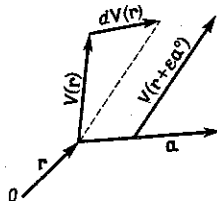
$$2. \operatorname{div}(V_1 \times V_2) = \nabla(V_1 \times V_2) = \nabla(V_1 \times V_2) + \nabla(V_1 \times V_2) = \\ = \nabla V_1 \times V_2 + V_1 \times \nabla V_2 = V_2 \nabla V_1 - V_1 \nabla V_2 = V_2(\nabla \times V_1) - V_1(\nabla \times V_2) = \\ = V_2 \operatorname{rot} V_1 - V_1 \operatorname{rot} V_2.$$

Operator $(a \nabla)$. Przy wykonywaniu obliczeń może powstać wyrażenie operatorowe

$$(a \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + a_y \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Wektor $(a \nabla)V = (a \operatorname{grad})V$ nazywa się *gradientem* pola wektorowego V względem wektora a ; jest on równy pochodnej wektora V względem wektora a (patrz rys. 413):

$$(a \nabla)V = (a \operatorname{grad})V = |a| \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(r + \varepsilon a) - V(r)}{\varepsilon}.$$



Rys. 413

Przykład. $\operatorname{grad}(V_1 V_2) = \nabla(V_1 V_2) = \nabla(V_1 V_2) + \nabla(V_1 V_2).$

Według wzoru $b(ac) = (ab)c + a \times (b \times c)$ (patrz str. 650) otrzymujemy

$$\operatorname{grad}(V_1 V_2) = (V_2 \nabla)V_1 + V_2 \times (\nabla \times V_1) + (V_1 \nabla)V_2 + V_1 \times (\nabla \times V_2) = \\ = (V_2 \operatorname{grad})V_1 + V_2 \times \operatorname{rot} V_1 + (V_1 \operatorname{grad})V_2 + V_1 \times \operatorname{rot} V_2.$$

Wyrażenie $(a \nabla)V$ może być przekształcone według wzoru

$$2(a \nabla)V = \operatorname{rot}(V \times a) + \operatorname{grad}(aV) + a \operatorname{div} V - V \operatorname{div} a - \\ - a \times \operatorname{rot} V - V \times \operatorname{rot} a.$$

Dwukrotne stosowanie operatora ∇ , operator Δ . Dla każdego pola zachodzą wzory

- $\nabla(\nabla \times V) = \operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0,$
- $\nabla \times (\nabla U) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0,$
- $\nabla(\nabla U) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U,$

gdzie Δ (inaczej: $\nabla \nabla$ lub ∇^2) jest operatorem Laplace'a, który we współrzędnych prostokątnych wyraża się w sposób następujący:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

we współrzędnych cylindrycznych:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

we współrzędnych sferycznych:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

- $\nabla(\nabla V) = \operatorname{grad} \operatorname{div} V,$
- $\nabla \times (\nabla \times V) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} V.$

Dwa ostatnie wyrażenia związane są wzorem $\nabla(\nabla V) - \nabla \times (\nabla \times V) = \Delta V$, gdzie $\Delta V = (\nabla \nabla)V$ jest operatorem Laplace'a zastosowanym do wektora V :

$$\Delta V = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = \\ = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\ + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}.$$

15. Twierdzenia całkowe ⁽¹⁾

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa:

$$\oint_{\Sigma} V dS = \int_v \operatorname{div} V dv,$$

tzn. skalarny strumień pola V przez zamkniętą powierzchnię Σ równa się całce rozbieżności V rozciągniętej na obszar v i zawartej wewnątrz powierzchni Σ .

We współrzędnych prostokątnych:

$$\oint_{\Sigma} (V_x dy dz + V_y dz dx + V_z dx dy) = \int_v \int \int \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

gdzie V_x, V_y, V_z są funkcjami trzech zmiennych x, y, z .

Twierdzenie Stokesa:

$$\oint_C V dr = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} V dS,$$

tzn. cyrkulacja pola po konturze C równa się strumieniowi wirowości pola przez dowolną powierzchnię Σ ograniczoną konturem C ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Patrz str. 544, 545.

⁽²⁾ Dokładniejsze sformułowanie patrz str. 544.

We współrzędnych prostokątnych:

$$\int_C (V_x dx + V_y dy + V_z dz) = \int_\Sigma \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy dz + \\ + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dla płaskiego konturu (wzór Greena):

$$\int_C (V_x dx + V_y dy) = \int_\Sigma \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy,$$

gdzie V_x i V_y są funkcjami dwóch zmiennych x i y .

Twierdzenie Greena:

$$1. \int_\Sigma U_1 \text{grad } U_2 dS = \int_v (U_1 \Delta U_2 + \text{grad } U_1 \text{grad } U_2) dv, \\ 2. \int_\Sigma (U_1 \text{grad } U_2 - U_2 \text{grad } U_1) dS = \int_v (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dv,$$

gdzie U_1 i U_2 są to pola skalarne, a Σ jest powierzchnią ograniczającą obszar przestrzenny v . W szczególności, gdy $U_1 = 1$, mamy

$$3. \int_\Sigma \text{grad } U dS = \int_v \Delta U dv.$$

We współrzędnych prostokątnych twierdzenie 3 przybiera następującą postać:

$$\int_\Sigma \frac{\partial U}{\partial x} dy dz + \frac{\partial U}{\partial y} dz dx + \frac{\partial U}{\partial z} dx dy = \int_v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dv.$$

16. Pole wektorowe bezwirowe i bezźródłowe

Określenia. Polem wektorowym bezwirowym V nazywamy pole, którego wirowość jest wszędzie równa zeru. Jeżeli $\text{rot } V = 0$, to $V = \text{grad } U$; funkcja U , czyli potencjał pola V ⁽¹⁾, w dowolnym punkcie M może być wyrażona wzorem

$$(1) \quad U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } V dv}{r},$$

gdzie r jest odległością obszaru elementarnego dv od punktu M , a całka jest rozciągnięta na całą przestrzeń⁽²⁾.

⁽¹⁾ Albo minus potencjał pola V ; patrz notkę ⁽²⁾ na str. 670.

⁽²⁾ Wzór (1) jest prawdziwy, jeżeli rozbieżność pola V jest funkcją różniczkowalną i dostatecznie szybko maleje przy wzrastaniu r do nieskończoności.

Polem wektorowym bezźródłowym albo solenoidalnym V nazywamy pole, którego rozbieżność jest wszędzie równa zeru. Jeżeli $\text{div } V = 0$, to istnieje takie pole bezźródłowe W (potencjał wektorowy pola V), że $V = \text{rot } W$ i w dowolnym punkcie M potencjał wektorowy W wyraża się wzorem

$$(2) \quad W = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot } V dv}{r},$$

gdzie r ma to samo znaczenie co we wzorze (1), a całka rozciąga się na całą przestrzeń⁽¹⁾.

Dowolne pole wektorowe V dostatecznie szybko malejące przy oddalaniu się w nieskończoność może być w jedyny sposób rozłożone na sumę $V = V_1 + V_2$ złożoną z pola bezwirowego V_1 i pola bezźródłowego V_2 , określonych wzorami

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{\text{div } V dv}{r}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\text{rot } V dv}{r}.$$

Pole o źródłach punktowych. Pole Newtona-Coulomba

$$E = \frac{e}{r^3} r$$

jest wszędzie bezwirowe i bezźródłowe z wyjątkiem bieguna O (źródło pola). Jego potencjał $U = -e/r$ ⁽²⁾. Strumień skalarny $\oint_S E dS$ równa się

zeru, jeżeli źródło nie zawiera się wewnątrz powierzchni S , natomiast równa się $4\pi e$, jeżeli źródło znajduje się wewnątrz powierzchni S ; wielkość e nazywamy intensywnością źródła.

Pole newtonowskie o źródle w punkcie r_1 ;

$$E = \frac{e_1}{|r - r_1|^3} (r - r_1).$$

Pole newtonowskie o kilku źródłach $r_1, r_2, r_3, \dots$, których intensywności wynoszą odpowiednio $e_1, e_2, e_3, \dots$:

$$E = \sum \frac{e_i}{|r - r_i|^3} (r - r_i).$$

Strumień skalarny $\oint_S E dS$ jest równy zeru, jeżeli wewnątrz powierzchni S nie ma źródeł, natomiast równa się $4\pi \sum e_i$, gdzie $\sum$ rozciąga się na źródła r_i znajdujące się wewnątrz powierzchni S .

⁽¹⁾ Wzór (2) jest prawdziwy, jeżeli wirowość pola V jest funkcją różniczkowalną i dostatecznie szybko maleje przy wzrastaniu r do nieskończoności.

⁽²⁾ Lub $+e/r$, patrz notkę ⁽²⁾ na str. 670.

17. Równania Laplace'a i Poissona

Równanie Laplace'a. Znaleźnienie pola skalarnego U , dla którego $\Delta U = 0$ (czyli $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$), prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego (tzw. *równania Laplace'a*):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

na płaszczyźnie do równania

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Funkcje spełniające te równania (ciągłe i mające ciągłe pochodne rzędu pierwszego i drugiego) nazywamy *funkcjami Laplace'a* albo *funkcjami harmonicznymi*. Jeżeli znane są wartości funkcji harmonicznej w punktach zamkniętej powierzchni Σ , to tym samym określone są wartości tej funkcji we wszystkich punktach leżących wewnątrz tej przestrzeni; znalezienie tych wartości stanowi *zagadnienie Dirichleta*.

Jeżeli na pewnej powierzchni zamkniętej znane są wartości funkcji harmonicznej U i jej pochodnej $\partial U / \partial n$ w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni, to wartość U_M w punkcie M oblicza się ze wzoru

$$U_M = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\partial(1/r)}{\partial n} U dS,$$

gdzie r jest odległością płata elementarnego dS od punktu M .

Równanie Poissona. Znaleźnienie pola skalarnego U według danej rozbieżności $\varrho(x, y, z)$ jego gradientu prowadzi do *równania Poissona*

$$\Delta U = \varrho(x, y, z), \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \varrho(x, y, z).$$

Jeżeli ϱ jest funkcją ciągłą i wiadomo, że przy $r \rightarrow \infty$ (tzn. przy oddalaniu się punktu do nieskończoności) funkcja U dąży do granicy zero, i to dostatecznie szybko, to rozwiązaniem równania Poissona jest potencjał newtonowski funkcji ϱ określony wzorem

$$U_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho dv}{r},$$

gdzie r jest odległością obszaru elementarnego dv od punktu M , a całka jest rozciągnięta na całą przestrzeń.

III. RACHUNEK WARIACYJNY

1. Podstawowe zasady

Rachunek wariacyjny zajmuje się zagadnieniem wyznaczania jednej lub więcej funkcji z pewnej danej klasy funkcji, dla której dana całka (pojedyncza lub wielokrotna, zależnie od typu funkcji) osiąga ekstremum, tzn. osiąga najmniejszą lub największą wartość. Do zadań tego typu prowadzi wiele zagadnień z dziedziny fizyki teoretycznej, zagadnień inżynierskich lub zagadnień geometrycznych.

Przykłady. 1. Przez dwa różne punkty P_1 i P_2 o różnych wysokościach należy przeprowadzić krzywą w taki sposób, aby punkt materialny poruszający się pod wpływem działania siły ciężkości wzdłuż tej krzywej przebył drogę od jednego punktu do drugiego w możliwie najkrótszym czasie (zaniedbujemy tu tarcie).

Ustawmy układ współrzędnych tak, aby oś odciętych przechodziła przez P_1 i dodatni kierunek osi rzędnych był skierowany w dół od P_1 . Jeżeli punkt materialny spada z wysokości y , to jego prędkość wywołana przyspieszeniem ziemskim g wynosi $\sqrt{2gy}$. Ponieważ prędkość jest pochodną drogi względem czasu, mamy

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}.$$

Ponieważ $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$, wynika stąd, że (por. str. 303)

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

i całkując otrzymujemy

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Tak więc zadanie nasze sprowadziło się do problemu znalezienia krzywej (tj. funkcji $y = y(x)$), która daje minimum całki

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Funkcję podcałkową $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ nazywamy *funkcją bazową*.

2. Niech w przestrzeni xyz dany będzie układ współrzędnych prostokątnych oraz powierzchnia wyznaczona równaniem $G(x, y, z) = 0$. Na powierzchni tej położone są dwa punkty P_1 i P_2 o współrzędnych odpowiednio (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) , przy czym $x_1 \leq x_2$. Punkty P_1 i P_2 należy połączyć najkrótszą różniczkowalną krzywą przestrzenną $y = y(x)$, $z = z(x)$ leżącą na powierzchni $G(x, y, z) = 0$ (jest to tzw. *zadanie o krzywych geodezyjnych*). Z geometrii różniczkowej wiemy, że rozwiązanie tego zadania da nam minimum całki

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx$$

przy danym warunku ubocznym

$$G(x, y(x), z(x)) = 0$$

dla wszystkich $x_1 \leq x \leq x_2$. Szukamy tutaj dwóch funkcji i musi być spełniony warunek uboczny.

Takie warunki uboczne mogą być bardzo różnorodne. W poprzednim zadaniu jest to po prostu pewne równanie algebraiczne, w innych zagadnieniach może to być równanie różniczkowe lub jakiekolwiek inne równanie funkcyjne.

3. Początek układu współrzędnych i ustalony punkt $P(l, 0)$ należy połączyć ciągłą różniczkowalną krzywą o ustalonej długości L w taki sposób, aby krzywa ta i oś x zamykały możliwie największe pole. Tak więc rozwiązanie będzie dawać maksimum dla całki

$$J = \int_0^l y dx$$

przy warunku ubocznym

$$\int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx = L.$$

Tutaj warunek uboczny ma postać ustalonej całki; także zadania nazywamy *izoperymetrycznymi* zadaniami wariacyjnymi.

2. Proste zagadnienie wariacyjne o jednej funkcji niewiadomej

Najprostsze zagadnienie wariacyjne ma postać:

Dla danej funkcji bazowej $F(x, y, y')$ znaleźć krzywą $y = y(x)$ taką, że dla x , $y(x)$ i $y'(x)$ całka

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

przyjmie wartość ekstremalną, tzn. wartość najmniejszą lub największą w porównaniu z dowolną inną wartością, jaką uzyskamy dla tej całki podstawiając ciągle i różniczkowalne krzywe.

Funkcja bazowa wyznaczona jest z konkretnego zagadnienia fizycznego, technicznego czy geometrycznego. W przykładzie 1 mieliśmy $F = \sqrt{1+y'^2}/\sqrt{y}$.

Założmy, że krzywa $y = y(x)$ daje ekstremalną wartość całki J . Przechodząc od krzywej $y = y(x)$ do innej krzywej $\bar{y} = \bar{y}(x)$, przyrost całki $\Delta J = J[\bar{y}(x)] - J[y(x)]$ będzie miał stały znak dla wszystkich krzywych $\bar{y} = \bar{y}(x)$. Tak więc dla minimum będzie $\Delta J \geq 0$, a dla maksimum $\Delta J \leq 0$. Będziemy nazywali różnicę $\bar{y}(x) - y(x)$ *wariacją* funkcji $y(x)$ i będziemy ją oznaczać symbolem δy . Jest jasne, że ta różnica znika na końcowych punktach krzywej:

$$\delta y = 0 \quad \text{dla} \quad x = x_1 \quad \text{i} \quad x = x_2.$$

W zagadnieniach wariacyjnych wariacja funkcji odgrywa tę samą rolę co przyrost zmiennej niezależnej w przypadku zagadnień wartości ekstremalnych rachunku różniczkowego. Wariacja ta jest funkcją x i zachodzi zależność $\frac{d}{dx} \delta y = \delta(y')$. Z krzywej $y = y(x)$ dostajemy rozważaną krzywą $\bar{y} = \bar{y}(x)$, dodając do $y(x)$ jej wariację δy :

$$\bar{y}(x) = y(x) + \delta y.$$

Zazwyczaj całkę możemy rozwinąć w punkcie tzw. *względnej ekstremum*; tzn. ekstremum będącym minimum lub maksimum w klasie krzywych leżących w otoczeniu danej krzywej. Możemy tu w różny sposób interpretować pojęcie „otoczenia”. Jeżeli założymy, że w równaniach dla wartości funkcji $\bar{y} = y(x) + \delta y$ największa z wartości $|\delta y|$ jest mała, podczas gdy $|\delta y'|$ może przybrać dowolne wartości, wówczas — w przypadku gdy krzywa $y = y(x)$ daje ekstremum — mówimy o *ekstremum mocnym*. Jeżeli otrzymujemy wartość ekstremalną dla krzywej $y = y(x)$ jedynie w przypadku gdy porównujemy ją z ograniczoną klasą krzywych, dla których zarówno $|\delta y|$ jak i $|\delta y'|$ są małe, tzn. z krzywymi, które różnią się mało od krzywej $y = y(x)$ nie tylko położeniem, ale i kierunkiem stycznej, wówczas mówimy o *ekstremum słabym*.

Mocne ekstremum jest jednocześnie słabym ekstremum, ale sytuacja odwrotna nie zawsze jest spełniona.

Aby otrzymać *warunki konieczne dla ekstremum*, obliczamy przyrost całki J przy przejściu od $y(x)$ do krzywej $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y$, otrzymując

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

i używając twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\Delta \mathcal{F} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial y'} \right) \delta y' \right] dx.$$

Symbol $\hat{}$ oznacza tu, że pochodne cząstkowe obliczone są dla pewnych pośrednich wartości drugiej i trzeciej zmiennej. Załóżmy, że pochodne cząstkowe $\partial F/\partial y$ i $\partial F/\partial y'$ są ciągłe; wówczas $\Delta \mathcal{F}$ można zapisać w postaci

$$\Delta \mathcal{F} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx + R(y, y'),$$

gdzie $R(y, y')$ jest wielkością rzędu mniejszego od δy i $\delta y'$.

Analogicznie jak w przypadku pojęcia różniczki rozważamy część główną wariacji $\Delta \mathcal{F}$ naszej całki, która jest liniowa względem δy i $\delta y'$, i oznaczmy ją przez $\delta \mathcal{F}$:

$$\delta \mathcal{F} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y' \right] dx.$$

Jeżeli $\delta \mathcal{F} \neq 0$, wówczas dla dostatecznie małych δy i $\delta y'$ znak $\Delta \mathcal{F}$ jest dominowany przez znak $\delta \mathcal{F}$. Gdy δy zmienia swój znak, zmienia się również znak $\delta \mathcal{F}$, i wobec tego znak $\Delta \mathcal{F}$ nie może pozostawać stały dla dowolnych δy . Tak więc znikanie wariacji $\delta \mathcal{F} = 0$ jest warunkiem koniecznym dla istnienia wartości ekstremalnej naszej całki. Wobec tego w punkcie ekstremalnym otrzymujemy

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0.$$

Całkując częściowo drugi składnik i używając warunków brzegowych $\delta y = 0$ dla $x = x_1$ i $x = x_2$ widzimy, że

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

Całka ta musi zniknąć dla dowolnego δy . Jest to możliwe jedynie w przypadku gdy pierwszy z czynników jest tożsamościowo równy zeru, tzn. gdy

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Tak więc funkcja $y(x)$, dla której nasza całka przyjmuje wartość

ekstremalną, musi spełniać tzw. *równanie Eulera z rachunku wariacyjnego*. Dokładniej, równanie to przybiera postać

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^3 F}{\partial y' \partial x} = 0.$$

Krzywe będące rozwiązaniem tego równania nazywamy *ekstremalnymi w sensie rachunku wariacyjnego*. Warunek spełnienia tego równania jest w istocie konieczny, ale niewystarczający dla ekstremum.

Ogólnie, rozwiązanie $y = y(x)$ zwyczajnego równania różniczkowego drugiego stopnia ma dwie stałe dowolne powstałe w wyniku całkowania. Aby wyznaczyć te stałe, trzeba mieć dwa warunki brzegowe. W wielu zagadnieniach te warunki brzegowe są w postaci $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$; tzn. równanie $y = y(x)$ określa krzywą przechodzącą przez punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$. W praktyce, jeżeli równanie Eulera daje się łatwo scałkować, prowadzi to bezpośrednio do rozwiązania żadanego zagadnienia wariacyjnego. Chcielibyśmy więc, przed podaniem warunków dostatecznych, podać przykład użycia równania Eulera.

Przykład. Mamy

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 - y^2 - 2xy \right) dx = \text{ekstremum};$$

warunki brzegowe $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Dla tej funkcji bazowej równanie różniczkowe Eulera ma postać

$$-2y - 2x - 2y'' = 0, \quad \text{czyli} \quad y'' + y + x = 0.$$

Rozwiązanie ogólne ma postać $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$ (por. str. 566). Warunki brzegowe dają dla stałych całkowanie wartości

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{\sin 1}.$$

Tak więc szukana funkcja ma postać

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

Przypadki szczególne.

1° Funkcja bazowa nie zależy od x :

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y, y') dx = \text{ekstremum}.$$

W tym przypadku równanie Eulera przybiera postać

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] y' = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dx} \left[F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right] = 0.$$

Jedno całkowanie daje nam

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C_1.$$

Z tego równania otrzymujemy żądane rozwiązanie równania Eulera za pomocą drugiego całkowania.

Przykład. Mamy (por. str. 683):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx = \text{ekstremum};$$

warunki brzegowe $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Całka pośrednia ma postać

$$(1) \quad \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Otrzymujemy stąd

$$y' = \frac{\sqrt{1-C_1^2 y}}{C_1 \sqrt{y}},$$

a po rozdzieleniu zmiennych

$$dx = \frac{dy C_1 \sqrt{y}}{\sqrt{1-C_1^2 y}}.$$

Całkując otrzymujemy

$$x = C_2 - \frac{1}{C_1} \sqrt{y-C_1^2 y^2} - \frac{1}{C_1^2} \arcsin \sqrt{1-C_1^2 y}.$$

Ta forma rozwiązania nie jest wygodna; przez odpowiednie przekształcenie można sprowadzić ją do postaci parametrycznej. Z równania (1) otrzymujemy

$$\sqrt{y(1+y'^2)} = \frac{1}{C_1}$$

i oznaczając dla uproszczenia $\frac{1}{C_1} = \sqrt{2K_1}$ mamy

$$y(1+y'^2) = 2K_1.$$

Wprowadzamy teraz parametr t podstawiając

$$(2) \quad y' = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} t = -\frac{\sin t}{1+\cos t}$$

i mamy

$$y \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} t \right) = \frac{y}{\cos^2 \frac{1}{2} t} = 2K_1,$$

skąd

$$(3) \quad y = 2K_1 \cos^2 \frac{1}{2} t = K_1 (1 + \cos t).$$

Ponadto, otrzymujemy z (2)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{1+\cos t}{\sin t} (-K_1 \sin t),$$

czyli

$$\frac{dx}{dt} = K_1 (1 + \cos t),$$

skąd całkując otrzymujemy

$$x = K_1 (t + \sin t) + K_2.$$

Łącząc to z równaniem (3) dostajemy ostatecznie

$$x = K_1 (t + \sin t) + K_2, \quad y = K_1 (1 + \cos t).$$

Jest to znana parametryczna postać cykloidy (por. str. 128, 129).

2° Zmienna y nie występuje w funkcji bazowej:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y') dx = \text{ekstremum}.$$

W tym przypadku równanie Eulera ma prostą postać i otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Jako całkę pośrednią dostajemy

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1.$$

Przykład. Równanie różniczkowe Eulera dla problemu

$$\int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1+y'^2} dx = \text{ekstremum}$$

ma postać

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

i całka pośrednia

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

daje rozwiązanie ogólne

$$y = C_1 \ln |x + \sqrt{x^2 - C_1^2}| + C_2.$$

3^o Funkcja bazowa nie zależy ani od x , ani od y :

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y') dx = \text{ekstremum}.$$

W tym przypadku równanie Eulera upraszcza się do

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0,$$

a więc, o ile $\partial^2 F / \partial y'^2$ nie znika tożsamościowo, $y'' = 0$, skąd otrzymujemy jako rozwiązanie linię prostą

$$y = C_1 x + C_2.$$

Przykład. Dwa ustalone punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ należy połączyć możliwie najkrótszą ciągłą i różniczkowalną krzywą.

Funkcja bazowa $\sqrt{1+y'^2}$ w całce

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx$$

zależy jedynie od y' . Ponieważ $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$, krzywą dającą rozwiązanie równania Eulera jest prosta przechodząca przez punkty P_1 i P_2 :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

4^o $\partial^2 F / \partial y'^2 = 0$. Jest to przypadek, gdy funkcja bazowa jest liniowa względem y' . Można ją zapisać w postaci

$$F(x, y, y') = \varphi(x, y) + \psi(x, y)y'.$$

Równanie Eulera ma postać

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Mamy tu dwa przypadki:

Jeżeli $\partial \psi / \partial x$ nie jest tożsamościowo równe $\partial \varphi / \partial y$, jest to zwyczajne równanie krzywej bez stałych dowolnych. Warunki brzegowe nie będą tu na ogół spełnione.

Jeżeli $\partial \psi / \partial x$ jest równa tożsamościowo $\partial \varphi / \partial y$, wynika stąd, że $[\varphi(x, y) + \psi(x, y)y'] dx$ jest różniczką zupełną (por. str. 392). Wartość całki

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F(x, y, y') dx$$

zależy jedynie od współrzędnych x_1, y_1 i x_2, y_2 , a nie od krzywej łączącej te punkty. Nie jest to więc zagadnienie ekstremalne w sensie rachunku wariacyjnego.

Przykłady. 1. Mamy

$$\int_{x_1}^{x_2} [xy + (xy^2 + y^3)y'] dx = \text{ekstremum},$$

$\partial \varphi / \partial y = x$, $\partial \psi / \partial x = y^2$. Rozwiązaniem jest zatem parabola $y^2 - x = 0$.

2. Mamy

$$\int_{x_1}^{x_2} [3x^2 + 2xy + y^2 + (x^2 + 2xy + 3y^2)y'] dx = \text{ekstremum}.$$

Warunki brzegowe $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Mamy tu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

oraz

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(1,1)} [(3x^2 + 2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy + 3y^2) dy] = \\ & = [x^3 + x^2y + xy^2 + y^3]_{x=0, y=0}^{x=1, y=1} = 4. \end{aligned}$$

Wartość ta nie zależy od drogi łączącej punkty (0, 0) i (1, 1).

3. Warunki wystarczające dla założenia ekstremum

Ze wzoru Taylora wynika, że przyrost całki dla prostego zagadnienia wariacyjnego z jedną funkcją niewiadomą można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx + R, \end{aligned}$$

gdzie R jest wielkością zależną od δy i $\delta y'$ rzędu mniejszego od nich. Ze względu na drugą różniczkę, składnik

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx$$

nazywamy *drugą wariacją* i oznaczamy ją przez $\delta^2 J$. Jeżeli $\delta J = 0$ i $\delta^2 J \neq 0$, wówczas dla wszystkich dostatecznie małych δy i $\delta y'$ znak ΔJ zgodny jest ze znakiem drugiej wariacji. Otrzymujemy stąd (w połączeniu z głównym warunkiem $\delta J = 0$) warunek, który jest nie tylko konieczny, dla ekstremum w przypadku ogólnym, ale też i *dostateczny* dla słabego ekstremum. W punkcie ekstremalnym, minimum lub maksimum, z naszej całki wynika, że konieczne jest odpowiednie spełnienie *warunku Legendre'a* $\partial^2 F / \partial y'^2 \geq 0$ lub $\partial^2 F / \partial y'^2 \leq 0$. Założymy ponadto, że krzywa ekstremalna zanurzona jest w jednoparametrycznym zbiorze ekstremalnym w taki sposób, że żadna z krzywych tego zbioru, w pewnym otoczeniu, nie przecina żadnej innej krzywej (*warunek Jacobiego*). Tworzy to tzw. *pole ekstremalne*. Tak więc warunki $\partial^2 F / \partial y'^2 \geq 0$ i $\partial^2 F / \partial y'^2 \leq 0$ są *warunkami wystarczającymi* odpowiednio dla słabego minimum i słabego maksimum.

Przykład. Szukamy ekstremum całki

$$J = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

przy warunkach brzegowych $y(0) = 0$, $y(a) = 0$, gdzie $a > 0$ i $a \neq n\pi$ (n jest liczbą całkowitą).

Równanie Eulera ma w tym przypadku postać $y'' + y = 0$ i jego rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad \text{czyli} \quad y = \bar{C}_1 \sin(x + \bar{C}_2).$$

Z warunków brzegowych wynika, że dla stałych całkowitych mamy bądź $C_1 = C_2 = 0$, bądź $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$. Jeżeli $a > \pi$, każda krzywa rodziny $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ przecina naszą krzywą ekstremalną, a zatem nie da się jej zanurzyć w tej rodzinie. Tak więc w tym przypadku nie jest spełniony warunek Jacobiego. Jeżeli $a < \pi$, to prosta $y = 0$ należy do rodziny krzywych $y(x) = \bar{C}_1 \sin(x + \bar{e})$, gdzie $0 < \bar{e} < \pi - a$, i w przedziale $(0, a)$ żadna krzywa tej rodziny nie przecina żadnej innej krzywej tej rodziny. Ponadto $\partial^2 F / \partial y'^2 = 2 > 0$, a więc dla $a < \pi$ oba warunki dla istnienia minimum naszej całki są spełnione.

Warunki wystarczające dla mocnego ekstremum podane zostały przez Weierstrassa i wyprowadzono je za pomocą odmiennego rozumowania. Zakładamy, że poszukiwana krzywa ekstremalna może należeć do pola ekstremalnego $y = y(x, a)$; niech $p(x, y)$ będzie tzw. *gradientem pola*, tzn. współczynnikiem kątowym stycznej do ekstremum pola w punkcie (x, y) . Wówczas przyrost całki można napisać w postaci

$$\Delta J = \int_{(L)} \left[F(x, y, y') - F(x, y, p) - \frac{\partial F}{\partial p} (y' - p) \right] dx,$$

gdzie całka brana jest wzdłuż dowolnej klasy krzywych $y = \bar{y}(x)$, oznaczonej przez (L) . Funkcja podcałkowa w ostatnim równaniu wyznaczona jest funkcją Weierstrassa i oznaczona jest przez $E(x, y, p, y')$. Ponieważ mamy

$$\Delta J = \int_{(L)} E(x, y, p, y') dx,$$

dla słabego minimum wystarczy, aby funkcja $E(x, y, p, y')$ była nieujemna dla wszystkich punktów dostatecznie bliskich ekstremum i dla wszystkich wartości y' dostatecznie bliskich p .

Dla mocnego minimum warunki dane przez to równanie będą jednakże miały postać żądania, aby funkcja $E(x, y, p, y')$ była dodatnia dla wszystkich wartości y' , nie tylko tych, które różnią się mało od p .

W podobny sposób można sformułować warunki dla mocnego i słabego maksimum.

Rozważane warunki można uprościć. Rozwijamy funkcję bazową w szereg Taylora

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + \frac{\partial F}{\partial p} (y' - p) + \frac{(y' - p)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 F(x, y, \bar{p})}{\partial p^2},$$

gdzie $\bar{p}$ oznacza wartość leżącą między p i y' . Wobec tego

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{5} \cdot \frac{\partial^2 F(x, y, \bar{p})}{\partial p^2}.$$

Znak E wyznaczany jest przez znak $\partial^2 F(x, y, \bar{p})/\partial p^2$, skąd wnosimy, że dla słabego minimum mamy warunek Legendre'a $\partial^2 F/\partial y'^2 > 0$. Ze względu na założenie ciągłości pochodnych wynika stąd, że w pewnym otoczeniu wartości zmiennych mamy $\partial^2 F/\partial y'^2 > 0$. Dla mocnego minimum wystarcza, aby nierówność ta zachodziła dla wszystkich punktów (x, y) leżących w pewnym otoczeniu ekstremum i dla wszystkich wartości y' . Zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku konieczne jest spełnienie warunku Jacobiego.

Często jednak, podobnie jak i w rachunku różniczkowym, nie przeprowadzamy rozwiązań nad warunkami dostatecznymi i pokazujemy istnienie ekstremum w sposób pośredni. Tak więc obliczamy ekstremum w zagadnieniu praktycznym prowadzącym do problemu wariacyjnego za pomocą równania Eulera, a istnienie ekstremum uzasadniamy rozważaniami dotyczącymi istoty technicznej, fizycznej czy geometrycznej problemu. Taka jest np. sytuacja w przypadku poszukiwania linii geodezyjnych na danej powierzchni: jest oczywiste, że pomiędzy dwoma punktami powierzchni musi istnieć co najmniej jedna krzywa na tej powierzchni łącząca te punkty o długości nie przekraczającej długości żadnej innej krzywej o tej własności. Jednakże w takich intuicyjnych rozumowaniach należy zawsze postępować z wielką ostrożnością.

4. Zagadnienie wariacyjne we współrzędnych brzegowych

Mamy dwa możliwe przypadki.

1° Mamy

$$(1) \quad \int_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi, \varphi') dr = \text{ekstremum}.$$

Równanie różniczkowe Eulera ma postać

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) = 0.$$

Przykład. Mamy

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{1+r^2\varphi'^2}}{r} dr = \text{ekstremum}.$$

Równanie Eulera

$$0 - \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \varphi'}{r \sqrt{1+r^2\varphi'^2}} \right) = 0$$

ma rozwiązanie

$$r = K_2 e^{K_1 \varphi}.$$

2° Mamy

$$(2) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi, r, r') d\varphi = \text{ekstremum}.$$

W tym przypadku równanie Eulera ma postać

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial r'} \right) = 0.$$

Przykład. Mamy

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r^2 + r'^2 + 2r \sin \varphi) d\varphi = \text{ekstremum}.$$

Dla równania Eulera

$$2r + 2 \sin \varphi - 2r'' = 0$$

otrzymujemy rozwiązanie

$$r = C_1 e^\varphi + C_2 e^{-\varphi} - \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

5. Zagadnienie odwrotne do zagadnienia wariacyjnego

Proste zagadnienie wariacyjne o jednej funkcji niewiadomej prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego. Na odwrót, każdemu zwyczajnemu równaniu różniczkowemu rzędu drugiego odpowiada zagadnienie wariacyjne postaci

$$\mathcal{J} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \text{ekstremum}.$$

Dla równania różniczkowego

$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

poszukujemy rozwiązania ogólnego $z(x, y, y')$ zastępującego równanie o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y' \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi(x, y, y') \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y'} z = 0.$$

Funkcja bazowa $F(x, y, y')$ zagadnienia wariacyjnego odpowiadającego równaniu zwyczajnemu $y'' = \varphi(x, y, y')$ dana jest zatem jako rozwiązanie następującego równania rzędu drugiego o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = z(x, y, y')$$

W rozwiązaniu mamy dwie funkcje dowolne zmiennych x i y . Należy je wyznaczyć tak, aby

$$\varphi(x, y, y') \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Przykład. Należy znaleźć wszystkie funkcje bazowe, dla których ekstrema są liniami prostymi. Równanie różniczkowe rzędu drugiego linii prostej ma postać $y'' = 0$, a więc $\varphi(x, y, y') \equiv 0$. Równanie cząstkowe rzędu pierwszego jest

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y' \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

i ma rozwiązanie ogólne

$$z = \Phi(y', xy' - y).$$

Równanie cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \Phi(y', xy' - y)$$

ma rozwiązanie

$$F = \int_0^{y'} (y' - t) \Phi(t, xt - y) dt + \psi(x, y) y' + \omega(x, y).$$

Funkcje $\psi(x, y)$ i $\omega(x, y)$ wyznaczamy z warunku

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

który daje

$$\psi = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

gdzie Ω jest dowolną funkcją x i y .

W pewnym szczególnym przypadku można znaleźć zagadnienie wariacyjne odpowiadające równaniu różniczkowemu zwyczajnemu rzędu drugiego bez rozwiązywania równania cząstkowego. I tak równaniu różniczkowemu

$$y'' a(x) + y' a'(x) - y \beta(x) - \gamma(x) = 0$$

o warunkach brzegowych $y(0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ odpowiada zagadnienie wariacyjne

$$\mathcal{J} = \int_0^{x_1} [a(x) y'^2 + \beta(x) y^2 + 2\gamma(x) y] dx = \text{ekstremum}.$$

Przykład. Równaniu różniczkowemu

$$y'' + y + x = 0 \quad \text{z warunkami} \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

odpowiada zagadnienie wariacyjne

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y'^2 - y^2 - 2xy \right] dx = \text{ekstremum}.$$

6. Zagadnienie wariacyjne w postaci parametrycznej

W wielu zagadnieniach rachunku wariacyjnego wygodnie jest rozpatrywać poszukiwaną funkcję w postaci parametrycznej

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

gdzie

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}.$$

Zagadnienie wariacyjne

$$\int_{t_1}^{t_2} F[x(t), y(t), x', y'] dt = \text{ekstremum}$$

można wyznaczyć poprzez równania Eulera

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Te dwa równania nie są jednakże niezależne od siebie⁽¹⁾. Jako parametr wybieramy kąt τ utworzony przez styczną w punkcie $P(x, y)$ i oś rzędnych; tak więc $y' = x' \operatorname{tg} \tau$. W ten sposób oba równania Eulera daje się zastąpić jednym równaniem⁽²⁾.

Przy rozwiązywaniu zagadnień wariacyjnych postaci parametrycznej należy jednak zwrócić baczną uwagę na następujący fakt; mianowicie w pewnych okolicznościach wartość całki

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt$$

⁽¹⁾ Jest tak jedynie w przypadku geometrycznego zagadnienia wariacyjnego, kiedy ten układ równań równoważny jest pojedynczemu równaniu Eulera, mianowicie równaniu Eulera w postaci Weierstrassa.

⁽²⁾ Dzieje się tak jedynie w przypadku, gdy, jak w poniższym przykładzie, bądź $x(t)$, bądź $y(t)$ nie występuje w funkcji bazowej

zależy od wyboru parametru t . W tym przypadku zagadnienie istnienia ekstremum tej całki nie ma sensu (1).

Poniższe twierdzenie może okazać się pomocne przy rozstrzygnięciu tego problemu:

Wartość ekstremum otrzymanego z całki jest niezależna od wyboru parametru dokładnie w tych przypadkach, gdy funkcja bazowa $F(x, y, x', y')$ jest *dotatnio jednorodną funkcją pierwszego rzędu* względem zmiennych x' i y' (2).

Przykład. Mamy

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx = \text{ekstremum}.$$

Napiszmy całkę w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{y}} dt.$$

Z równania

$$\frac{\sqrt{(kx')^2+(ky')^2}}{\sqrt{y}} = k \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{y}} \quad (\text{dla } k > 0)$$

wynika, że wartość całki jest niezależna od metody parametrycznej. Równanie Eulera

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0$$

ma uproszczoną postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{y} \sqrt{x'^2+y'^2}} \right) = 0.$$

Tak więc

$$\frac{x'}{\sqrt{y} \sqrt{x'^2+y'^2}} = c_1.$$

(1) Można tak twierdzić jedynie w przypadku geometrycznych zagadnień wariacyjnych.

(2) Tzn. jeżeli tożsamość $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$ zachodzi dla $k > 0$. Pojęcie *dotatnio jednorodnych funkcji* jest nieco słabsze od pojęcia funkcji jednorodnych. Dla funkcji *dotatnio jednorodnej* tożsamość $f(x, y, kx', ky') = kf(x, y, x', y')$ spełniona jest jedynie dla dodatnich k , podczas gdy w ogólnym przypadku jednorodności tożsamość ta musi zachodzić nie tylko dla dodatnich, ale także dla ujemnych wartości k . Tak więc np. funkcje

$$\sqrt{x'^2+y'^2} \quad x'y' - x'y + \sqrt{x'^2+y'^2}$$

są *dotatnio jednorodne*, ale nie są *jednorodne* w zwykłym sensie.

Rozwiązanie tego równania uprości się przez wprowadzenie kąta τ jako parametru. Otrzymamy w tym przypadku

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{dx}{ds} = \cos \tau, \quad y' = x' \operatorname{tg} \tau,$$

skąd

$$\frac{\cos \tau}{\sqrt{y}} = c_1, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{\cos^2 \tau}{c_1^2} = \frac{1 + \cos 2\tau}{2c_1^2}.$$

Ponadto $y' = -\frac{\sin 2\tau}{c_1^2}$, a więc

$$x' = y' \operatorname{ctg} \tau = -\frac{2 \cos^3 \tau}{c_1^2},$$

co daje po scałkowaniu

$$x = -\frac{2}{c_1^2} \left(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \sin \tau \cos \tau \right) + c_2.$$

Dwa równania

$$x = -\frac{1}{2c_1^2} (2\tau + \sin 2\tau) + c_2, \quad y = \frac{1 + \cos 2\tau}{2c_1^2}$$

przedstawiają zwykłą cykloidę w postaci parametrycznej (por. str. 128).

7. Funkcje bazowe zawierające pochodne wyższych rzędów

Założmy, że całka

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

ma wartość ekstremalną. Równanie Eulera przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial y'''} \right) + \\ + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Przykłady. 1. Mamy

$$\int_0^1 (y'')^2 dx = \text{ekstremum},$$

przy warunkach brzegowych $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 5$.

