

Zadanie 1

Oblicz wartość wyrażenia: $\log_6 3 \cdot \log_6 12 + \log_6^2 2$.

Zadanie 2

Liczbę $\frac{3^{-\frac{23}{6}} \cdot 27^{\frac{3}{2}}}{9^{-\frac{2}{3}}}$ przedstaw w postaci potęgi o wykładniku $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 3

Oblicz wartość wyrażenia $w(x) = \frac{x+3+\sqrt{x^2-9}}{x+3-\sqrt{x^2-9}} + \frac{x+3-\sqrt{x^2-9}}{x+3+\sqrt{x^2-9}}$ dla $x = 2015$.

Zadanie 4

Rozstrzygnij, czy $a = \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} - \sqrt[3]{11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 5

Oblicz sumę $\frac{2^3-1}{2^2+2+1} + \frac{3^3-2^3}{3^2+6+2^2} + \frac{4^3-3^3}{4^2+12+3^2} + \dots + \frac{2016^3-2015^3}{2016^2+2016 \cdot 2015+2015^2}$.

Zadanie 6

Zapisz w możliwie najprostszej postaci liczbę $a = \sqrt{19^3 - 100 \cdot 19 \cdot 81 + 3^{12}}$. Nie używaj kalkulatora.

Zadanie 7

Zaznacz na osi liczbowej zbiór opisany nierównością: $|x^2 - 9| - |7x + 21| < 0$.

Zadanie 8

Porównaj liczby $a = \sqrt{25^{\frac{1}{\log_3 5}} + 49^{\frac{1}{\log_4 7}}}$ oraz $b = 3^{\frac{3}{\log \sqrt{6}} - \log_3 2 \cdot \log_2 \sqrt{6}}$.

Zadanie 9

Rozstrzygnij, która z liczb $a = \sqrt{\sqrt{3} + 2\sqrt{\sqrt{3} - 1}} + \sqrt{\sqrt{3} - 2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}$ czy $b = 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$ jest mniejsza.

Zadanie 10

Usuń niewymierność z mianownika liczby $\frac{1}{\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}}$.

Zadanie 11

Zapisz w postaci potęgi liczbę

$$\left(\frac{3\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{8}+\sqrt{5}} \cdot (7\sqrt{3}-\sqrt{12})^{\sqrt{3}} \cdot (8^{\frac{1}{2}} - 18^{\frac{1}{2}} + 50^{\frac{1}{2}}) \cdot 2^{\frac{1}{2}}.$$

Zadanie 12

Przedstaw w zapisie wykładniczym liczbę $\frac{3,1 \cdot 10^{25} - 6 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{16} + 1,4 \cdot 10^{17}}$.

Zadanie 13

Oblicz, o ile procent liczba $a = \frac{20\sqrt{57} \cdot \sqrt[12]{5}}{\sqrt[15]{54}}$ jest mniejsza od liczby $b = \frac{\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{25}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$.

Zadanie 14

Wyznacz te wartości a oraz b , dla których zachodzi równość $\log(a+b) = \log a + \log b$.

Zadanie 15

Wyznacz maksymalne n , dla którego 2^n jest dzielnikiem liczby $20!$

Zadanie 16

Reszta z dzielenia liczby 4627 przez pewną liczbę n wynosi 7. Jeśli przez tę samą liczbę n podzielimy 2753, to jako resztę otrzymamy 23. Wyznacz n .

Zadanie 17

Oblicz sumę $s = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + \dots + 2013^2 - 2014^2 + 2015^2$.

Zadanie 18

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $2^{100} - 3^{50}$, czy $2^{50} + 3^{25}$.

Zadanie 19

Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 7 wynosi 3, a z dzielenia tej liczby przez 8 jest równa 2. Wyznacz resztę z dzielenia n przez 56.

Zadanie 20

Wiedząc, że $\log_9 125 = a$, oblicz wartość wyrażenia $w = \frac{\log_5 27 - \log_3 25}{\log_2 \sin 54^\circ + \log_2 \cos 72^\circ}$.

Zadanie 21

Udowodnij, że $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{6}} + \frac{1}{\log_4 \frac{1}{6}} + \frac{1}{\log_5 \frac{1}{6}} < -2$.

Zadanie 22

Wykaż, że liczba $2^{15} + 3^{24} + 4^{22} + 5^{37}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 23

Uzasadnij, że zachodzi równość $\frac{4646}{2727} = \frac{46464646}{27272727}$.

Zadanie 24

Wykaż, że $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} \geq \sqrt{2015}$.

Zadanie 25

Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in R$ zachodzi nierówność

$$|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| \geq |x| + |y| + |z|.$$

Zadanie 26

Wykaż, że $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2015} = \frac{1007}{2015}$.

Zadanie 27

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\log_{0,1} 1 + \log_{0,1} 2 + \log_{0,1} 3 + \dots + \log_{0,1} n + \log_{0,1} (n+1)}{n+1} < \frac{\log_{0,1} 1 + \log_{0,1} 2 + \log_{0,1} 3 + \dots + \log_{0,1} n}{n}.$$

Zadanie 28

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 1$ i dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n+1]{a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^{n+1}} - \sqrt[n]{a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n} > 0.$$

Zadanie 29

Uzasadnij, że dla dwóch liczb rzeczywistych a i b , jeśli tylko są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Zadanie 30

Udowodnij, że $(1+a)^n + \left(1 + \frac{1}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ dla każdego $a \in R_+$ i każdego $n \in N$.

Zadanie 1

Sprawdź, czy liczba $2^{231} + 3^{231}$ jest podzielna przez 35. Skorzystaj z twierdzenia: $(x+y)|(x^n + y^n)$ dla nieparzystego $n \in N$.

Zadanie 2

Jak zmieni się logarytm przy podstawie 6 z iloczynu trzech dodatnich liczb, jeżeli jedną z nich zwiększymy o $33\frac{1}{3}\%$, drugą zwiększymy o $112,5\%$, a trzecią zmniejszymy 17 razy?