Z równania Eulera

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y') = 2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

wynika, że rozwiązanie ma postać

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3.$$

Warunki brzegowe dają $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = C_4 = 1$, a więc

$$y = x^2 + x^3.$$

2. Mamy

$$\int_0^{\pi/2} (y''^2 - 2y'^2 + y^2) dx = \text{ekstremum},$$

przy warunkach brzegowych

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Równanie Eulera ma postać

$$2y + 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania rzędu czwartego jest

$$y = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x.$$

Tak więc

$$C_2 = 0, \quad C_1 + C_4 = 0, \quad \frac{1}{2} C_3 \pi + C_4 = 1,$$

$$-\left(\frac{1}{2} C_1 \pi + C_2\right) + C_3 = \frac{1}{2} \pi,$$

skąd $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$, i rozwiązanie ma postać

$$y = -x \cos x + \sin x.$$

8. Równanie różniczkowe Eulera dla problemu wariacyjnego o n funkcjach niewiadomych

Założmy, że w funkcji bazowej występuje n nieznanymi funkcji

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \quad \dots, \quad y_n = f_n(x)$$

zmiennej niezależnej x , razem z ich pierwszymi pochodnymi

$$y'_1 = f'_1(x), \quad y'_2 = f'_2(x), \quad \dots, \quad y'_n = f'_n(x).$$

Tak więc dla wyznaczania n nieznanymi funkcji dających ekstremum całki

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

mamy n równań różniczkowych

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_1} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_2} \right) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_n} \right) = 0.$$

Ilość warunków brzegowych równa się w ogólności $2n$.

Dla zagadnienia wariacyjnego o dwóch niewiadomych funkcjach:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx = \text{ekstremum},$$

wyprowadzamy dwa równania Eulera

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0.$$

Na ogół trzeba czterech warunków brzegowych dla wyznaczenia stałych w tym zagadnieniu wariacyjnym.

Przykłady. 1. Mamy

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + z'^2 + 2yz' + 2zy') dx = \text{ekstremum}.$$

Dwoma nieznanymi funkcjami są $y = f(x)$ i $z = g(x)$, a warunki brzegowe są następujące:

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad z_1 = g(x_1), \quad z_2 = g(x_2).$$

Mamy

$$2z' - (2y'' + 2z') = 0, \quad 2y' - (2z'' + 2y') = 0,$$

czyli

$$y'' = 0, \quad z'' = 0,$$

skąd

$$y = C_1 x + C_2, \quad z = C_3 x + C_4.$$

Z warunków brzegowych otrzymujemy

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. Mamy

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + z'^2 - 2yz + 2y + 2z) dx = \text{ekstremum}.$$

Równanie Eulera daje

$$-2z + 2 - 2y'' = 0, \quad -2y + 2 - 2z'' = 0,$$

czyli

$$y'' = 1 - z, \quad z'' = 1 - y.$$

Rozwiązanie ogólne tego jednoczesnego układu ma postać

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + 1,$$

$$z = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + 1.$$

9. Ekstremum całki wielokrotnej

Należy wyznaczyć funkcję niewiadomą $z = f(x, y)$ tak, aby całka podwójna

$$\iint_B F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

rozciągnięta na obszar domknięty płaszczyzny xy osiągała wartość ekstremalną. Oznaczmy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y.$$

Równanie Eulera przybierze postać

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) = 0.$$

W przypadku ogólnym jest to równanie o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego.

Przykłady. 1. Mamy

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy = \text{ekstremum}.$$

Równanie Eulera daje

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y).$$

2. Mamy

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \text{ekstremum}.$$

Równanie Eulera

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ma rozwiązanie ogólne

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y).$$

Dla całki n -krotnej

$$\iiint \dots \int F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Równanie Eulera ma postać następującą:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{x_1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{x_2}} \right) - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{x_n}} \right) = 0.$$

Przykład. Mamy

$$\iiint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \text{ekstremum}.$$

Równaniem Eulera jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

W przypadku całek wielokrotnych z wyższymi pochodnymi cząstkowymi, ograniczymy nasze rozważanie do takich funkcji bazowych, w których oprócz zmiennych x, y i z mogą pojawiać się pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}.$$

Załóżmy też, że całka podwójna

$$\iint_B F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx dy$$

osiąga ekstremum.

Dla tego problemu równanie Eulera ma postać

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{yy}} \right) = 0.$$

Przykłady. 1. Mamy

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy = \text{ekstremum}.$$

Dla równania Eulera znajdujemy

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = f(x, y).$$

2. Przy wyprowadzaniu równania ruchu pręta elastycznego za pomocą zasady Hamiltona konieczne jest rozwiązanie następującego zagadnienia wariacyjnego:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \frac{1}{2} \left[eq(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - E \mathcal{J}(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt = \text{minimum}.$$

Dla równania Eulera otrzymujemy

$$eq(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mathcal{J}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0.$$

10. Zagadnienie wariacyjne z warunkami ubocznymi

Będziemy zakładać, że poszukiwana funkcja $y = f(x)$ oprócz warunku ekstremalności musi również spełniać pewne dalsze warunki. Metody stosowane przy rozwiązywaniu tego rodzaju zagadnień są w zasadzie takie jak metody stosowane w rachunku różniczkowym przy wyznaczaniu wartości ekstremalnych funkcji przy zadanych warunkach ubocznych. Najważniejszą z tych metod jest tak zwana *metoda mnożników Lagrange'a* (por. str. 413).

Rozpatrzmy zagadnienie wariacyjne o dwóch niewiadomych funkcjach i warunku ubocznym, tzn. całkę

$$\mathcal{J} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx,$$

dla której trzeba znaleźć ekstremum, przy jednoczesnym spełnieniu warunku $G(x, y, z) = 0$. Konstruujemy najpierw funkcję bazową

$$H(x, y, z, y', z') = F(x, y, z, y', z') + \lambda(x) G(x, y, z),$$

w której, jak to już zaznaczyliśmy *explicite*, $\lambda = \lambda(x)$ może być funkcją zmiennej x .

Dwie szukane funkcje $y = f(x)$ i $z = y(x)$ jak również funkcja $\lambda = \lambda(x)$ spełniają równania Eulera

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial z'} \right) = 0,$$

ze względu na warunek brzegowy $G(x, y, z) = 0$. Równania te można zapisać w formie następującej:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0.$$

W zagadnieniach wariacyjnych z warunkami ubocznymi korzystne jest często wprowadzenie parametru t . W tym przypadku rozwiązanie zagadnienia przebiega w myśl metod rachunku na formach parametrycznych następująco. Będziemy znów używali oznaczeń

$$\frac{dx}{dt} = x^*, \quad \frac{dy}{dt} = y^*, \quad \frac{dz}{dt} = z^*.$$

Załóżmy, że całka

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} F[x(t), y(t), z(t), x^*, y^*, z^*] dt$$

osiąga ekstremum przy warunku ubocznym $G(x, y, z) = 0$. Równania Eulera mają postać

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x^*} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^*} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial z^*} \right) = 0.$$

Przykłady. 1. Dana jest powierzchnia $G(x, y, z) = 0$ i dwa punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ na tej powierzchni. Należy wyznaczyć najkrótszą krzywą leżącą na tej powierzchni i łączącą te punkty (por. str. 683). Zakładamy, że całka

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

osiąga minimum przy spełnieniu warunku ubocznego $G(x, y, z) = 0$ (jest to tzw. *zagadnienie linii geodezyjnych*).

Równania Eulera dają

$$\lambda(t) \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0,$$

$$\lambda(t) \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0,$$

$$\lambda(t) \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0,$$

skąd, wprowadzając długość łuku s i używając oznaczenia $\lambda = \mu(ds/dt)$:

$$\mu \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \mu \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \mu \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Równania te wyrażają fakt, że w każdym punkcie krzywej geodezyjnej normalna do powierzchni i normalna główna do krzywej pokrywają się.

2. W przykładzie poniższym wyznaczymy krzywe geodezyjne na walcu cylindrycznym $x^2 + y^2 = R^2$. Rozwiązanie uprości się bardzo, jeśli zapiszemy równanie walca w postaci parametrycznej

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t.$$

Żądana krzywa leży na tej powierzchni, a więc spełnia układ

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t;$$

pozostaje zatem jedynie wyznaczenie funkcji z . Wynika stąd, że w warunku

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \text{minimum},$$

ze względu na fakt, że $x' = -R \sin t$, $y' = R \cos t$, funkcja bazowa redukuje się do $F = \sqrt{R^2 + z'^2}$.

Otrzymujemy więc równanie Eulera

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \right) = 0,$$

co daje

$$z = \frac{C_1 R t}{\sqrt{1 - C_1^2}} + C_2.$$

Równanie to, w połączeniu z $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ jest parametrycznym przedstawieniem spirali cylindrycznej.

11. Problem izoperymetryczny w rachunku wariacyjnym

Założmy, że całka

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

posiada ekstremum przy warunku brzegowym

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = k.$$

Konstruujemy funkcję bazową

$$H(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'),$$

w której λ jest stałym parametrem. Wówczas równanie Eulera ma postać

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0.$$

Przykład. Mamy

$$\int_{x_1=0}^{x_2=l} y dx = \text{ekstremum}, \quad \int_{x_1=0}^{x_2=b} \sqrt{1+y'^2} dx = L$$

(por. str. 685). Mamy tu $H(x, y, y') = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$.

Ponieważ w funkcji bazowej nie występuje explicite zmienna x , wynika stąd, że całka pośrednia równania Eulera jest

$$y + \lambda \sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Mamy zatem $y' = \sqrt{\lambda^2 - (C_1 - y)^2} / (C_1 - y)$. Całka tego równania różniczkowego rzędu pierwszego daje okrąg

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Wartości C_1 , C_2 i λ wyznaczamy z warunku, że krzywa musi przechodzić przez punkty $O(0, 0)$ i $P(l, 0)$ i że długość łuku krzywej od O do P musi mieć długość L .

Daje to równanie przestępne dla λ , które można rozwinąć metodami przybliżonymi.

W wielu przypadkach, za pomocą odpowiedniej parametryzacji, można zamienić zadanie wymagające użycia mnożników Lagrange'a przez problem izoperymetryczny.

Przykład. W poniższym przykładzie punkt P może poruszać się po osi x . Tak więc zadanie ma postać

$$\int_0^x y dx = \text{ekstremum}$$

przy warunku brzegowym $\int_0^x \sqrt{1+y^2} dx = L$. Będziemy używali wzoru

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \quad \text{czyli} \quad dx = \sqrt{1-(dy/ds)^2} ds.$$

Zatem zagadnienie sprowadza się do obliczania ekstremum w całce

$$\mathcal{J} = \int_{s=0}^{s=L} y \sqrt{1-(dy/ds)^2} ds.$$

Ponieważ funkcja bazowa

$$F = y \sqrt{1-(dy/ds)^2}$$

nie zależy od zmiennej niezależnej s , całka pośrednia równania Eulera ma postać

$$y \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{y dy/ds}{\sqrt{1-(dy/ds)^2}} = c_1,$$

czyli

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1^2 - y^2}.$$

Z dalszego całkowania otrzymujemy

$$(1) \quad y = c_1 \sin \left(\frac{s}{c_1} + c_2 \right).$$

Ponadto

$$dx = \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds = \frac{y}{c_1} ds,$$

a zatem

$$(2) \quad x = -c_1 \cos \left(\frac{s}{c_1} + c_2 \right) + c_3.$$

Równania (1) i (2) to parametryczne przedstawienie okręgu. Eliminując parametr s otrzymujemy

$$(3) \quad (x-c_3)^2 + y^2 = c_1^2.$$

Warunki brzegowe $x=0$, $y=0$, $s=0$ i $y=0$, $s=L$ dają stałe $c_1 = c_3 = L/\pi$, $c_2 = 0$.

Tak więc ostateczna odpowiedź jest

$$(x-L/\pi)^2 + y^2 = (L/\pi)^2.$$

12. Dwa geometryczne zagadnienia wariacyjne o dwóch zmiennych niezależnych

1° Wyznaczyć powierzchnię o najmniejszym polu, rozpiętą na danej krzywej przestrzennej.

Zakładamy, że całka

$$\mathcal{J} = \iint_B \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

osiąga minimum. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y, \quad \dots$$

otrzymujemy równanie Eulera

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) = 0,$$

czyli

$$\frac{z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1+z_x^2)}{(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}} = 0.$$

Po lewej stronie ostatniej równości, jak wiadomo z geometrii różniczkowej, stoi wyrażenie dla krzywizny powierzchni, $1/\varrho_1 + 1/\varrho_2$ (por. str. 337). Równość ta orzeka zatem, że krzywizna powierzchni szukanej ma być równa zero, czyli, innymi słowy, krzywizny główne $1/\varrho_1$ i $1/\varrho_2$ muszą znosić się wzajemnie. Powierzchnie takie nazywają się powierzchniami minimalnymi.

2° Jaka powierzchnia, o danym polu, zamyka największą objętość (tzw. zagadnienie izoperymetryczne)?

Mamy

$$\iint_B z dx dy = \max,$$

przy warunku ubocznym

$$\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = k.$$

Konstruujemy funkcję bazową

$$H(x, y, z, z_x, z_y) = z + \lambda \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}.$$

Z równania Eulera otrzymujemy

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial z_y} \right) = 0,$$

a zatem

$$1 - \lambda \frac{z_{xx}z_y^2 - z_{xy}z_{xy} + z_{xx} + z_{yy}z_x^2 - z_{xy}z_{xy} + z_{yy}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = 0,$$

czyli

$$\frac{z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\lambda},$$

a więc

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tak więc rozwiązanie jest powierzchnią o stałej krzywiznie.

13. Metoda Ritza rozwiązywania zagadnień wariacyjnych

W wielu zagadnieniach rachunku wariacyjnego uzyskanie dokładnego rozwiązania równania Eulera jest bądź bardzo trudne, bądź niemożliwe. Z tego powodu rozwinięto metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień wariacyjnych, pozwalające uniknąć rozwiązywania równania Eulera. Najbardziej rozpowszechnioną z tych metod przybliżonych w rachunku wariacyjnym jest tzw. *metoda Ritza*.

Aby rozwiązać zagadnienie

$$(1) \quad \mathcal{J} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \text{ekstremum}$$

za pomocą metody aproksymacji, zapisujemy szukaną funkcję $y = f(x)$ w postaci

$$(2) \quad y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x).$$

Funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ dobrane są tak, aby spełnione były warunki brzegowe. Tak więc nasze zadanie sprowadza się jedynie do wyznaczenia stałych $c_1, c_2, \dots, c_n$. Aby to osiągnąć, podstawiamy funkcję (2) do (1) i otrzymujemy

$$\mathcal{J}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \text{ekstremum}.$$

Żądane wartości stałych c_i dane są przez następujące n równań:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_n} = 0.$$

Przykłady. 1. Mamy

$$\int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx = \text{ekstremum},$$

przy warunkach brzegowych $f(0) = f(1) = 0$.

Utwórzmy $y = c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x)$, a zatem

$$y' = c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2).$$

Wprowadzając to wyrażenie do całki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(c_1, c_2) = \int_0^1 [c_1^2(1-2x)^2 + 2c_1c_2(1-2x)(2x-3x^2) + c_2^2(2x-3x^2)^2 - \\ - c_1^2x^2(1-x)^2 - 2c_1c_2x^3(1-x)^2 + c_2^2x^4(1-x)^2 - \\ - 2c_1x^2(1-x) - 2c_2x^3(1-x)] dx = \text{ekstremum}, \end{aligned}$$

czyli

$$\mathcal{J}(c_1, c_2) = c_1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2c_1c_2 \cdot \frac{3}{20} + c_2^2 \cdot \frac{13}{105} - 2c_1 \cdot \frac{1}{12} - 2c_2 \cdot \frac{1}{20} = \text{ekstremum}.$$

Musimy wobec tego mieć

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_1} = 2c_1 \cdot \frac{3}{10} + 2c_2 \cdot \frac{3}{20} - 2 \cdot \frac{1}{12} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_2} = 2c_1 \cdot \frac{3}{20} + 2c_2 \cdot \frac{13}{105} - 2 \cdot \frac{1}{20} = 0,$$

skąd

$$c_1 = \frac{71}{369}, \quad c_2 = \frac{7}{41}.$$

Rozwiązanie jest więc

$$y = \frac{71}{369} x - \frac{8}{369} x^2 - \frac{7}{41} x^3.$$

Znamy już (str. 687) rozwiązanie dokładne tego problemu, które ma postać

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

Poniższa tablica daje wartości dla różnych punktów na krzywej dokładnej i na krzywej przybliżonej:

x	y (dokładne)	y (przybliżone)
0	0	0
0,2	0,0361	0,0362
0,4	0,0627	0,0626
0,6	0,0710	0,0708
0,8	0,0525	0,0526
1,0	0	0

Różnica między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym jest więc rzędu 10^{-4} .

2. Mamy

$$\int_0^1 (x^2 y'^2 + xy) dx = \text{ekstremum},$$

przy warunkach brzegowych $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

Utwórzmy

$$\varphi_1 = x(x-1), \quad \varphi_2 = x^2(x-1),$$

skąd

$$y = c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1),$$

$$y' = c_1(2x-1) + c_2(3x^2-2x),$$

a zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(c_1, c_2) &= \int_0^1 [c_1^2(4x^4 - 4x^3 + x^2) + 2c_1c_2(6x^5 - 7x^4 + 2x^3) + \\ &\quad + c_2^2(9x^6 - 12x^5 + 4x^4) + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)] dx = \\ &= \frac{2}{15}c_1^2 + \frac{1}{5}c_1c_2 + \frac{3}{35}c_2^2 - \frac{1}{12}c_1 - \frac{1}{20}c_2; \end{aligned}$$

stąd

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_1} = \frac{4}{15}c_1 + \frac{1}{5}c_2 - \frac{1}{12} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_2} = \frac{1}{5}c_1 + \frac{6}{35}c_2 - \frac{1}{20} = 0,$$

czyli

$$c_1 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = -\frac{7}{12}.$$

Mamy więc

$$y = \frac{3}{4}(x^2 - x) - \frac{7}{12}(x^3 - x^2) = -\frac{7}{12}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

IV. RÓWNANIA CAŁKOWE

1. Pojęcia ogólne

Pod pojęciem *równania całkowego* rozumiemy takie równanie o funkcji niewiadomej $\varphi(x)$ (gdzie $\varphi(x)$ określona jest dla $a \leq x \leq b$), że w równaniu pojawia się całka, w której funkcja podcałkowa zależy od $\varphi(x)$. Oczywiście, w równaniu takim mogą występować też inne składniki — niekoniecznie w postaci całki — zależne bezpośrednio od $\varphi(x)$.

Przykłady:

$$1. \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = 0,$$

$$2. \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x),$$

$$3. \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = 0,$$

$$4. \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

W tych przykładach $f(x)$ i $K(x, y)$ są danymi funkcjami. Funkcja znana, pojawiająca się pod znakiem całki, nazywa się *jądrem równania całkowego*. Jądro $K(x, y)$ musi być określone w kwadracie $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, podczas gdy funkcja $f(x)$ musi być określona w przedziale $a \leq x \leq b$.

Równania całkowe, w których funkcja niewiadoma występuje liniowo, nazywamy *równaniami całkowymi liniowymi*. Powyższe cztery przykłady są przykładami równań liniowych; z takimi równaniami będziemy mieli głównie do czynienia w dalszym ciągu.

Założmy milcząco, że funkcje $K(x, y)$ i $f(x)$ są ciągłe w obszarach swojej określoności (przy omawianiu przypadków funkcji nieciągłych nadmienimy to explicite); obszary określoności funkcji $f(x)$ i $K(x, y)$ są domknięte.

Ponadto, ograniczymy się od razu tylko do tych rozwiązań $\varphi(x)$, które są ciągłe w swoim obszarze określoności $a \leq x \leq b$. Jest to konsekwencją zwykłego (riemannowskiego) pojęcia całki (por. twierdzenie o istnieniu całki funkcji ciągłej, str. 486).

Równania całkowe, w których obie granice całkowania są stałe, będziemy nazywali *równaniami całkowymi Fredholma* (przykłady 1 i 2). Jeżeli tylko jedna z granic całkowania jest stałą, mówimy o *równaniu całkowym Volterry* (przykłady 3 i 4). *Równaniem całkowym pierwszego rodzaju* nazywamy takie równanie, w którym funkcja niewiadoma występuje jedynie pod znakiem całki (przykłady 1 i 3). Jeżeli funkcja niewiadoma występuje nie tylko pod znakiem całki, ale jeszcze w jakiś inny sposób, to równanie takie nazywamy *równaniem całkowym drugiego rodzaju* (przykłady 2 i 4). Równania całkowe, w których każdy składnik zawiera funkcję niewiadomą $\varphi(x)$, nazywamy *jednorodnymi*. Równania całkowe, w których przynajmniej jeden ze składników nie zawiera funkcji niewiadomej $\varphi(x)$, nazywa się *niejednorodnymi*. Składnik, w którym nie pojawia się funkcja nieznana, oznaczamy w poprzednich przykładach przez $f(x)$, nazywamy *funkcją zakłócającą*.

2. Najprostsze równanie całkowe, które można sprowadzić do równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą różniczkowania

1° Jan Bernoulli (1667 - 1748) rozpatrywał następujący problem: wyznaczyć krzywą OB (tzn. równanie $y = \varphi(x)$) o takim kształcie, że pole OAB równe jest trzeciej części prostokąta opisanego $OABC$ (rys. 414).

Równanie szukane

$$\int_a^x \varphi(x) dx = \frac{1}{3} x \varphi(x)$$

jest równaniem Volterry, o jądrze $K(x, y) = 1$; można go za pomocą różniczkowania sprowadzić do równania

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \{x \varphi'(x) + \varphi(x)\},$$

czyli

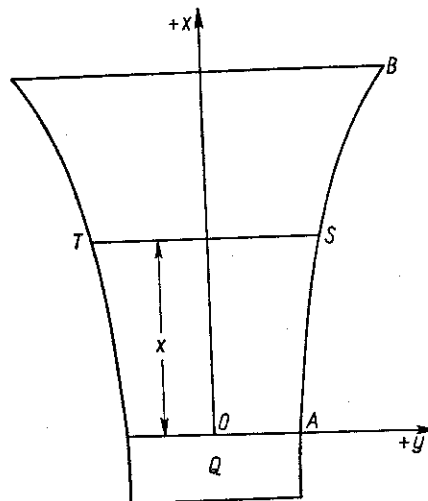
$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = 2 \frac{dx}{x}.$$

Rys. 414

Jako rozwiązanie tego jednorodnego równania liniowego otrzymujemy zbiór parabol kwadratowych $y = \varphi(x) = Cx^2$ (dla $0 \leq x < +\infty$).

2° Bryła obrotowa, narysowana schematycznie na rysunku 415, ma gęstość γ i ma zostać przymocowana w pozycji pionowej swoją górną

powierzchnią. Ponadto rozciąganie przez siłę Q skierowaną ku dołowi łącznie z rozciąganiem na skutek własnego ciężaru, ma być takie, aby na każdym przekroju równoległym do podstawy powstawały stałe naprężenia o wielkości σ . Należy wyznaczyć kształt tej bryły, dany za pomocą funkcji $y = \varphi(x)$ opisującej krzywą AB .



Rys. 415

Łączna siła działająca na przekrój ST będzie

$$Q + \gamma \pi \int_0^x (\varphi(x))^2 dx.$$

Pole tego obszaru wynosi $\pi(\varphi(x))^2$. Musimy wobec tego mieć

$$Q + \gamma \pi \int_0^x (\varphi(x))^2 dx = \sigma \pi (\varphi(x))^2.$$

Jest to równanie Volterry; można je rozwiązać za pomocą różniczkowania; mamy

$$\gamma \pi (\varphi(x))^2 = \sigma \pi 2 \varphi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Całka tego równania jest

$$y = \varphi(x) = C e^{\gamma x / 2\sigma}.$$

Podstawiając do równania całkowego otrzymujemy

$$Q + \gamma \pi \int_0^x C^2 e^{\gamma x/\sigma} dx = \sigma \pi C^2 e^{\gamma x/\sigma},$$

czyli

$$Q + \gamma \pi C^2 (e^{\gamma x/\sigma} - 1) = \sigma \pi C^2 e^{\gamma x/\sigma}.$$

Wynika stąd, że

$$C = \sqrt{Q/\sigma\pi},$$

a więc poszukiwane rozwiązanie jest

$$y = \varphi(x) = \sqrt{Q/\sigma\pi} e^{\gamma x/2\sigma}.$$

3. Równania całkowe, które można rozwiązać przez różniczkowanie

Do tej klasy równań należą przede wszystkim równania Volterry pierwszego rodzaju. Różniczkowanie względem x całki

$$\int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

przeprowadzono w (2'), str. 510.

Traktując x jako parametr otrzymujemy (zakładamy, że pochodne cząstkowe jądra $K(x, y)$ względem x istnieją i są ciągłe):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = \int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi(y) dy + K(x, x) \varphi(x).$$

Przykład. Mamy

$$\int_0^x e^{-x} \varphi(y) dy = e^{-x} + x - 1.$$

Różniczkowanie względem x daje

$$-\int_0^x e^{-x} \varphi(y) dy + e^{-x} \varphi(x) = -e^{-x} + 1,$$

czyli

$$-e^{-x} - x + 1 + e^{-x} \varphi(x) = -e^{-x} + 1,$$

skąd mamy

$$\varphi(x) = x e^x.$$

Metodę różniczkowania możemy stosować zawsze w przypadku gdy jądro równania całkowego Volterry pierwszego rodzaju jest wielomianem.

Przykład. Mamy

$$(1) \quad \int_0^x ((x-y)^2 - 2) \varphi(y) dy = -4x.$$

Po trzykrotnym różniczkowaniu otrzymujemy

$$(2) \quad 2 \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy - 2\varphi(x) = -4,$$

$$(3) \quad 2 \int_0^x \varphi(y) dy - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$(4) \quad \varphi(x) - \varphi''(x) = 0;$$

stąd

$$(5) \quad \varphi(x) = A e^x + B e^{-x}.$$

Dla wyznaczenia A i B podstawiamy wartość 0 dla x w (2) i (3):

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Mamy zatem $A = B = 1$ i szukane rozwiązanie równania (1) jest

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x}.$$

4. Równanie całkowe Abela

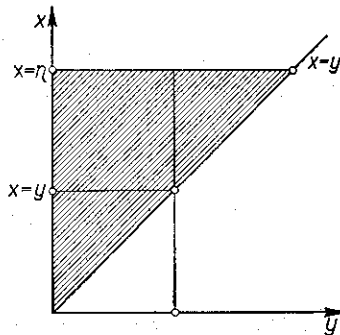
Równaniem całkowym Abela nazywamy równanie Volterry pierwszego rodzaju

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x),$$

w którym jądro $1/\sqrt{x-y}$ jest nieskończone dla $y = x$.

Mnożymy obie strony równania przez $1/\sqrt{\eta-x}$ i całkujemy względem x w granicach od 0 do η :

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta-x}} \left(\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy \right) dx &= \\ &= \int_0^\eta \frac{f(x)}{\sqrt{\eta-x}} dx. \end{aligned}$$



Rys. 416

Całkowanie podwójne po lewej stronie powyższego wzoru napisane jest w taki sposób, że najpierw całkujemy w kierunku y od 0 do x .

Wobec tego obszar całkowania jest trójkątem leżącym powyżej przekątnej $y = x$ na płaszczyźnie xy (rys. 416). Zmieniamy porządek całkowania tak, aby różniczkować najpierw w kierunku x od $x = y$ do $x = \eta$, a następnie w kierunku y od $y = 0$ do $y = \eta$. Otrzymujemy w ten sposób

$$\int_0^{\eta} \varphi(y) \left(\int_y^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx \right) dy = \int_0^{\eta} \frac{f(x)}{\sqrt{\eta-x}} dx.$$

Ponieważ

$$\int_y^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{\eta-x} \sqrt{x-y}} = \pi^{(1)},$$

otrzymujemy, zastępując η przez y :

$$\int_0^y \varphi(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx.$$

Teraz można znaleźć szukaną funkcję $\varphi(y)$ za pomocą różniczkowania

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dy} \left(\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx \right).$$

Pomimo osobliwości funkcji podcałkowej, całka ta jest zbieżna. Można się o tym przekonać, stosując np. drugie kryterium dla zbieżności całek (por. str. 509). O funkcji $f(x)$ zakładaliśmy od początku, że jest ciągła, aby zapewnić istnienie całki (w sensie Riemanna).

Przykład. Mamy

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = x;$$

stąd (por. str. 452, wzór (125)):

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dy} \left(\int_0^y \frac{x}{\sqrt{y-x}} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dy} \left(-\frac{2}{3} (x+2y) \sqrt{y-x} \right) \Big|_0^y = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{4}{3} y^{3/2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \sqrt{y}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Całkę tę można obliczyć podstawiając $x = y + (\eta - y)u$. Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u-u^2}} = \left| \arcsin(2u-1) \right|_0^1 = \pi$$

(por. str. 463, wzór (264)).

Niekiedy równania Volterry drugiego rodzaju dążą się też rozwiązać przez różniczkowanie.

Przykład. Mamy

$$(1) \quad \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

Różniczkujemy dwukrotnie względem x :

$$(2) \quad \int_0^x \varphi(y) dy + f'(x) = \varphi'(x),$$

$$(3) \quad \varphi(x) + f''(x) = \varphi''(x).$$

Oczywiście musimy założyć, że funkcja $f(x)$ ma ciągłą drugą pochodną. Musimy także założyć, od samego początku, że szukana funkcja $\varphi(x)$ jest dwukrotnie różniczkowana. Rozwiązanie tego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego o stałych współczynnikach i funkcji zakłócającej $f''(x)$ jest (por. str. 580):

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} e^x \left(C_1 + \int_0^x f''(t) e^{-t} dt \right) - \frac{1}{2} e^{-x} \left(C_2 + \int_0^x f''(t) e^t dt \right)$$

i po scałkowaniu przez części (por. str. 490):

$$\begin{aligned} (4a) \quad \varphi(x) &= f(x) + \frac{1}{2} e^x \left(C_1 - f'(0) - f(0) + \int_0^x f(t) e^{-t} dt \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-x} \left(C_2 - f'(0) + f(0) + \int_0^x f(t) e^t dt \right). \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia stałych C_1 i C_2 różniczkujemy równanie (4) względem x :

$$(5) \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} e^x \left(C_1 + \int_0^x f''(t) e^{-t} dt \right) + \frac{1}{2} e^{-x} \left(C_2 + \int_0^x f''(t) e^t dt \right).$$

Podstawiając wartość 0 w miejsce x w (1), (2), (4) i (5) otrzymujemy

$$(6) \quad \varphi(0) = f(0),$$

$$(7) \quad \varphi'(0) = f'(0),$$

skąd

$$(8) \quad \varphi(0) = \frac{1}{2} (C_1 - C_2),$$

$$(9) \quad \varphi'(0) = \frac{1}{2} (C_1 + C_2).$$

dla wszystkich funkcji $\psi(x)$, które spełniają transponowane równanie jednorodne dla tej samej wartości λ , mianowicie

$$\lambda \int_a^b (a_1(y)\beta_1(x) + a_2(y)\beta_2(x) + \dots + a_n(y)\beta_n(x)) \psi(y) dy = \psi(x).$$

Możemy wzmocnić to twierdzenie w sposób następujący: wartość λ jest wartością charakterystyczną równania transponowanego (9) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona wartością charakterystyczną równania całkowego (1). Ponadto, dla każdej wartości charakterystycznej λ równania (1) i (9) mają zawsze tę samą skończoną ilość liniowo niezależnych funkcji charakterystycznych. Twierdzenie to nie ogranicza się jednakże tylko do równań całkowych z jądrami zdegenerowanymi, ale prawdziwe jest dla równań o ogólniejszych typach jąder (por. § 9).

Przykłady. 1. Rozpatrzmy równanie

$$\int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) dy + x = \varphi(x).$$

Mamy

$$a_1(x) = x, \quad \beta_1(y) = y, \quad a_2(x) = \sqrt{x}, \quad \beta_2(y) = \sqrt{y},$$

$$f(x) = x.$$

Stąd

$$a_{11} = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}, \quad a_{12} = \int_0^1 y^{3/2} dy = \frac{2}{5},$$

$$a_{21} = \int_0^1 y^{5/2} dy = \frac{2}{5}, \quad a_{22} = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2},$$

$$b_1 = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \int_0^1 y^{3/2} dy = \frac{2}{5}.$$

Z równań

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) B_1 - \frac{2}{5} B_2 = \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{5} B_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) B_2 = \frac{2}{5}$$

otrzymujemy $B_1 = \frac{49}{26}$, $B_2 = \frac{30}{13}$. Rozwiązaniem równania jest więc

$$\varphi(x) = \frac{49}{26}x + \frac{30}{13}\sqrt{x} + x,$$

czyli

$$\varphi(x) = \frac{75}{26}x + \frac{30}{13}\sqrt{x}.$$

2. Rozpatrzmy równanie

$$\lambda \int_1^2 \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Mamy

$$a_1(x) = x, \quad \beta_1(y) = y, \quad a_2(x) = \frac{1}{x}, \quad \beta_2(y) = \frac{1}{y},$$

$$a_{11} = \int_1^2 y^2 dy = \frac{7}{3}, \quad a_{12} = \int_1^2 dy = 1 = a_{21}, \quad a_{22} = \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Otrzymujemy jednorodny układ równań liniowych

$$\left(1 - \frac{7}{3}\lambda\right) B_1 - \lambda B_2 = 0, \quad -\lambda B_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) B_2 = 0.$$

Układ ten ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{7}{3}\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix} = \Delta(\lambda)$$

znika. Z równania $1 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2 = 0$ otrzymujemy wartości charakterystyczne

$$\lambda_1 = \frac{17 + \sqrt{265}}{2} \approx 16,6394,$$

$$\lambda_2 = \frac{17 - \sqrt{265}}{2} \approx 0,3606.$$

Równania te dają

$$B_2 \approx -2,2732 B_1 \text{ dla } \lambda_1 \quad \text{oraz} \quad B_2' \approx 0,4399 B_1' \text{ dla } \lambda_2.$$

Zgodnie z tym funkcje charakterystyczne są

$$\varphi_1(x) \approx 16,6394 B_1 \left(x - 2,2732 \frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x) \approx 0,3606 B_1' \left(x + 0,4399 \frac{1}{x}\right).$$

Ponieważ stałe B_1 i B_1' są nieoznaczone, możemy napisać

$$\varphi_1(x) \approx C_1 \left(x - 2,2732 \frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x) \approx C_2 \left(x + 0,4399 \frac{1}{x}\right).$$

3. Równanie całkowe

$$(10) \quad \lambda \int_{-1}^{+1} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x)$$

można rozwiązać jako równanie o jądrze zdegenerowanym (por. str. 720) przyjmując

$$\alpha_1(x) = x, \quad \beta_1(y) = y, \quad \alpha_2(x) = x^2, \quad \beta_2(y) = y^2,$$

$$a_{11} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = \frac{2}{5},$$

$$b_1 = \int_{-1}^{+1} y f(y) dy, \quad b_2 = \int_{-1}^{+1} y^2 f(y) dy.$$

Z układu równań

$$B_1 \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right) = \int_{-1}^{+1} y f(y) dy, \quad B_2 \left(1 - \frac{2}{5} \lambda\right) = \int_{-1}^{+1} y^2 f(y) dy$$

wynika, że rozwiązaniem (10) jest

$$\varphi(x) = \frac{x \lambda \int_{-1}^{+1} y f(y) dy}{1 - \frac{2}{3} \lambda} + \frac{x^2 \lambda \int_{-1}^{+1} y^2 f(y) dy}{1 - \frac{2}{5} \lambda} + f(x).$$

Równanie jednorodne

$$(10a) \quad \lambda \int_{-1}^{+1} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

ma rozwiązanie jedynie dla wartości charakterystycznych $\lambda_1 = \frac{3}{2}$

i $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ otrzymanych z równania

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3} \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2}{5} \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odpowiadające tym wartościom funkcje charakterystyczne są

$$\varphi_1(x) = C_1 x \quad \text{oraz} \quad \varphi_2(x) = C_2 x^2.$$

Z warunku

$$\int_{-1}^{+1} C_1 x C_2 x^2 dx = 0$$

widać, że funkcje te są ortogonalne. Równanie (10) ma rozwiązanie dla wartości charakterystycznych $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{5}{2}$, jeżeli $f(x)$ jest ortogonalna odpowiednio do funkcji charakterystycznych $\varphi_1(x) = C_1 x$ lub $\varphi_2(x) = C_2 x^2$. Warunki te spełnione są np. przez funkcję

$$f(x) = k_0 + k_2 x^2 + k_4 x^4 + \dots \quad \text{dla} \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}$$

lub funkcję postaci

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_3 x^3 + k_5 x^5 + \dots \quad \text{dla} \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Unormowane funkcje charakterystyczne otrzymamy wyznaczając stałe C_1 i C_2 tak, aby

$$\int_{-1}^{+1} C_1^2 x^2 dx = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{-1}^{+1} C_2^2 x^4 dx = 1,$$

czyli

$$C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} \quad \text{oraz} \quad C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{10},$$

skąd

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} \sqrt{6} x \quad \text{oraz} \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{10} x^2.$$

6. Szereg von Neumanna (kolejne przybliżenia)

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń Picarda (por. str. 559). Istnieje także metoda iteracyjna oparta na tej samej zasadzie dla rozwiązywania równań całkowych liniowych. Rozpatrzmy następujące równanie całkowe Fredholma

$$(1) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

Jako (zerowe) przybliżenie szukanego rozwiązania $\varphi(x)$ bierzemy funkcję $\varphi_0(x) = 0$. Podstawiając to przybliżenie do lewej strony równania całkowego, tzn. w miejsce niewiadomej pod znakiem całki, otrzymujemy pierwsze przybliżenie

$$(2) \quad \varphi_1(x) = f(x).$$

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy drugie przybliżenie

$$(3) \quad \varphi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, \eta) f(\eta) d\eta + f(x) \quad (1).$$

Rozwiązanie to po podstawieniu do (1) daje trzecie przybliżenie

$$(4) \quad \varphi_3(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \\ + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, y) K(y, \eta) f(\eta) d\eta dy + f(x).$$

Wprowadzając oznaczenie

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(2)}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(t, y) dt$$

można przepisać równanie (4), zmieniając porządek całkowania w całości podwójnej, następująco:

$$(4a) \quad \varphi_3(x) = \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, \eta) f(\eta) d\eta + f(x).$$

Po podstawieniu (4a) do (1) i zastąpieniu

$$\int_a^b K(x, \eta) K^{(2)}(\eta, y) d\eta$$

symbolem $K^{(3)}(x, y)$ otrzymujemy

$$(5) \quad \varphi_4(x) = \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, y) f(y) dy + \\ + \lambda^3 \int_a^b K^{(3)}(x, y) f(y) dy + f(x).$$

Kontynuujemy ten proces, oznaczając

$$(6) \quad K^{(n)}(x, y) = \int_a^b K(x, \eta) K^{(n-1)}(\eta, y) d\eta$$

(1) Aby uniknąć nieporozumień, zastąpiliśmy y przez η .

i przyjmując jako n -te przybliżenie rozwiązania równania całkowego

$$(7) \quad \varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, y) f(y) dy + \\ + \dots + \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, y) f(y) dy + f(x).$$

Wyrażenie $K^{(n)}(x, y)$ nazywamy $(n-1)$ -szym jądrem iterowanym, podczas gdy $K^{(1)}(x, y) = K(x, y)$. Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy tzw. szereg von Neumanna:

$$(8) \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, y) f(y) dy + f(x).$$

Ostatnie wyrażenie można zapisać w postaci

$$(8a) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b (K^{(1)}(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \\ + \lambda^2 K^{(3)}(x, y) + \dots) f(y) dy + f(x).$$

Wyrażenie w nawiasie, tzn. wyrażenie

$$(9) \quad K^{(1)}(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \lambda^2 K^{(3)}(x, y) + \dots = \Gamma(x, y, \lambda)$$

nazywamy jądrem rozwiązującym lub *rezolwentą*. Ostateczne rozwiązanie równania (1) przybiera postać

$$(10) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x).$$

Szereg von Neumanna jest zbieżny absolutnie i jednostajnie w kwadracie $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ dla

$$(11) \quad |\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy}}.$$

Jeżeli M jest kresem górnym wartości $|K(x, y)|$ w kwadracie $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ (1), to można wynioskować z powyższego osza-

(1) Dla funkcji $K(x, y)$ określonej dla $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ istnieje taka liczba G , że

a. w całym obszarze określoności $|K(x, y)| \leq G$,

b. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt (x_0, y_0) w obszarze określoności funkcji K taki, że

$$|K(x_0, y_0)| \geq G - \varepsilon.$$

Liczba G wyznaczona jest jednoznacznie i zwana jest kresem górnym funkcji $|K(x, y)|$.

cowania, że (por. str. 488)

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy \leq M^2(b-a)^2,$$

a więc

$$\frac{1}{M(b-a)} \leq \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy}}.$$

Tak więc szereg von Neumanna jest zbieżny dla wszystkich λ takich, że

$$(12) \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Jednakże promień zbieżności dany przez (12) jest zazwyczaj mały w porównaniu z oszacowaniem (11).

Za pomocą szeregu von Neumanna można także rozwiązywać równanie całkowe Volterry. Rozważmy równanie

$$(13) \quad \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

Aby móc całkować w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$, przyjmujemy

$$K(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad y > x.$$

Wówczas jądra iterowane (dla $y < x$) będą dane przez równości:

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &= K(x, y), \\ K^{(2)}(x, y) &= \int_a^b K(x, t) K(t, y) dt = \\ (14) \quad &= \int_y^x K(x, t) K(t, y) dt, \\ &\dots\dots\dots \\ K^{(n)}(x, y) &= \int_y^x K(x, t) K^{(n-1)}(t, y) dt, \end{aligned}$$

gdzie $K(x, t) = 0$ dla $t > x$ i $K(t, y) = 0$ dla $t < y$.

Ponieważ $K(x, y)$ jest ciągła w obszarze określoności i obszar ten jest domknięty i ograniczony, istnieje punkt (x_1, y_1) , w którym $|K(x, y)|$ przyjmuje wartość równą swojemu kresowi górnemu, tzn. $|K(x_1, y_1)| = G$. W tym przypadku możemy mówić o maksimum $M (= G)$ funkcji $|K(x, y)|$ zamiast o jej kresie górnym.

Dla $y > x$ jądra iterowane oparte na tej funkcji również znikają tożsamościowo. Szereg von Neumanna ma w tym przypadku postać

$$(15) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^x K^{(n)}(x, y) f(y) dy + f(x),$$

czyli

$$(15a) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) f(y) dy + f(x).$$

Nie ma potrzeby specjalnego badania zbieżności tego szeregu von Neumanna, ponieważ dla równań całkowych Volterry postaci (13) szeregi von Neumanna (15) i (15a) są zbieżne dla wszystkich wartości λ .

Przykłady. 1. Rozpatrzmy równanie

$$\lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y) \varphi(y) dy + 1 = \varphi(x).$$

Mamy $f(x) = 1$ oraz

$$K^{(1)}(x, y) = \sin(x+y),$$

$$\begin{aligned} K^{(2)}(x, y) &= \int_0^{\pi} \sin(x+\eta) \sin(\eta+y) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \pi (\sin x \sin y + \cos x \cos y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^{(3)}(x, y) &= \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} (\sin x \sin \eta + \cos x \cos \eta) \times \\ &\quad \times (\sin y \cos \eta + \cos y \sin \eta) d\eta = \\ &= \left(\frac{1}{2} \pi\right)^2 (\sin x \cos y + \cos x \sin y), \end{aligned}$$

$$K^{(4)}(x, y) = \left(\frac{1}{2} \pi\right)^3 (\sin x \sin y + \cos x \cos y),$$

$$K^{(5)}(x, y) = \left(\frac{1}{2} \pi\right)^4 (\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$

$$K^{(6)}(x, y) = \left(\frac{1}{2} \pi\right)^5 (\sin x \sin y + \cos x \cos y),$$

.....

Ponieważ

$$\int_0^{\pi} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) dy = 2 \cos x,$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x \sin y + \cos x \cos y) dy = 2 \sin x,$$

więc rozważane równanie całkowe ma rozwiązanie

$$\varphi(x) = 2\lambda \cos x \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^4 + \dots \right] + \\ + \lambda^2 \pi \sin x \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^4 + \dots \right] + 1,$$

czyli

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda \cos x + \lambda^2 \pi \sin x}{1 - \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^2} + 1.$$

Ponieważ $M = 1$, więc przedział zbieżności dany przez (12) jest

$$|\lambda| < \frac{1}{1 \cdot |\pi - 0|},$$

czyli będzie przedziałem od $-1/\pi$ do $1/\pi$. Z drugiej strony, nierówność (11) daje nam, z uwagi na to, że

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \pi^2,$$

nieco większy przedział od $-\sqrt{2}/\pi$ do $+\sqrt{2}/\pi$. W tym jednakże przypadku szereg von Neumanna jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $\lambda^2 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^2$; wobec tego przedział jego zbieżności wynosi $|\lambda| < 2/\pi$.

Wartości charakterystyczne dane przez $1 - \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \pi \right)^2 = 0$ wynoszą $\lambda = \pm 2/\pi$. Dla tych wartości mianownik w $\varphi(x)$ znika.

2. Rozwiążmy równanie Volterry drugiego rodzaju za pomocą szeregu von Neumanna:

$$\int_0^x xy \varphi(y) dy + 1 = \varphi(x).$$

Mamy

$$K^{(1)}(x, y) = xy,$$

$$K^{(2)}(x, y) = \frac{x^4 y - xy^4}{3},$$

$$K^{(3)}(x, y) = \frac{x^7 y - 2x^4 y^4 + xy^7}{18},$$

$$K^{(4)}(x, y) = \frac{x^{10} y - 3x^7 y^4 + 3x^4 y^7 - xy^{10}}{162};$$

stąd

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 5} + \frac{x^9}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{x^{12}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots + 1.$$

3. Innym przykładem równania Volterry drugiego rodzaju jest

$$\lambda \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy + (x+1) = \varphi(x);$$

mamy

$$K^{(1)} = x-y, \quad K^{(2)} = \frac{(x-y)^3}{3!}, \quad K^{(3)} = \frac{(x-y)^5}{5!}, \quad \dots,$$

skąd

$$\varphi(x) = \lambda \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \dots + x + 1.$$

Dla $\lambda = 1$ otrzymujemy $\varphi(x) = e^x$. Istotnie, używając metody ze str. 719 otrzymujemy

$$\varphi(x) = x + 1 + \frac{1}{2} e^x \int_0^x (t+1) e^{-t} dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^x (t+1) e^t dt = \\ = x + 1 - \frac{1}{2} x - 1 + e^x - \frac{1}{2} x = e^x.$$

7. Metoda Fredholma rozwiązywania równań całkowych

Równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju

$$(1) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x),$$

w którym funkcje $K(x, y)$ i $f(x)$ są ciągłe w obszarze $a \leq x \leq b$ i $a \leq y \leq b$, można rozpatrywać jako graniczny przypadek układów równań liniowych.

Podzielmy obszar całkowania na n równych części. Niech

$$\Delta = \frac{b-a}{n},$$

i oznaczmy

$$x_1 = y_1 = a, \quad x_2 = y_2 = a + \Delta, \quad \dots, \quad x_n = y_n = a + (n-1)\Delta.$$

Otrzymamy wtedy przybliżoną równość

$$(2) \quad \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \approx (K(x, y_1) \varphi(y_1) + K(x, y_2) \varphi(y_2) + \dots + K(x, y_n) \varphi(y_n)) \Delta.$$

Równanie (1) przybierze postać

$$(3) \quad \lambda (K(x, y_1) \varphi(y_1) + K(x, y_2) \varphi(y_2) + \dots + K(x, y_n) \varphi(y_n)) \Delta + f(x) \approx \varphi(x).$$

Równanie to musi być spełnione dla wszystkich x w przedziale $a \leq x \leq b$.

Oznaczmy

$$f(x_1) = f_1, \quad f(x_2) = f_2, \quad \dots, \quad f(x_n) = f_n,$$

$$\varphi(x_1) = \varphi_1, \quad \varphi(x_2) = \varphi_2, \quad \dots, \quad \varphi(x_n) = \varphi_n,$$

$$K(x_1, y_1) = k_{11}, \quad K(x_1, y_2) = k_{12}, \quad \dots, \quad K(x_n, y_n) = k_{nn}.$$

Otrzymamy więc przybliżenie równania całkowego (1) w postaci układu równań liniowych

$$\varphi_1(1 - \lambda \Delta k_{11}) - \varphi_2 \lambda \Delta k_{12} - \dots - \varphi_n \lambda \Delta k_{1n} = f_1,$$

$$-\varphi_1 \lambda \Delta k_{21} + \varphi_2(1 - \lambda \Delta k_{22}) - \dots - \varphi_n \lambda \Delta k_{2n} = f_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$-\varphi_1 \lambda \Delta k_{n1} - \varphi_2 \lambda \Delta k_{n2} - \dots + \varphi_n(1 - \lambda \Delta k_{nn}) = f_n.$$

Niewiadome φ są przybliżonymi wartościami całki równania (1) w punktach $x_1, x_2, \dots, x_n$ (odnośnie rozwiązalności tego układu równań por. metodę na str. 187).

Za pomocą tego układu możemy również wyznaczyć przybliżenie rozwiązania i wartości charakterystycznych równania Fredholma drugiego rodzaju. Praktycznie stosowność tej metody jest ograniczona, ponieważ w większości przypadków dla wyznaczenia wartości φ liczba n musi być stosunkowo duża.

Rozważmy obecnie granicę, gdy $n \rightarrow \infty$. Dla równania całkowego

$$\lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x)$$

rozwiązanie dane będzie przez

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x),$$

przy czym jądro rozwiązujące $\Gamma(x, y, \lambda)$ równa się

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_n(x, y) \lambda^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta_n \lambda^n},$$

gdzie $\delta_0 = 1$, $K_0(x, y) = K(x, y)$ i dalsze składniki tych dwóch szeregów dane są przez wzory rekurencyjne

$$\delta_n = \frac{1}{n} \int_a^b K_{n-1}(x, y) dx,$$

oraz

$$K_n(x, y) = K(x, y) \delta_n - \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, y) dt.$$

Przykład y. 1. Rozpatrzmy równanie całkowe

$$\lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Dzielimy przedział od 0 do π na $n = 3$ części⁽¹⁾, tak że

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = \frac{1}{3}\pi, \quad x_3 = y_3 = \frac{2}{3}\pi.$$

Otrzymujemy

$$k_{11} = \sin 0 = 0, \quad k_{12} = \sin \frac{1}{3}\pi \approx 0,866,$$

$$k_{21} = \sin \frac{1}{3}\pi \approx 0,866, \quad k_{22} = \sin \frac{2}{3}\pi \approx 0,866,$$

$$k_{31} = \sin \frac{2}{3}\pi \approx 0,866, \quad k_{32} = \sin \pi = 0,$$

$$k_{13} = \sin \frac{2}{3}\pi \approx 0,866,$$

$$k_{23} = \sin \pi = 0,$$

$$k_{33} = \sin \frac{4}{3}\pi \approx -0,866.$$

Z wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & -0,907\lambda & -0,907\lambda \\ -0,907\lambda & 1 - 0,907\lambda & 0 \\ -0,907\lambda & 0 & 1 + 0,907\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

⁽¹⁾ W tym przypadku wystarcza wyjątkowo mała wartość $n = 3$.

czyli $1 - 3 \cdot 0,907^2 \lambda^2 = 0$, uzyskujemy, że

$$\lambda = \pm \frac{1}{0,907 \sqrt{3}} \approx \pm 0,6365.$$

Wartości dokładne (por. str. 732) są

$$\lambda = \pm \frac{2}{\pi} \approx \pm 0,6366,$$

2. Rozpatrzmy równanie całkowe

$$\lambda \int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) dy + x = \varphi(x).$$

Mamy

$$\delta_0 = 1,$$

$$K_0(x, y) = xy + \sqrt{xy},$$

$$\delta_1 = \int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{5}{6},$$

$$K_1(x, y) = (xy + \sqrt{xy}) \cdot \frac{5}{6} - \int_0^1 (xt + \sqrt{xt})(ty + \sqrt{ty}) dt =$$

$$= \frac{1}{2} xy + \frac{1}{3} \sqrt{xy} - \frac{2}{5} (x \sqrt{y} + y \sqrt{x}),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x - \frac{4}{5} x^{3/2} \right) dx = \frac{1}{150},$$

$$K_2(x, y) = 0.$$

Ponieważ $K_2(x, y)$ znika tożsamościowo, wynika stąd, że $\delta_3 = 0$, a więc znika też $K_3(x, y)$. Tak więc wszystkie dalsze δ_i i $K_i(x, y)$ znikają tożsamościowo. Wobec tego jądro rozwiązujące będzie ilorazem dwóch skończonych szeregów potęgowych λ :

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{(xy + \sqrt{xy}) - \left[\frac{1}{2} xy + \frac{1}{3} \sqrt{xy} - \frac{2}{5} (x \sqrt{y} + y \sqrt{x}) \right] \lambda}{1 - \frac{5}{6} \lambda + \frac{1}{150} \lambda^2}$$

i rozwiązanie ma postać

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \Gamma(x, y, \lambda) y dy + x,$$

czyli

$$\varphi(x) = \frac{150x + \lambda(60\sqrt{x} - 75x)}{\lambda^2 - 125\lambda + 150}.$$

Dla $\lambda = 1$ otrzymamy $\varphi(x) = \frac{75}{26}x + \frac{30}{13}\sqrt{x}$ (por. str. 723). Z warunku $\lambda^2 - 125\lambda + 150 = 0$ otrzymujemy wartości charakterystyczne $\lambda = \frac{5}{2}(25 \pm \sqrt{601})$, dla których powyższe niejednorodne równanie całkowe nie ma rozwiązania⁽¹⁾. Wobec tego jednorodne równanie całkowe

$$\lambda \int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

ma rozwiązanie jedynie dla tych wartości charakterystycznych.

3. Rozpatrzmy jeszcze równanie całkowe

$$\lambda \int_0^\pi \sin(x+y) \varphi(y) dy + 1 = \varphi(x).$$

Mamy

$$\delta_0 = 1,$$

$$K_0(x, y) = \sin(x+y),$$

$$\delta_1 = \int_0^\pi \sin 2x dx = 0,$$

$$K_1(x, y) = 0 - \int_0^\pi \sin(x+t) \sin(t+y) dt = -\frac{1}{2} \pi \cos(x-y),$$

⁽¹⁾ Z rozumowania przytoczonego na str. 723 wynika, że dla $\lambda = \frac{5}{2}(25 \pm \sqrt{601})$ równanie całkowe ma następujące dwa liniowo niezależne rozwiązania charakterystyczne:

$$\varphi_1 = C_1 (6x - 119\sqrt{x} - 5\sqrt{601}\sqrt{x}),$$

$$\varphi_2 = C_2 (6x - 119\sqrt{x} + 5\sqrt{601}\sqrt{x}).$$

Ponieważ niejednorodne równanie całkowe jest rozwiązywalne dla wartości charakterystycznych wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja zakłócająca $f(x)$ jest ortogonalna do wszystkich rozwiązań charakterystycznych równania transponowanego, więc warunkami rozwiązalności są (zauważmy, że równanie transponowane pokrywa się z równaniem wyjściowym):

$$\int_0^1 f(x) \varphi_1(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

Łatwo zauważyć, że dla $f(x) = x$ warunki te nie będą spełnione.

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \pi \cos 0 dx = -\frac{1}{4} \pi^2,$$

$$K_2(x, y) = -\frac{1}{4} \pi^2 \sin(x+y) + \int_0^{\pi} \sin(x+t) \cdot \frac{1}{2} \pi \cos(t-y) dt = 0;$$

stąd

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\sin(x+y) + \frac{1}{2} \pi \cos(x-y) \lambda}{1 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda^2},$$

zatem

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda^2} \int_0^{\pi} \left[\sin(x+y) + \frac{1}{2} \pi \cos(x-y) \lambda \right] \cdot 1 dy + 1,$$

czyli (por. str. 730):

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda \cos x + \lambda^2 \pi \sin x}{1 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda^2} + 1.$$

8. Metoda przybliżeń Nyströma dla rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju

Metoda przybliżeń Fredholma ma niewielkie znaczenie praktyczne, ponieważ w większości przypadków przybliżenie nie jest zadowalające dla małych wartości n . Bardziej użyteczna jest metoda przybliżeń Nyströma, oparta na wzorze kwadraturowym Gaussa.

Według Gaussa, dla przybliżonego obliczenia wartości danej całki $\int_a^b f(x) dx$ można postępować następująco:

Rozważmy najpierw wielomiany Legendre'a (por. str. 585 oraz str. 91):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

Wielomiany Legendre'a są n -tymi pochodnymi wielomianu stopnia $2n$ postaci $(x^2-1)^n = [(x-1)(x+1)]^n$, dla których punkty $x = -1$ i $x = +1$ są zerami rzędu n ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Miejsce zerowe x_0 funkcji jest rzędu n , jeżeli jest także miejscem zerowym jej pierwszych $n-1$ pochodnych, a nie jest miejscem zerowym n -tej pochodnej. Zgodnie z tym pojedyncze zero jest takim, dla którego pierwsza pochodna nie znika.

Pierwsza pochodna $\frac{d}{dx} [(x-1)(x+1)]^n$ ma zera rzędu $n-1$ w obu punktach $x = -1$ i $x = +1$; ponadto mamy jedno pojedyncze zero pomiędzy punktami $x = -1$ i $x = +1$ (na mocy twierdzenia Rolle'a, por. str. 406). Można wywnioskować ponadto, że druga pochodna $\frac{d^2}{dx^2} [(x-1)(x+1)]^n$ ma zera rzędu $n-2$ w punktach $x = -1$ i $x = +1$ oraz dwa pojedyncze zera pomiędzy $x = -1$ i $x = +1$. Ciągąc ten proces rozumowania dochodzimy do wniosku, że wielomian Legendre'a $P_n(x)$ ma n pojedynczych zer t_v ($v = 1, 2, \dots, n$) leżących pomiędzy -1 i $+1$. Punkty -1 i $+1$ nie są zerami wielomianu $P_n(x)$. Oczywiście t_v zależą od n .

Przekształćmy teraz przedział $a \leq x \leq b$ za pomocą zależności

$$t = \frac{1}{a-b} (a+b-x)$$

w przedział $-1 \leq t \leq +1$. Na odwrót, każdej wartości t z tego przedziału odpowiada punkt

$$x = \frac{1}{2} (a+b) + \frac{1}{2} (b-a)t$$

z przedziału $a \leq x \leq b$. W szczególności n zerom t_v wielomianu Legendre'a rzędu n odpowiada n punktów

$$x_v = \frac{1}{2} (a+b) + \frac{1}{2} (b-a)t_v.$$

Ponadto

$$dx = \frac{b-a}{2} dt.$$

Zapiszmy teraz badaną całkę w postaci

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} (b-a) \int_{-1}^{+1} f \left[\frac{1}{2} (a+b) + \frac{1}{2} (b-a)t \right] dt.$$

Funkcja podcałkowa w całce po prawej stronie przyjmuje wartości $f(x_v)$ dla $t = t_v$.

Konstruujemy teraz n funkcji pomocniczych

$$F_v(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_{v-1})(t-t_{v+1}) \dots (t-t_n)}{(t_v-t_1)(t_v-t_2) \dots (t_v-t_{v-1})(t_v-t_{v+1}) \dots (t_v-t_n)}.$$

Łatwo się przekonać, że $F_v(t_v) = 1$ i $F_v(t_\mu) = 0$ dla $\mu \neq v$ ($1 \leq v, \mu \leq n$). Wobec tego funkcja

$$\sum_{v=1}^n F_v(t) f(x_v)$$

$$(1) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x)$$

o ciągłym jądrze $K(x, y)$. Odpowiednim równaniem jednorodnym jest wówczas

$$(2) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Każda wartość λ , dla której równanie (2) ma rozwiązanie ciągłe $\varphi(x)$, które nie znika tożsamościowo, będziemy nazywali *wartością charakterystyczną równania jednorodnego* (2) lub *wartością charakterystyczną jądra* $K(x, y)$ (używamy tej terminologii także i w przypadku jąder zdegenerowanych, jak w § 5). Odpowiadające wartościom charakterystycznym rozwiązania będziemy nazywali *rozwiązaniami charakterystycznymi*.

Niech λ będzie wartością charakterystyczną równania całkowego (2). Możemy udowodnić, że w tym przypadku będzie istnieć co najwyżej skończenie wiele liniowo niezależnych rozwiązań charakterystycznych dla tej wartości λ (dla wyjaśnienia pojęcia funkcji liniowo niezależnych por. str. 372). Wynika stąd, że istnieje r liniowo niezależnych funkcji $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ takich, że każda funkcja charakterystyczna dla tej wartości λ da się zapisać w postaci $c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_r \varphi_r(x)$, gdzie c_i są stałymi. Oczywiście, wartość r może być różna dla różnych wartości charakterystycznych.

Rozpatrzmy teraz równania transponowane równań (1) i (2):

$$(1') \quad \lambda \int_a^b K(y, x) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x),$$

$$(2') \quad \lambda \int_a^b K(y, x) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Metoda rozwiązywania równań Fredholma drugiego rodzaju da się scharakteryzować następującym twierdzeniem:

Alternatywa Fredholma. Prawdziwe jest jedno z następujących:

1° Bądź λ nie jest wartością charakterystyczną równania całkowego (2); tzn. równanie (2) nie ma rozwiązań niezerowych. W tym przypadku równania jednorodne (1) i (1') mają rozwiązanie dla każdej funkcji $f(x)$.

2° Bądź λ jest wartością charakterystyczną równania (2). W tym przypadku λ jest również wartością charakterystyczną równania transponowanego (2') i ilości r liniowo niezależnych rozwiązań charakterystycznych są te same dla równań (2) i (2'). W tym przypadku równanie niejednorodne (1) jest rozwiązywalne dla tych i tylko tych funkcji znikających $f(x)$, które są ortogonalne do wszystkich rozwiązań charakte-

rystycznych równania transponowanego (2') (por. str. 588 oraz 815), tzn. muszą być spełnione równości

$$\int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx = 0, \quad \dots, \quad \int_a^b f(x) \varphi_r(x) dx = 0,$$

gdzie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ jest układem liniowo niezależnych rozwiązań charakterystycznych równania (2') dla wartości charakterystycznej λ ; ponieważ każda funkcja charakterystyczna daje się przedstawić jako kombinacja liniowa funkcji tego układu, wynika stąd, że $f(x)$ jest ortogonalna do wszystkich funkcji charakterystycznych.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że jądro jest *symetryczne*, tzn.

$$K(x, y) = K(y, x).$$

Dla jąder symetrycznych zachodzi następujące twierdzenie:

- Każde rzeczywiste symetryczne jądro ma co najmniej jedną wartość charakterystyczną.
- Wartości charakterystyczne jąder symetrycznych są rzeczywiste.
- Wartości charakterystyczne nie mają skończonego punktu skupienia.
- Dla dwóch różnych wartości charakterystycznych λ i λ^* odpowiadające im funkcje charakterystyczne $\varphi(x)$ i $\varphi^*(x)$ są ortogonalne, tj. spełniają warunek

$$\int_a^b \varphi(x) \varphi^*(x) dx = 0.$$

Alternatywa Fredholma upraszcza się dla przypadku jąder symetrycznych ze względu na to, że równanie całkowe jest wówczas identyczne z równaniem transponowanym.

Przykład. Dla równania całkowego (por. str. 725):

$$\lambda \int_1^2 \left(xy + \frac{1}{xy} \right) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

wartości charakterystyczne, otrzymane z równania $\lambda^2 - 17\lambda + 6 = 0$ są $\lambda_1 = \frac{1}{2}(17 + \sqrt{165})$ oraz $\lambda_2 = \frac{1}{2}(17 - \sqrt{165})$, czyli $\lambda_1 + \lambda_2 = 17$ oraz $\lambda_1 \lambda_2 = 6$. Rozwiązania charakterystyczne są

$$\varphi_1(x) = K_1 \left(x + \frac{\lambda_1}{\left(1 - \frac{1}{2} \lambda_1\right) x} \right)$$

oraz

$$\varphi_2(x) = K_2 \left(x + \frac{\lambda_2}{\left(1 - \frac{1}{2} \lambda_2\right) x} \right).$$

Rozważmy całkę

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx \\ \text{równą} \\ & K_1 K_2 \int_1^2 \left(x + \frac{\lambda_1}{\left(1 - \frac{1}{2} \lambda_1\right) x} \right) \left(x + \frac{\lambda_2}{\left(1 - \frac{1}{2} \lambda_2\right) x} \right) dx = \\ & = K_1 K_2 \int_1^2 \left(x^2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2}{1 - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\left[1 - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2\right] x^2} \right) dx = \\ & = K_1 K_2 \int_1^2 \left(x^2 - \frac{11}{6} - \frac{1}{x^3} \right) dx = 0, \end{aligned}$$

czyli $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są ortogonalne, jak wynika z twierdzenia (d) dla jąder symetrycznych.

10. Metoda operatorów w teorii równań całkowych

Pokażemy teraz, w jaki sposób można badać równanie Fredholma drugiego rodzaju

$$(1) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x)$$

z ciągłym i symetrycznym jądrem za pomocą metod współczesnej analizy:

Pojęcie przestrzeni funkcyjnej. Funkcje $f(x)$ i $K(x, y)$ w (1) są ciągłe odpowiednio w przedziale $a \leq x \leq b$ i w kwadracie $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$. Wobec tego jedynymi funkcjami $\varphi(x)$, które rozważymy jako możliwe rozwiązania, są funkcje ciągłe w przedziale $a \leq x \leq b$ ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Gdyby funkcje $\varphi(x)$ były jedynie całkowalne (por. notka na str. 486), wówczas z ciągłości funkcji $K(x, y)$ rozważanej jako funkcja x wynikałoby, że całka $\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$ jest także funkcją ciągłą zmiennej x . Po lewej stronie (1) byłaby wówczas suma dwóch funkcji ciągłych zmiennej x i wobec tego funkcja $\varphi(x)$ byłaby także funkcją ciągłą.

Jest zatem wygodnie dla badania równania całkowego (1) zbadać zbiór funkcji $g(x)$, które są ciągłe w przedziale $a \leq x \leq b$. Zbiór ten będziemy dla skrócenia oznaczać przez R . Ponieważ R jest zbiorem funkcji, będziemy nazywali R *przestrzenią funkcyjną*. Fakt, że funkcja $g(x)$ należy do zbioru R , będziemy symbolicznie oznaczać przez

$$g(x) \in R \quad \text{lub} \quad g \in R.$$

Tak więc symbol $g \in R$ oznacza, że funkcja $g(x)$ jest określona i ciągła w całym przedziale $a \leq x \leq b$. Jeżeli c jest stałą rzeczywistą i $g(x)$ jest ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$, to $cg(x)$ jest również ciągła dla $a \leq x \leq b$. Ponieważ suma funkcji ciągłych jest także funkcją ciągłą, otrzymujemy, że jeżeli $g_1 \in R$ i $g_2 \in R$, to $(g_1 + g_2) \in R$.

Ponadto, jeżeli $g(x)$ jest funkcją należącą do R , to

$$(2) \quad \int_a^b K(x, y) g(y) dy$$

jest także funkcją ciągłą zmiennej x w całym przedziale $a \leq x \leq b$. Tak więc całka ta ustala przyporządkowanie każdej funkcji $g \in R$ nową funkcję należącą do R . Przyporządkowanie to oznaczamy symbolicznie jako

$$(3) \quad \int_a^b K(x, y) g(y) dy = \mathcal{R}[g] \in R.$$

Będziemy nazywali $\mathcal{R}$ *operatorem całkowym*, każdej funkcji z R przyporządkowana jest nowa funkcja z R .

Z równości definiującej (3) wnosimy, że operator całkowy $\mathcal{R}$ spełnia następujące dwa warunki charakterystyczne

$$(4) \quad \mathcal{R}[cg] = c\mathcal{R}[g], \quad \mathcal{R}[g_1 + g_2] = \mathcal{R}[g_1] + \mathcal{R}[g_2].$$

Używając oznaczenia $\mathcal{R}$ możemy zapisać równanie całkowe (1) w postaci

$$(5) \quad \lambda \mathcal{R}[\varphi] + f = \varphi.$$

Definicja iloczynu skalarnego w przestrzeni funkcyjnej R . Istnieją pewne analogie pomiędzy zbiorem wszystkich wektorów przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, tzw. *przestrzeni wektorowej* (por. str. 646) i zbiorem wszystkich funkcji ciągłych w przedziale $a \leq x \leq b$ (czyli przestrzenią funkcyjną R). W szczególności, w analogii do iloczynu skalarnego dwóch wektorów (por. str. 650) możemy określić *iloczyn skalarny dwóch funkcji* z R za pomocą równości

$$(6) \quad (g_1, g_2) = \int_a^b g_1(x) g_2(x) dx.$$

mniej jeden podciąg $g_{n_i}(x)$ tego ciągu, taki że funkcje

$$f_{n_i}(x) = \mathcal{R}[g_{n_i}]$$

są zbieżne jednostajnie do pewnej funkcji $f(x) \in R$.

Funkcje $f_{n_i}(x)$ są zbieżne jednostajnie do $f(x)$ (symbolicznie $f_{n_i} \rightrightarrows f$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zawsze liczna całkowita $N(\varepsilon)$ taka, że dla wszystkich $n_i > N(\varepsilon)$ nierówność

$$|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

spełniona jest dla wszystkich x w przedziale $a \leq x \leq b$.

Proces konstrukcji Hilberta przebiega następująco:

1° Rozważmy zbiór wszystkich

$$(11) \quad (\mathcal{R}[g], g) \quad \text{dla} \quad g \in R, \quad \|g\| = 1.$$

Niech M_1 i m_1 będą odpowiednio kresem górnym i dolnym tego zbioru. Mamy zatem

$$m_1 \leq (\mathcal{R}[g], g) \leq M_1,$$

i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $g_1 \in R$ ($\|g_1\| = 1$) takie, że $(\mathcal{R}[g_1], g_1) < m_1 + \varepsilon$. Istnieje również $g_2 \in R$ ($\|g_2\| = 1$) takie, że $M_1 - \varepsilon < (\mathcal{R}[g_2], g_2)$.

Przyjmijmy $k_1 = M_1$ lub $k_1 = m_1$ w zależności od tego czy $|M_1| \geq m_1$, czy $|M_1| < m_1$.

Jeżeli $k_1 \neq 0$, wówczas co najmniej jedna z liczb M_1 i m_1 nie jest zerem. Jest to prawdą dla każdego ciągłego symetrycznego jądra, które nie znika tożsamościowo. Ponieważ k_1 równe jest jednemu z dwóch kresów zbioru $(\mathcal{R}[g], g)$ dla $g \in R, \|g\| = 1$, istnieje ciąg $g_n \in R, \|g_n\| = 1$, taki że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{R}[g_n], g_n) = k_1.$$

Z twierdzenia Arzeli otrzymujemy podciąg g_{n_i} taki, że

$$\mathcal{R}[g_{n_i}] \rightrightarrows \tilde{\varphi}_1(x) \in R.$$

Wynika stąd, że $\lambda_1 = 1/k_1$ jest wartością charakterystyczną i $\varphi_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x)/\|\tilde{\varphi}_1\|$ jest odpowiednią znormalizowaną funkcją charakterystyczną.

2° Dla konstrukcji następnej funkcji charakterystycznej rozważmy zbiór wszystkich

$$(12) \quad (\mathcal{R}[g], g) \quad \text{dla} \quad g \in R, \|g\| = 1, \quad (g, \varphi_1) = 0,$$

gdzie φ_1 jest funkcją charakterystyczną skonstruowaną w 1°. Niech górna i dolna granica tego zbioru będzie odpowiednio M_2 i m_2 , tzn.

$$m_2 \leq (\mathcal{R}[g], g) \leq M_2.$$

Podobnie jak w 1° kładziemy $k_2 = M_2$ lub $k_2 = m_2$ w zależności od tego, czy $|M_2| \geq |m_2|$ czy $|M_2| < |m_2|$. Są dwa możliwe przypadki:

Przypadek (a). Mamy $k_2 = 0$. Wówczas λ_1 jest jedyną wartością charakterystyczną równania całkowego i każda funkcja charakterystyczna ma postać $c\varphi_1(x)$. W tym przypadku proces Hilberta został zakończony.

Przypadek (b). Mamy $k_2 \neq 0$. W tym przypadku konstruujemy drugi ciąg $g_n \in R, \|g_n\| = 1, (g_n, \varphi_1) = 0$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{R}[g_n], g_n) = k_2.$$

Znowu na podstawie twierdzenia Arzeli otrzymujemy podciąg g_{n_i} dla którego

$$\mathcal{R}[g_{n_i}] \rightrightarrows \varphi_2(x) \in R.$$

Wówczas $\lambda_2 = 1/k_2$ jest wartością charakterystyczną i $\varphi_2(x) = \tilde{\varphi}_2(x)/\|\tilde{\varphi}_2\|$ jest odpowiadającą jej unormowaną funkcją charakterystyczną. Tak więc $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$. Ze wzoru (10) wynika, że $(\mathcal{R}[g_{n_i}], \varphi_1) = (g_{n_i}, \mathcal{R}[\varphi_1])$. Ponieważ jednak φ_1 jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą wartości charakterystycznej λ_1 , mamy $\mathcal{R}[\varphi_1] = \varphi_1/\lambda_1$ i $(\mathcal{R}[g_{n_i}], \varphi_1) = (g_{n_i}, \varphi_1)/\lambda_1 = 0$. Ponieważ $\mathcal{R}[g_{n_i}]$ również zmierzają jednostajnie do φ_2 , więc przechodząc do granicy widzimy, że $(\tilde{\varphi}_2, \varphi_1) = 0$, czyli $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$.

3° Proces powyższy kontynuujemy następująco: gdy skonstruowaliśmy już ortogonalne funkcje charakterystyczne

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\mu(x),$$

rozważmy, podobnie jak w (11) i (12) zbiór wszystkich $(\mathcal{R}[g], g)$, gdzie $g \in R, \|g\| = 1$ i g są ortogonalne do wszystkich poprzednio skonstruowanych funkcji charakterystycznych. Oznacza to, że rozważamy zbiór

$$(13) \quad (\mathcal{R}[g], g) \quad \text{dla} \quad g \in R, \|g\| = 1, \\ (g, \varphi_1) = (g, \varphi_2) = \dots = (g, \varphi_\mu) = 0.$$

Oznaczmy górny i dolny kres zbioru (13) odpowiednio przez $M_{\mu+1}$ i $m_{\mu+1}$, tzn.

$$m_{\mu+1} \leq (\mathcal{R}[g], g) \leq M_{\mu+1}.$$

Określamy, podobnie jak poprzednio $k_{\mu+1}$ równe $M_{\mu+1}$ lub $m_{\mu+1}$ w zależności od tego czy $|M_{\mu+1}| \geq |m_{\mu+1}|$, czy $|M_{\mu+1}| < |m_{\mu+1}|$.

Jeżeli $k_{\mu+1} = 0$, to nie ma żadnych dalszych wartości charakterystycznych i wszystkie funkcje charakterystyczne da się zapisać jako kombinacje liniowe uprzednio skonstruowanych funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$. Jeżeli $k_{\mu+1} \neq 0$, to istnieje ciąg $g_n (g_n \in R, \|g_n\| = 1, (g_n, \varphi_1) = \dots = (g_n, \varphi_\mu) = 0)$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{R}[g_n], g_n) = k_{\mu+1} \neq 0.$$

Ponownie z twierdzenia Arzeli wynika istnienie podciągu g_{n_i} takiego, że $\mathcal{R}[g_{n_i}]$ jest zbieżne jednostajnie do pewnej funkcji $\tilde{\varphi}_{\mu+1} \in R$.

W tym przypadku $\lambda_{\mu+1} = 1/k_{\mu+1}$ jest wartością charakterystyczną i $\varphi_{\mu+1} = \varphi_{\mu+1}/\|\varphi_{\mu+1}\|$ jest odpowiadającą jej funkcją charakterystyczną.

Funkcja $\varphi_{\mu+1}$ jest ortogonalna do wszystkich uprzednio skonstruowanych funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$. Można się o tym przekonać następująco. Ze wzoru (10) otrzymujemy

$$(\mathcal{R}[g_{n_i}], \varphi_j) = (g_{n_i}, \mathcal{R}[\varphi_j]) = \left(g_{n_i}, \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j\right) = \frac{1}{\lambda_j} (g_{n_i}, \varphi_j) = 0$$

dla wszystkich j pomiędzy 1 i μ . Ponieważ $\mathcal{R}[g_{n_i}]$ są zbieżne jednostajnie do $\tilde{\varphi}_{\mu+1}$, otrzymujemy przechodząc do granicy

$$(\tilde{\varphi}_{\mu+1}, \varphi_j) = 0, \quad \text{czyli} \quad (\varphi_{\mu+1}, \varphi_j) = 0$$

dla $1 \leq j \leq \mu$.

Znaczenie metody Hilberta. Z równania (13) wynika, że

$$m_\mu \leq m_{\mu+1} \quad \text{oraz} \quad M_{\mu+1} \leq M_\mu.$$

Wobec tego $|k_{\mu+1}| \leq |k_\mu|$, czyli dla wartości charakterystycznych

$$(14) \quad |\lambda_{\mu+1}| \geq |\lambda_\mu|.$$

Może się zdarzyć, że $k_{\mu+1} = k_\mu$, lub nawet, że

$$k_\mu = k_{\mu+1} = \dots = k_{\mu+r},$$

jednakże po skończonej ilości kroków równość ta przestanie być prawdziwa, tak że

$$k_{\mu+r+1} \neq k_{\mu+r}.$$

Dowód. Każdej wartości charakterystycznej może odpowiadać tylko skończenie wiele liniowo niezależnych rozwiązań charakterystycznych (por. § 9, str. 741).

Konstruujemy z tych funkcji układ ortogonalny metodą ortogonalizacji Schmidta. Wobec tego wszystkie funkcje charakterystyczne będą kombinacjami liniowymi tego skończonego układu ortonormalnego funkcji charakterystycznych (por. § 10). Ponieważ za pomocą opisanej metody otrzymujemy pewien inny układ ortonormalny, musimy otrzymać po skończonej ilości kroków nierówność $k_{\mu+r+1} \neq k_{\mu+r}$. Ponieważ wartości charakterystyczne równania całkowego z ciągłym symetrycznym jądrem nie mogą mieć skończonego punktu skupienia (por. § 9, str. 741) znajdziemy za pomocą tego procesu wszystkie wartości charakterystyczne $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ i to w kolejności takiej, że $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ (por. wzór (14)). Odpowiednie funkcje charakterystyczne są unormowane, $\|\varphi_i\| = 1$ i ortogonalne: $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ dla $i \neq j$.

(f) Przykłady. 1. Rozważmy równanie całkowe

$$\lambda \int_0^1 xy\varphi(y)dy = \varphi(x). \quad \text{Dla operacji całkowej } \mathcal{R} \text{ otrzymujemy stąd}$$

(por. wzór (3)):

$$\mathcal{R}[g] = \int_0^1 xyg(y)dy = x \int_0^1 yg(y)dy = (x, g) \cdot x^{(1)}.$$

Mamy następnie

$$(15) \quad (\mathcal{R}[g], g) = (x, g)^2.$$

Stosując nierówność Schwarza (9) do iloczynu skalarnego (x, g) otrzymujemy

$$|(x, g)| \leq \|x\| \cdot \|g\|.$$

Uwzględniając fakt, że

$$\|x\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

otrzymamy, po ograniczeniu się do funkcji $g \in R$, dla których $\|g\| = 1$,

$$(x, g)^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Ponieważ równość w nierówności Schwarza może zachodzić jedynie, gdy $g = cx$ i ponieważ funkcja $g_1 = \sqrt{3}x$ ma normę $\|g_1\| = 1$, widzimy, że $k_1 = \frac{1}{3}$. Ponadto jest jasne, że $g_1, g_2, \dots$ jest ciągiem funkcji, dla których $(\mathcal{R}[g_i], g_i) = k_i$. Ponieważ ciąg ten utworzony jest tylko z jednej funkcji, więc każdy podciąg pokrywa się z wyjściowym ciągiem; jako konsekwencja twierdzenia Arzeli mamy

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \mathcal{R}[g_1] = x \int_0^1 x \sqrt{3} x dx = \frac{1}{\sqrt{3}} x$$

i $\tilde{\varphi}_1$ jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą wartości charakterystycznej $\lambda_1 = 1/k_1 = 3$. Aby znaleźć dalsze liniowo niezależne funkcje charakterystyczne, konstruujemy zbiór (12). Ponieważ $\tilde{\varphi}_1(x) = x/\sqrt{3}$ i $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1/\|\tilde{\varphi}_1\|$, warunek $(g, \varphi_1) = 0$ przyjmuje postać $(x, g) = 0$. Tak

(¹) Gdzie (x, y) oznacza iloczyn skalarny funkcji x i funkcji $g(x)$:

$$(x, g) = \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 yg(y)dy.$$

więc wszystkie $(\mathcal{R}[g], g)$ dla $\|g\| = 1$ i $(\varphi_1, g) = 0$ są równe zeru. Wobec tego w tym przypadku $k_2 = 0$, stąd wnosimy że $\lambda = 3$ jest jedyną wartością charakterystyczną i że wszystkie funkcje charakterystyczne mają postać $\varphi(x) = cx$.

2. Rozważmy równanie całkowe

$$\lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin y - \frac{1}{2} \cos x \cos y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Operator całkowy (3) ma tu postać

$$\mathcal{R}[g] = (g, \sin x) \sin x - \frac{1}{2} (g, \cos x) \cos x \quad (1).$$

Wynika stąd, że

$$(16) \quad (\mathcal{R}[g], g) = (g, \sin x)^2 - \frac{1}{2} (g, \cos x)^2.$$

Dla $g \in R$ i $\|g\| = 1$ otrzymujemy z nierówności Schwarz'a

$$(g, \sin x)^2 \leq \|\sin x\|^2 = \pi, \\ \frac{1}{2} (g, \cos x)^2 \leq \frac{1}{2} \|\cos x\|^2 = \frac{1}{2} \pi,$$

gdzie znak równości może zachodzić jedynie, gdy $g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$ lub

$g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$ ($\|g_1\| = \|g_2\| = 1$). Ponieważ $(g_1, \cos x) = 0$, wynika stąd, że $M_1 = \pi$. Podobnie z faktu, że $(g_2, \sin x) = 0$, wynika, że $m_1 = \frac{1}{2} \pi$. Wobec tego $k_1 = \pi$. Ciąg $g_1, g_2, \dots$ ma własność $(\mathcal{R}[g_1], g_1) = -k_1 = \pi$. Z twierdzenia Arzeli wynika, że

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \mathcal{R}[g_1] = \sqrt{\pi} \sin x$$

jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą wartości charakterystycznej $\lambda_1 = 1/\pi$.

(¹) Gdzie znów $(g, \sin x)$ oznacza iloczyn skalarny

$$(g, \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin y dy$$

i analogicznie

$$(g, \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos y dy.$$

Aby otrzymać dalsze funkcje charakterystyczne, musimy rozważyć wzór (16) przy warunkach $\|g\| = 1$ oraz $(g, \tilde{\varphi}_1) = \sqrt{\pi} (g, \sin x) = 0$ (¹). W tym przypadku wzór (16) przyjmuje postać

$$(\mathcal{R}[g], g) = -\frac{1}{2} (g, \cos x)^2$$

i mamy

$$m_2 = -\frac{1}{2} \pi, \quad M_2 = 0, \quad \text{czyli} \quad k_2 = -\frac{1}{2} \pi.$$

Ponieważ dla funkcji $g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$ mamy

$$(\mathcal{R}[g_2], g_2) = k_2,$$

więc funkcja $\tilde{\varphi}_2(x) = \mathcal{R}[g_2] = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cos x$ jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą wartości charakterystycznej $\lambda_2 = -2/\pi$.

Aby kontynuować ten proces, musimy rozważyć wzór (16) przy warunkach $\|g\| = 1$, $(g, \tilde{\varphi}_1) = 0$ oraz $(g, \tilde{\varphi}_2) = 0$. Podstawiając otrzymane funkcje dla φ_1 i φ_2 widzimy, że $(g, \sin x) = 0$ i $(g, \cos x) = 0$. Tak więc dla wszystkich funkcji g , które musimy rozważyć, jest

$$(\mathcal{R}[g], g) = 0,$$

a zatem $m_3 = M_3 = k_3 = 0$. Wobec tego nie ma żadnych innych wartości charakterystycznych oprócz skonstruowanych uprzednio.

11. Szereg Schmidta

Przy badaniu zagadnień z warunkami brzegowymi ważną rolę odgrywają rozwinięcia funkcji charakterystycznych (por. str. 587). Za pomocą podobnej metody możemy użytkować rozwinięcie unormowanych funkcji charakterystycznych dla rozwiązania równania Fredholma drugiego rodzaju o jądrze symetrycznym.

Metoda Hilberta konstruowania wartości charakterystycznych i funkcji charakterystycznych (por. § 10, str. 744) dostarcza wszystkich wartości charakterystycznych $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ dla równania całkowego o jądrze symetrycznym oraz odpowiednich funkcji charakterystycznych $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Mamy tu

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$$

Funkcje φ_i są unormowane, tzn. $\|\varphi_i\| = 1$ i ortogonalne, tzn. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ dla $i \neq j$. Układ funkcji o tej własności, że wszystkie one są unormowane i wzajemnie ortogonalne, nazywamy *układem ortonormalnym*.

(¹) Ponieważ $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 / \|\tilde{\varphi}_1\|$, warunki $(g, \tilde{\varphi}_1) = 0$ i $(g, \varphi_1) = 0$ są równoważne.

Każda funkcja charakterystyczna równania całkowego jest kombinacją liniową znanych funkcji charakterystycznych φ_i .

Poniżej przedstawione postępowanie daje nam rozwinięcie według funkcji charakterystycznych φ_i .

Będziemy mówili, że układ ortonormalny jest *zupelny*, jeżeli dla każdej funkcji ciągłej $f(x)$ istnieje taki układ liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \dots$, że dla funkcji określonych jako

$$\chi_N = f(x) - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x)$$

normy $\|\chi_N\|$ zbieżną do zera, gdy $N \rightarrow \infty$. Można wykazać, że c_i muszą być w postaci $c_i = (f, \varphi_i)$.

Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$ nazywamy *szeregiem Fouriera* funkcji $f(x)$, a liczby c_i nazywamy *współczynnikami rozwinięcia Fouriera*. Nie każdy układ funkcji charakterystycznych jądra symetrycznego jest układem ortonormalnym zupełnym (por. powyżej). Mamy następujące twierdzenie:

Układ funkcji charakterystycznych jądra symetrycznego jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jądro jest zamknięte.

Jądro nazywamy *zamkniętym*, jeżeli nie istnieje funkcja ciągła $h(y)$ ($h(y) \not\equiv 0$), dla której

$$\int_a^b K(x, y) h(y) dy = 0$$

dla wszystkich x w przedziale $a \leq x \leq b$.

Założymy teraz dodatkowo, że jądro jest zamknięte, tak że każdą funkcję ciągłą da się rozwinąć w szereg Fouriera według funkcji charakterystycznych tego jądra. Na ogół ten szereg Fouriera nie będzie zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$. Będzie on jednak zbieżny „według średnich”, tzn. określone powyżej funkcje χ_N będą miały normy zbieżące do zera.

Jednakże funkcję $f(x)$ można otrzymać z jądra $K(x, y)$ przez całkowanie, tzn. istnieje funkcja ciągła $g(x)$ taka, że

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) g(y) dy,$$

tak że przy założeniu ciągłości jądra można wykazać, że szereg Fouriera funkcji $f(x)$ zbiega jednostajnie do funkcji $f(x)$.

Rozpatrzmy teraz ponownie równanie całkowe

$$(1) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

Funkcja (zmiennej x)

$$\lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

została uzyskana przez całkowanie. Możemy więc napisać rozwiązanie (1) w postaci

$$(1a) \quad \varphi(x) - f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x),$$

gdzie szereg jest zbieżny jednostajnie. Wobec tego

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x) + f(x),$$

Podstawiając wartość (2) do równania (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v(x) + f(x) = \\ & = \lambda \sum_{v=1}^{\infty} c_v \int_a^b K(x, y) \varphi_v(y) dy + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + f(x) = \\ & = \lambda \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v \varphi_v(x)}{\lambda_v} + \lambda \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v \varphi_v(x)}{\lambda_v} + f(x). \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy funkcjach $\varphi_v(x)$ we wzorze (3) otrzymujemy

$$(4) \quad c_v = \frac{\lambda c_v}{\lambda_v} + \lambda \frac{f_v}{\lambda_v},$$

czyli

$$(5) \quad c_v = \frac{\lambda f_v}{\lambda_v - \lambda},$$

gdzie

$$f_v = \int_a^b f(y) \varphi_v(y) dy.$$

Tak więc rozwiązanie równania całkowego (1) przyjmuje postać

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v \varphi_v(x)}{\lambda_v - \lambda} + f(x).$$

Jeżeli w równaniu (1) λ równe jest jednej z wartości charakterystycznych jądra, tj. $\lambda = \lambda_K$ ⁽¹⁾, to zgodnie z twierdzeniem o alternatywie Fredholma dla jąder symetrycznych (por. str. 742) równanie (1) jest rozwiązywalne jedynie dla tych wartości λ_K , dla których funkcja zakłócająca $f(x)$ jest ortogonalna do odpowiednich funkcji charakterystycznych $\varphi_K(x)$. W tym przypadku składnik $\frac{f_K}{\lambda_K - \lambda} \varphi_K(x)$ znika. Wynika stąd, że rozwiązanie $\varphi(x)$ można rozwinąć na sumę (skończonej ilości) składników postaci $C\varphi_K(x)$.

Przykłady. 1. Rozpatrzmy równanie całkowe

$$\int_{-1}^{+1} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + (x+1)^2 = \varphi(x).$$

Mamy tu $\lambda = 1$. Wartości charakterystyczne są $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Odpowiednie unormowane funkcje charakterystyczne są $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6}x$ oraz $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10}x^2$ (por. str. 742). Mamy zatem

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} (y^2 + 2y + 1) \frac{1}{2} \sqrt{6} y dy = \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

oraz

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} (y^2 + 2y + 1) \frac{1}{2} \sqrt{10} y^2 dy = \frac{8}{15} \sqrt{10}.$$

Wobec tego

$$\varphi(x) = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}}{\frac{3}{2} - 1} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{6} x + \frac{\frac{8}{15}\sqrt{10}}{\frac{5}{2} - 1} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{10} x^2 + (x+1)^2,$$

czyli

$$\varphi(x) = \frac{25}{9} x^2 + 6x + 1.$$

⁽¹⁾ Może istnieć jedynie skończenie wiele takich K , dla których $\lambda_K = \lambda$. Tak więc dla każdej wartości charakterystycznej może istnieć jedynie skończenie wiele liniowo niezależnych funkcji charakterystycznych.

2. Rozpatrzmy równanie całkowe

$$\frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + x^2 + 1 = \varphi(x).$$

Dla wartości charakterystycznej jądra $\lambda = \frac{3}{2}$ funkcja zakłócająca $x^2 + 1$ jest ortogonalna do odpowiedniej funkcji charakterystycznej $\varphi_1(x) = Cx$; ponadto $f_1 = 0$ oraz

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} (y^2 + 1) \frac{1}{2} \sqrt{10} y^2 dy = \frac{8}{15} \sqrt{10}.$$

Wobec tego rozwiązaniem jest

$$\varphi(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{8}{15}\sqrt{10}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{10} x^2 + x^2 + 1,$$

czyli

$$\varphi(x) = 5x^2 + 1.$$

Jednakże $\varphi(x) = 5x^2 + 1 + Cx$ jest także rozwiązaniem.

3. Rozpatrzmy jeszcze równanie całkowe

$$\lambda \int_a^b k(x)k(y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$$

Wynika stąd, że wartość charakterystyczna jest

$$\lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b [k(x)]^2 dx}.$$

Odpowiednia unormowana funkcja charakterystyczna ma postać

$$\varphi_1(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{\int_a^b [k(x)]^2 dx}},$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b [k(x)]^2 dx}} \int_a^b f(y)k(y) dy.$$

Dla $\lambda \neq \frac{1}{\int_a^b [k(y)]^2 dy}$ rozwiązanie ma postać

$$\varphi(x) = \frac{\lambda f_1}{\lambda_1 - \lambda} \varphi_1(x) + f(x),$$

czyli

$$\varphi(x) = \frac{\lambda k(x) \int_a^b f(y) k(y) dy}{1 - \lambda \int_a^b [k(y)]^2 dy} + f(x).$$

Jeżeli $\lambda = \frac{1}{\int_a^b [k(y)]^2 dy}$, to $f(x)$ musi spełniać warunek

$$\int_a^b f(x) k(x) dx = 0. \text{ Wówczas rozwiązanie ma postać}$$

$$\varphi(x) = f(x) + C k(x).$$

V. SZEREGI FOURIERA

1. Wiadomości ogólne

Pojęcia podstawowe. W wielu zagadnieniach (równania różniczkowe, teoria drgań) zachodzi potrzeba zastąpienia danej funkcji okresowej $f(x)$ o okresie T — w sposób dokładny lub przybliżony — sumą trygonometryczną

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x,$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$ (jeżeli $T = 2\pi$, to $\omega = 1$). Suma $s_n(x)$ jest najlepszym przybliżeniem funkcji $f(x)$ w sensie podanym na następnej stronie, jeżeli za współczynniki a_k i b_k przyjmiemy współczynniki Fouriera danej funkcji określone wzorami Eulera

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x dx = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) + f(-x)] \cos k\omega x dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin k\omega x dx = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) - f(-x)] \sin k\omega x dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Jeżeli dla pewnego zbioru wartości x suma $s_n(x)$ przy $n \rightarrow \infty$ dąży do określonej granicy $s(x)$, to dla tych wartości x mamy zbieżny szereg Fouriera danej funkcji $f(x)$:

$$s(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + \dots + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x + \dots$$

Szereg Fouriera można również napisać w postaci

$$s(x) = \frac{1}{2} a_0 + A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) + \dots,$$

gdzie $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ i $\operatorname{tg} \varphi_k = a_k/b_k$. W postaci zespolonej szereg Fouriera można napisać w następujący sposób:

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n - ib_n), & \text{gdy } n > 0, \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}), & \text{gdy } n < 0. \end{cases}$$

Znajdowanie szeregu Fouriera danej funkcji $f(x)$ stanowi zagadnienie analizy harmonicznej.

Podstawowe własności szeregów Fouriera.

1. Przy zastąpieniu funkcji $f(x)$ przybliżoną sumą trygonometryczną

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega x + \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega x$$

średni błąd kwadratowy (patrz str. 816)

$$\delta^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 dx$$

jest najmniejszy, jeżeli za współczynniki a_k i b_k przyjmiemy współczynniki Fouriera danej funkcji.

2. Dla każdej funkcji ograniczonej i przedziałami ciągłej w przedziale $0 < x < T$ (patrz str. 363) szereg Fouriera jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do danej funkcji, tzn.

$$\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Ze zbieżności przeciętnej z kwadratem wynika równość Parsevala

$$\frac{2}{T} \int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

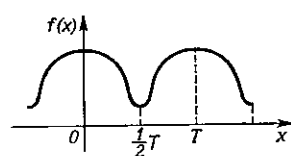
3. Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta, tzn.:

1° przedział, w którym funkcja jest określona, można rozłożyć na

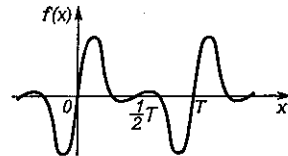
skończoną ilość przedziałów, w każdym z których funkcja $f(x)$ jest ciągła i monotoniczna;

2° w każdym punkcie nieciągłości $f(x)$ istnieje granica prawostronna $f(x+0)$ i lewostronna $f(x-0)$ (patrz str. 363 i 356), to szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny i jego suma równa się $f(x)$ w punktach ciągłości funkcji $f(x)$, a w punktach nieciągłości funkcji suma ta równa się $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$.

4. Jeżeli funkcja okresowa $f(x)$ jest ciągła wraz ze swymi pochodnymi aż do pochodnej rzędu k , to $a_n n^{k+1} \rightarrow 0$ i $b_n n^{k+1} \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$.



Rys. 417



Rys. 418

Symetria. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją parzystą, tzn. jeżeli $f(-x) = f(x)$ (symetria pierwszego rodzaju, rys. 417), to

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos k \frac{2\pi x}{T} dx, \quad b_k = 0,$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ Jeżeli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą, tzn. jeżeli $f(-x) = -f(x)$ (symetria drugiego rodzaju, rys. 418), to

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin k \frac{2\pi x}{T} dx,$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ Jeżeli $f(x + \frac{1}{2}T) = -f(x)$ (symetria trzeciego rodzaju, rys. 419), to

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx, \quad a_{2k} = 0,$$

$$b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx, \quad b_{2k} = 0,$$

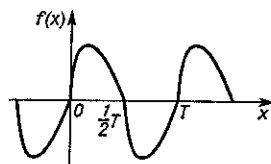
gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta i ponadto ma symetrię trzeciego rodzaju (rys. 420a), to

$$a_k = b_{2k} = 0, \\ b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \sin(2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx,$$

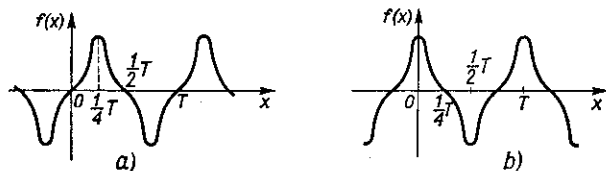
gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta i ponadto ma symetrię trzeciego rodzaju (rys. 420b), to

$$b_k = a_{2k} = 0, \\ a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \cos(2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx,$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$



Rys. 419



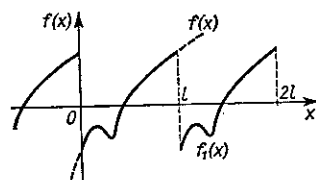
Rys. 420

Rozwinięcie funkcji nieokresowej w szereg Fouriera. Każdą funkcję $f(x)$ spełniającą w przedziale $0 \leq x \leq l$ warunki Dirichleta (patrz str. 760, 761) można rozwinąć w tym przedziale w szereg zbieżny jednej z następujących postaci:

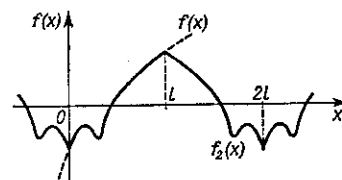
$$(1) \quad f_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \cos n \frac{2\pi x}{l} + \dots + \\ + b_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{l} + \dots + b_n \sin n \frac{2\pi x}{l} + \dots,$$

$$(2) \quad f_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{\pi x}{l} + \dots + a_n \cos n \frac{\pi x}{l} + \dots,$$

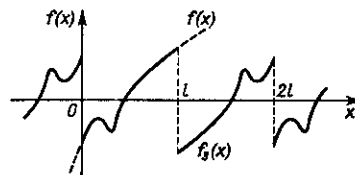
$$(3) \quad f_3(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} + \dots + b_n \sin n \frac{\pi x}{l} + \dots$$



Rys. 421



Rys. 422



Rys. 423

Funkcja $f_1(x)$ jest funkcją okresową o okresie $T = l$ i pokrywa się z funkcją $f(x)$ (¹) w przedziale $0 < x < l$ (rys. 421); współczynniki rozwinięcia znajdujemy według wzorów Eulera (patrz str. 759) biorąc $\omega = 2\pi/l$. Funkcja $f_2(x)$ jest funkcją okresową o okresie $T = 2l$, ma symetrię pierwszego rodzaju i w przedziale $0 \leq x \leq l$ pokrywa się z funkcją $f(x)$ (rys. 422); współczynniki rozwinięcia funkcji $f_2(x)$ znajdujemy według wzorów dla przypadku symetrii pierwszego rodzaju biorąc $T = 2l$. Funkcja $f_3(x)$ jest funkcją okresową o okresie $T = 2l$, ma symetrię drugiego rodzaju i w przedziale $0 \leq x \leq l$ pokrywa się z funkcją $f(x)$ (rys. 423); współczynniki rozwinięcia funkcji $f_3(x)$ znajdujemy według wzorów dla przypadku symetrii drugiego rodzaju biorąc $T = 2l$.

Całka Fouriera. Jeżeli funkcja $f(x)$ w dowolnym przedziale skończonym spełnia warunki Dirichleta (patrz str. 760 i 761) i ponadto

(¹) W punktach nieciągłości przyjmujemy $f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$.

całka $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ jest zbieżna (patrz str. 504), to zachodzi wzór (tzw. *całka Fouriera*):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tux} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-tut} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt. \end{aligned}$$

Wzór ten może być uważany za wzór graniczny dla wzoru rozwinięcia w szereg trygonometryczny funkcji nieokresowej $f(x)$ w przedziale $(-l, l)$, gdy $l \rightarrow \infty$. Gdy bowiem szereg Fouriera daje przedstawienie funkcji okresowej o okresie T w postaci sumy harmonik o częstotliwościach $u_n = n \frac{2\pi}{T}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, i amplitudach A_n , całka

Fouriera przedstawia funkcję $f(x)$ jak gdyby w postaci sumy nieskończenie wielu harmonik o częstotliwości u zmieniającej się w sposób ciągły; mówimy, że całka Fouriera daje rozwinięcie funkcji w *widmo ciągłe*, przy czym częstotliwości u odpowiada *gęstość widma*

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-tut} dt.$$

Całka Fouriera przybiera prostszą postać, gdy funkcja $f(x)$ jest parzysta:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt,$$

albo gdy jest nieparzysta:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt.$$

Przykład. Dla funkcji parzystej $f(x) = e^{-|x|}$ otrzymujemy, że gęstość widma wynosi

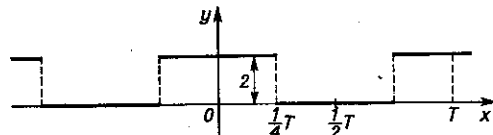
$$g(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos ut dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{u^2 + 1},$$

skąd

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + 1} du.$$

2. Zestawienie niektórych rozkładów w szereg Fouriera

Uwagi ogólne. Poniżej dajemy rozwinięcie w szereg trygonometryczny niektórych prostszych funkcji określonych w pewnym przedziale i dalej okresowo przedłużonych. Obok rozwinięcia w szereg dany jest odpowiedni wykres. Wiele prostszych funkcji okresowych można doprowadzić do jednej z postaci podanej w zestawieniu, za pomocą zmiany jednostek miary na osi Ox i na osi Oy , jako też za pomocą przesunięcia osi współrzędnych.



Rys. 424

Przykład. Funkcję parzystą o okresie T (rys. 424), określoną warunkami:

$$y = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{4}T, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{4}T < x < \frac{1}{2}T, \end{cases}$$

można sprowadzić do postaci 5 (przy $a = 1$, patrz str. 766) przez wprowadzenie zmiennych

$$Y = y - 1, \quad X = \frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{2}\pi.$$

Ponieważ

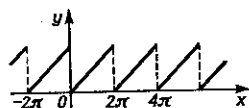
$$\sin(2n+1) \left(\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{2}\pi \right) = (-1)^n \cos(2n+1) \frac{2\pi x}{T},$$

przeto po podstawieniu nowych zmiennych w szeregu 5 otrzymujemy dla naszej funkcji wzór

$$y = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi x}{T} - \frac{1}{3} \cos 3 \frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{5} \cos 5 \frac{2\pi x}{T} - \dots \right).$$

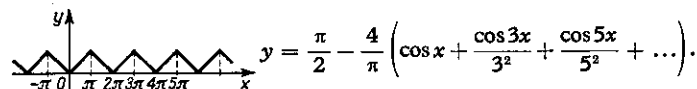
Zestawienie.

1. $y = x$ dla $0 < x < 2\pi$; mamy rozwinięcie

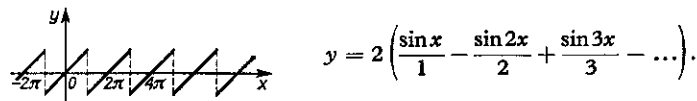


$$y = \pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

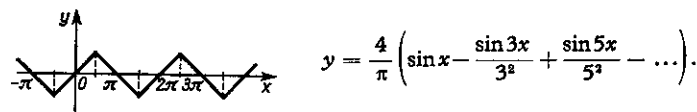
2. $y = x$ dla $0 \leq x \leq \pi$; mamy



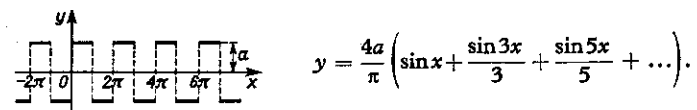
3. $y = x$ dla $-\pi < x < \pi$; mamy



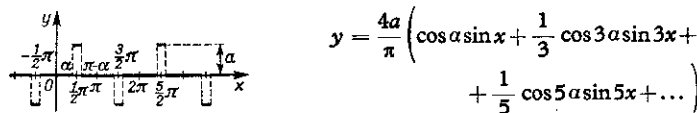
4. $y = x$ dla $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$; mamy



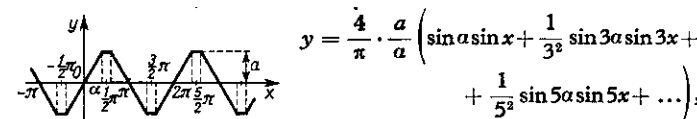
5. $y = a$ dla $0 < x < \pi$; mamy



6. $y = 0$ dla $0 \leq x < a$ i $\pi - a < x \leq \pi$, $y = a$ dla $a < x < \pi - a$; mamy



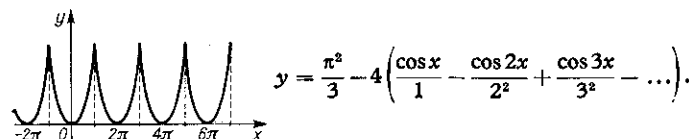
7. $y = \frac{ax}{a}$ dla $0 \leq x \leq a$, $y = a$ dla $a \leq x \leq \pi - a$, $y = \frac{a(\pi - x)}{a}$ dla $\pi - a \leq x \leq \pi$; mamy



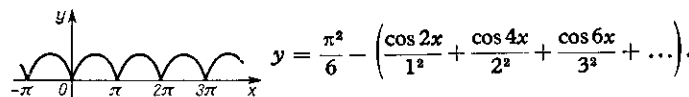
w szczególności przy $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ mamy

$$y = \frac{6\sqrt{3}a}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{1}{5^2} \sin 5x + \frac{1}{7^2} \sin 7x - \frac{1}{11^2} \sin 11x + \dots \right).$$

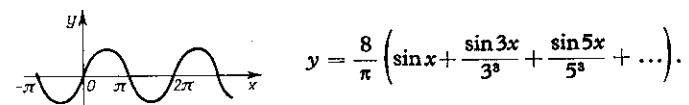
8. $y = x^2$ dla $-\pi \leq x \leq \pi$; mamy



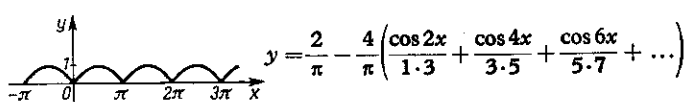
9. $y = x(\pi - x)$ dla $0 \leq x \leq \pi$; mamy



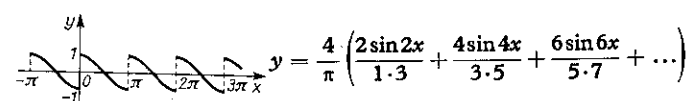
10. $y = x(\pi - x)$ dla $0 \leq x \leq 2\pi$; mamy



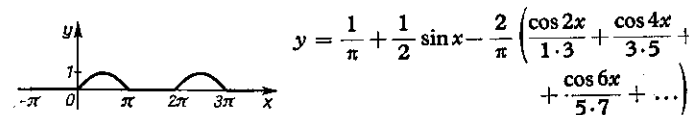
11. $y = \sin x$ dla $0 \leq x \leq \pi$; mamy



12. $y = \cos x$ dla $0 < x < \pi$; mamy



13. $y = \sin x$ dla $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$ dla $\pi \leq x \leq 2\pi$; mamy



14. $y = \cos ux$ dla $-\pi \leq x \leq \pi$; mamy

$$y = \frac{2u \sin u\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2-1} + \frac{\cos 2x}{u^2-4} + \frac{\cos 3x}{u^2-9} + \dots \right],$$

gdzie u jest dowolną liczbą niecałkowitą.

15. $y = \sin ux$ dla $-\pi < x < \pi$; mamy

$$y = \frac{2 \sin u\pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1-u^2} - \frac{2 \sin 2x}{4-u^2} + \frac{3 \sin 3x}{9-u^2} - \dots \right),$$

gdzie u jest dowolną liczbą niecałkowitą.

16. $y = x \cos x$ dla $-\pi < x < \pi$; mamy

$$y = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{4 \sin 2x}{1 \cdot 3} - \frac{6 \sin 3x}{3 \cdot 5} + \frac{8 \sin 4x}{5 \cdot 7} - \dots$$

17. $y = -\ln(2 \sin \frac{1}{2} x)$ dla $0 < x \leq \pi$; mamy

$$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots$$

18. $y = \ln(2 \cos \frac{1}{2} x)$ dla $0 \leq x < \pi$; mamy

$$y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \dots$$

19. $y = \frac{1}{2} \ln \cot^2 \frac{1}{2} x$ dla $0 < x < \pi$; mamy

$$y = \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \dots$$

Wielką ilość wzorów na rozwinięcie funkcji w szeregi trygonometryczne można uzyskać z szeregów potęgowych funkcji zmiennej zespolonej.

Przykład. Z rozwinięcia

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad \text{gdzie } |z| < 1,$$

po podstawieniu $z = ae^{i\varphi}$ i oddzieleniu części rzeczywistej i części urojonej otrzymujemy wzory

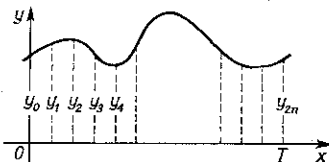
$$1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \dots + a^n \cos n\varphi + \dots = \frac{1 - a \cos \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2},$$

$$a \sin \varphi + a^2 \sin 2\varphi + \dots + a^n \sin n\varphi + \dots = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2},$$

gdzie $|a| < 1$.

3. Przybliżona analiza harmoniczna

Wzory Bessela. Przybliżone obliczanie współczynników szeregów Fouriera opiera się na zastąpieniu całek we wzorach Eulera (patrz str. 759) sumami według jednego ze wzorów przybliżonego całkowania. Najdogodniejszy jest w tym przypadku wzór trapezów (patrz str. 492). Za pomocą tego wzoru można uzyskać następujące wzory Bessela dla przybliżonej analizy harmonicznej:



Rys. 425

Podzielmy okres T na $2n$ równych części (rys. 425) i niech odcięte punktów podziału będą $x_k = kT/2n$, a odpowiednie rzędne niech będą $f(x_k) = y_k$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Wtedy mamy w przybliżeniu

$$na_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k, \quad na_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos \frac{km\pi}{n}, \quad nb_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \sin \frac{km\pi}{n},$$

gdzie $m = 1, 2, \dots, n$, przy czym zawsze $b_n = 0$.

Jeżeli utworzymy sumę trygonometryczną

$$s_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^r a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^r b_k \sin \frac{2k\pi x}{T},$$

gdzie $r < n$, to suma ta da najlepsze przybliżenie w sensie najmniejszych kwadratów (patrz str. 818) dla funkcji określonej odcięciami y_k ($k = 1, 2, \dots, 2n$), jeżeli jej współczynniki będą obliczone według wzorów Bessela. W przypadku $r = n$ suma trygonometryczna

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots + \frac{a_n}{2} \cos n \frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots + b_{n-1} \sin (n-1) \frac{2\pi x}{T},$$

której współczynniki zostały obliczone według wzorów Bessela, przybiera w punktach $x = x_k$ dane wartości y_k , a więc rozwiązuje zagadnienie interpolacji trygonometrycznej dla funkcji okresowej (patrz str. 818).

Szablony rachunkowe i przyrządy analizujące. Do obliczeń według wzorów Bessela stosuje się specjalne schematy i szablony rachunkowe. Poniżej podajemy schematy rachunkowe dla analizy har-

monicznej przy podziale okresu na 12 i na 24 części. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona za pomocą wykresu, to dla przybliżonej analizy harmonicznej oprócz stosowania wzorów Bessela można korzystać ze specjalnych przyrządów, tak zwanych *analizatorów harmonicznych*. Po wprowadzeniu wykresu danej funkcji sztyftem analizatora specjalne liczniki przyrządu dają przybliżone wartości współczynników Fouriera.

Schematy dla przybliżonej analizy harmonicznej.

Schemat I. Okres T dzielimy na 12 równych części. Rzędne w punktach podziału: $y_0, y_1, \dots, y_{11}$. Obliczamy sumy i różnice według schematu:

	$\pm y_0$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Sumy	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Różnice	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5			τ_0	τ_1	τ_2		γ_1	γ_2	

Dalsze obliczenia przeprowadza się według schematu następującego:

	Wyrazy zawierające cosinusy						Wyrazy zawierające sinusy					
1 {	σ_0	σ_1	τ_0		σ_0	$-\sigma_3$	τ_0	τ_2	δ_3			δ_1 δ_3
1-0,134 (=0,866)			τ_1						δ_2	γ_1	γ_2	
0,5			τ_2	$-\sigma_2$	σ_1				δ_1			
Sumy	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Sumy I+II	$6a_0^{(1)}$		$6a_1$		$6a_2$		—		$6b_1$		$6b_2$	—
Różnice I-II	$6a_6^{(1)}$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$		$6b_5$		$6b_4$	$6b_3$

Przy obliczeniach według tego schematu zamiast σ, τ, δ i γ należy umieścić odpowiednie wartości pomnożone przez czynniki znajdujące się w tym samym wierszu po lewej stronie (zamiast 0,866 napisano

(¹) Należy mieć na uwadze, że w trygonometrycznym wielomianie interpolacyjnym (patrz str. 769) występują nie a_0 i a_n , ale $\frac{1}{2} a_0$ i $\frac{1}{2} a_n$.

w tablicy 1—0,134, gdyż przy użyciu suwaka rachunkowego mnożenie przez 0,134 wykonuje się dokładniej niż przez 0,866).

Schemat II. Dzielimy okres T na 24 równych części. Rzędne w punktach podziału $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{23}$ zapisujemy w sposób następujący:

y_0	y_2	y_4	y_6	y_8	y_{10}	y_{12}
y_{22}	y_{20}	y_{18}	y_{16}	y_{14}		
y_3	y_5	y_7	y_9	y_{11}	y_{13}	y_{15}
y_{21}	y_{23}	y_{21}	y_{19}	y_{17}		

Dla każdej grupy rzędnych prowadzimy z osobna obliczenia według podanego wyżej schematu dla 12 współrzędnych. Oznaczamy współczynniki otrzymane z pierwszej grupy rzędnych przez A_k i B_k , a z drugiej strony rzędnych przez A'_k i B'_k . Obliczamy $\bar{A}_k$ i $\bar{B}_k$ według wzorów:

$$\bar{A}_0 = A'_0, \quad \bar{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_1 - B'_1),$$

$$\bar{A}_2 = -B'_2, \quad \bar{A}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_3 + B'_3),$$

$$\bar{A}_4 = -A'_4, \quad \bar{A}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_5 - B'_5);$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_1 + B'_1), \quad \bar{B}_2 = A'_2, \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_3 - B'_3),$$

$$\bar{B}_4 = -B'_4, \quad \bar{B}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_5 + B'_5), \quad \bar{B}_6 = -A'_6$$

(w rzeczywistości trzeba obliczyć nie $\bar{A}_k$ i $\bar{B}_k$, ale ich wartości pomnożone przez 6, patrz niżej). Następnie znajdujemy sumy i różnice, które dadzą poszukiwane współczynniki:

	$6A_0$	$6A_1$	$6A_2$	$6A_3$	$6A_4$	$6A_5$	$6A_6$
	$6A_0$	$6A_1$	$6A_2$	$6A_3$	$6A_4$	$6A_5$	
Sumy	$12a_0^{(1)}$	$12a_1$	$12a_2$	$12a_3$	$12a_4$	$12a_5$	$12a_6$
Różnice	$12a_{12}^{(1)}$	$12a_{11}$	$12a_{10}$	$12a_9$	$12a_8$	$12a_7$	
	$6\bar{B}_1$	$6\bar{B}_2$	$6\bar{B}_3$	$6\bar{B}_4$	$6\bar{B}_5$	$6\bar{B}_6$	
	$6B_1$	$6B_2$	$6B_3$	$6B_4$	$6B_5$		
Sumy	$12b_1$	$12b_2$	$12b_3$	$12b_4$	$12b_5$	$12b_6$	
Różnice	$12b_{11}$	$12b_{10}$	$12b_9$	$12b_8$	$12b_7$		

(¹) Patrz notkę na poprzedniej stronie.

Synteza. Przez *syntezę* zazwyczaj rozumie się obliczenie wartości funkcji okresowej $f(x)$ określonej jej szeregiem Fouriera. Jeżeli dopuszczalna dokładność pozwala na ograniczenie się w szeregu Fouriera do pierwszych sześciu harmonik (tj. na przyjęcie $a_k = b_k = 0$ dla $k > 6$), to obliczenie wartości $y_k = f(x_k)$ w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{11}$, dzielących okres na 12 równych części, można przeprowadzić za pomocą danego powyżej schematu I (patrz str. 770). W tym celu należy zamiast $s_0, s_1, \dots, s_6$ umieścić dane współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_6$, a zamiast $d_1, d_2, \dots, d_5$ umieścić współczynniki $b_1, b_2, \dots, b_5$ ⁽¹⁾ i doprowadzić obliczenia według schematu do końca. Liczby otrzymane w dwóch ostatnich wierszach tablicy na stronie 770 (zamiast $6a_0, 6a_1, \dots, 6a_6, 6b_1, 6b_2, \dots, 6b_5$) oznaczamy przez $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$, wtedy dla uzyskania poszukiwanych wartości funkcji zostaje tylko wykonanie dodawań i odejmowań według schematu:

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	
Sumy	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Różnice		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	

⁽¹⁾ Współczynnik b_6 odrzuca się, gdyż jak łatwo dostrzec, odpowiedni wyraz szeregu wcale nie wpływa na wartość funkcji w rozpatrywanych punktach.

OPRACOWANIE DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

I. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA

1. Rachunek prawdopodobieństwa

Wstęp. *Rachunek prawdopodobieństwa* jest działem matematyki zajmującym się badaniem modeli zjawisk przypadkowych. Przy badaniu takich zjawisk interesujemy się zawsze możliwością realizacji pewnych zdarzeń, których zajście leży całkowicie lub częściowo poza zasięgiem kontroli ludzkiej. Zdarzenia takie nazywamy potocznie *zdarzeniami losowymi* i staramy się przypisać im *prawdopodobieństwa*, tj. liczby wyrażające w pewien sposób stopień możliwości ich zachodzenia. Używając chwilowo języka intuicyjnego i mało precyzyjnego: *prawdopodobieństwo* danego zdarzenia A mówi nam, w jakim procencie hipotetycznie identycznych sytuacji powinniśmy oczekiwać zajścia zdarzenia A . Rachunek prawdopodobieństwa uczy nas, w jaki sposób można:

1° przypisywać zdarzeniom prawdopodobieństwa tak, aby powyżej sformułowany intuicyjny warunek był spełniony,

2° w jaki sposób, mając dane prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, obliczać prawdopodobieństwa innych zdarzeń z nich zbudowanych.

Każde zjawisko przypadkowe rządzone jest pewnym prawem prawdopodobieństwa. Rachunek prawdopodobieństwa uczy nas więc, w jaki sposób ze znajomości tego prawa wyprowadzać informacje na temat prawdopodobieństw interesujących nas praktycznie zdarzeń i przewidywać rzeczywisty przebieg danego zjawiska; natomiast *statystyka matematyczna* uczy nas, w jaki sposób z obserwacji danego zjawiska wnioskować o rządzącym nim prawie prawdopodobieństwa i jak znajdować optymalne (z punktu widzenia narzuconych kryteriów) postępowanie.

Zdarzenia losowe. Będziemy oznaczali zdarzenie losowe literami $A, B, C, \dots$, opatrując je w miarę potrzeby wskaźnikami. Z danych zdarzeń możemy tworzyć nowe łącząc je ze sobą podobnie jak

to robimy ze zdaniem. Tak więc określamy zdarzenie „ A i B ”, zwane *iloczynem zdarzeń* A i B , jako takie zdarzenie, które zachodzi, jeżeli zachodzą zarówno A jak i B ; zdarzenie „ A lub B ”, zwane *sumą* (lub *alternatywą*) zdarzeń A i B , jest zdarzeniem, które zachodzi, gdy zachodzi A lub B , lub oba na raz. Zdarzenie „nie A ”, zwane zdarzeniem *przeciwnym* do A i oznaczane $\bar{A}$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy A nie zachodzi. Jeżeli zdarzenia A i B nie mogą zachodzić jednocześnie, to nazywamy je *zdarzeniami rozłącznymi* (lub *wyłączającymi się*). Zdarzenie, które zachodzi zawsze (np. zdarzenie „ A lub $\bar{A}$ ”), nazywamy *zdarzeniem pewnym*, a zdarzenie, które nigdy nie zachodzi (np. „ A i $\bar{A}$ ”), nazywamy *zdarzeniem niemożliwym*.

Własności prawdopodobieństwa. *Prawdopodobieństwo zdarzenia* A jest pewną liczbą nieujemną przypisaną temu zdarzeniu, oznaczana przez $P(A)$, taką że

1° *Jeżeli zdarzenia* $A, B, \dots$ *wyłączają się wzajemnie, to*

$$P(A \text{ lub } B \text{ lub } \dots) = P(A) + P(B) + \dots$$

2° *Jeżeli* E *jest zdarzeniem pewnym, to*

$$P(E) = 1.$$

Bezpośrednio stąd wynika, że dla dowolnego zdarzenia A

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$(1) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

a dla dowolnych zdarzeń A i B

$$(2) \quad P(A \text{ lub } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B).$$

Jeżeli spełnione są warunki 1° i 2°, to zagadnienie, czy konkretne wartości prawdopodobieństw przypisanych zdarzeniom są „poprawne”, wykracza poza ramy teorii prawdopodobieństwa. Używając znów języka nieformalnego, są one dobrane „poprawnie”, czyli adekwatnie opisują badane zjawisko, jeżeli przy nieograniczenie wzrastającej ilości niezależnych powtórzeń tego zjawiska częstość realizacji zdarzenia A będzie zbliżać się do liczby $P(A)$ równej prawdopodobieństwu zdarzenia A . Metodami sprawdzania tego warunku zajmuje się statystyka matematyczna.

Przykład. Przypuśćmy, że działający wadliwie automat telefoniczny „połyka” monetę i nie daje połączenia z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$; zwraca monetę z powrotem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ i daje połączenie z wybranym numerem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskamy połączenie bezpłatnie?

Oznaczając przez A zdarzenie „moneta została zwrócona” i przez B zdarzenie „uzyskaliśmy połączenie” otrzymujemy na podstawie (2):

$$P(A \text{ i } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ lub } B).$$

Mamy tu

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

oraz

$$\begin{aligned} P(A \text{ lub } B) &= \\ &= 1 - P(\text{nie uzyskamy połączenia i moneta zostanie „połknięta”}) = \\ &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie

$$P(A \text{ i } B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{11}{60}.$$

Interesujące jest zauważyć, że jeżeli $P(A \text{ i } B) = 1 - P(A \text{ lub } B)$, to automat jest „statystycznie uczciwy” w tym sensie, że daje średnio tyle samo połączeń, ile „połyka” monet; z wyjątkiem jednak przypadku, gdy $P(A \text{ lub } B) = 1$, nie jest on „indywidualnie uczciwy”, tzn. nie zawsze otrzymuje połączenie ten, kto za nie zapłacił.

Kombinatoryczne obliczanie prawdopodobieństw. W wielu przypadkach można obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych w sposób następujący. Przypuśćmy, że w wyniku rozważanego doświadczenia losowego może zajść jeden z n wzajemnie wyłączających się i jednakowo prawdopodobnych przypadków. Jeżeli w m spośród tych n przypadków realizuje się zdarzenie A , to prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

(w języku potocznym wyrażamy to mówiąc, że prawdopodobieństwo jest równe stosunkowi ilości przypadków *sprzyjających* zdarzeniu A do ilości wszystkich przypadków możliwych).

Przykład. Jako przykład obliczymy prawdopodobieństwo uzyskania wygranych w totolotka (bez uwzględniania tzw. dyscypliny dodatkowej). Możemy, jak to jest często wygodne, posłużyć się tzw. *interpretacją urnową*:

Urna zawiera 6 kul białych i 43 czarne. Wybieramy losowo 6 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo p_k , że wśród wybranych 6 kul jest dokładnie k kul białych?

Ilość możliwych wyborów 6 kul spośród 49 wynosi $\binom{49}{6}$. Tylko jeden wybór (wszystkie 6 kul białych z 6) daje nam najwyższą wygraną; stąd $p_6 = 1/\binom{49}{6}$. Aby uzyskać dokładnie 5 kul białych, na-

leży wybrać 5 kul białych spośród 6 możliwych (co można osiągnąć na $\binom{6}{5}$ sposobów) oraz jedną czarną spośród 43 (co można zrobić na $\binom{43}{1} = 43$ sposoby). Zatem ilość możliwych sposobów wybrania 5 kul białych i 1 czarnej wynosi $\binom{6}{5} \cdot 43 = 6 \cdot 43 = 258$, skąd $p_5 = 258 / \binom{49}{6}$. Podobnie $p_4 = \left[\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} \right] / \binom{49}{6}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe. Rozważmy dwa zdarzenia losowe A i B , przy czym niech $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A , jeżeli zaszło zdarzenie B , oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i określamy wzorem

$$(1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \text{ i } B)}{P(B)}.$$

Prawdopodobieństwo $P(A|B)$ jest na ogół różne od prawdopodobieństwa (bezw warunkowego lub *a priori*) zdarzenia A . W pewnych przypadkach jednak informacja o zajściu zdarzenia B nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zdarzenia A , tj. $P(A|B) = P(A)$. Ze wzoru (1) otrzymujemy wówczas

$$(2) \quad P(A \text{ i } B) = P(A) P(B).$$

Zdarzenia A i B , dla których zachodzi prawo mnożenia prawdopodobieństw (2), nazywamy **zdarzeniami niezależnymi**.

Wyobraźmy sobie, że w wyniku pewnego doświadczenia losowego realizuje się zawsze jedno z wzajemnie wykluczających się zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_N$. Wówczas dla dowolnego zdarzenia B zachodzi wzór

$$(3) \quad P(B) = P(B|A_1) P(A_1) + \dots + P(B|A_N) P(A_N).$$

Wzór ten nazywamy **wzorem na prawdopodobieństwo całkowite**. Jest on używany często w sytuacjach praktycznych, gdyż niekiedy prawdopodobieństwa warunkowe $P(B|A_i)$ są łatwe do obliczenia lub dane bezpośrednio. Często zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_N$ nazywa się **hipotezami**, a prawdopodobieństwa $P(A_i)$ — **prawdopodobieństwami a priori**. Jeżeli wiadomo, że zaszło zdarzenie B , to **prawdopodobieństwo a posteriori** hipotezy A_i ($i = 1, 2, \dots, N$) wyraża się tzw. **wzorem Bayesa**

$$(4) \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) P(A_j)}.$$

Przykłady. 1. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy pojedynczym strzale wynosi p . Oddano n strzałów niezależnie jeden od drugiego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel został trafiony co najmniej raz?

Prawdopodobieństwo chybienia przy pojedynczym strzale wynosi $1-p$, wobec tego prawdopodobieństwo, że wszystkie n strzałów będą chybnymi, wynosi $(1-p)^n$. Stąd szukana odpowiedź jest $1 - (1-p)^n$.

2. Poniższy przykład jest nieco sztuczny, niemniej wart jest przytoczenia ze względu na to, że odpowiedź wydaje się przeczyć (na pierwszy rzut oka) intuicji.

Z talii 8 kart zawierającej 4 damy i 4 walety wybrano losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że obie wybrane karty są waletami, jeżeli wiadomo, że

- 1° jedna z nich jest waletem,
- 2° jedna z nich jest czerwonym waletem,
- 3° jedna z nich jest waletem kier.

Oznaczamy zdarzenie opisane w warunkach 1°–3° odpowiednio przez A , B , C , a zdarzenie, którego prawdopodobieństwa szukamy (że obie karty są waletami), przez D .

Obliczymy najpierw $P(A)$, $P(B)$ i $P(C)$. W każdym przypadku ilość możliwych par kart wynosi $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$. Zdarzenie przeciwne do A realizuje się, gdy wylosowano dwie damy; można to zrobić na $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ sposobów. Stąd $P(A) = 1 - \frac{6}{28} = \frac{22}{28}$. Zdarzenie przeciwne do B realizuje się, gdy wśród wybranych kart nie ma czerwonego waleta. Ilość takich wyborów wynosi $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$; stąd $P(B) = 1 - \frac{15}{28} = \frac{13}{28}$. Wreszcie podobnie $P(C) = 1 - \frac{7}{28} = \frac{21}{28}$.

Dla obliczenia $P(D|A)$ musimy jeszcze obliczyć $P(D \text{ i } A)$; z treści zadania łatwo widzieć, że $P(D \text{ i } A) = P(D)$. Rozumując podobnie jak przy obliczaniu $P(A)$ obliczamy

$$P(D) = \frac{\binom{4}{2}}{28} = \frac{6}{28}, \quad \text{skąd} \quad P(D|A) = \frac{P(D \text{ i } A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{22}{28}} = \frac{3}{11}.$$

Dla obliczenia $P(D|B)$ obliczyć musimy $P(B \text{ i } D)$. Zdarzenie „ B i D ” realizuje się, jeżeli wylosowano dwa walety, w tym co najmniej jeden jest czerwony. Łatwo obliczyć, że ilość takich par wynosi 5; stąd

$$P(B \text{ i } D) = \frac{5}{28} \quad \text{i} \quad P(D|B) = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{13}{28}} = \frac{5}{13}.$$

Wreszcie zdarzenie „C i D” realizuje się, jeżeli wybrano dwa walety, wśród których jest walet kier: ilość takich par wynosi 3; stąd

$$P(C \text{ i } D) = \frac{3}{28} \quad \text{ i } \quad P(D|C) = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{7}{28}} = \frac{3}{7}.$$

3. Pierwsza urna zawiera 3 kule białe i 2 czarne; druga 1 białą i 5 czarnych. Z pierwszej urny losujemy kulę i przenosimy ją do drugiej, po czym losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta z drugiej urny kula jest biała?

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wyciągnięciu z drugiej urny kuli białej, a przez B i C odpowiednio zdarzenia, że przeniesiona kula była biała lub czarna. Mamy $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = \frac{2}{5}$, $P(A|B) = \frac{2}{7}$, $P(A|C) = \frac{1}{7}$. Na podstawie wzoru (3) mamy

$$P(A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{35}.$$

4. Przypuśćmy, że w warunkach przykładu poprzedniego wyciągnięto z drugiej urny kulę białą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przeniesiona kula była też biała?

Używając wzoru (4) mamy tu

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Rozkład dwumianowy. W zagadnieniach praktycznych często spotykamy się z następującą sytuacją:

W wyniku pewnego doświadczenia może zajść z prawdopodobieństwem p pewne zdarzenie A (zwane zazwyczaj *sukcesem*) lub z prawdopodobieństwem $1-p$ może zajść zdarzenie przeciwne $\bar{A}$. Dokonujemy n niezależnych doświadczeń i interesujemy się łączną ilością S_n sukcesów w tych n doświadczeniach. Wówczas

$$(1) \quad P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Wzór (1) przy dużych wartościach n nie jest wygodny dla obliczeń numerycznych. Możemy posługiwać się w takich przypadkach jednym z dwóch następujących twierdzeń:

Twierdzenie Poissona. Jeżeli $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$ tak, że $np = \lambda > 0$, to

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

W praktyce twierdzenie Poissona pozwala zastępować lewą stronę wzoru (1) przez prawą stronę wzoru (2) już dla niewielkich n (rzędu kilkudziesięciu) przy małych p (dla których iloczyn $\lambda = np$ nie przekracza 10).

Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a. Jeżeli $0 < p < 1$, to dla dowolnych $a < b$ zachodzi wzór

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Wzór ten pozwala nam obliczać dla dużych n (rzędu kilkudziesięciu) przybliżone wartości prawdopodobieństwa, że ilość sukcesów S_n będzie zawarta w przedziale

$$\langle np + a\sqrt{np(1-p)}, np + b\sqrt{np(1-p)} \rangle.$$

Tablice całek z funkcji

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

umieszczone są na początku tej książki (str. 94 i 95); ponadto można je znaleźć w każdym podręczniku statystyki. Tablice w tej książce podają wartości całek

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt;$$

inne tablice podają niekiedy wartości całki

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \text{ lub } \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Dla wzajemnego przeliczenia tych tablic wystarczy pamiętać, że funkcja podcałkowa jest parzysta (tzn. jej wykres jest symetryczny względem osi y) oraz że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1.$$

Przykłady. 1. Wyobraźmy sobie, że 2% sztuk lamp produkowanych przez pewną fabrykę ma ukryte wady. Lampy te pakowane są w pudełka po 100 sztuk każde. Wówczas prawdopodobieństwo, że k sztuk w pudełku jest wadliwych, wynosi w przybliżeniu $p_k = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$

($n = 100$, $p = 0,02$, $\lambda = np = 2$). W szczególności $p_0 = 0,135$, $p_1 = 0,270$. Aby odpowiedzieć na pytanie, po ile sztuk co najmniej lamp należy pakować do pudełka, aby 99% pudełek zawierało nie mniej niż 100 sztuk dobrych, należy znaleźć najmniejszą taką liczbę naturalną x , aby

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \geq 0,99,$$

gdzie $\lambda = (100 + x) \cdot 0,02$.

2. Teatr ma 1000 miejsc i dwa wejścia, każde z nich zaopatrzone w szatnię. Zakładamy, że widzowie przychodzą do teatru pojedynczo i wybierają jedno z wejść losowo z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ każde, niezależnie jeden od drugiego. Ile co najmniej wieszaków powinna mieć każda z szatni, aby z prawdopodobieństwem 95% każdy z 1000 widzów mógł zostawić płaszcz w szatni przy tym wejściu, którym wszedł?

Interpretując wybór jednego określonego z wejść jako „sukces”, musimy znaleźć najmniejszą taką liczbę całkowitą x , aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,95 ilość sukcesów w 1000 doświadczeniach o prawdopodobieństwie sukcesu $\frac{1}{2}$ nie przekraczała x . Mamy tu $n = 1000$, $p = \frac{1}{2}$, $np = 500$, $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{250} = 15,81$. Z tablic znajdujemy wartość a taką, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0,95;$$

mamy $a = 1,65$. Wzór (3) orzeka, że w przybliżeniu

$$P\left\{\frac{S_{1000} - 500}{15,81} < 1,65\right\} = P\{S_{1000} < 500 + 26,08\} = 0,95.$$

Tak więc z prawdopodobieństwem 0,95 ilość sukcesów w naszym przypadku nie przekroczy 527; zatem szukana ilość miejsc w szatni wynosi 527.

Zmienne losowe. Często rezultat rozważanego zjawiska losowego wygodnie jest opisać za pomocą liczby (jak to robiliśmy w poprzednim paragrafie mówiąc o ilości sukcesów w n doświadczeniach). Do matematycznego opisu takich sytuacji służy teoria zmiennych losowych. Wielkość liczbowa X zależna od przypadku i taką, że dla dowolnych stałych $a < b$ określone jest prawdopodobieństwo, że X przybierze wartość z przedziału (a, b) , nazywamy *zmienną losową*. Wyznaczenie rozkładu zmiennej losowej X polega na wyznaczeniu wartości liczbowej

prawdopodobieństw tego, że $a \leq X < b$ dla wszystkich możliwych wartości a i b . W przypadku ogólnym najwygodniejszym opisem rozkładu jest podanie funkcji niemalejącej $F(x)$ takiej, że

$$F(b) - F(a) = P\{a \leq X < b\},$$

czyli funkcji, której przyrosty na przedziałach są równe akurat żądanym prawdopodobieństwom. Ponieważ operuje się tu jedynie wartościami przyrostów funkcji $F(x)$, można dowolnie ustalić wartość funkcji $F(x)$ w pewnym dowolnie wybranym punkcie; tradycyjnie przyjmuje się $F(-\infty) = 0$ (wówczas automatycznie $F(+\infty) = 1$). Funkcję $F(x)$ nazywa się *dystrybucją* zmiennej losowej X :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

W dwóch szczególnych przypadkach zmiennych losowych wygodniejszy jest nieco inny analityczny opis rozkładu niż dystrybucja: dotyczy to tzw. zmiennych losowych dyskretnych i zmiennych losowych ciągłych.

Zmienne losowe dyskretne. Zmienną losową X nazywamy *dyskretną* (lub *skokową*), jeśli zbiór jej możliwych wartości jest skończony lub przeliczalny; innymi słowy jeżeli istnieje taki ciąg (skończony lub nie) liczb $x_1, x_2, \dots$, że zmienna losowa X może przyjąć jedynie jedną tylko wartość z tego ciągu. W tym przypadku dla opisanego rozkładu zmiennej losowej X wystarczy podać wszystkie prawdopodobieństwa

$$p_k = P\{X = x_k\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

W zastosowaniach praktycznych liczby $x_1, x_2, \dots$ są najczęściej liczbami całkowitymi (ma to np. miejsce w częstym przypadku, gdy wartości zmiennej X otrzymuje się w rezultacie liczenia).

Zmienne losowe ciągłe. Zmienną losową X nazywamy *ciągłą*, jeżeli istnieje taka nieujemna funkcja $f(x)$, że dla dowolnych a i b

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x) dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy *gęstością* (lub *funkcją gęstości*) zmiennej losowej X . Wynika stąd w szczególności, że $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$; dystrybucja zmiennej losowej X wyraża się przez gęstość wzorem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Najważniejsze rozkłady zmiennych losowych. Poniżej podajemy przykłady najczęściej występujących w praktyce zmiennych losowych i ich rozkładów z krótkim objaśnieniem dotyczącym najbardziej typowych sytuacji, w jakich możemy oczekiwać ich występowania.

1. **Rozkład dwumianowy (Bernoulliego).** Zmienną losową S_n , z którą zetknęliśmy się w poprzednim paragrafie, której rozkład określony jest przez

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

nazywamy *zmienną losową o rozkładzie dwumianowym* (lub *Bernoulliego*).

Jak już podawaliśmy, S_n wyraża łączną ilość sukcesów w n niezależnych doświadczeniach, z których każde daje w wyniku sukces z prawdopodobieństwem p .

2. **Rozkład Poissona.** O zmiennej losowej X mówimy, że ma *rozkład Poissona*, jeżeli dla pewnego $\lambda > 0$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Z rozkładem Poissona mamy do czynienia w przypadku badania łącznej ilości zająć pewnego rzadkiego zdarzenia (tzn. zdarzenia o małym prawdopodobieństwie) przy dużej ilości niezależnych prób (np. łączna ilość wypadków ulicznych, czy pożarów danego dnia). Innymi typowymi przykładami zjawisk, w których pojawia się rozkład Poissona, mogą być: ilość cząstek wypromieniowanych w jednostce czasu przez daną substancję radioaktywną, ilość wezwań telefonicznych w centrali na odcinku czasu o danej długości.

3. **Rozkład geometryczny.** O zmiennej losowej X mówimy, że ma *rozkład geometryczny*, jeżeli

$$P\{X = k\} = (1-p)^k p \quad (0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Typowym przykładem będzie tu czas oczekiwania X na pierwszy sukces, jeżeli próby powtarzane są niezależnie, w jednostkowych odstępach czasu i prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p .

4. **Rozkład hipergeometryczny.** O zmiennej losowej X mówimy, że ma *rozkład hipergeometryczny*, jeżeli

$$(1) \quad P\{X = k\} = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

gdzie $n \leq N$, $m \leq N$, $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n, m)$.

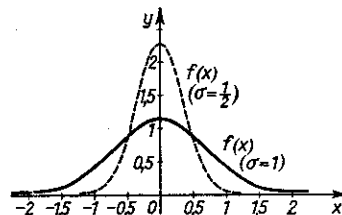
Rozkład ten występuje często przy badaniach statystycznych; jeżeli badana populacja ma N elementów, z których m ma pewną interesu-

jącą nas cechę, a $N-m$ elementów tej cechy nie ma, i jeżeli losujemy bez zwracania próbkę n elementów, to wyrażenie (1) podaje prawdopodobieństwo znalezienia dokładnie k elementów z badaną cechą w próbce.

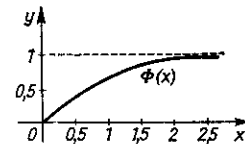
5. **Rozkład normalny.** O zmiennej losowej ciągłej X mówimy, że ma *rozkład normalny*, jeżeli istnieje dla niej gęstość określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

gdzie $\sigma > 0$ i m są stałymi (rys. 426). Z rozkładem tym w szczególnym przypadku $\sigma = 1$ i $m = 0$ zetknęliśmy się już przy twierdzeniu de Moivre'a-Laplace'a. Rozkład normalny o parametrach m i σ oznacza się symbolem $N(m, \sigma)$.



Rys. 426



W praktyce ze zmiennymi losowymi X o rozkładzie normalnym spotykamy się w przypadkach, gdy na wartość X ma wpływ duża ilość niezależnie działających czynników, z których każdy ma znikomy efekt. Typowym przykładem może tu być wysokość położenia cząstki w procesie dyfuzji, błąd pomiaru, wzrost ludzki itp.

6. **Rozkład wykładniczy.** Rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

gdzie $a > 0$, nazywamy *rozkładem wykładniczym*.

Zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym pojawiają się np. jako długości życia pewnego typu urządzeń (takich, gdzie prawdopodobieństwo awarii na danym odcinku czasu zależy jedynie od długości tego odcinka i nie zależy od tego, jaka była dotychczasowa długość życia danego urządzenia).

Parametry rozkładu zmiennych losowych. Często w zagadnieniach praktycznych nie możemy z różnych względów podać rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej; powstaje wówczas potrzeba choćby przybliżonego opisu rozkładu za pomocą jednej lub kilku wartości liczbowych „charakterystycznych” dla tego rozkładu. Najczęściej spotykanymi charakterystykami są momenty rozkładu oraz pewne ich funkcje.

Wartością przeciętną (wartością oczekiwaną, nadzieją matematyczną) zmiennej losowej X nazywamy liczbę określoną jako

$$(1) \quad E(X) = \sum_k x_k P\{X = x_k\}$$

dla zmiennej losowej dyskretnej oraz

$$(2) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

dla zmiennej losowej ciągłej (zakładamy tu, że szereg (1) względnie całka (2) są bezwzględnie zbieżne). Ogólnie, jeżeli $u(x)$ jest pewną funkcją, to *wartość przeciętną zmiennej losowej $Y = u(X)$ określamy odpowiednio jako*

$$E(Y) = \sum_k u(x_k) P\{X = x_k\} \quad \text{lub} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx$$

(przy założeniu, że napisane wyrażenia są bezwzględnie zbieżne).

Momentem rzędu r zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną zmiennej losowej X^r ; tak więc w przypadku dyskretnym i ciągłym mamy odpowiednio

$$m_r = E(X^r) = \sum_k x_k^r P\{X = x_k\} \quad \text{oraz} \quad m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

(przy założeniu, że powyższe wyrażenia są bezwzględnie zbieżne). Wiadąc stąd od razu, że dla $r = 1$ otrzymujemy wartość przeciętną m_1 zmiennej losowej X .

Wielkość

$$m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

oznaczamy zazwyczaj symbolem $D^2(X)$ i nazywamy *wariancją* zmiennej losowej X . Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy *odchyleniem standardowym* (lub *odchyleniem średnim*) zmiennej losowej X .

Jeżeli zmienną losową X poddamy przekształceniu liniowemu, tzn. utworzymy nową zmienną losową $Y = aX + b$, to

$$E(Y) = aE(X) + b \quad \text{oraz} \quad D^2(Y) = a^2 D^2(X).$$

Zmienną losową o wartości przeciętnej 0 i wariancji 1 nazywamy *standaryzowaną*. Jeżeli $E(X)$ i $D^2(X)$ są odpowiednio wartością przeciętną i wariancją zmiennej losowej X , to zmienna losowa

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

jest standaryzowana.

W statystyce matematycznej zamiast wartości przeciętnej używa się niekiedy mediany; *medianą* nazywamy taką wartość μ , że

$$P\{X \geq \mu\} \geq \frac{1}{2}, \quad P\{X \leq \mu\} \geq \frac{1}{2}$$

(dla zmiennych losowych typu ciągłego możemy określić medianę przez relację $P\{X \leq \mu\} = P\{X \geq \mu\} = \frac{1}{2}$). Mediana jest szczególnym przypadkiem tzw. *parametrów pozycyjnych* zwanych *kwantylami*; kwantylem rzędu p zmiennej losowej X nazywamy wartość λ_p taką, że

$$P\{X \leq \lambda_p\} \geq p, \quad P\{X \geq \lambda_p\} \geq 1 - p$$

(dla zmiennej losowej typu ciągłego definicja ta znów upraszcza się do warunku $P\{X \leq \lambda_p\} = p$). Mediana jest więc kwantylem dla $p = \frac{1}{2}$; kwantyle dla $p = \frac{1}{4}$ i $p = \frac{3}{4}$ nazywamy odpowiednio *górnym* i *dolnym kwantylem*, a kwantyle dla $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ nazywamy *decylami*.

Przykłady. 1. Dla rozkładu dwumianowego mamy

$$E(S_n) = np, \quad D^2(S_n) = np(1-p).$$

2. Dla rozkładu Poissona mamy

$$E(X) = D^2(X) = \lambda.$$

3. Dla rozkładu normalnego mamy

$$E(X) = m, \quad D^2(X) = \sigma^2.$$

W tym przypadku mediana równa się także m .

Dolny kwantyl możemy wyznaczyć jako punkt $\lambda_{1/4} = m - a\sigma$, gdzie a wyznaczona jest z relacji

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

Rozkłady wielowymiarowe. Zmienne losowe omawiane w poprzednim paragrafie są wygodnym środkiem opisu zjawisk przypadkowych, kiedy każdemu z interesujących nas zdarzeń losowych możemy w naturalny dla danego zjawiska sposób przyporządkować jedną liczbę.

W pewnych jednakże sytuacjach taki opis nie jest wystarczający i do bardziej adekwatnego opisu konieczne jest użycie dwu lub więcej wymiarowych wektorów. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, wektor losowy (X, Y) nazywamy (dwuwymiarową) zmienną losową, jeżeli określony jest jego rozkład, tzn. jeżeli dla każdego prostokąta na płaszczyźnie określone jest prawdopodobieństwo, że wartość wektora losowego (X, Y) znajduje się wewnątrz tego prostokąta. W analogiczny sposób jak w przypadku pojedynczych zmiennych losowych, można określić dystrybucję wektora (X, Y) jako funkcję

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}.$$

Zajmijmy się od razu szczególnymi przypadkami zmiennych dyskretnych i ciągłych.

Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) jest dyskretna, jeżeli istnieją takie (skończone lub przeliczalne) ciągi punktów $x_1, x_2, \dots$ oraz $y_1, y_2, \dots$, że jedynymi możliwymi wartościami, jakie może przyjmować para (X, Y) , są punkty w postaci (x_j, y_k) . Dla wyznaczenia rozkładu takiej zmiennej losowej wystarczy podanie prawdopodobieństw

$$(1) \quad p(x_j, y_k) = P\{X = x_j, Y = y_k\} \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

(niektóre z $p(x_j, y_k)$ mogą być równe zeru).

Mając rozkład (1) pary zmiennych (X, Y) można wyznaczyć rozkład każdej z tych zmiennych oddzielnie; mamy tu

$$(2) \quad P\{X = x_j\} = \sum_k P\{X = x_j, Y = y_k\} = \sum_k p(x_j, y_k),$$

$$(3) \quad P\{Y = y_k\} = \sum_j P\{X = x_j, Y = y_k\} = \sum_j p(x_j, y_k).$$

Rozkłady (2) i (3) nazywamy rozkładami brzegowymi.

Jeżeli dla wszystkich j i k mamy

$$p(x_j, y_k) = P\{X = x_j\} P\{Y = y_k\},$$

to zmienne losowe X i Y nazywamy niezależnymi. W tym przypadku tablica łącznego rozkładu $p(x_j, y_k)$ ma postać tablicy mnożenia.

Rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem, że $Y = y_k$, określamy wychodząc bezpośrednio z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P\{X = x_j | Y = y_k\} = \frac{P\{X = x_j, Y = y_k\}}{P\{Y = y_k\}} = \frac{p(x_j, y_k)}{\sum_j p(x_j, y_k)}.$$

Analogicznie, rozkład warunkowy zmiennej losowej Y pod warunkiem, że $X = x_j$, ma postać

$$P\{Y = y_k | X = x_j\} = \frac{p(x_j, y_k)}{\sum_k p(x_j, y_k)}.$$

Powyższe pojęcia rozkładów brzegowych i warunkowych przenoszą się łatwo na przypadek dowolnej ilości n zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Mówimy, że zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) jest ciągła, jeżeli istnieje taka funkcja nieujemna $f(x, y)$, że dla dowolnego prostokąta o przeciwnych wierzchołkach (a, b) i (c, d) ($a < c$, $b < d$) mamy

$$P\{a \leq X < c, b \leq Y < d\} = \int_a^c \int_b^d f(x, y) dx dy.$$

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy gęstością wektora losowego (X, Y) .

Analogicznie jak w przypadku dyskretnym określamy gęstość brzegową zmiennej losowej X wzorem

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

a gęstość brzegową zmiennej Y wzorem

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Gęstość warunkową zmiennej losowej X pod warunkiem, że $Y = y_0$, określamy wzorem

$$g_1(x | Y = y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_2(y_0)} = \frac{f(x, y_0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0) dx}.$$

Podobnie, gęstość warunkową zmiennej losowej Y pod warunkiem, że $X = x_0$, określamy wzorem

$$g_2(y | X = x_0) = \frac{f(x_0, y)}{f_1(x_0)} = \frac{f(x_0, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y) dy}.$$

Zmienne losowe X i Y nazywamy niezależnymi, jeżeli

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y);$$

jest to równoważne warunkowi, że zdarzenia $a \leq X < b$ i $c \leq Y < d$ są niezależne przy wszystkich $a < b$ i $c < d$.

Funkcje zmiennych losowych. Mając łączny rozkład wektora losowego (X, Y) możemy obliczać rozkłady zmiennych losowych postaci $Z = u(X, Y)$, gdzie u jest daną funkcją. W przypadkach dyskretnym i ciągłym zmienna Z ma odpowiednio rozkład

$$P\{Z < z\} = \sum_{u(x_j, y_k) < z} p(x_j, y_k)$$

oraz

$$P\{Z < z\} = \iint_{u(x, y) < z} f(x, y) dx dy,$$

gdzie sumowanie (lub całkowanie) rozciąga się na te wartości wskaźników j i k (lub argumentów x i y), dla których spełniona jest nierówność $u(x_j, y_k) < z$ (lub $u(x, y) < z$). W szczególności, drogą łatwych przekształceń otrzymujemy wzory (podajemy tu jedynie wzory dla przypadku ciągłego):

$$P\{X+Y < z\} = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx dz = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy dz,$$

a więc gęstość zmiennej losowej $X+Y$ ma postać

$$(4) \quad h_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy.$$

Podobnie dla różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch zmiennych losowych o rozkładzie ciągłym o gęstości $f(x, y)$ otrzymujemy gęstości

$$(5) \quad h_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dx,$$

$$(6) \quad h_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx,$$

$$(7) \quad h_{X/Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(yz, y) |y| dy.$$

Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne o gęstościach odpowiednio $f_1(x)$ i $f_2(y)$, to wzory (4)-(7) upraszczają się odpowiednio do

$$h_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx,$$

$$h_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x-z) dx,$$

$$h_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx,$$

$$h_{X/Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(yz) f_2(y) |y| dy.$$

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Z = u(X, Y)$ określa się jako

$$(8) \quad E(Z) = E[u(X, Y)] = \sum_{j, k} u(x_j, y_k) p(x_j, y_k)$$

w przypadku dyskretnym, lub

$$(9) \quad E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(s, t) f(s, t) ds dt$$

w przypadku ciągłym (przy założeniu, że szereg (8) i całka (9) są względnie zbieżne).

Mamy zawsze (jeżeli istnieją wartości przeciętne):

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y),$$

a w przypadku niezależności zmiennych X i Y mamy też

$$(10) \quad E(XY) = E(X)E(Y).$$

Wzór (10) sugeruje użycie różnicy $E(XY) - E(X)E(Y)$ jako miary zależności zmiennych losowych X i Y . Różnicę tę nazywamy *kowariancją* zmiennych X i Y i oznaczamy przez $\text{Cov}(X, Y)$.

Iloraz

$$\varrho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}$$

nazywamy *współczynnikiem korelacji* między zmiennymi losowymi X i Y . Współczynnik korelacji $\varrho(X, Y)$ równa się zeru, jeżeli zmienne X i Y są niezależne (na mocy wzoru (10)); twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. z tego, że $\varrho(X, Y) = 0$, nie wynika niezależność X i Y , z wyjątkiem ważnego przypadku, gdy X i Y mają rozkład normalny. Ponadto mamy zawsze $|\varrho(X, Y)| \leq 1$ i $|\varrho(X, Y)| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy między zmiennymi X i Y istnieje zależność liniowa $Y = aX + b$; przy tym jeżeli $a > 0$, to $\varrho(X, Y) = 1$, a jeżeli $a < 0$, to $\varrho(X, Y) = -1$. Jeżeli zmienne losowe X i Y są *niekorelowane* (tzn. $\varrho(X, Y) = 0$), to

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

P r z y k ł a d y. 1. Rozpatrzmy n niezależnych powtórzeń pewnego doświadczenia, w wyniku którego mogą realizować się trzy możliwe

zdarzenia A_1 , A_2 i A_3 z prawdopodobieństwami odpowiednio p_1 , p_2 i $1-p_1-p_2$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio ilości realizacji zdarzenia A_1 i A_2 w tych doświadczeniach (ilość realizacji zdarzenia A_3 wynosi więc $n-X-Y$). Łączny rozkład (X, Y) ma postać

$$p(k, l) = P(X = k, Y = l) = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} p_1^k p_2^l (1-p_1-p_2)^{n-k-l}$$
 dla $k, l = 0, 1, \dots, n$, $k+l \leq n$. Rozkłady brzegowe zmiennych X i Y mają postać

$$p(k) = P\{X = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k (1-p_1)^{n-k},$$

$$q(l) = P\{Y = l\} = \frac{n!}{l!(n-l)!} p_2^l (1-p_2)^{n-l}.$$

Tak więc rozkład każdej ze zmiennych X i Y jest rozkładem dwumianowym.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma tzw. *dwuwymiarowy rozkład normalny*, jeżeli jej gęstość ma postać

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right],$$

gdzie $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\varrho| < 1$.

Drogą prostego całkowania przekonujemy się, że rozkłady brzegowe każdej ze zmiennych X i Y są normalne odpowiednio o parametrach

$$E(X) = m_1, \quad E(Y) = m_2, \quad D^2(X) = \sigma_1^2, \quad D^2(Y) = \sigma_2^2,$$

oraz $\varrho(X, Y) = \varrho$.

Rozkład warunkowy zmiennej Y pod warunkiem, że $X = x_0$, ma postać

$$f(y|X = x_0) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{2\pi}} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\varrho^2)}\left((y-m_2) - \frac{\varrho\sigma_2}{\sigma_1}(x_0-m_1)\right)^2\right];$$

jest zatem także rozkładem normalnym o parametrach

$$E(Y|X = x_0) = m_2 + \frac{\varrho\sigma_2}{\sigma_1}(x_0-m_1), \quad D^2(Y|X = x_0) = \sigma_2^2(1-\varrho^2).$$

Centralne twierdzenie graniczne. Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, mają jednakowy rozkład o wartości przeciętnej a i odchyleniu standardowym $b^2 > 0$, to dla dowolnych α i β ($\alpha < \beta$) zachodzi relacja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\alpha \leq \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - na}{b\sqrt{n}} < \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Jest to uogólnienie twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a (str. 779).

Przykład. Wyobraźmy, że maszyna cyfrowa musi dla dokonania pewnych obliczeń wykonać milion operacji. W wyniku każdej z tych operacji otrzymujemy wynik z nadmiarem $+10^{-5}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z niedomiarem -10^{-5} z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Kolejne błędy są niezależne i sumują się. Jakie rozsądne granice błędu możemy przypisać wynikowi?

Niech X_j oznacza wielkość błędu j -tej operacji. Mamy $P\{X_j = \pm 10^{-5}\} = \frac{1}{2}$, a zatem

$$E(X_j) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} - \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0,$$

$$E(X_j^2) = D^2(X_j) = \frac{1}{2} (10^{-5})^2 + \frac{1}{2} (-10^{-5})^2 = 10^{-10},$$

a więc $\sqrt{D^2(X_j)} = 10^{-5}$. Na mocy centralnego twierdzenia granicznego dla każdego α i β ($\alpha < \beta$) mamy

$$P\left\{\alpha \leq \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10^6}}{10^{-5}\sqrt{10^6}} < \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Jeżeli przyjmiemy $\alpha = -2,57$, $\beta = 2,57$, to prawa strona wyniesie 0,99. Możemy więc orzec, że z prawdopodobieństwem 99% błąd sumy $X_1 + X_2 + \dots + X_{10^6}$ będzie zawarty w granicach $\pm 2,57 \cdot 10^{-5}$.

Entropia i informacja. Poniżej podajemy kilka zasadniczych wiadomości z dziedziny teorii informacji.

Jeżeli X jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie danym przez ciąg $p_j = P\{X = X_j\}$, to sumę

$$(1) \quad H(X) = - \sum_j p_j \log_a p_j$$

nazywamy *entropią* zmiennej losowej X . W zastosowaniach przyjmuje się zazwyczaj podstawę logarytmów $a = 2$.

Jeżeli łączny rozkład pary zmiennych losowych (X, Y) dany jest przez

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \dots),$$

to entropię tego rozkładu definiuje się jako

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}.$$

Niech $p_{i|j}$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe, że $X = x_i$, jeżeli $Y = y_j$. Mamy (por. str. 786):

$$p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}$$

i możemy określić entropię warunkową zmiennej losowej X pod warunkiem, że $Y = y_j$, wzorem

$$(2) \quad H(X|Y = y_j) = - \sum_i p_{i|j} \log p_{i|j}.$$

Możemy teraz określić entropię zmiennej losowej X względem zmiennej Y jako średnią

$$(3) \quad H(X|Y) = \sum_i H(X|Y = y_j) P(Y = y_j).$$

Wielkość

$$I_Y(X) = H(X) - H(X|Y)$$

nazywamy ilością informacji o zmiennej X zawartą w zmiennej Y . Można pokazać, że $I_Y(X) = I_X(Y)$. Jeżeli zmienne X i Y są niezależne, to $I_Y(X) = 0$.

Przykład. Rozważmy uproszczony model kanału łączności:

Na wejściu mamy sygnał z prawdopodobieństwem α i jego brak z prawdopodobieństwem $1-\alpha$. Jeżeli sygnał został nadany na wejściu, to odbieramy go na wyjściu z prawdopodobieństwem β lub nie odbieramy z prawdopodobieństwem $1-\beta$. Wreszcie, jeżeli nie ma sygnału na wejściu, to możemy go odebrać na wyjściu (na skutek szumów) z prawdopodobieństwem γ lub nie odebrać z prawdopodobieństwem $1-\gamma$. Obliczmy ilość informacji o sygnale na wejściu do kanału zawartą w zaobserwowanym stanie wyjścia kanału.

Oznaczmy przez X i Y odpowiednio stan wejścia i wyjścia; umówmy się interpretować 1 i 0 jako sygnał lub jego brak. Wówczas łączny rozkład pary (X, Y) ma postać

$$P_{11} = P\{X = 1, Y = 1\} = \alpha\beta,$$

$$P_{10} = P\{X = 1, Y = 0\} = \alpha(1-\beta),$$

$$P_{01} = P\{X = 0, Y = 1\} = (1-\alpha)\gamma,$$

$$P_{00} = P\{X = 0, Y = 0\} = (1-\alpha)(1-\gamma).$$

Rozkłady brzegowe dla X i Y są odpowiednio

$$P\{X = 0\} = 1-\alpha,$$

$$P\{X = 1\} = \alpha,$$

$$P\{Y = 0\} = \alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma),$$

$$P\{Y = 1\} = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

a rozkłady warunkowe X dla danego Y są

$$P\{X = 0|Y = 0\} = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma)},$$

$$P\{X = 1|Y = 0\} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma)},$$

$$P\{X = 0|Y = 1\} = \frac{(1-\alpha)\gamma}{\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma},$$

$$P\{X = 1|Y = 1\} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma}.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (1), (2) i (3) obliczymy łatwo $I_Y(X)$. Nie będziemy tu podawać ostatecznego wzoru; zauważmy tylko, że jeżeli $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, to $I_Y(X) = 0$, jak należało oczekiwać.

2. Procesy stochastyczne

Wstęp. Teoria procesów stochastycznych jest jednocześnie gałęzią i rozszerzeniem rachunku prawdopodobieństwa: służy ona jako model opisujący zjawiska przypadkowe w ich powiązaniu z czasem.

Wyobraźmy sobie układ, zmieniający się losowo w czasie, i dla uproszczenia przyjmijmy, że w każdej chwili t stan tego układu daje się adekwatnie (dla naszych celów) opisać za pomocą liczby $X(t)$; tak więc ewolucja układu opisana jest za pomocą funkcji $X(t)$, gdzie parametr t przebiega rozważany odcinek czasu. Przykładami takich zjawisk mogą być: 1° wysokość położenia cząstki zawieszona swobodnie w cieczy i wykonującej tzw. ruchy Browna; 2° ciśnienie atmosferyczne, lub temperatura powietrza, w określonym punkcie kuli ziemskiej; 3° łączna ilość wezwań centrali telefonicznej do danego momentu czasu; 4° poziom szumów danego kanału łączności; 5° ilość bakterii w obserwowanej rozwijającej się kolonii; 6° łączna ilość cząstek zarejestrowanych do danego momentu przez licznik Geigera; 7° cena

danego produktu w sprzedaży wolnorynkowej podlegająca okresowym fluktuacjom wynikającym z przypadkowych zmian masowego popytu i podaży. W każdej z wymienionych powyżej sytuacji ewolucja odbywa się w sposób losowy w tym sensie, że znajomość przebiegu zjawiska do chwili obecnej, nazwijmy ją t_0 , nie pozwala jednoznacznie wyznaczyć wartości $X(t_0 + \tau)$ dla chwili późniejszej $t_0 + \tau$; możemy mówić jedynie o rozkładzie prawdopodobieństwa $X(t_0 + \tau)$, tj. o prawdopodobieństwie, że zmienna losowa $X(t_0 + \tau)$ przyjmie wartość z określonego przedziału.

Najogólniej rzecz biorąc, podstawowym zagadnieniem teorii procesów stochastycznych jest: mając dane informacje o przebiegu procesu w pewnych określonych momentach czasu (oznaczmy te informacje ogólnie przez I) znaleźć rozkład (warunkowy) zmiennej losowej $X(\tau)$ dla pewnego (innego) momentu τ , tzn. $P\{X(\tau) < y | I\}$.

Procesy markowskie. Wyobraźmy sobie, że informacja I , jaką mamy o przebiegu procesu $X(t)$, składa się z informacji I^* , że w chwili t_0 było $X(t_0) = x$, oraz z informacji I^{**} dotyczącej tego, co się działo w chwilach wcześniejszych od t_0 . Jeżeli przy posiadaniu informacji I^* informacje I^{**} są zbędne dla wyznaczenia rozkładu zmiennej losowej $X(t_0 + \tau)$ dla chwil późniejszych ($\tau > 0$), to proces $X(t)$ nazywamy markowskim. Tak więc mamy

$$P\{X(t_0 + \tau) < y | I^* \text{ i } I^{**}\} = P\{X(t_0 + \tau) < y | I^*\} = \\ = P\{X(t_0 + \tau) < y | X(t_0) = x\}.$$

Innymi słowy, procesy markowskie są modelami zjawisk, w których znajomość stanu układu w danej chwili determinuje całkowicie związki probabilistyczne dla chwil przyszłych i dodatkowe informacje o poprzednim zachowaniu się układu nie wnoszą nic nowego (z podanych przykładów procesami markowskimi są 1^o, 3^o, 6^o i przy pewnych upraszczających założeniach 5^o).

Przykład. Rozpatrzmy tzw. proces urodzin i śmierci. Ze względu na specyficzną własność procesów markowskich, polegającą na „zapominaniu o przeszłości”, aparatem analitycznym nadającym się najlepiej do badania takich procesów są równania różniczkowe. Wzory analityczne dla warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa wprowadza się dla procesów markowskich z założeń dotyczących granicznych własności prawdopodobieństw zmian na małych odcinkach czasu. Wyjaśnimy to na pewnym szczególnym przykładzie. Wyobraźmy sobie populację składającą się z pewnej ilości elementów (dla ustalenia uwagi można sobie wyobrazić, że są to np. bakterie w pewnej kolonii, cząstki elementarne promieniowania kosmicznego itp.). Każdy z tych elementów może „umrzeć” lub „urodzić” nowy element (interpretacja „śmierci” i „urodzin” zależy oczywiście od interpretacji modelu jako rzeczywiste go zjawiska). Założenia analityczne są następujące:

Jeżeli w momencie t istnieje n elementów, to

1. prawdopodobieństwo, że na odcinku $\langle t, t + \Delta t \rangle$ jeden z nich „umrze” (czyli w chwili $t + \Delta t$ będzie $n - 1$ elementów), wynosi $n\mu \Delta t + o(\Delta t)$, gdzie $o(\Delta t)$ oznacza wielkość rzędu mniejszego od Δt tj. taką, że

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

2. prawdopodobieństwo, że na odcinku czasu $\langle t, t + \Delta t \rangle$ „urodzi” się nowy element (tj. w chwili $t + \Delta t$ będzie $n + 1$ elementów), wynosi $n\lambda \Delta t + o(\Delta t)$,

3. prawdopodobieństwo dwu lub więcej „urodzin” i „śmierci” na odcinku czasu o długości Δt jest rzędu $o(\Delta t)$,

4. prawdopodobieństwa określone w 1 i 2 nie zależą od przeszłej historii (do chwili t) populacji (markowskość) oraz nie zależą od t (jednorodność procesu w czasie).

Niech $X(t)$ oznacza ilość elementów populacji w chwili t i niech $P_n(t) = P\{X(t) = n\}$ (tradycyjnie używa się tu oznaczenia $P_n(t)$ sugerującego, że mowa o prawdopodobieństwie bezwarunkowym; w istocie wyznaczamy prawdopodobieństwo warunkowe, że $X(t) = n$, pod warunkiem, że $X(0) = i$, gdzie i jest daną liczbą całkowitą). Na to, aby było $X(t + \Delta t) = n$ ($n \geq 1$), musiało być bądź $X(t) = n$ i na odcinku $\langle t, t + \Delta t \rangle$ nie zaszła żadna zmiana, bądź $X(t) = n + 1$ i zaszła zmiana 1, bądź $X(t) = n - 1$ i zaszła zmiana 2; łączne prawdopodobieństwo wszystkich innych możliwości wynosi $o(\Delta t)$ na mocy 4. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (por. str. 776) mamy

$$(1) \quad P_n(t + \Delta t) = P_n(t) [1 - n\lambda \Delta t - n\mu \Delta t] + P_{n-1}(t) (n-1)\lambda \Delta t + \\ + P_{n+1}(t) (n+1)\mu \Delta t + o(\Delta t),$$

skąd, tworząc iloraz różnicowy dla $P_n(t)$ i przechodząc do granicy z $\Delta t \rightarrow 0$, dostajemy

$$P'_n(t) = -n(\lambda + \mu)P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t).$$

Dla $n = 0$ dostajemy za pomocą podobnego rozumowania

$$P'_0(t) = \mu P_1(t).$$

Otrzymujemy więc nieskończony układ równań różniczkowych dla prawdopodobieństw $P_n(t)$. Rozwiązując go przy warunkach początkowych $P_i(0) = 1$, $P_j(0) = 0$, $j \neq i$ (co jest równoważne warunkowi $X(0) = i$) znajdujemy szukany rozkład prawdopodobieństw w chwili t .

Dla rozwiązania tego układu najwygodniej jest wprowadzić tzw. funkcję tworzącą prawdopodobieństwa $P_n(t)$:

$$\psi(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) s^n \quad (|s| \leq 1).$$

Mnożąc równanie (1) odpowiednio przez s^n i sumując względem n otrzymujemy dla ψ równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{\mu - (\lambda + \mu)s + \lambda s^2\} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

z warunkiem początkowym $\psi(s, 0) = s^4$. Rozwiązując to równanie otrzymamy szukane prawdopodobieństwo $P_n(t)$ rozwijając $\psi(s, t)$ w szereg potęgowy względem s .

Za pomocą modeli podobnych do opisanego powyżej da się opisać wiele zjawisk dotyczących masowej obsługi urządzeń, teorii kolejek itp.

Procesy stacjonarne. Procesami stacjonarnymi nazywamy takie procesy, których związki probabilistyczne nie ulegają zmianie przy przesunięciu w czasie, tzn. (bezwzględnie) prawdopodobieństwo, że $X(t) < y$, jest takie samo jak prawdopodobieństwo, że $X(t + \tau) < y$, dla każdego τ :

$$P\{X(t) < y\} = P\{X(t + \tau) < y\};$$

łączny rozkład zmiennych losowych $X(t_1), X(t_2)$ jest taki sam jak łączny rozkład zmiennych losowych $X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau)$ itd.

Jeżeli $X(t)$ jest procesem stacjonarnym, wówczas wartość przeciętna $E[X(t)] = m$ nie zależy od t ; kowariancja zmiennych losowych $X(t)$ i $X(t + \tau)$ zależy jedynie od „odległości” czasowej tych zmiennych (również τ i nie zależy od t :

$$E[X(t)X(t + \tau)] - m^2 = B(\tau).$$

Funkcję $B(\tau)$ nazywamy *funkcją korelacyjną* (lub *autokorelacyjną*) procesu $X(t)$. Niekiedy funkcją korelacyjną nazywa się funkcję

$$K(\tau) = \frac{B(\tau)}{D^2[X(0)]};$$

mamy wówczas $K(0) = 1$.

Procesy ergodyczne. Procesy stacjonarne mają pewną cenę dla zastosowań i interesującą teoretycznie własność, są mianowicie ergodyczne. Proces stochastyczny (markowski lub nie) nazywamy *procesem ergodycznym*, jeżeli wszystkie jego realizacje są „typowe” w tym sensie, że znajomość pojedynczej realizacji $X^*(t)$ na nieskończonym (w praktyce: dostatecznie długim) odcinku czasowym pozwala wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa (lub jego parametry) w innym, hipotetycznie identycznym (tzn. rządzone przez te same związki probabilistyczne) procesie $X(t)$ w myśl zależności:

$$(1) \quad P\{X(\tau) < y\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \{\text{łączna długość odcinków czasowych z przedziału } \langle 0, T \rangle, \text{ kiedy było } X^*(t) < y\}.$$

Tutaj prawa strona nie zależy od τ , wobec tego prawdopodobieństwo po lewej stronie również nie zależy od τ ; wzór powyższy pozwala oszacowywać prawdopodobieństwo za pomocą „średnich czasowych”. Podobnie szacujemy wartość przeciętną ze wzoru

$$(2) \quad E[X(\tau)] = m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^*(t) dt.$$

Mówiąc bardziej precyzyjnie, ostatni wzór należy rozumieć w ten sposób, że dla procesów, dla których zachodzi ergodyczność:

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left| \frac{1}{T} \int_0^T X^*(t) dt - m \right|^2 \right] = 0,$$

tzn. wzór (2), jak również i (1), należy rozumieć w sensie tzw. zbieżności przeciętnej z kwadratem (por. str. 760).

Typowymi przykładami procesów ergodycznych mogą być poziomy stacjonarnych szumów w urządzeniach elektronicznych lub kanałów łączności. Również prognoza pogody opiera się w większości przypadków na domniemanej ergodyczności procesów meteorologicznych.

Ergodyczność wszystkich procesów stacjonarnych pozwala również na oszacowywanie funkcji autokorelacyjnej lub jej transformacji Fouriera

$$f(\lambda) = \int e^{-i\lambda\tau} B(\tau) d\tau.$$

W niektórych procesach ważnych dla teorii łączności, zdalnego sterowania urządzeniami, radiolokacji itp. dokonuje się tego za pomocą specjalnych urządzeń automatycznych. Powstaje więc podstawowe dla teorii procesów stacjonarnych zagadnienie wyrażenia interesujących nas danych o badanym procesie za pomocą jego funkcji autokorelacyjnej. Sformułujemy trzy podstawowe zagadnienia z tej dziedziny: przewidywania, interpolacji i filtracji i pokażemy na prostym przykładzie metodę rozwiązywania tych zagadnień.

Przewidywanie (predykcja). Obserwujemy proces stochastyczny stacjonarny $X(t)$ o znanej funkcji autokorelacyjnej $B(\tau)$. Mając dane (z obserwacji) wartości procesu $X(t)$ dla chwil wcześniejszych od t_0 (wszystkich lub tylko niektórych) należy przewidzieć możliwie dokładnie wartość procesu w chwili późniejszej $t + \tau$, tzn. należy skonstruować taką funkcję $L = L[X(t), t \leq t_0]$, aby

$$(4) \quad E[|X(t + \tau) - L|^2] = \min.$$

Ze względu na komplikacje natury zarówno rachunkowej jak i ze względu na techniczną realizację rozwiązań zakłada się zazwyczaj dodatkowo o funkcji L , że jest ona liniowa, tzn. w przypadku gdy znamy

wartości „przeszłe” procesu $X(t_0), X(t_1), \dots$, gdzie $t_0 > t_1 > \dots$, szukamy L o postaci $C_0 X(t_0) + C_1 X(t_1) + \dots$ i wyznaczamy współczynniki $C_0, C_1, \dots$ minimalizujące „błąd” przewidywania (4). W ogólnym przypadku, gdy znamy $X(t)$ na odcinku czasu poprzedzającym t_0 (skończonym lub nie), szukamy funkcjonału liniowego $L[X(t)]$, który minimalizuje formę (4).

Interpolacja. Zagadnienie interpolacji różni się od zagadnienia predykcji tym, że staramy się na podstawie znajomości wartości procesu $X(t)$ w pewnych momentach „odtworzyć” (w sensie minimalizacji średniego błędu kwadratowego, podobnie jak (4)) wartość procesu w jakimś innym momencie, kiedy nie dokonywano obserwacji.

Filtracja. Wyobraźmy sobie, że mamy do czynienia z dwoma niezależnymi procesami stacjonarnymi: $X(t)$ „sygnał” i $Y(t)$ „szum”, których funkcje korelacyjne $B_1(\tau)$ i $B_2(\tau)$ są znane. Obserwujemy sumę $Z(t) = X(t) + Y(t)$ i staramy się na podstawie znajomości wartości $Z(t)$ znaleźć wartość $X(t_0)$ w pewnym ustalonym momencie t_0 . Analogicznie jak przedtem zadanie polega tu na skonstruowaniu (liniowego) funkcjonału $L[Z(t)]$, który dawałby minimum średniego błędu kwadratowego filtracji, tzn. szukamy funkcjonału L , dla którego

$$(5) \quad E[|X(t_0) - L[Z(t)]|^2] = \min.$$

Przykład. Wyobraźmy, że mamy do czynienia z procesem stacjonarnym $X(t)$, dla którego $E[X(t)] = 0$; wówczas $E[X(t + \tau)X(t)] = B(\tau)$, przy czym o funkcji $B(\tau)$ zakładamy, że jest znana. Przypuśćmy, że znamy wartość procesu $X(t)$ w dwóch momentach czasu t i $t - \tau_0$ ($\tau_0 > 0$). Zadanie polega na skonstruowaniu optymalnej liniowej predykcji

$$L[X(t)] = aX(t) + bX(t - \tau_0)$$

dla przewidywania wartości procesu w chwili $X(t + \tau)$, gdzie $\tau > 0$. Chcemy więc minimalizować formę

$$(6) \quad E[|X(t + \tau) - \{aX(t) + bX(t - \tau_0)\}|^2].$$

Rozwijając wyrażenie (6) i biorąc wartości oczekiwane otrzymujemy

$$(7) \quad E[|X(t + \tau)|^2] + a^2 E[|X(t)|^2] + b^2 E[|X(t - \tau_0)|^2] - \\ - 2aE[X(t + \tau)X(t)] - 2bE[X(t + \tau)X(t - \tau_0)] + 2abE[X(t)X(t - \tau_0)] = \\ = B(0) + a^2 B(0) + b^2 B(0) - 2aB(\tau) - 2bB(\tau + \tau_0) + 2abB(\tau_0).$$

Wyrażenie po prawej stronie (7) jest (dodatkowo określoną) formą kwadratową współczynników a i b . Metody minimalizacji takiej formy są znane: różniczkując względem a i b i przyrównując pochodne cząstkowe do zera otrzymujemy układ równań liniowych dla a i b , którego rozwiązanie daje szukane minimum (ze względu na dodatnią określoność funkcji autokorelacyjnej jest to minimum, a nie maksimum).

3. Statystyka matematyczna

Wstęp. W nowoczesnym rozumieniu tego pojęcia *statystyka matematyczna* jest działem nauki zajmującym się metodami wnioskowania o prawach prawdopodobieństwa rządzących danym zjawiskiem na podstawie obserwacji tego zjawiska, oraz znajdowania optymalnych metod postępowania (w sensie narzuconych kryteriów). Drugie z tych zagadnień należy, ściśle biorąc, do tzw. *statystycznej teorii decyzji* i nie będziemy go tu omawiać. Pierwsze z tych zagadnień, stanowiące treść tzw. *klasycznej statystyki matematycznej*, można w prostym przypadku zjawiska dającego się opisać za pomocą modelu pojedynczej zmiennej losowej sformułować następująco: Rozważane zjawisko scharakteryzowane jest przez pewien nieznaną rozkład prawdopodobieństwa, nazwijmy go F . Dokonujemy pewnej ilości n (najczęściej niezależnych) obserwacji tego zjawiska i w rezultacie uzyskujemy wyniki (tzw. *próbki*) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Co można na podstawie tej próbki orzec o rozkładzie F ?

Ze względu na charakter informacji, które chcemy uzyskać, można tu wyróżnić dwie podstawowe grupy zagadnień: *teorię estymacji* i *teorię testowania hipotez*. Pierwsze z tych zagadnień pojawia się, jeżeli mamy do czynienia z sytuacją, w której postać funkcyjna rozkładu F jest znana, ale zależy od jednego lub więcej nieznanymi parametrów, które należy oszacować.

Zagadnienie testowania hipotez statystycznych polega na konstrukcji metod pozwalających rozstrzygać czy zaobserwowane danej próby należy uznać za sprzeczne z daną hipotezą H orzekającą coś o rozkładzie F (sprzeczność rozumiemy tu nie w sensie sprzeczności logicznej a w sensie konieczności uznania, że nastąpiło zdarzenie o małym prawdopodobieństwie).

Jest rzeczą niezmiernie ważną, aby uświadomić sobie następujący fakt, często nie rozumiany lub niedostatecznie doceniany przez ludzi stosujących w praktyce metody statystyczne: na to, aby wnioskowanie statystyczne prowadziło do sensownych rezultatów, jest rzeczą nieodzowną, aby próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ służąca za podstawę wnioskowania o nieznanym rozkładzie F była wynikiem losowania niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie F . To na pozór oczywiste zastrzeżenie oznacza, że próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ musi być wynikiem takiego procesu losowania (obserwacji, pomiarów), żeby przed jej pobraniem wszystkie możliwe rezultaty próbek $y_1, y_2, \dots, y_n$ pobieranych w hipotezie identyczny sposób miały rozkład prawdopodobieństwa odpowiadający schematowi n niezależnych losowań tej samej zmiennej losowej X o rozkładzie F . Formalnie, próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ traktowana jest w statystyce matematycznej jako realizacja n -wymiarowej zmiennej losowej $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, w której zmienne X_j są niezależne i mają rozkład F . Wszystkie schematy wnioskowania statystycznego przyjmują powyższy punkt wyjścia za podstawę teoretyczną ich konstrukcji

i w konsekwencji ich stosowalność ograniczona jest do praktycznych sytuacji spełniających (choćby w przybliżeniu) ten warunek.

Wyjaśnimy to na przykładzie z tzw. *statystycznej kontroli jakości*. Przypuśćmy, że mamy partię składającą się z dużej ilości N sztuk towaru. Nieznana jest wadliwość p tej partii (tutaj $p = k/N$, gdzie k jest ilością sztuk wadliwych). Zamiast badać każdą sztukę oddzielnie, (co mogłoby być zarówno zbyt kosztowne, jak i niekiedy niecelowe, np. gdy sprawdzenie danej sztuki powoduje automatycznie jej zniszczenie) możemy stosować badanie wyrzykowe: z danej partii losujemy pewną ilość n sztuk i sprawdzamy każdą z nich. Zaobserwowana ilość x sztuk wadliwych wśród n zbędanych służy nam za podstawę do oszacowania nieznanej wadliwości p lub podstawę do testowania jakichś hipotez dotyczących tej wadliwości (np. hipoteza, że $p \leq 0,01$ itp.). Jeżeli losowanie elementów do zbadania odbywało się w ten sposób, że przed wyborem każdy element populacji miał jednakowe prawdopodobieństwo dostania się do próbki, i kolejne losowania były niezależne, wówczas ilość sztuk wadliwych w próbce, nazwijmy ją X , ma rozkład dwumiarowy (por. str. 782).

$$(1) \quad P\{X = r\} = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

i wartość zaobserwowana $X = x$ pozwala na wyciągnięcie wniosków dotyczących nieznanego p .

Jeżeli próbkę pobierano inaczej (np. w sposób systematyczny lub „na oko”), to prawdopodobieństwo $P\{X = r\}$, o ile w ogóle takie prawdopodobieństwo ma sens, wyraża się wzorem innym niż (1) — w dodatku na ogół nieznanym — i jest oczywiste, że metody wnioskowania o p , u których podstaw teoretycznych tkwi założenie słuszności wzoru (1), nie dają się stosować.

Zauważmy, że nie chodzi tu nam o to, że w przypadku gdy losowano bez zwracania elementów do populacji, wzór (1) przestaje być słuszny; gdy N jest duże, to przy niewielkich n wzór (1) staje się wzorem przybliżonym i możemy w dalszym ciągu stosować metody oparte na wzorze (1), o ile tylko przed każdym kolejnym wyborem każdy z elementów jeszcze nie badanych miał jednakowe szanse dostania się do próbki. Statystyka matematyczna dostarcza sposobów losowania, które pozwalają spełnić ten warunek, np. za pomocą tzw. *tablic liczb losowych*. Często jednak mamy do czynienia z sytuacją, gdy próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ w ogóle nie powstała w wyniku świadomego losowania lub też zastosowana metoda losowania nasuwa wątpliwość co do poprawności jej użycia w danej sytuacji. Zagadnienie co należy robić w takim przypadku wykracza właściwie poza ramy statystyki matematycznej: statystyk może, postępując formalnie, zastosować do tej próbki schematy wnioskowania statystycznego i otrzymać pewne wyniki; jeżeli będą one jednak fałszywe lub bezsensowne, wina będzie leżała po stronie tego,

kto próbkę zebrał. Formalnie rzecz biorąc, podstawowym wymaganiem stosowalności statystyki jest, aby kryterium decydujące o przynależności elementu badanej populacji do próby było niezależne od cechy badanej; problem czy warunek ten jest spełniony dla próbki, która została już pobrana, bądź nie da się rozstrzygnąć za pomocą samej statystyki, a wymaga dyskusji merytorycznej, bądź też dla jego rozstrzygnięcia potrzeba właśnie tej informacji o badanym rozkładzie, którą chcemy za pomocą próbki uzyskać.

Teoria estymacji. Wyobraźmy sobie, że postać funkcyjna rozkładu F jest znana, ale zależy od jednego lub więcej nieznanych parametrów, które należy oszacować z próby. Dla ustalenia uwagi, wyobraźmy sobie, że mamy do czynienia tylko z jednym nieznanym parametrem θ ; wobec tego dystrybuenta obserwowanej zmiennej losowej X ma postać $F(x; \theta)$. Co można orzec o θ na podstawie próbki $x_1, x_2, \dots, x_n$?

Rozwiązanie tego zagadnienia polegać będzie na skonstruowaniu funkcji n zmiennych $\hat{\theta}_n$ zwanej *estymatorem* parametru θ (a ściślej, ciągu funkcji $\{\hat{\theta}_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$)) o tej własności, że po podstawieniu w miejscu zmiennych w funkcji $\hat{\theta}_n$ zaobserwowanych wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ będziemy mieli rozsądne podstawy do przypuszczeń, że najprawdopodobniej zachodzi w przybliżeniu równość $\theta = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ten niezbyt formalny opis możemy sprecyzować następująco: Jak już mówiliśmy, zaobserwowana próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest realizacją n -wymiarowej zmiennej losowej $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, gdzie X_j są niezależne i mają rozkład $F(x; \theta)$. Dla różnych próbek otrzymujemy różne wartości $\hat{\theta}_n$; wobec tego estymator $\hat{\theta}_n$ jako funkcja próbki jest pewną zmienną losową.

Estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem zgodnym* parametru θ , jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon\} = 0.$$

Estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem nieobciążonym* parametru θ , jeżeli dla każdego n mamy

$$(2) \quad E(\hat{\theta}_n) = \theta;$$

jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$, to estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem asymptotycznie nieobciążonym* parametru θ .

Jest oczywiste, że z dwóch estymatorów nieobciążonych $\hat{\theta}_n^*$ i $\hat{\theta}_n^{**}$ lepszy jest ten, który ma mniejszą wariancję; daje on bowiem średnio mniejsze odchylenie kwadratowe wartości oszacowanej $\hat{\theta}_n$ od wartości

prawdziwej θ . Okazuje się, że przy pewnych warunkach regularności (które spełnione są w większości praktycznych sytuacji) zachodzi następująca nierówność:

Nierówność Rao-Craméra. Jeżeli $\hat{\theta}_n$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ , to

$$(3) \quad D^2(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \geq \frac{1}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right]^2 f(x, \theta) dx}$$

lub

$$(4) \quad D^2(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \geq \frac{1}{n \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i; \theta) \right]^2 p(x_i, \theta)}$$

Widać więc, że prawa strona (3) (lub (4) w przypadku dyskretnym) daje nam minimalną możliwą wariancję estymatorów $\hat{\theta}_n$ parametru θ .

Estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem najefektywniejszym* parametru θ , jeżeli jego wariancja równa jest prawej stronie (3) lub (4); efektywność danego estymatora $\hat{\theta}_n$ mierzymy stosunkiem prawej strony (3) lub (4) do jego wariancji $D^2(\hat{\theta}_n)$ (tak więc estymatory najefektywniejsze mają efektywność równą 1).

Przykład. Rozpatrzmy niezależne pomiary pewnej wielkości a . Załóżmy, że wyniki kolejnych pomiarów są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie normalnym o gęstości

$$f(x; a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right),$$

gdzie σ jest znane (σ^2 będzie tu średnim błędem kwadratowym przyrządu pomiarowego). Jako estymator parametru a można przyjąć np. średnią arytmetyczną wyników pomiarów (będzie to estymator zgodny, nieobciążony i najefektywniejszy); można też przyjąć jako estymator a medianę, tj. środkowy co do wielkości wynik (w przypadku nieparzystej ilości obserwacji) oraz średnią z dwóch środkowych wyników (w przypadku parzystej ilości obserwacji). Mediana będzie również zgodnym i nieobciążonym estymatorem a , jej efektywność jest jednakże niewielka: zmierza ona przy $n \rightarrow \infty$ do wartości $2/\pi \approx 0,64$.

Problem uzyskiwania estymatorów. Jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod uzyskiwania estymatorów jest tzw. *metoda największej wiarygodności*. Jeżeli $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ są nieznanymi parametrami, które trzeba oszacować z próbki $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie x_j są realizacjami niezależnych zmiennych losowych o gęstości $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, to

jako estymatory parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ możemy przyjąć takie $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$, dla których iloczyn

$$f(x_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) f(x_2; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \dots f(x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

przyjmuje wartość największą. Szukamy zatem rozwiązania układu równań

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

gdzie

$$L = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k).$$

Rozwiązując układ (1) otrzymujemy rozwiązanie $\hat{\theta}_j$ będące funkcjami $x_1, x_2, \dots, x_n$; są to właśnie *estymatory największej wiarygodności*.

W przypadku zmiennych losowych dyskretnych układ (1) ma analogiczną postać, z tym że funkcja L jest sumą logarytmów prawdopodobieństw uzyskania otrzymanej próbki.

Przy pewnych ogólnych założeniach estymatory uzyskane w ten sposób są zgodne, asymptotycznie nieobciążone, mają rozkład asymptotycznie normalny i są asymptotycznie najefektywniejsze (tzn. ich efektywność zmierza do 1 wraz ze wzrastaniem liczebności próbki n).

Przykład. Wyobraźmy, że mamy, podobnie jak w przykładzie poprzednim, n niezależnych pomiarów $x_1, x_2, \dots, x_n$ tej samej niezwanej wielkości a , z tym jednak, że wariancja σ^2 nie jest znana. Zbudujemy estymatory największej wiarygodności dla parametrów a i σ^2 .

Mamy tu

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right),$$

skąd

$$L = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; a, \sigma) = -n \log \sigma \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Układ równań $\frac{\partial L}{\partial a} = 0, \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0$ przybierze postać

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0, \quad \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$$

i jego rozwiązaniem będzie

$$\hat{a} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Warto zauważyć, że $B(\hat{\sigma}^2) = \frac{n}{n-1} \sigma^2$, czyli estymator $\hat{\sigma}^2$ nie jest nieobciążony. Ze względu na to często przyjmuje się w statystyce za estymator parametru σ^2 funkcję

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

która jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2 .

Przedział ufności. Często nie wystarczy podanie samej wartości estymatora szukanego parametru θ : dla celów praktycznych chcemy jeszcze znać granice błędów oszacowania przy danym prawdopodobieństwie; ściślej, chcielibyśmy wiedzieć jak często (tzn. z jakim prawdopodobieństwem) błąd oszacowania $|\hat{\theta}_n - \theta|$ przekroczy zadany z góry poziom dokładności. Zagadnienie to rozwiązuje się za pomocą tzw. *przedziałów ufności*. Formalnie, dla konstrukcji przedziału ufności trzeba utworzyć taką funkcję U_n zależną od próbek $x_1, x_2, \dots, x_n$ i szukanego parametru θ (czyli zmienną losową będącą funkcją próbek oraz funkcją nieznanego parametru θ), której rozkład prawdopodobieństwa jest znany i nie zależy od θ (choćby w przybliżeniu dla dużych wartości n).

Przypuśćmy, że znaleźliśmy już taką funkcję $U_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$; niech zmienna losowa $U_n(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ ma rozkład o gęstości $\varphi(z)$, gdzie φ jest znane. Dla danego prawdopodobieństwa $1-\alpha$ (gdzie zazwyczaj α jest małe) wybieramy takie a i b , aby

$$\int_a^b \varphi(z) dz = 1-\alpha$$

(często dodajemy jeszcze warunek, aby $\int_{-\infty}^a \varphi(z) dz = \frac{1}{2} \alpha$). Wówczas

$$(1) \quad P\{a \leq U_n(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) \leq b\} = 1-\alpha.$$

Nierówność w nawiasie klamrowym możemy przekształcić do postaci

$$\theta \in B(X_1, X_2, \dots, X_n; a, b),$$

gdzie B jest pewnym obszarem zależnym od wartości $X_1, X_2, \dots, X_n$ (na ogół jest to przedział, którego górny i dolny koniec są funkcjami próby). Wówczas na mocy (1) możemy orzec, że

$$P\{\theta \in B(X_1, X_2, \dots, X_n; a, b)\} = 1-\alpha,$$

co daje nam szukane ograniczenia błędów (tzw. *obszar ufności* przy zadanym prawdopodobieństwie $1-\alpha$). Należy zwrócić tu uwagę na

fakt, że nie parametr θ , a obszar ufności jest losowy. Innymi słowy, dla różnych próbek $x_1, x_2, \dots, x_n$ będziemy otrzymywali różne obszary $B(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b)$; wśród nich częstość tych, które nie będą zawierać nieznanego parametru θ , wynosi α .

Przykłady. Poniższe przykłady będą dotyczyły zagadnienia konstrukcji przedziałów ufności dla parametrów rozkładu normalnego. W każdym przypadku próbka $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest realizacją n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ o rozkładzie normalnym

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Oznaczmy

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n), \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Mogą zaistnieć trzy przypadki:

1. a jest nieznanne, σ — znane (odpowiada to sytuacji pomiarów pewnej wielkości a za pomocą przyrządu o znanym średnim błędzie kwadratowym σ^2). W tym przypadku $\bar{X}$ ma rozkład normalny o śred-

niej a i wariancji σ^2/n , a więc zmienna losowa $\frac{\bar{X}-a}{\sigma} \sqrt{n}$ ma rozkład normalny o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1. Dla danego α znajdujemy z tablic rozkładu normalnego taką wartość z_α , że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1-\alpha,$$

wobec czego

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{X}-a}{\sigma} \sqrt{n} \right| \leq z_\alpha \right\} = 1-\alpha,$$

czyli z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ przedział (o końcach losowych) $\langle \bar{X} - z_\alpha \sigma / \sqrt{n}, \bar{X} + z_\alpha \sigma / \sqrt{n} \rangle$ będzie zawierał nieznaną wielkość a .

2. a i σ są nieznanne (odpowiada to sytuacji kiedy dokonujemy pomiarów wielkości a za pomocą przyrządu o nieznanym średnim błędzie kwadratowym). W tym przypadku dla oszacowania parametru a wprowadzamy zmienną losową

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}-a}{S} \sqrt{n-1};$$

zmienna ta ma tzw. *rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nie ma potrzeby podawania tu wzoru na gęstość tego rozkładu; jest on stabilizowany i tablice te można znaleźć w niemal każdym podręczniku statystyki matematycznej; fragment tych tablic podany jest na str. 96.

Jeżeli dla danego α znajdziemy z tablic tego rozkładu (dla $n-1$ stopni swobody) wartość t_{n-1}^α taką, że

$$P\{|t_{n-1}| \leq t_{n-1}^\alpha\} = 1 - \alpha,$$

to szukany przedział ufności dla μ przybierze postać

$$\langle \bar{X} - t_{n-1}^\alpha S / \sqrt{n-1}, \bar{X} + t_{n-1}^\alpha S / \sqrt{n-1} \rangle.$$

Dla oszacowania parametru σ^2 możemy posłużyć się faktem, że

$$U_{n-1} = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

jest zmienną losową o tzw. rozkładzie χ^2 o $n-1$ stopniach swobody. Znajdując z tablic (str. 96) takie wartości a_α i b_α , aby

$$P\{a_\alpha \leq U_{n-1} \leq b_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

otrzymamy dla σ^2 przedział ufności $\langle nS^2/b_\alpha, nS^2/a_\alpha \rangle$.

3. μ jest znane, σ — nieznane (jest to przypadek odpowiadający szukaniu średniego błędu przyrządu pomiarowego przez dokonywanie za pomocą tego przyrządu pomiarów znanego skądinąd wzorca μ). W tym przypadku zmienna losowa

$$U_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

ma rozkład χ^2 o n stopniach swobody; wobec tego postępowanie jest analogiczne jak w 2.

Testowanie hipotez statystycznych. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z następującą sytuacją: nieznany jest rozkład F rządzący pewnym zjawiskiem losowym. Pobrano próbkę $x_1, x_2, \dots, x_n$ niezależnych obserwacji tego zjawiska i wysunięto pewną hipotezę H dotyczącą rozkładu F . Co można orzec o prawdziwości tej hipotezy na podstawie próbki $x_1, x_2, \dots, x_n$?

Postępowanie pozwalające decydować o prawdziwości hipotez statystycznych nazywamy *testami statystycznymi*.

Hipotezę H o rozkładzie F mogą mieć w różnych sytuacjach praktycznych różną postać. Ze względów natury metodologicznej (tzn. ze względu na stopień złożoności analizy matematycznej zagadnień związanych z testowaniem różnego typu hipotez), wygodnie jest wprowadzić następującą klasyfikację:

1. Jeżeli hipoteza H dotyczy wartości jakichkolwiek parametrów

rozkładu F , nazywamy ją *hipotezą parametryczną*; w przeciwnym przypadku nazywamy ją *hipotezą nieparametryczną*.

2. Hipotezę H , która jednoznacznie precyzuje nieznany rozkład F , nazywamy *hipotezą prostą*; w przeciwnym przypadku nazywamy ją *hipotezą złożoną*.

Ograniczmy się tu jedynie do przypadku hipotez prostych. Przypuśćmy, że dana jest hipoteza prosta H_0 , orzekająca, że interesujące nas zjawisko rządzone jest przez dany rozkład, nazwijmy go F_0 . Aby zweryfikować tę hipotezę, wybieramy sobie pewną funkcję n zmiennych u_n (tzw. *statystykę służącą za podstawę testu*). Funkcję u_n dobieramy tak, aby zmienna losowa $Z_n = u_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ jest próbką, miała — przy założeniu słuszności hipotezy H_0 — rozkład dający się efektywnie wyznaczyć. Ponadto dobieramy sobie pewną liczbę a ($0 < a < 1$) zwaną *poziomą istotności* testu (w zastosowaniach przyjmuje się tradycyjnie $\alpha = 0,05$ lub $\alpha = 0,01$). Następnie dla wybranego α i danej statystyki u_n wybiera się tzw. *zbiór krytyczny* K_α , tj. zbiór o tej własności, że

$$(1) \quad P\{u_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \in K_\alpha | H_0\} = \alpha.$$

Postępowanie przy weryfikacji hipotezy H_0 polega teraz na obliczeniu wartości zaobserwowanej statystyki u_n (tj. wartości $u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest otrzymaną próbką) i odrzuceniu hipotezy H_0 , jeżeli $u_n \in K_\alpha$.

Powstają w związku z tym następujące pytania:

1^o Na jakich intuicyjnych przesłankach opiera się powyższa metoda weryfikacji?

2^o Jak dobrać statystyki służące za podstawę testu?

3^o Jak wybrać zbiór krytyczny K_α ?

4^o Co robić jeżeli postępowanie nie doprowadziło do odrzucenia hipotezy H_0 ?

Odpowiedź na 1^o jest następująca: jeżeli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to błąd polegający na jej odrzuceniu popełnimy tylko w tych przypadkach, gdy zaobserwowana wartość $u_n \in K_\alpha$, a więc prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu wynosi α .

Kwestia doboru statystyki (pytanie 2^o), prócz oczywistego ograniczenia, że musimy opierać się na tych statystykach, dla których można obliczyć prawdopodobieństwa postaci (1), wiąże się z pytaniami 3^o i 4^o. Nie będziemy tu rozpatrywali tych zagadnień szczegółowo, wyjaśnimy raczej na przykładzie zasadę postępowania.

Wyobraźmy sobie, że obserwacje dotyczą rozkładu normalnego o znanym odchyleniu standardowym σ i nieznannej wartości oczekiwanej m . Wysuwamy hipotezę $H_0 (m = m_0)$, gdzie m_0 jest pewną ustalo-

na liczbą. Wiadomo, że jeżeli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to zmienna losowa

$$U = \frac{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1. Jako zbiór krytyczny możemy przyjąć np. zbiór tych wartości u , które spełniają warunek $|u| \geq u_\alpha$, gdzie u_α wyznaczamy ze wzoru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_\alpha}^{+u_\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - \alpha.$$

Innymi słowy, będziemy odrzucali hipotezę H_0 ilekroć zaobserwowana wartość u będzie co do wielkości bezwzględnej większa od u_α . Można jednakże przyjąć za zbiór krytyczny zbiór tych wartości u , które spełniają warunek $u \geq v_\alpha$, gdzie v_α wyznacza się z warunku

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v_\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - \alpha;$$

tutaj test polegać będzie na odrzuceniu hipotezy H_0 ilekroć zaobserwowana wartość u będzie przekraczać v_α .

Jeżeli rozważyć prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej H_0 jako funkcję parametru m (tzw. *funkcję mocy testu*), to widać, że funkcja ta będzie wzrastać w miarę zwiększenia różnicy $|m - m_0|$ dla pierwszego testu, natomiast dla drugiego testu będzie ona wzrastać przy zwiększeniu $m - m_0$. Tak więc test pierwszy będzie prowadził do odrzucenia hipotezy H_0 tym częściej, im większe jest odchylenie $|m - m_0|$, podczas gdy drugi test będzie prowadził do odrzucenia hipotezy H_0 tym częściej, im większa jest różnica $m - m_0$. Łatwo się przekonać, że jeżeli $m > m_0$, to drugi test jest lepszy (jego *moc* jest większa), natomiast dla $m < m_0$ drugi test jest gorszy od pierwszego (co więcej: jego *moc* jest mniejsza od α). Problem wyboru jednego z tych testów musi być rozstrzygnięty na gruncie rozważań merytorycznych w ramach badanego zagadnienia: jeżeli chcemy zabezpieczyć się przed błędem polegającym na przyjęciu H_0 , podczas gdy m jest mniejsze bądź większe od m_0 , to należy wybrać pierwszy test. Jeżeli jednak błąd polegający na przyjęciu H_0 , podczas gdy naprawdę $m < m_0$, jest mniej poważny niż błąd polegający na przyjęciu H_0 , podczas gdy $m > m_0$, to drugi test jest lepszy.

Jako przykład pierwszej z tych sytuacji możemy sobie wyobrazić, że testujemy dwa elementy jakiegoś seryjnie produkowanego urządzenia pod względem ich wzajemnego dopasowania: wówczas zarówno

zbyt małe rozmiary jak i zbyt duże rozmiary są złe; typowym przykładem drugiej sytuacji musi być testowanie zawartości m substancji toksycznych w badanym leku. Wówczas przyjęcie, że $m = m_0$, podczas gdy $m > m_0$, jest znacznie poważniejszym błędem niż przyjęcie, że $m = m_0$, podczas gdy $m < m_0$.

Ograniczmy się do podania kilku najczęściej spotykanych testów statystycznych wraz z „typowymi” obszarami krytycznymi używanymi w większości sytuacji praktycznych.

1. Testowanie hipotez o wartości średniej m w rozkładzie normalnym o nieznanym odchyleniu standardowym można oprzeć na fakcie, że zmienna losowa

$$(2) \quad t_{n-1} = \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n-1},$$

gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$, ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody, jeżeli słuszna jest hipoteza $H_0(m = m_0)$.

2. Testowanie hipotez o wariancji σ^2 w rozkładzie normalnym można oprzeć na fakcie, że zmienna losowa

$$(3) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$

ma (przy oznaczeniach użytych w (2)), rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody, jeżeli słuszna jest hipoteza $H_0(\sigma = \sigma_0)$.

3. Bardzo często użytecznym testem przy testowaniu hipotez nieparametrycznych jest tzw. *test χ^2* . Wyobraźmy sobie, że poklasyfikowaliśmy zakres zmienności obserwacji badanego zjawiska na k rozłącznych i wyczerpujących wszystkie możliwości grup $C_1, C_2, \dots, C_k$. Niech n będzie łączną ilością niezależnych obserwacji badanego zjawiska i niech n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) będzie ilością obserwacji należących do klasy C_j (tak że $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Wsuwamy teraz pewną hipotezę H_0 dotyczącą rozkładu prawdopodobieństwa rządzącego zjawiskiem i obliczamy prawdopodobieństwa π_j ($j = 1, 2, \dots, k$), gdzie

$$\pi_j = P\{\text{obserwacja należy do kategorii } C_j\}.$$

Oczywiście $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k = 1$. Dla testowania hipotezy H_0 możemy użyć faktu, że gdy $n \rightarrow \infty$, to rozkład statystyki

$$(4) \quad \chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}$$

zmierza do rozkładu χ^2 o $k-1$ stopniach swobody.

Często wysunięta hipoteza H_0 nie specyfikuje całkowicie rozkładu i zależy on od pewnej ilości r parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$. Wówczas prawdopodobieństwa π_j występujące we wzorze (4) są funkcjami parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$. Jeżeli oszacujemy wartości tych parametrów z tej samej próbki metodą największej wiarygodności (str. 803) (niech te oszacowania będą $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$), wówczas dla $n \rightarrow \infty$ rozkład graniczny statystyki

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - n\pi_j(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r))^2}{n\pi_j(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)}$$

będzie także rozkładem χ^2 o $k-r-1$ stopniach swobody.

Opisany powyżej test χ^2 nadaje się do badania niezależności cech. Wyobraźmy sobie, że obserwacje klasyfikowane są według dwóch cech: każdą obserwację zaliczamy do jednej z grup $C_1, C_2, \dots, C_r$ według pierwszej cechy i do jednej z grup $D_1, D_2, \dots, D_s$ według drugiej cechy. Niech w n niezależnych obserwacjach n_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$) będzie ilością obserwacji, które zaklasyfikowano do C_i i D_j . Wysuwamy hipotezę, że w populacji rozkłady pierwszej i drugiej cechy są niezależne. Oznacza to, że prawdopodobieństwo π_{ij} jest iloczynem $p_i \cdot p_j$, gdzie p_i i p_j są odpowiednio prawdopodobieństwami, że wybrany losowo element będzie należał do grupy C_i (lub D_j) według pierwszej (lub drugiej) klasyfikacji. Mamy zatem $r+s$ nieznanymi parametrów p_i oraz p_j , które muszą spełniać oczywiście związki

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_s = 1.$$

Pozostaje do wyznaczenia $r+s-2$ nieznanymi parametrów. Ich oszacowania metodą największej wiarygodności są

$$\hat{p}_i = \frac{n_{i.}}{n}, \quad \hat{p}_j = \frac{n_{.j}}{n},$$

gdzie $n_{i.} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ i $n_{.j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$.

Dla testowania niezależności cech możemy zatem użyć statystyk

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}\right)^2}{n_{i.} n_{.j}},$$

która dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład χ^2 o $rs-1-(r+s-2) = (r-1)(s-1)$ stopniach swobody.

Przykłady. 1. Średnia wytrzymałość na zerwanie pewnego typu włókien wynosi 18,3 kg przy odchyleniu standardowym 1,2 kg (dane te otrzymano z uprzednich pomiarów). Zakupiono nową maszynę do produkcji tych włókien. Dla próbki 100 włókien z nowej maszyny średnia wytrzymałość wyniosła 17,0 kg, co nasunęło podejrzenie, że nowa maszyna produkuje włókno gorszego gatunku.

Będziemy testować hipotezę, że populacja, z której pobrano próbkę, ma średnią równą lub większą od średniej z poprzednich pomiarów (tzn. od 18,3). Jeżeli średnia ta jest większa lub równa od 18,3, to nowa maszyna nie produkuje wyrobów gorszych niż poprzednie.

Obliczamy prawdopodobieństwo, że średnia z próbki o liczebności 100 wylosowanej z populacji o średniej 18,3 i odchyleniu standardowym 1,2, będzie mniejsza od 17,0. Zastosujemy test jednostronny, gdyż wskazaniem na niższą jakość nowej maszyny mogą być jedynie małe wartości tej średniej. Mamy tu $m = 18,3$, $\sigma = 1,2$, $\bar{x} = 17,0$, $n = 100$, $\sigma/\sqrt{n} = 0,12$, skąd

$$\frac{17,0 - 18,3}{0,12} = \frac{-1,3}{0,12} = -10,83.$$

Prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości $-10,83$ lub mniejszej dla rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji 1 jest znacznie mniejsze od 0,01, co wskazuje, że hipotezę należy odrzucić (tzn. należy uznać, że nowa maszyna jest istotnie gorsza od dotychczasowych).

2. W próbie o liczebności $n = 16$ średnia $\bar{x} = 28,0$ i odchylenie standardowe $s = 3,0$. Czy są powody do odrzucenia na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezy, że średnia w populacji $m = 30$?

Ze względu na to, że nie znamy wartości odchylenia standardowego w populacji, zastosujemy test t Studenta. Mamy tu $m = 30,0$, $\bar{x} = 28,0$, $s = 3,0$, $n = 16$, a więc

$$t = \frac{28,0 - 30,0}{3,0} \sqrt{15} = -2,58.$$

Dla 15 stopni swobody wartość krytyczna $t_{0,05}$ wynosi 2,131, a więc hipotezę należy odrzucić.

3. Producent twierdzi, że średnia długość życia produkowanych przez niego baterii wynosi 21,5 godzin. Przeprowadzono test laboratoryjny nad 6 bateriami, których długości życia wyniosły 19, 18, 22, 20, 16, 25. Czy wyniki te wskazują, że baterie te mają mniejszą długość życia niż twierdzi to producent (na poziomie istotności 0,05).

Dla testowania hipotezy, że $m \geq 21,5$, obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z populacji o $m = 21,5$ próbki o liczebności $n = 6$, której średnia byłaby mniejsza niż ta, którą otrzymano z pomiarów.

Jeżeli będziemy szukali zależności R od t w postaci $R = a + bt$, to dla wyznaczenia stałych a i b otrzymamy siedem równań warunkowych postaci $R_i = a + bt_i$, gdzie t_i i R_i są odpowiednimi wartościami t i R .

Równania normalne są następujące:

$$7a + [t]b = [R], \quad [t]a + [t^2]b = [tR],$$

czyli

$$7a + 245,3b = 566,0, \quad 245,3a + 9325,8b = 20044,5.$$

Rozwiązując te równania otrzymujemy $a = 70,76$ i $b = 0,288$. Wartości R obliczone według wzoru $R = 70,76 + 0,288t$ podane są w ostatniej kolumnie tabelki.

nia sumowania częstokroć stosuje się oznaczenie Gaussa: $[ce]$ zamiast $\sum e_i^2$ oraz $[ab]$ zamiast $\sum a_i b_i$ itp.

II. WZORY EMPIRYCZNE I INTERPOLACJA

1. Przybliżone przedstawienie zależności funkcyjnej

Sformułowanie zagadnienia. W wielu wypadkach zdarza się, że dla funkcji danej tylko za pomocą tabeli lub wykresu trzeba dobrać wyrażenie analityczne, które by w przybliżeniu przedstawiało tę funkcję. Podobne zagadnienie może również powstać dla funkcji określonej za pomocą wzoru, jeżeli wzór ten jest zbyt skomplikowany albo nie jest odpowiedni dla danych potrzeb, na przykład gdy funkcja ma być scałkowana, a całka nie wyraża się przez funkcje elementarne. Wzory przedstawiające zależność funkcyjną otrzymaną na podstawie doświadczenia w postaci tabeli albo wykresu nazywamy *wzorami empirycznymi*. Zazwyczaj dla przybliżonego przedstawienia danej funkcji $f(x)$ dobiera się *funkcję aproksymującą* (przybliżającą) $\varphi(x)$ spośród funkcji określonej postaci, na przykład poszukuje się funkcji $\varphi(x)$ w postaci wielomianu

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

albo w postaci

$$\varphi(x) = Ae^{rx} + Be^{sx} + \dots,$$

z żądaniem, by funkcja $\varphi(x)$ jak najbardziej zbliżała się do funkcji $f(x)$ w pewnym określonym przedziale ($a \leq x \leq b$). W zależności od tego, w jaki sposób będziemy oceniali przybliżanie funkcji $f(x)$ przez $\varphi(x)$, będziemy otrzymywali rozmaite układy parametrów funkcji $\varphi(x)$, dające najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$.

Aproksymacja jednostajna. Teoretycznie celowe jest żądanie od najlepszego przybliżenia $\varphi(x)$ funkcji $f(x)$, by maksimum funkcji $|f(x) - \varphi(x)|$ w danym przedziale $a \leq x \leq b$ było jak najmniejsze — w porównaniu z inaczej dobranymi funkcjami przybliżającymi $\varphi(x)$. Jednakże nie istnieją metody efektywnego uzyskania takich aproksymacji jednostajnych, z wyjątkiem kilku poszczególnych przypadków. Jeżeli na przykład w przedziale $a \leq x \leq b$ funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną o stałym znaku, to funkcję liniową dającą najlepszą aproksymację jednostajną w tym przedziale znajduje się w sposób następujący (rys. 427). Na wykresie funkcji $y = f(x)$ poszukujemy punktu P ,

w którym styczna do krzywej jest równoległa do cięciwy MN , gdzie M i N są punktami krzywej i odciętych a i b . Prosta przechodząca przez środki cięciw MP i PN jest wykresem poszukiwanej funkcji liniowej w przedziale $a \leq x \leq b$.

Aproksymacje jednostajne stosuje się przeważnie w rozważaniach teoretycznych. Teoria takich przybliżeń była w znacznym stopniu opracowana przez Czebyszewa.

Aproksymowanie metodą najmniejszych kwadratów. Najczęściej stosowana jest taka aproksymacja $\varphi(x)$ funkcji $f(x)$, przy której całka

$$M = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

ma wartość najmniejszą. Żądając, by pochodne cząstkowe całki M względem parametrów określających funkcję $\varphi(x)$ (patrz str. 386) były równe zeru, otrzymuje się układ równań pozwalający znaleźć najlepsze (we wskazanym sensie) wartości tych parametrów. Liczbę $\delta = \sqrt{M/(b-a)}$ nazywamy w tym przypadku *średnim odchyleniem kwadratowym*.

Jeżeli funkcję $\varphi(x)$ poszukujemy w postaci kombinacji liniowej pewnych określonych funkcji (1) :

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x),$$

to dla wyznaczenia współczynników $a_0, a_1, \dots, a_n$ otrzymujemy układ równań liniowych

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0,$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ten układ równań przybiera postać szczególnie prostą, gdy funkcje $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) są *ortogonalne* (2) w przedziale (a, b) , tzn. gdy

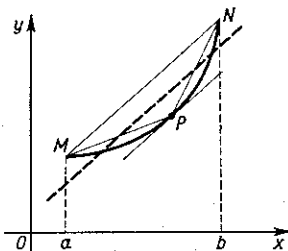
$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq k.$$

(1) Na przykład $\varphi(x)$ jest wielomianem, jeżeli $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \dots, \varphi_n = x^n$ albo jest wielomianem trygonometrycznym, jeżeli $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \cos x, \varphi_2 = \sin x, \dots, \varphi_{2n-1} = \cos nx, \varphi_{2n} = \sin nx$.

(2) Oto dwa przykłady ortogonalnych układów funkcji:

1^o $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx; \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

2^o Wielomiany Legendre'a $P_i(x)$ w przedziale $(-1, 1)$ (patrz str. 585).



Rys. 427

W tym przypadku

$$a_k = \int_a^b [\varphi_k(x)]^2 dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

(patrz wzory Eulera na str. 759).

W związku z tym uproszczeniem, jeśli trzeba znaleźć wielomian aproksymujący $b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$, to dogodniej będzie przekształcić dany przedział (a, b) na przedział $(-1, 1)$ za pomocą podstawienia

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

i poszukiwać tego wielomianu w postaci

$$\varphi(x) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n,$$

gdzie $P_k(t)$ jest wielomianem Legendre'a (patrz str. 585).

Przykład. Znaleźć najlepszą aproksymację funkcji $y = \sin x$ w postaci trójmianu kwadratowego w przedziale $0 \leq x \leq \pi$.

Podstawiając $x = \frac{1}{2} \pi(t+1)$ przekształcamy przedział $(0, \pi)$ na przedział $(-1, 1)$. Poszukujemy funkcji aproksymującej w postaci

$$\varphi = a_0 + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t).$$

Wówczas (patrz str. 464):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin \frac{1}{2} \pi(t+1) dt = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t \sin \frac{1}{2} \pi(t+1) dt = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \sin \frac{1}{2} \pi(t+1) dt = \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right).$$

A więc

$$\sin x \approx \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \approx 0,980 - 0,418 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Aproksymacja w poszczególnych punktach. W wielu wypadkach, szczególnie gdy funkcja $f(x)$ jest określona za pomocą tabeli lub wykresu, dla oceny przybliżenia rozważa się różnice $f(x) - \varphi(x)$ nie dla wszystkich punktów przedziału (a, b) , w którym trzeba znaleźć przybliżenie funkcji $f(x)$, ale tylko dla poszczególnych, z góry obra-

nych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$. Funkcję $\varphi(x)$ uważamy za najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ według metody najmniejszych kwadratów, jeśli suma (por. str. 812):

$$S = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

ma wartość najmniejszą w porównaniu z innymi funkcjami $\varphi(x)$, spośród których wybiera się poszukiwane przybliżenie⁽¹⁾.

Jeżeli funkcję $\varphi(x)$ w zupełności określają parametry $k, l, m, \dots$, to najlepsze (we wskazanym sensie) wartości tych parametrów znajduje się przez rozwiązanie układu równań

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \quad \dots$$

Jeżeli ilość parametrów określających funkcję $\varphi(x)$ równa się ilości wybranych punktów $n+1$, to na ogół biorąc można dobrać funkcję $\varphi(x)$ w taki sposób, żeby zachodziły równości $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), a to rozwiązując układ $n+1$ rozwiązań z $n+1$ niewiadomymi. Wtedy funkcję φ nazywamy funkcją interpolacyjną, a proces znajdowania i obliczania wartości funkcji $\varphi(x)$ nazywamy interpolacją.

Najbardziej rozpowszechniona jest interpolacja paraboliczna, przy której funkcją interpolacyjną jest wielomian $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Dla funkcji okresowych stosuje się interpolację trygonometryczną (patrz str. 769).

Aproksymacja metodą przeciętnych — patrz str. 825.

2. Interpolacja paraboliczna

Przypadek ogólny. Jakkolwiek jest dana funkcja $f(x)$ i jakkolwiek są wybrane węzły interpolacji $x_0, x_1, \dots, x_n$, zawsze istnieje jedyny wielomian $\varphi_n(x)$ stopnia n , który w tych punktach przybiera te same wartości, co dana funkcja $f(x)$: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Do znajdowania wielomianu interpolacyjnego służyć może wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$\varphi_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_n(x)f_n,$$

gdzie $L_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$ oraz $f_i = f(x_i)$.

⁽¹⁾ Jak wyżej (patrz aproksymację jednostajną na str. 815), można również określić najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ jako taką funkcję $\varphi(x)$, dla której maksimum funkcji $|f(x) - \varphi(x)|$ jest najmniejsze w porównaniu z innymi możliwymi przybliżeniami $\varphi(x)$; jednakże znajdowanie przybliżenia funkcji według tego sposobu jest w praktyce uciążliwe.

Gdy trzeba obliczyć wartość $\varphi_n(x)$ dla określonej wartości x , można skorzystać z następującego schematu (schemat krzyżowy), szczególnie dogodnego przy zastosowaniu maszyn liczących:

$$\begin{array}{l|l} x_0 - x & f_0 \\ x_1 - x & f_1(f_0, f_1) \\ x_2 - x & f_2(f_0, f_2)(f_0, f_1, f_2) \\ \dots & \dots \\ x_n - x & f_n(f_0, f_n)(f_0, f_1, f_n) \dots (f_0, f_1, \dots, f_n) \end{array}$$

Każdy z symboli $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) oznacza wartość w punkcie x wielomianu interpolacyjnego zbudowanego na podstawie węzłów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$. Liczby te wyznacza się — kolumna za kolumną — w sposób następujący: Liczby kolumny (f_0, f_k) oblicza się według wzoru

$$(f_0, f_k) = \frac{(x_0 - x)f_k - (x_k - x)f_0}{(x_0 - x) - (x_k - x)}.$$

Każdą następną kolumnę otrzymuje się z poprzedniej według tego samego wzoru, na przykład

$$(f_0, f_1, f_k) = \frac{(x_1 - x)(f_0, f_k) - (x_k - x)(f_0, f_1)}{(x_1 - x) - (x_k - x)}$$

i tak dalej. Rozmieszczenie węzłów może być obrane dowolnie.

Przykład. Trzeba obliczyć $\sin 50^\circ$, korzystając z pięciocyfrowych wartości sinusa kątów $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Schemat krzyżowy wygląda w tym przypadku w sposób następujący:

$$\begin{array}{l|l} -50 & 0,00000 \\ -20 & 0,50000 \quad 0,83333 \\ -5 & 0,70711 \quad 0,78568 \quad 0,7 \quad 6980 \\ 10 & 0,86603 \quad 0,72169 \quad 0,7 \quad 5890 \quad 66 \quad 17 \\ 40 & 1,00000 \quad 0,55556 \quad 0,7 \quad 4074 \quad 66 \quad 57 \quad 04 \end{array}$$

Jeśli w którejkolwiek kolumnie cyfry początkowe są jednakowe (w przytoczonym przykładzie cyfry te zostały oddzielone), to można ich nie wprowadzać do dalszych obliczeń. Na przykład przy obliczaniu ostatniej kolumny korzystamy z ostatnich cyfr poprzedniego wyniku:

$$\frac{10 \cdot 57 - 40 \cdot 17}{10 - 40} = 04.$$

Ostatecznie $\sin 50^\circ = 0,76604$.

Węzły rozmieszczone w równych odstępach. Tablice różnic.

Bardzo często zdarza się przypadek, gdy węzły interpolacyjne leżą w równych odstępach. Stałą $h = x_{i+1} - x_i$ nazywamy w tym przypadku *skokiem* danej tabeli wartości funkcji $f(x)$. Mamy wtedy $x_k = x_0 + kh$ (symbolikę tę będziemy stosowali również przy $k < 0$).

Pierwsze różnice (czyli *różnice rzędu pierwszego*) funkcji przy danym skoku h określone są wzorami

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Różnice pierwszych różnic tworzą *drugie różnice* (czyli *różnice rzędu drugiego*)

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x), \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i.$$

Podobnie określa się i różnice wyższych rzędów.

Różnice funkcji można wyrazić przez dane wartości funkcji:

$$\Delta^k f_0 = f_k - k f_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} f_{k-2} - \dots + (-1)^k f_0,$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci

$$\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0,$$

gdzie przyjmuje się oznaczenie $E f_0 = f_1$.

Dla celów interpolacji według danych wartości funkcji układamy tablicę różnic według następującego schematu:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
...	...	...	...	...	...
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$	$\Delta^4 f_{-3}$
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-2}$
x_0	f_0	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$	$\Delta^4 f_{-1}$
x_1	f_1	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$
...	...	...	...	...	...

W tablicy tej każda liczba (prócz liczb znajdujących się w pierwszych dwóch kolumnach) jest różnicą dwóch liczb z poprzedniej kolumny stojących o pół wiersza wyżej niż rozważana liczba⁽¹⁾. Przy

⁽¹⁾ Przykład takiego schematu patrz na str. 822.

układaniu tablicy różnic należy mieć na uwadze, że występowanie w pierwszej kolumnie błędów, których bezwzględna wartość nie przewyższa ε , może doprowadzić do błędów dochodzących do 2ε w drugiej kolumnie, do 4ε w trzeciej kolumnie i ogólnie: do $2^{m-1}\varepsilon$ w m -tej kolumnie. Dlatego nawet nieznaczne błędy w wartości funkcji (na przykład wskutek zaokrągleń) mogą mieć wielki wpływ na różnice wyższych rzędów. Obliczanie różnic należy przerwać, gdy w którejkolwiek kolumnie wszystkie różnice okażą się prawie równe (tzn. gdy różnica będzie stała). Różnice rzędu m są stałe w przypadku wielomianu stopnia m . Dlatego przybliżona stałość m -tej różnicy wskazuje na to, że dana funkcja $f(x)$ może być z dostateczną dokładnością przedstawiona wielomianem stopnia m . (Dla tablicy na str. 822 $m = 3$; czwarte różnice są zbędne).

Wzory interpolacyjne różnicowe. Przy użyciu różnic wielomian interpolacyjny może być znaleziony według jednego z następujących wzorów, w których wprowadzono oznaczenie $u = (x - x_0)/h$:

Wzory Newtona:

$$N_I(x) = f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} \Delta^n f_0,$$

$$N_{II}(x) = f_0 + u \Delta f_{-1} + \frac{u(u+1)}{2} \Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}.$$

Wzór Stirlinga:

$$S(x) = f_0 + u \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2} \Delta^2 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots + \frac{u^2(u^2-1)\dots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} f_{-n}.$$

Wzór Bessela:

$$B(x) = f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} +$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-0,5)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{(u-0,5)u(u^2-1)\dots[u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} f_{-1}.$$

Wzory Newtona dają wielomian interpolacyjny, jeżeli x_0 jest bądź pierwszym, bądź ostatnim z węzłów interpolacyjnych, gdy tymczasem dla wzorów Bessela i Stirlinga x_0 jest środkowym (albo jednym z dwóch środkowych) węzłem interpolacyjnym. Różnice użyte do obliczeń według tego czy innego wzoru są zaznaczone na poprzedzającym sche-

macie (str. 820). Wzory interpolacyjne stosowane są głównie do obliczenia pośredniej wartości funkcji określonej za pomocą tabeli. Przez odpowiedni dobór x_0 można zawsze uczynić $|u| < 1$.

Gdy $|u| \leq 0,25$, najbardziej celowe jest użycie wzoru Stirlinga, gdy $0,25 \leq u \leq 0,75$, zaleca się użycie wzoru Bessela, Wzorów Newtona używa się w razie niemożliwości zastosowania wzorów $S(x)$ lub $B(x)$, tzn. gdy x leży w pobliżu początku lub końca tabeli.

Przykład. Obliczyć dla $x = 22$ wartość funkcji $f(x)$ określonej przy pomocy następującej tabeli (1):

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
5	4,87	487			
10	10,52	565	78		
15	17,24	672	107	29	
20	25,34	810	138	31	2
25	35,16	982	172	34	3
30	46,97	1181	199	27	-7
35	61,09	1412	231	32	5
40	77,85	1676	264	33	1

Jak już było wskazane, należy tu ograniczyć się do trzech różnic. Jeżeli weźmiemy $x_0 = 20$, to

$$u = \frac{22-20}{5} = 0,4.$$

Według wzoru Bessela mamy

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \cdot 9,82 - \frac{0,4 \cdot 0,6}{2} \cdot \frac{1,72 + 1,99}{2} + \\ + \frac{0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,1}{6} 0,27 = 29,05,$$

(1) W tabeli różnic zazwyczaj nie kładzie się przecinka dziesiętnego, wyrażając różnicę w jednostkach ostatniego rzędu wartości funkcji.

według wzoru Stirlinga

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \frac{8,10 + 9,82}{2} + \\ + \frac{0,16}{2} 1,72 - \frac{0,4 \cdot 0,84}{6} \cdot \frac{0,34 + 0,27}{2} = 29,04,$$

według pierwszego wzoru Newtona

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \cdot 9,82 - \frac{0,4 \cdot 0,6}{2} 1,99 + \\ + \frac{0,4 \cdot 0,6 \cdot 1,6}{6} 0,32 = 29,05.$$

Gdybyśmy się ograniczyli do drugich różnic, to otrzymalibyśmy według wzoru Bessela 29,05, według wzoru Stirlinga 29,06, a według pierwszego wzoru Newtona 29,03.

Błąd interpolacji. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w postaci analitycznej i ma w rozważanym przedziale dostateczną ilość ciągłych pochodnych, to błąd powstający przy zastąpieniu funkcji $f(x)$ wielomianem interpolacyjnym według wzoru Lagrange'a wynosi

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n),$$

gdzie ξ jest pewną wartością pośrednią między największą i najmniejszą z liczb $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Dla wzorów różnicowych mamy

$$f(x) - N_I(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u-1) \dots (u-n),$$

$$f(x) - N_{II}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u+1) \dots (u+n),$$

$$f(x) - S(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi) \cdot u(u^2-1) \dots (u^2-n^2),$$

$$f(x) - B(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \cdot u(u^2-1) \dots (u^2-n^2)(u-n-1).$$

Przy tym zakłada się, że ilość wyrazów w wielomianach $N_I(x)$, $N_{II}(x)$, $S(x)$ i $B(x)$ jest taka sama, jak na stronie 821, a ξ jest pewną wartością pośrednią między węzłami interpolacyjnymi w różnych wzorach; ξ zależy od x .

Zastosowania wzorów interpolacyjnych. Wzory interpolacyjne mogą być wykorzystane do przybliżonego różniczkowania i całkowania. W tym celu zastępuje się daną funkcję $f(x)$ wielomianem interpolacyjnym $\varphi(x)$ i wykonuje się na nim odpowiednie operacje. Na przykład stosując wzór interpolacyjny Stirlinga można otrzymać następujący wzór na przybliżoną wartość pochodnej funkcji $f(x)$ przy $x = x_0$:

$$\left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{1}{30} \cdot \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} - \dots \right].$$

Najdogodniejsze wzory na całkowanie przybliżone wynikające ze wzorów interpolacyjnych podane są na stronie 492.

3. Dobieranie wzorów empirycznych

Porównywanie wykresów. Proces dobierania wzoru empirycznego dla ustalonej doświadczalnie zależności funkcyjnej $y = f(x)$ składa się z dwóch części: najpierw obieramy postać wzoru i dopiero potem określamy wartości liczbowe parametrów, przy których przybliżenie danej funkcji jest najlepsze. Jeżeli nie ma jakichś względów teoretycznych co do doboru wzoru, zazwyczaj wybiera się zależność funkcyjną spośród najprostszych, porównując ich wykresy z wykresem danej funkcji. Ponieważ podobieństwo wykresów, określane z grubsza, „na oko”, może się okazać złudne, należy po wybraniu któregoś wzoru, przed określeniem jego parametrów, sprawdzić jego przydatność *metodą wyrównywania*.

Metoda wyrównywania jest następująca: przy założeniu, że między y i x zachodzi zależność określonej postaci, znajdujemy pewne wielkości

$$X = \varphi(x, y) \quad \text{ i } \quad Y = \psi(x, y),$$

które przy przyjętym założeniu są liniowo związane (jeżeli na przykład $y = x/(a+bx)$, to bierzemy $X = x$, $Y = x/y$ albo $X = 1/x$, $Y = 1/y$). Obliczając dla danych wartości x i y odpowiednie wartości X i Y i przedstawiając je na wykresie łatwo zobaczymy od razu, czy związek między X i Y jest bliski liniowego (tzn. czy odpowiednie punkty układają się w przybliżeniu wzdłuż linii prostej) i czy wobec tego wybrany wzór nadaje się, czy też nie.

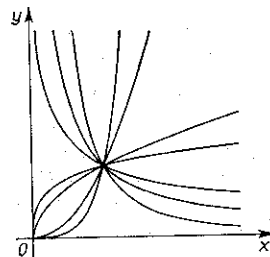
Wskazówki co do wyrównywania niektórych prostszych funkcji są dane poniżej z odesłaniem do odpowiednich wykresów (patrz str. 825 - 829); przykład znajduje się na stronie 830.

Określenie parametrów. Najbardziej dokładną metodą określania parametrów jest *metoda najmniejszych kwadratów* (patrz str. 812 i 818). Jednakże w większości wypadków można z powodzeniem stosować prostsze metody, w szczególności *metodę przeciętnych*. Jeżeli uzyskany tą metodą wzór okaże się niedostatecznie dokładny, to dla dalszego uściślenia jego może być już użyta metoda najmniejszych kwadratów, przy czym dzięki znajomości przybliżonych wartości parametrów obliczenia będą mniej żmudne (patrz str. 812). Metodą przeciętnych określamy najpierw zależność liniową między „wyrównanymi” zmiennymi X i Y : $Y = aX + b$. W tym celu równania warunkowe $Y_i = aX_i + b$ dla posiadanych par wartości X_i i Y_i dzielimy na dwie równe (lub prawie równe) grupy w kolejności wzrastania zmiennej X_i lub Y_i . Dodając równania każdej grupy otrzymujemy dwa równania, z których właśnie znajdujemy a i b . Wyrażając zmienne X i Y przez pierwotne zmienne otrzymujemy poszukiwany związek między x i y . Jeżeli przy tym nie wszystkie parametry będą już wyznaczone, to należy znowu zastosować tę samą metodę, wyrównując tym razem inne wielkości X i Y (patrz na przykład przypadek 13 na str. 829); przykład znajduje się na stronie 830.

Najczęściej stosowane wzory empiryczne. Poniżej podajemy najprostsze wzory z odpowiednimi wykresami. Na każdym rysunku podano kilka wykresów dla różnych wartości parametrów występujących we wzorze (badanie wpływu parametrów na kształt krzywej patrz w rozdziale „Wykresy” str. 98 - 120). Przy rozpatrywaniu wykresów należy zawsze pamiętać, że przy użyciu wzorów empirycznych korzysta się tylko z części krzywej, odpowiadającej pewnemu przedziałowi zmiennej niezależnej. Dlatego na przykład nie należy sądzić, że wzór $y = x^2 + bx + c$ (patrz niżej) nadaje się tylko w przypadku, gdy krzywa $y = f(x)$ ma maksimum lub minimum.

1. $y = ax^b$. Wykresy podano na rysunkach 6, 12, 15 i 16, a objaśnienia do nich na stronach 98, 105, 107 i 108. Wyrównujemy $X = \log x$ i $Y = \log y$:

$$Y = \log a + bX.$$



2. $y = ae^{bx}$. Wykresy podano na rysunku 17, a objaśnienia do niego na stronie 109. Wyrównujemy $X = x$ i $Y = \log y$:

$$Y = \log a + b \log e \cdot x.$$

3. $y = ax^b + c$. Wykresy są te same, co do przypadku 1, ale przesunięte w kierunku osi Oy . Jeżeli b jest dane, to wyrównujemy $X = x^b$ i $Y = y$:

$$y = aX + c.$$

Jeżeli b nie jest znane, wyrównujemy $X = \log x$ i $Y = \log(y - c)$:

$$Y = \log a + bX,$$

określając przedtem c . W tym celu znajdujemy na wykresie funkcji trzy punkty o odciętych $x_1, x_2, x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ i odpowiednimi rzędnymi y_1, y_2, y_3 (przy czym x_1 i x_2 obieramy dowolnie) i przyjmujemy

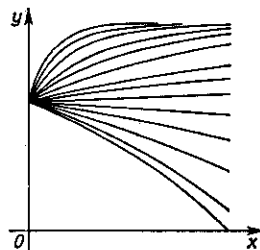
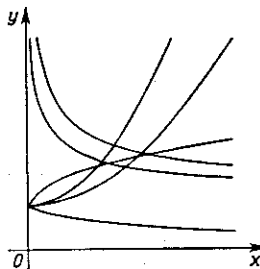
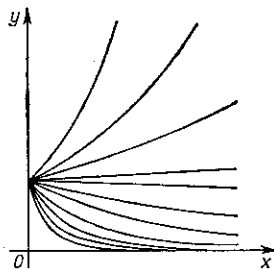
$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3} \quad (1).$$

4. $y = ae^{bx} + c$. Wykresy są te same, co dla wzoru 2, ale przesunięte w kierunku osi Oy . Wyrównujemy $X = x$ i $Y = \log(y - c)$:

$$Y = \log a + b \log e \cdot x,$$

określając przedtem c . W tym celu znajdujemy na wykresie danej funkcji trzy punkty o odciętych $x_1, x_2, x_3 = (x_1 + x_2)/2$ oraz odpowiednich rzęd-

(1) Po wyznaczeniu a i b można na nowo wybrać c równe przeciętnej wartości $y - ae^{bx}$.



nych y_1, y_2, y_3 , przy czym x_1 i x_2 obieramy dowolnie i przyjmujemy

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3} \quad (1).$$

5. $y = ax^2 + bx + c$. Wykres podano na rysunku 3, a objaśnienia do niego na stronie 98. Jeżeli wybierze- my na wykresie danej funkcji jakikol- wiek punkt (x_1, y_1) , to wyrównujemy $X = x$ i $Y = (y - y_1)/(x - x_1)$:

$$Y = (b + ax_1) + ax.$$

Jeżeli dane wartości tworzą postę- p arytmetyczny o różnicy h , to wyrów- nujemy $Y = \Delta y$ i $X = x$:

$$Y = (bh + ah^2) + 2ahx.$$

W obu przypadkach po wyznaczeniu a i b znajdujemy c z równania

$$\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + nc,$$

gdzie n oznacza ilość danych wartości x , na które rozciąga się sumo- wanie.

6. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Wykres podano na rysunku 8, a objaśnienia do niego na stronie 102. Na wykresie danej funkcji obieramy którykol- wiek punkt (x_1, y_1) i wyrównujemy $X = x$ i $Y = (x - x_1)/(y - y_1)$:

$$Y = A + Bx.$$

Ograniczamy się tu do wyznaczenia A i B , przepisując otrzymany wzór w postaci

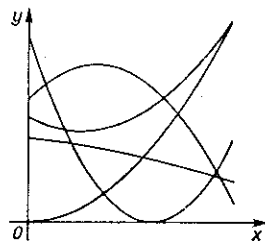
$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}.$$

Czasami można się ograniczyć do wzoru w postaci

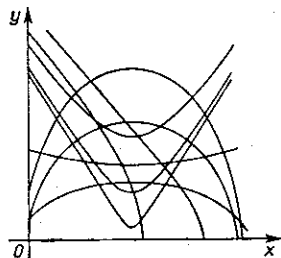
$$y = \frac{x}{cx + d} \quad \text{lub} \quad y = \frac{1}{cx + d}.$$

Wtedy wyrównujemy $X = 1/x$ i $Y = 1/y$ albo $X = x$ i $Y = x/y$ w pierwszym przypadku, a w drugim $X = x$ i $Y = 1/y$.

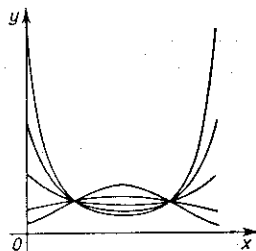
(1) Po wyznaczeniu a i b można od nowa wybrać c równe przeciętnej wartości $y - ae^{bx}$.



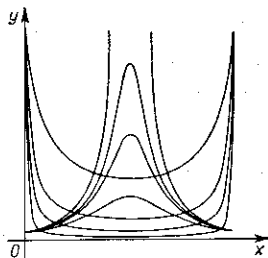
7. $y^2 = ax^2 + bx + c$. Wykres podano na rysunku 14, a objaśnienia do niego na stronie 107. Jeżeli wprowadzimy nową zmienną $y = y^2$, to dalsze obliczenia możemy prowadzić jak w przypadku 5.



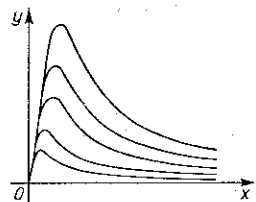
8. $y = ae^{bx+cx^2}$ albo $\log y = \log a + \log e \cdot bx + \log e \cdot cx^2$. Wykres podano na rysunku 21, a objaśnienia do niego na stronie 112. Wprowadzając nową zmienną $\bar{y} = \log y$ sprowadzamy ten przypadek do przypadku 5.



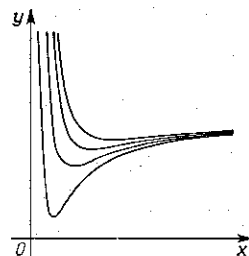
9. $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$. Wykres podano na rysunku 10, a objaśnienia do niego na stronach 103 i 104. Przez wprowadzenie nowej zmiennej $\bar{y} = 1/y$ przypadek ten sprowadzamy do przypadku 5.



10. $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$. Wykres podano na rysunku 11, a objaśnienia do niego na stronach 104-105. Przez wprowadzenie nowej zmiennej $\bar{y} = x/y$ przypadek ten sprowadzamy do przypadku 5.



11. $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. Wykres podano na rysunku 9, a objaśnienia do niego na stronie 103. Przez wprowadzenie nowej zmiennej $\bar{x} = 1/x$ sprowadzamy ten przypadek do przypadku 5.



12. $y = ax^b e^{cx}$. Wykres podano na rysunku 22, a objaśnienia do niego na stronach 112 i 113. Jeżeli dane wartości x tworzą postęp arytmetyczny o różnicy h , to wyrównujemy $Y = \Delta \log y$, $X = \Delta \log x$:

$$y = h \log e + bX.$$

Jeżeli zaś dane wartości x tworzą postęp geometryczny o ilorazie q , to wyrównujemy $Y = \Delta_1 \log y$ i $X = x$:

$$Y = b \log q + c(q-1) \log e \cdot x,$$

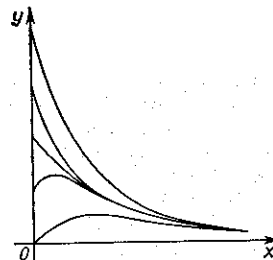
gdzie Δ_1 jest to różnica dwóch kolejnych wartości $\log y$. Po wyznaczeniu b i c , logarytmując dane równanie, znajdujemy $\log a$ podobnie jak dla wzoru 5 znajdowaliśmy c .

13. $y = ae^{bx} + ce^{dx}$. Wykres podano na rysunku 20, a objaśnienia do niego na stronach 110 i 112. Jeżeli dane wartości x tworzą postęp arytmetyczny o różnicy h i y, y_1 i y_2 są dowolnymi wartościami kolejnymi danej funkcji, to wyrównujemy $Y = y_2/y_1$ i $X = y_1/y_2$:

$$Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh}e^{dh}.$$

Po wyznaczeniu b i d z tego równania wyrównujemy $\bar{Y} = ye^{-dx}$ i $\bar{X} = e^{(b-d)x}$:

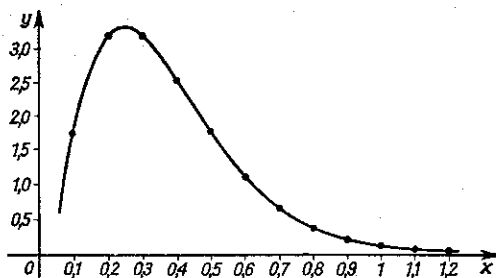
$$\bar{Y} = a\bar{X} + c.$$



Przykład. Znaleźć wzór empiryczny dla zależności funkcyjnej między x i y , określonej w następującej tabeli w pierwszej i drugiej kolumnie:

x	y	x/y	$\Delta(x/y)$	$\log x$	$\log y$	$\Delta \log x$	$\Delta \log y$	$\Delta_1 \log y$	y oblicz.
0,1	1,78	0,056	0,007	-1,000	0,250	0,301	0,252	0,252	1,78
0,2	3,18	0,063	0,031	-0,699	0,502	0,176	+0,002	-0,097	3,15
0,3	3,19	0,094	0,063	-0,523	0,504	0,125	-0,099	-0,447	3,16
0,4	2,54	0,157	0,125	-0,398	0,405	0,097	-0,157	-0,803	2,52
0,5	1,77	0,282	0,244	-0,301	0,248	0,079	-0,191	-1,134	1,76
0,6	1,14	0,526	0,488	-0,222	0,057	0,067	-0,218	-1,455	1,14
0,7	0,69	1,014	0,986	-0,155	-0,161	0,058	-0,237	—	0,70
0,8	0,40	2,000	1,913	-0,097	-0,398	0,051	-0,240	—	0,41
0,9	0,23	3,913	3,78	-0,046	-0,638	0,046	-0,248	—	0,23
1,0	0,13	7,69	8,02	0,000	-0,886	0,041	-0,269	—	0,13
1,1	0,07	15,71	14,29	0,041	-1,155	0,038	-0,243	—	0,07
1,2	0,04	30,0	—	0,079	-1,398	—	—	—	0,04

Budując wykres (rys. 428) i porównując go z wykresami na stronach 825 - 829, dochodzimy do przekonania, że do danego przypadku



Rys. 428

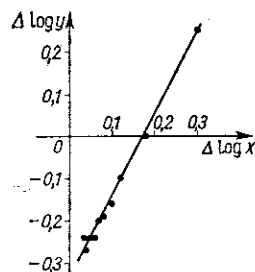
pasują przypadki 10 i 12. Dla przypadku 10 należy wyrównać $\Delta(x/y)$ i x , jednakże obliczenia wyraźnie wskazują na to, że zależność między x i $\Delta(x/y)$ jest daleka od liniowej. Dla sprawdzenia przydatności wzoru 12 budujemy wykres związku między $\Delta \log x$ i $\Delta \log y$ (dla $h = 0,1$; rys. 429), a także między $\Delta_1 \log y$ i x (dla $q = 2$, rys. 430). W obu przypadkach można uznać, że rozkład punktów wzdłuż linii prostej jest zadowalający i przyjąć wzór $y = ax^b e^{cx}$.

Dla wyznaczenia stałych a , b i c poszukujemy zależności liniowej między x i $\Delta_1 \log y$ metodą przeciętnych. Dodając równania warunkowe

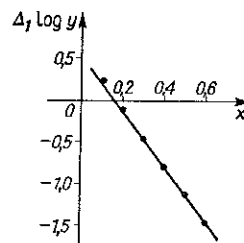
$$\Delta_1 \log y = b \log 2 + cx \log e$$

grupami (po trzy równania) otrzymujemy

$$-0,292 = 0,903b + 0,2606c, \quad -3,392 = 0,903b + 0,6514c,$$



Rys. 429



Rys. 430

skąd $b = 1,966$ i $c = -7,932$. Dla wyznaczenia a dodajemy równania postaci $\log y = \log a + b \log x + c \log e \cdot x$, co daje

$$-2,670 = 12 \log a - 6,529 - 26,87,$$

skąd $\log a = 2,561$, $a = 364$. Wartości y obliczone według wzoru $y = 364x^{1,966} e^{-7,932x}$ podane są w ostatniej kolumnie powyższej tabeli.

SKOROWIDZ

- Abela równanie 717
 — twierdzenie 386
 d'Alemberta kryterium 377
 — wzór 601
 algorytm Euklidesa 157
 alternatywa Fredholma 743
 amplituda 115
 — punktu 256
 analiza harmoniczna 760
 analizatory harmoniczne 770
 Angeseio lok 121
 antylogarytm 51
 Apolloniusza twierdzenie 268
 aproksymacja jednostajna 815
 — w poszczególnych punktach 817
 aproksymowanie metodą najmniejszych kwadratów 816
 Archimedes spirala 133
 arcus cosinus 117, 242
 — cotangens 118, 242
 — sinus 117, 242
 — tangens 117, 242
 area cosinus 120, 252
 — cotangens 121, 252
 — funkcje (funkcje hiperboliczne odwrotne) 252
 — sinus 120, 252
 — tangens 120, 252
 Arzeli twierdzenie 747
 asteroida 131
 asymptota 316
 — pionowa 316
 — pochyła 316
 — pozioma 316
 Bayesa wzór 776
 becicka 228
 Bernoulliego liczby 382
 — rozkład dwumianowy 782
 — równanie 552
 Bessela funkcja pierwszego rodzaju (funkcja walцова) 582
 — drugiego rodzaju (funkcja Webera) 583
 — równanie 582
 Bessela wzór 821
 — wzory 769
 biegun 633, 647
 — m -krotny (biegun rzędu m) 643
 — (początek współrzędnych) 256
 binormalna do krzywej przestrzennej 324
 — , równanie 326
 błąd 139
 — funkcji 141
 — , kres górny 139
 — przybliżenia 139
 — względny, kres górny 139
 — — przybliżenia 139
 Borela twierdzenie 575
 Briggsa logarytm (logarytm dziesiętny) 164
 Buniakowskiego - Cauchy'ego nierówności 198
 Buniakowskiego - Schwarza nierówności 199
 Całka eliptyczna pierwszego rodzaju 437
 — — drugiego rodzaju 437
 — — trzeciego rodzaju 437
 — — niezupełna pierwszego rodzaju 438
 — — drugiego rodzaju 438
 — — trzeciego rodzaju 438
 — Eulera 204
 — — pierwszego rodzaju (funkcja beta) 512
 — — drugiego rodzaju (funkcja gamma) 509, 512
 — Fouriera 764
 — funkcji po łuku 638
 — — zmiennej zespolonej 638
 — krzywoliniowa 516
 — — funkcji wektorowej 668, 669
 — — pierwszego rodzaju (całka krzywoliniowa nieskierowana) 517, 518
 — — drugiego rodzaju 519, 520
 — — ogólnej postaci 521
 — nieoznaczona 424, 639
 — niewłaściwa 502, 506
 — — rozbieżna 502, 506
 — — , wartość główna 503, 506

- metoda przeciętnych 825
 — przybliżenia Nyströma 738
 — Riemanna rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego 608
 — Ritz'a rozwiązywania zagadnień wariancyjnych 710
 — rozdzielenia zmiennych 548
 — współczynników nieoznaczonych 160
 — wyrównywania 824
 — uziemiennia stałych 566, 573
 metody numeryczne całkowania równań różniczkowych cząstkowych 615
 — przybliżone całkowania równań różniczkowych cząstkowych 615
 Meusnier'a twierdzenie 335
 miara kąta brylowego 219
 — łukowa kąta 229
 minimum funkcji 408
 — — wielu zmiennych 411
 minor macierzy 188
 — wyznacznika 183
 moduł funkcji zmiennej zespolonej (wartość bezwzględna funkcji zmiennej zespolonej) 631
 — liczby (wartość bezwzględna liczby) 352
 — — zespolonej (wartość bezwzględna liczby zespolonej) 618
 — przekształcenia logarytmów 164
 de Moivre'a wzór 235, 251, 621
 de Moivre'a - Laplace'a twierdzenie 779
 moment bezwładności bryły 536
 — — łuku krzywej jednorodnej 500
 — — płaskiej figury 535
 Möbiusa wstęga 540
 Nabla ∇ (operator Hamiltona) 677
 nadzieja matematyczna (wartość przeciętna, wartość oczekiwana) 784
 największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów 157
 Neila parabola 121
 Nepera logarytmy (logarytmy naturalne) 164
 — reguła 247
 — wzory 240
 Newtona dwumian 206
 — metoda 180
 — symbol 206
 — wzory 821
 Newtona - Coulomba pole 681
 von Neumanna szereg 729
 nierówność 196
 —, asymetria 197
 — Buniakowskiego - Cauchy'ego 198
 — Buniakowskiego - Schwarz'a 199
 — Cauchy'ego 198
 — Czebyszewa 199
 — uogólniona 199
 —, działania 197
 —, przechodność 197
 nierówność, monotoniczność 197
 — nieostra 196
 — ostra 196
 — Rao - Craméra 802
 — Schwarz'a 746
 — stopnia pierwszego 200
 — — drugiego 200, 201
 — tożsamościowa 196
 nierówności jednakowo skierowane 197
 — przeciwnie skierowane 197
 — równoważne 197
 nieskończenie małe rzędu wyższego 391
 — tego samego rzędu 391
 niewiadoma 166
 niewymierności algebraiczne 342
 Nikomedeśa konchoida 123
 norma biegunowa 307
 — do elipsy 268
 — do hiperboli 270
 — krzywej 304
 — —, kierunku dodatni 305
 — parabol 274
 — powierzchni 331
 — —, wersor 331
 — funkcji 746
 — główna 323
 — —, równanie 326
 — normalna 306
 —, równanie 332
 numerus logarytmu 51
 Nyströma metoda przybliżenia 738
 Objętość bryły 536, 543
 — — cylindrycznej 535
 — ciała 429
 — czworosiannu 284
 obrót układu współrzędnych 257
 — — w przestrzeni 282
 obszar całkowania 526
 — —, jednorodny 369
 — —, oznaczoności funkcji 346, 368, 370
 — —, wyrażenia analitycznego 348, 370
 — —, ufności 804
 — —, wielosłupny 369, 370
 obszary spójne dwóch zmiennych 369
 — —, trzech zmiennych 369
 obwódca 321
 odchylenie standardowe (odchylenie średnie) 784
 odcinka punktu 255
 odcinek hiperboli, pole 272
 — —, kołowy 215
 — —, pole 216
 — —, kuli 227
 odcinki na osiach 261
 odległość biegunowa 330
 — —, między dwiema płaszczyznami równoległymi 288
 — —, prostymi nierównoległymi 291
 — punktu od płaszczyzny 288
 — —, prostej 262, 290

- odległość między punktami 258, 283
 odwzorowanie konforemne 634
 — —, funkcja homograficzna 633
 — —, — kwadratowa 636
 — —, — liniowa 635
 — —, —, inwersja 635
 — —, logarytm 636
 — —, pierwiastek kwadratowy 636
 ognisko równania różniczkowego 557
 okrąg koła 214, 265
 — —, długość 215
 okres funkcji 354
 operator całkowy 745
 — Hamiltona ∇ (nabla) 677
 — Laplace'a 599, 678
 ortogonalność z wagą 588
 osie współrzędnych 255
 Ostrogradskiego - Gaussa twierdzenie 679
 — —, wzór 545
 Ostrogradskiego metoda (wyłączanie wymiernej części całki) 433
 — —, wzór 433
 ostrosłup 220
 — —, n -kątny 220
 — —, prawidłowy 221
 — —, ścięty 221
 — —, wierzchołek 220
 ostry krzywej 313
 — —, pierwszego rodzaju 313
 — —, drugiego rodzaju 313
 oś biegunowa 256
 — —, odcinków 255
 — —, rzędnych 255
 ośmiościan (oktaedr) 223
 owal Cassiniego 126
 Parabola 98, 273
 — —, górna połowa 106
 — —, kierownica 273
 — —, mimośród 273
 — —, Neila (parabola półścięcienna) 121
 — —, ognisko 273
 — —, oś 273
 — —, parametr ogniskowy 273
 — —, pole odcinka 274
 — —, promień wodzący 273
 — —, równanie kanoniczne 273
 — —, — ogólne 275
 — —, stopnia n 101
 — —, sześcienną (parabola stopnia trzeciego) 99
 — —, średnica sprzężona 273
 — —, wierzchołek 273
 paraboloida eliptyczna 297
 — —, hiperboliczna 297
 — —, obrotowa 297
 — —, oś symetrii 297
 — —, płaszczyzna symetrii 297
 parametr 509
 parametry pozycyjne (kwantyle) 785
 parcie 499
 Parsevala równość 588, 760
 Pascala ślimak 125
 — —, trójkąt 207
 permutacje 206
 pęk prostych 263
 — —, wierzchołek 263
 Pfaffa równanie (równanie z różniczkami zupełnymi) 596
 Picarda metoda kolejnych przybliżeń (metoda iteracji) 559
 pierścień kołowy 216
 — —, pole 216
 pierwiastek równania 166
 — —, k -krotny 174
 pierwiastki obce 167
 — —, wielomianu 174
 pierwiastnik 161
 pierwiastniki, przekształcenie 161
 pierwsze różnice (różnice rzędu pierwszego) 820
 — —, twierdzenie Guldina 501
 planimetr 495
 płaszczyzna normalna do krzywej przestrzennej 323
 — —, równanie 325
 — —, prostująca 324
 — —, równanie 326
 — —, styczna do powierzchni 331
 — —, równanie 332
 — —, ściśle styczna 323
 — —, równanie 325
 płaszczyzny dwusieczne 288
 — —, równoległe 217
 Pitagorasa twierdzenie 210
 pochodna cząstkowa 390
 — —, funkcji dwóch zmiennych, interpretacja geometryczna 390
 — —, — wielu zmiennych 390
 — —, rzędu pierwszego 390
 — —, druga funkcji jednej zmiennej 393
 — —, funkcji jednej zmiennej 388
 — —, —, interpretacja geometryczna 388
 — —, —, istnienie 388
 — —, odwrotnej 401
 — —, wyznaczonej w postaci parametrycznej 400
 — —, złożonej wielu zmiennych 398
 — —, zmiennej zespolonej 630
 — —, iloczyn 395
 — —, ilorazu 395
 — —, lewostronna 389
 — —, logarytmiczna 395
 — —, mieszana 393
 — —, prawostronna 389
 — —, przestrzenna pola skalarnego 667, 674
 — —, — wektorowego 674
 — —, substancjalna 398
 — —, sumy 394
 początek współrzędnych 255, 278
 — —, (biegun) 256

- podnormalna 306
 — we współrzędnych biegunowych 307
 podstawowe twierdzenie algebry 174
 podstawowy układ rozwiązań 193
 podstyczna 306
 — we współrzędnych biegunowych 307
 podział odcinka w danym stosunku 259, 284
 — w stosunku skrajnym i średnim (złoty podział odcinka) 203
 — wewnętrzny 259
 — zewnętrzny 259
 Poissona całka 613
 — rozkład 782
 — równanie 682
 — (równanie teorii potencjału) 603
 — twierdzenie 778
 — wzór 601
 pole ekstremalne 692
 — figury płaskiej 522
 — kierunkowe 547
 —, element 547
 — Newtona-Coulomba 681
 — płaskiej figury 535
 — płata 334
 — krzywoliniowego 535, 539
 — potencjalne (zachowawcze) 670
 — powierzchni 498
 — skalarnie 659
 — cylindryczne (osiowe) 659
 — kuliste (sferoidalne) 659
 — płaskie 659
 —, pochodna 666
 — trapezu krzywoliniowego 497
 — wektorowe bezwzględne 680
 — bezźródłowe (solenoidalne) 681
 — cylindryczne 663
 —, os 663
 — (funkcja wektorowa punktu) 661
 — kołowe 663
 —, linia sit 665
 — płaskie 662
 —, poziomic 660
 — sferyczne 662
 — solenoidalne (bezzródłowe) 681
 — środkowe 662
 — wycinka krzywoliniowego 497
 — zachowawcze (potencjalne) 670
 południk 330
 poprawka interpolacyjna 11
 postęp arytmetyczny 201, 343
 — malejący 201
 — rosnący 201
 —, różnica 201
 —, suma 201
 —, wyraz ogólny 201
 —, wyrazy 201
 — geometryczny 201, 343
 —, iloraz 201
 — malejący 201
 — nieskończenie malejący, suma 202
 postęp geometryczny rosnący 201
 —, suma 202
 —, wyraz ogólny 202
 —, wyrazy 201
 potencjał opóźniony 601
 — pola (funkcja potencjalna) 670
 — wektorowy pola 681
 potęga 162
 powierzchnia całkowita 590
 — cylindryczna 223
 — dodatnia 540
 — kuli (sfera) 226, 294
 —, pole 226
 — minimalna 338
 — obrotowa 285
 —, pierwsza forma kwadratowa 333
 — prostokreślna 338
 — Riemanna wielokrotna 629
 — rozwijalna 338
 —, równanie w postaci jawnej 329
 —, — — — parametrycznej 329
 —, — — — uwikłanej 329
 —, — — — wektorowej 329
 — stopnia drugiego, niemienniki 299
 —, — — —, równanie ogólne 299
 — stożkowa 225
 —, — — —, wierzchołek 225
 — ujemna 540
 — współrzędnych 279
 —, — — —, parametr 279
 — zorientowana 540
 powierzchnie o stałej krzywiznie 338
 — prostokątne 297
 — równych wartości 660
 — środkowe, osie symetrii 294
 —, — — —, płaszczyzny symetrii 294
 —, — — —, równania kanoniczne 291
 —, — — —, środki symetrii 294
 poziom istotności 807
 półproste górne 107
 praca 499
 prawdopodobieństwo 773
 — a posteriori 776
 — a priori 776
 — zdarzenia losowego 773, 774
 — — — bezwarunkowe (a priori) 776
 — — — warunkowe 776
 predykcja (przewidywanie) 798
 proces ergodyczny 796
 — markowski 794
 — ortogonalizacji Schmidta 747
 — urodzin i śmierci 794
 procesy stacjonarne 796
 — stochastyczne 793, 794
 promień wodzący punktu 256
 proporcje pochodne 161
 —, przekształcanie 101
 proporcjonalność odwrotna 101
 — prosta 98
 prosta 260
 — równoległa do płaszczyzny 217

- prosta w przestrzeni 288
 proste prostopadłe 264
 — równoległe 216, 264
 — skośne 216
 —, odległość 216
 prostokąt 212
 —, pole 212
 prostopadłościan 220
 przyzma 222
 przedział 346
 — domknięty 347
 — — — lewostronnie 347
 — — — prawostronnie 347
 — liczbowy 346
 —, koniec domknięty 347
 —, — — — otwarty 346
 — otwarty 347
 przedziały elementarne 485
 — nieskończone 347
 — ufnosci 804
 przekształcanie pierwiastków 162
 — potęg 162
 — ułamków o wyrazach niewymiernych 162
 — — — wyrażen logarytmicznych (logarytmowanie) 165
 przekształcanie konforemne 634
 — tożsamościowe 155
 przestrzeń funkcyjna 745
 — wektorowa 745
 przesunięcie równoległe osi współrzędnych 257
 — — — w przestrzeni 282
 przewidywanie (predykcja) 797
 przybliżenie dziesiętne 139
 — — —, dodawanie 144
 — — —, mnożenie 144
 przybliżone rozwiązywanie równań 180
 przypadki sprzeczające zdarzeniu 775
 Ptolemeusza twierdzenie 211
 punkt asymptotyczny 313
 — charakterystyczny krzywej 321
 — eliptyczny 337
 — hiperboliczny 337
 — istotnie osobliwy 634, 643
 — kątowny 313
 — — — krzywej 389
 — kołowy 337
 — obszaru 367
 — odosobniony 313
 — osobliwości usuwalnej 632
 — osobliwy odosobniony 555
 — — — (stożkowy) 332
 — paraboliczny 337
 — przecięcia prostych 262
 — przegięcia 311
 — rozgałęzienia 313
 — samostyczny 313
 — siłowy równania różniczkowego 557
 — węzłowy równania różniczkowego 556
 — wirowy równania różniczkowego 557
 punkty nieciągłości funkcji 362, 363
 — osobliwe 502, 631
 — przestrzeni n - wymiarowej 368
 — regularne 631
 — stacjonarne 409
 — wielokrotne 314
 pulsacja 115
 Rachunek prawdopodobieństwa 773
 — wariacyjny 683
 radian 229
 Rao - Craméra nierówność 802
 Regiomontana twierdzenie (wzór tangensów) 240
 reguła fałsi (interpolacja liniowa, reguła fałszywego założenia) 181
 reguła de l'Hospitala 359
 — Kartezjusza 176
 — łańcuchowa 394, 395
 — Nepera 247
 — ogólna znajdowania maksimów i minimów funkcji 410
 — Sarrusa 186
 residuum funkcji w punkcie 643
 rezolwenta (jądro rozwijające) 729
 Riccatiego równanie 552
 Riemanna funkcja 608
 — metoda 608
 — powierzchnia wielolistna 629
 — twierdzenie 380
 Ritzta metoda 710
 Rolle'a twierdzenie 406
 romb 211
 —, pole 211
 rotacja (wirowość) pola wektorowego 675, 676
 rozbieżność (dywergencja) pola wektorowego 675
 rozchodzenie się ciepła w przecie jednorodnym 607
 rozkład χ^2 806
 rozkład dwumianowy (Bernoulliego) 782
 — geometryczny 782
 — hipergeometryczny 782
 — na ułamki proste 159
 — normalny 783
 — dwuwymiarowy 790
 — Poissona 782
 — Studenta 805
 — warunkowy 786, 787
 — wykładniczy 783
 — zmiennej losowej 781
 rozkłady brzegowe 786
 rozmaitość 599
 rozmieszczenia (wariacje) 205
 rozwiązanie nierówności 197
 — normalne 576
 — układu równań algebraicznych 167
 rozwiązania charakterystyczne 742
 — liniowo niezależne układu równań 193
 rozwijająca (ewolwenta) krzywej 320

stopień równania algebraicznego 166
 — wielomianu 195
 — wyrazu wielomianu 317
 strofoida 122
 strumień koła skalarnego 672
 — skalarny pola wektorowego 672
 — wektorowy pola wektorowego 673
 Studenta rozkład 805
 Sturm funkcje 176
 — twierdzenie 176
 Sturma - Liouville'a zagadnienie 587
 styczna biegunowa, odcinek 307
 — do elipsy 268
 — hiperboli 270
 — krzywej 304
 — , kąt nachylenia 306
 — , kątunek dodatni 305
 — , przestrzennej 323
 — paraboli 274
 — , odcinek 306
 — , równanie 325
 sukces 778
 suwak logarytmiczny 145
 — , skale 146
 — , zasady rachowania 149
 symbol Kroneckera 746
 — Newtona 206
 symetria pierwszego rodzaju 761
 — drugiego rodzaju 761
 — trzeciego rodzaju 761
 synteza 772
 szereg 376
 — Fouriera 754, 759
 — zbieżny przeciętnie z kwadratem 589
 — , według średnich 754
 — funkcyjny 383, 624
 — , majoranta 385
 — zbieżny 383
 — , jednostajnie 383
 — , niejednostajnie 384
 — , reszta 383
 — , suma 383
 — , — częściowa 383
 — hipergeometryczny 586
 — Laurenta 642
 — liczbowy 376
 — , przemienności 380
 — rozbieżny 376
 — , suma 376
 — , wyraz ogólny 376
 — zbieżny 376
 — , bezwzględnie 379
 — , reszta 376
 — , warunkowo 379
 — MacLaurina 414
 — , reszta 414
 — , zbieżność 415
 — o wyrazach zespolonych 623
 — , suma 623
 — zbieżny 623

szereg o wyrazach zespolonych zbieżny
 — bezwzględnie 624
 — — — — warunkowo 624
 — , potęgowy 385, 624
 — , kół zbieżności 624
 — , odwrócenie 387
 — , promień zbieżności 385, 624
 — Schmitta 756
 — von Neumanna 729
 — Taylora 642
 — dla funkcji dwóch zmiennych 415
 — — — — jednej zmiennej 413
 — funkcji wektorowej 658
 — , reszta 413
 — , zbieżność 415
 szeregi liczbowe skończone 202
 szeszcian (heksaedr) 220, 223
 ścieżka walca obrotowego 225
 ślimak Pascala 125
 średnia arytmetyczna 202, 203
 — geometryczna (średnia proporcjonalna) 203
 — kwadratowa 203
 średnie odchylenie kwadratowe 816
 środek ciężkości łuku jednorodnej krzywej płaskiej, współrzędne 500
 — dowolnej figury płaskiej 501
 — jednorodnego trapezu krzywoliniowego, współrzędne 501
 — krzywizny 310
 — odcinka 259
 Tabela wartości funkcji, skok 820
 tablica o dwóch wejściach 370
 tablice liczb losowych 800
 tangens 115, 230
 — hiperboliczny 119, 248
 tangensoida 115
 Taylora szereg 642
 — dla funkcji dwóch zmiennych 415
 — — — — jednej zmiennej 413
 — funkcji wektorowej 658
 — twierdzenie (uogólnienie twierdzenia Lagrange'a) 407
 teoria estymacji 799
 — testowania hipotez 799
 test χ^2 809
 testy statystyczne 806
 torcja (skręcenie) krzywej 328
 torus 228
 tożsamość 155, 166, 196
 — Lagrange'a 651
 traktoria (traktrysa) 136
 transformata funkcji (oryginału) według Carsona - Heavisida'a 574
 — według Laplace'a 575
 trapez 212
 — , linia środkowa 212
 — , podstawy 212
 — , pole 212
 — , równoramienny 212

trapez, wysokość 212
 trochoidy 129
 trójkąt 209
 — , dwusieczna 209
 — , linia środkowa 210
 — , ortocentrum 210
 — Pascala 207
 — , pole 210, 260
 — prostokątny 210
 — równoboczny 210
 — równoramienny 210
 — sferyczny, przewyżka sferyczna 246
 — , symetralna boku 210
 — , środkowa 209
 — , wysokość 210
 trójkąty podobne 210
 — sferyczne 245
 trójkąt kwadratowy 98
 trójsian Freneta 324
 twierdzenie Abela 386
 — Apolloniusza 268
 — Arzeli 747
 — Borela 574
 — Carnota (wzór cosinusów) 240
 — Cauchy'ego 365, 375, 407, 547, 640
 — Czebyszewa 436
 — Eulera 223, 372
 — Fermata 405
 — Greena 680
 — Gulidina pierwsze 501
 — drugie 501
 — Hurwitza 568
 — Lagrange'a (twierdzenie o przyroście skończonym) 406
 — Leibniza 380
 — Leibniza - Newtona 488
 — Liouville'a 632
 — Meusnier'a 335
 — de Moivre'a - Laplace'a 779
 — o istnieniu całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju 518
 — — — — drugiego rodzaju 520
 — — — — oznaczonej 486
 — — — — podwójnej 526
 — — — — potrójnej 528
 — — — — powierzchniowej pierwszego rodzaju 438
 — — — — drugiego rodzaju 541
 — — — — funkcji pierwotnej 424
 — — — — rozwiązania równania różniczkowego rzędu n 562
 — — — — układu równań różniczkowych 562
 — — — — nakładaniu 566, 573
 — — — — ograniczoności funkcji 366, 375
 — — — — opóźnieniu 575
 — — — — oszacowaniu całki 488
 — — — — pochodnej funkcji złożonej 395
 — — — — przestawianiu granic całkowania 486
 — — — — przesunięciu 575

twierdzenie o przyroście skończonym (twierdzenie Lagrange'a) 406
 — — — — residuach 643
 — — — — rozkładaniu 566
 — — — — rozkładzie całki 487
 — — — — rozwinięciu 588
 — Ostrogradskiego - Gaussa 679
 — o wartości średniej 366, 375, 487
 — — — — , uogólnione 487
 — Pitagorasa 210
 — podstawowe rachunku całkowego (wyrażenie całki oznaczonej przez nieoznaczoną) 488
 — Poissona 778
 — Ptolemeusza 211
 — Regiomontana (wzór tangensów) 240
 — Riemanna 380
 — Rolle'a 406
 — Snelliusa (wzór sinusów) 239
 — Stokesa 679
 — Sturma 175
 — Taylora (uogólnienie twierdzenia Lagrange'a) 407
 twierdzenia o zbieżności szeregów 377
 tworzące 223
 Układ charakterystyczny równań różniczkowych 590, 593
 — kanoniczny równań liniowych 187
 — — — — różniczkowych cząstkowych 593
 — normalny równań różniczkowych 570
 — ortonormalny funkcji 753
 — zupełny funkcji 754
 — równań algebraicznych 167
 — liniowych 187
 — — — — , cecha niesprzeczności 190
 — — — — jednorodny 187
 — — — — niejednorodny 187
 — — — — niesprzeczny 190, 191
 — — — — normalnych 813
 — — — — oznaczony 187, 192
 — — — — sprzeczny 187, 190
 — — — — różniczkowych 562
 — — — — , całka pierwsza 563
 — — — — liniowych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach 570, 572
 — — — — niejednorodnych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach 573
 — — — — rzędu drugiego 574
 — — — — współrzędnych biegunowych 255
 — — — — krzywoliniowych 280
 — — — — lewoskrętny 279
 — — — — prawoskrętny 279
 — — — — prostokątnych 259
 — — — — wektorów przyrzeczonych 646
 — — — — ślizgających 646
 ułamek algebraiczny niewłaściwy 158
 — — — — właściwy 158

ułanki proste 159

Volterry równanie całkowite 714

Walec 224

— eliptyczny 298

— hiperboliczny 299

— obrotowy 224

— ukośnięty 224

— paraboliczny 299

wariacja druga 692

— funkcji 685

wariacje (rozmięszczenia) 205

wariancja 784

warstwa kulista 227

wartość bezwzględna (moduł) funkcji zespolonej 631

— — — liczby 352

— charakterystyczna jądra (wartość charakterystyczna równania jednorodnego) 742

— oczekiwana (wartość przeciętna, nadzieja matematyczna) 784

wartości własne 587

warunek całkowalności różniczek zupełnej 523

— dostateczny dla słabego ekstremum 692

— Jacobiego 692

— konieczny zbieżności szeregu 377

— Legendre'a 692

— Lipschiza 547, 562

— monotoniczności funkcji 405

— niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania 522

— wystarczający dla słabego maksimum 692

— — — minimum 692

warunki brzegowe 546

— Cauchy - Riemanna 631

— Dirichleta 760

— graniczne (początkowe i brzegowe) 599

— konieczne dla ekstremum 685

— początkowe 546

— wystarczające dla mocnego ekstremum 693

Webera funkcja (funkcja Bessela drugiego rodzaju) 583

Weierstrassa kryterium jednostajnej zbieżności szeregow 384

wektor 646

—, długość 656

— jednostkowy 646

—, koniec 646

— losowy 786

— normalny 761

— początek 646

—, składowe 648

— wiodzący 647

—, współrzędne 648

wektor, współrzędne afiniczne 649

—, —, kartezjańskie prostokątne 649

—, —, kontrawariantne 655

—, —, kowariantne 655

wektory, iloczyn mieszany 651, 652

—, —, skalarny 650, 652

—, —, wektora przez skalar 648

—, —, wektorowy 650, 652

—, —, podwójny 651

—, kąt między wektorami 656

—, kolinearne 646

—, kombinacja liniowa 648

—, komplanarne 646

—, objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach 656

—, orientacje niezgodne 646

—, —, zgodne 646

—, pole równoległoboku zbudowanego na wektorach 656

—, prawo łączności 650

—, —, przemienności 650

—, —, rozdzielności 651

—, przeciwne 646

—, reguły różniczkowania 658

—, równe 646

—, różnica 648

—, układ prawoskrętny 650

—, warunek kolinearności 651

—, —, prostopadłości 651

—, współczynniki miarowe 652

—, wypadkowa 647

—, wzajemne 652

wersor 281, 647

widmo ciągłe 764

wielkość nieskończenie mała 361

— — — rzędu m 362

— — — wielka 361

wielkości nieskończenie małe równoważne 362

— — — rzędu wyższego 362

— — — tego samego rzędu 361

— — — skalarne 646

— — — wektorowe 646

wielokąt 213

—, pole 213, 260

—, wypukły 213

— — — foremny 213

wielokąty podobne 210

wielomian 99

— Czebyszewa 244

—, rozłożenie na czynniki 156

— stopnia n 99

— — — trzeciego 99

wielomiany Legendre'a (funkcje kuliste) 585

— — — względnie pierwsze 157

wieloscian 219

— foremny 222

—, krawędzie 219

—, ściany 219

—, wierzchołki 219

wierzchołki krzywej 313

wirowość (rotacja) pola wektorowego 675, 676

wronskian 565

wskaznik sumowania 653

współczynnik kątowny (kierunkowy) prostej 261

— korelacji 789

współczynniki Fouriera 759

współrzędne cylindryczne (walcowe) 280

— Gaussa (współrzędne krzywoliniowe) 330

— kartezjańskie punktu (współrzędne punktu) 255

— — — krzywoliniowe 256, 257

— — — (współrzędne Gaussa) 330

— punktu 255

— sferyczne (kuliste) 280

— — —, długość azymutalna 281

— — —, odległość biegunowa 280

— — —, środka ciężkości 259, 284

— — — bryły jednorodnej 536

— — — płaskiej figury jednorodnej 535

— — — odcinka 284

— walcowe (cylindryczne) 280

wstęga Möbiusa 540

wstęgi charakterystyczne 592

wycinek kołowy 215

— — —, pole 216

— kuli 227

— pierścienia kołowego, pole 216

wylączenie czynnika przed znak pierwiastka 162

wyrażenie algebraiczne 155

— — —, parametry 155

— całkowite wymierne 155, 156

— niewymierne 155, 161

— logarytmiczne 156, 163

— ułamkowe wymierne 155, 158

— wykładnicze 155, 163

— — —, działania 163

wyrażnik równania kwadratowego 169

— — —, wyznacznik stopnia n 183

—, elementy 183

—, kolumna 183

— układu równań 187

—, wiersz 183

wzór d'Alemberta 601

— Bessela 821

— Bayesa 776

— Cardana 171

— cosinusów (twierdzenie Carnota) 240

— Eulera 335, 624

— Greena 544, 680

— interpolacyjny Lagrange'a 818

— Kirchhoffa 601

— Leibniza 397

— Liouville'a 566

— de Moivre'a 251, 621

— — — dla liczb zespolonych 235

— na rozkład Heaviside'a 576

wzór na prawdopodobieństwo całkowite 776

— parabol (Simpsona) 493

— przekształcenie odwrotne 574

— Poissona 601

— Ostrogradskiego 433

— Ostrogradskiego - Gaussa 545

— prostokątów 492

— rachunku całkowitego 640

— sinusów 247

— (twierdzenie Snelliusa) 239

— Stirlinga 204, 821

— tangensów (twierdzenie Regiomontana) 240

— trapezów 492

— Stokesa 544

wzory Bessela 769

— całkowite Cauchy'ego 640

— cosinusów 247

— Cramera 187

— empiryczne 815

— Eulera 759

— uogólnione 625

— na przejście od jednego układu współrzędnych do innego 664

— — — skrócone dzielenie 157

— — — mnożenie 157

— Nepera 240

— Newtona 821

— przybliżone 144

— redukcyjne 232

— Serre - Freneta 329

— trygonometryczne 234

Zadanie o krzywych geodezyjnych 684

— zagadnienie brzegowe 586

— — — jednorodne 587

— — — niejednorodne 587

— Cauchy'ego 591

— Dirichleta 607, 682

— izoperymetryczne 709

— linii geodezyjnych 706

— odwrotne do zagadnienia wariacyjnego 695

— sformułowane w sposób poprawny 599

— Sturm - Liouville'a 587

— wariacyjne w postaci wariacyjnej 697

— zamiana współrzędnych prostokątnych na biegunowe 258

— — — zmiennych w wyrażeniach różniczkowych 402, 403

— zaokrąglanie 140

— zasada porównywania szeregów o wyrazach dodatnich 377

— zbiór ciągły 342

— krytyczny 807

— spójny 346

— — — nieograniczony 346

— — — ograniczony po obu stronach 346

— — — od strony lewej 346

zbiór spójny ograniczony od strony prawej 346	zmienna losowa dwuwymiarowa 786
— uporządkowany 341, 342	— — o rozkładzie dwumianowym (Bernoulliego) 782
— wszędzie gęsty 341, 342	— — skokowa (dyskretna) 781
zdarzenie losowe 773	— — standaryzowana 785
— — niemożliwe 744	— — niezależna 346
— — pewne 774	zmienne losowe nieskorelowane 789
— — przeciwne 774	— — niezależne 786, 787
zdarzenia losowe, iloczyn 774	— — rozdzielone 549
— — , suma (alternatywa) 774	znajdowanie ekstremów funkcji 412
— — niezależne 776	— — maksimów i minimów funkcji danej
— — rozłączne (wyłączające się) 774	— — w postaci uwikłanej 411
zera funkcji analitycznej 632	znak liczby (signum) 352
złoty podział odcinka (podział odcinka w stosunku skrajnym i średnim) 203	Źródło, intensywność 681
zmienna losowa 781	— , pole 681
— — ciągła 781	

SPIS RZECZY

Przedmowa	5
Oznaczenia matematyczne	7
Alfabet grecki	10

Część pierwsza

TABLICE I WYKRESY

I. Tablice

A. Tablice funkcji elementarnych	
1. Niektóre często spotykane stałe	13
2. Kwadraty, sześciangy, pierwiastki	14
3. Potęgi liczb całkowitych (od $n = 1$ do $n = 100$)	41
4. Odwrotności	44
5. Silnie i ich odwrotności	47
6. Niektóre potęgi liczb 2, 3, 5	48
7. Logarytmy dziesiętne	48
8. Antylogarytmy	51
9. Funkcje trygonometryczne	55
10. Funkcje wykładnicze i hiperboliczne oraz funkcje trygonometryczne (dla x od 0 do 1,6)	59
11. Funkcje wykładnicze (cd.) (dla x od 1,6 do 10)	64
12. Logarytmy naturalne	67
13. Długość okręgu o średnicy d	70
14. Pole koła o średnicy d	73
15. Elementy odcinka kołowego	76
16. Zamiana stopni katowych na radiany	82
17. Poprawki proporcjonalne	84
18. Tablica interpolacji kwadratowej	86
B. Tablice funkcji specjalnych	
19. Funkcja gamma	87
20. Funkcje walcowe Bessela	88
21. Wielomiany Legendre'a	91
22. Całki eliptyczne	92
23. Całka prawdopodobieństwa	94
24. Rozkład χ^2 i rozkład t Studenta	96

II. Wykresy

A. Funkcje elementarne	
1. Wielomiany	98
2. Funkcje wymierne ułamkowe	101
3. Funkcje niewymierne	106

4. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	109
5. Funkcje trygonometryczne	114
6. Funkcje cyklometryczne	117
7. Funkcje hiperboliczne	118
8. Funkcje odwrotne względem hiperbolicznych	119
B. Ważniejsze krzywe	
9. Krzywe stopnia trzeciego	121
10. Krzywe stopnia czwartego	123
11. Cykloidy	128
12. Spirale	133
13. Niektóre inne krzywe	136

Część druga MATEMATYKA ELEMENTARNA

I. Obliczenia przybliżone

1. Zasady rachunku przybliżeń	139
2. Wzory przybliżone	144
3. Suwak rachunkowy	145

II. Algebra

A. Przekształcenia tożsamościowe

1. Pojęcia podstawowe	155
2. Wyrażenia całkowite wymierne	156
3. Wyrażenia ułamkowe wymierne	158
4. Wyrażenia niewymierne	161
5. Wyrażenia wykładnicze i logarytmiczne	163

B. Równania

6. Porządkowanie równań algebraicznych	166
7. Równania stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego	169
8. Równania stopnia n	174
9. Równania przestępne	177
10. Wyznaczniki	183
11. Rozwiązywanie układu równań liniowych	187
12. Układ równań wyższych stopni	195

C. Wiadomości uzupełniające algebrę

13. Nierówności	196
14. Postępy, szeregi skończone i wartości średnie	201
15. Silnia i funkcja gamma	203
16. Kombinatoryka	205
17. Dwumian Newtona	206

III. Geometria

A. Planimetria

1. Figury płaskie	209

B. Stereometria

2. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	216
3. Kąty dwusieczne. Kąty bryłowe	217
4. Wielościany	219
5. Bryły krzywopowierzchniowe	223

IV. Trygonometria

A. Trygonometria płaska

1. Funkcje trygonometryczne	229
2. Podstawowe wzory trygonometrii	234
3. Harmoniki	237
4. Rozwiązywanie trójkątów	239
5. Funkcje cyklometryczne (odwrotne funkcje trygonometryczne)	242

B. Trygonometria sferyczna

6. Geometria na powierzchni kuli	244
7. Rozwiązywanie trójkątów sferycznych	246

C. Trygonometria hiperboliczna

8. Funkcje hiperboliczne	248
9. Związki między funkcjami hiperbolicznymi	249
10. Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych	252
11. Geometryczne określenie funkcji hiperbolicznych	253

Część trzecia

GEOMETRIA ANALITYCZNA I GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

I. Geometria analityczna

A. Geometria na płaszczyźnie

1. Podstawowe pojęcia i wzory	255
2. Prosta	260
3. Okrąg koła	265
4. Elipsa	266
5. Hiperbola	269
6. Parabola	273
7. Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)	275

B. Geometria w przestrzeni

8. Podstawowe pojęcia i wzory	278
9. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni	286
10. Powierzchnia stopnia drugiego — równania kanoniczne	291
11. Powierzchnie stopnia drugiego (ogólna teoria)	299

II. Geometria różniczkowa

A. Krzywe płaskie

1. Sposoby wyznaczania krzywej	302
2. Lokalne elementy krzywej	303
3. Punkty specjalnych typów	311
4. Asymptoty	316
5. Ogólne badanie krzywej na podstawie jej równania	318
6. Ewoluty i ewolwenty	319
7. Obwiednia rodziny krzywych	320

B. Krzywe przestrzenne

8. Sposoby określenia krzywej	322
9. Trójszkieł Freneta	323
10. Krzywizna i skręcenie (torsja) krzywej skośnej	327

C. Powierzchnie

11. Sposoby wyznaczania powierzchni	329
12. Płaszczyzna styczna oraz normalna do powierzchni	331
13. Element liniowy powierzchni	333
14. Krzywizna powierzchni	334
15. Powierzchnie prostokątne i rozwijalne	338
16. Linie geodezyjne na powierzchni	338

Część czwarta

PODSTAWY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

I. Wstęp do analizy

1. Liczby rzeczywiste	341
2. Ciągi i ich granice	343
3. Funkcje jednej zmiennej	346
4. Granica funkcji	354
5. Wielkości nieskończenie małe	361
6. Ciągłość i punkty nieciągłości funkcji	362
7. Funkcje wielu zmiennych	367
8. Szeregi liczbowe	376
9. Szeregi funkcyjne	383

II. Rachunek różniczkowy

1. Pojęcia podstawowe	388
2. Technika różniczkowania	394
3. Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych	402
4. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	405
5. Znajdowanie maksimów i minimów funkcji	408
6. Rozwinięcie funkcji w szeregi potęgowe	413

III. Rachunek całkowy

A. Całki nieoznaczone

1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia	423
2. Ogólne reguły całkowania	425
3. Całkowanie funkcji wymiernych	428
4. Całkowanie funkcji niewymiernych	434
5. Całkowanie funkcji trygonometrycznych	438
6. Całkowanie innych funkcji przestępnych	440
7. Tablice całek nieoznaczonych	441

B. Całki oznaczone

8. Podstawowe pojęcia i twierdzenia	484
9. Obliczanie całek oznaczonych	489
10. Zastosowania całek oznaczonych	495
11. Całki niewłaściwe	502
12. Całki zależne od parametru	509
13. Tablice niektórych całek oznaczonych	511

C. Całki krzywoliniowe, wielokrotne i powierzchniowe

14. Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (całki po łuku krzywej)	517
15. Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (całki wzdłuż rzutu i całki ogólnej postaci)	519
16. Całki podwójne i potrójne	526
17. Obliczanie całek wielokrotnych	528

18. Zastosowania całek wielokrotnych	535
19. Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju (całki po płacie powierzchniowym)	537
20. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju (całki po rzucie płata)	540
21. Wzory Stokesa, Greena i Ostrogradskiego-Gaussa	544

IV. Równania różniczkowe

1. Pojęcia ogólne	546

A. Równania różniczkowe zwyczajne

2. Równania rzędu pierwszego	547
3. Równania wyższych rzędów oraz układy równań	562
4. Rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	267
5. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	570
6. Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych	574
7. Równania liniowe rzędu drugiego	580
8. Zagadnienia brzegowe	586

B. Równania różniczkowe cząstkowe

9. Równania rzędu pierwszego	589
10. Równania liniowe rzędu drugiego	596

Część piąta

DODATKOWE ROZDZIAŁY ANALIZY

I. Liczby zespolone i funkcje zmiennej zespolonej

1. Pojęcia podstawowe	617
2. Działania algebraiczne na liczbach zespolonych	619
3. Elementarne funkcje zespolone	623
4. Równania krzywych w postaci zespolonej	627
5. Funkcje zmiennej zespolonej	629
6. Najprostsze odwzorowania konforemne	635
7. Całki w dziedzinie zmiennej zespolonej	638
8. Rozwinięcie funkcji analitycznych w szeregi potęgowe	642

II. Rachunek wektorowy

A. Algebra wektorowa i funkcje wektorowe skalara

1. Pojęcia podstawowe	646
2. Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy wektorów	650
3. Współrzędne wektora kowariantne i kontrawariantne	655
4. Zastosowania geometryczne algebry wektorowej	656
5. Funkcja wektorowa zmiennej skalarniej	657

B. Teoria pola

6. Pole skalarne	659
7. Pole wektorowe	661
8. Gradient	666
9. Całka krzywoliniowa i potencjał w polu wektorowym	668
10. Całki powierzchniowe	671
11. Różniczkowanie przestrzenne	674
12. Rozbieżność pola wektorowego	975
13. Wirowość pola wektorowego	675
14. Operator Hamiltona ∇^2 , operator $(\nabla \cdot)$ i operator Laplace'a Δ	677

Poprawki proporcjonalne

(Objaśnienie na str. 11)

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,3	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,6	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9