

Zadanie 1

Oblicz wartość wyrażenia $3x^3 - x^2 - 71$ dla $x = 2 + \sqrt{3}$.

Zadanie 2

Wyraź sumę sześciąt liczb x i y za pomocą a i b , gdzie $a = xy$ i $x + y = b$.

Zadanie 3

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + 9x^2$ jest kwadratem innego wielomianu.

Zadanie 4

Wyznacz taką zależność między różnymi od zera parametrami a, b, c, d , aby dla każdego argumentu $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ wartość wyrażenia $\frac{ax+b}{cx+d}$ była stała.

Zadanie 5

Wielomian $W(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ przedstaw w postaci iloczynu wielomianów stopnia drugiego.

Zadanie 6

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - mx + 6m = 0$. Wyznacz sumę sześciąt pierwiastków tego równania w zależności od m . Podaj dziedzinę tego wyrażenia.

Zadanie 7

Wyrażenie $x^2 - 3xy + 2y^2$ przedstaw w postaci iloczynu czynników liniowych.

Zadanie 8

Wyrażenie $x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ przedstaw w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia.

Zadanie 9

Wyznacz dziedzinę wyrażenia $\frac{x-3}{x^3-8} + \frac{2x^2+5}{x^3+x^2-4x-4}$.

Zadanie 10

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 + 4$ w postaci iloczynu wielomianów drugiego stopnia.

Zadanie 11

Reszta z dzielenia liczby a przez 7 jest równa 5. Wyznacz resztę z dzielenia sześciastu liczby a przez 7.

Zadanie 12

Obwód prostokąta jest równy $2l$, a pole a^2 . Wyraż długości boków tego prostokąta w zależności od a i l .

Zadanie 13

Dane są: $a = (x^3 - 27y^3)(x + 3y)$ i $b = x^2 + 3xy + 9y^2$. Wykonaj działania: $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$. Różnicę oraz iloczyn zapisz w postaci iloczynu wielomianów drugiego stopnia.

Zadanie 14

Wyznacz dziedzinę wyrażenia $\frac{\sqrt{3x-x^3}}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$.

Zadanie 15

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wielomian $W(x) = (2x^3 + 54)(mx^2 - mx + 2)$ ma dokładnie trzy pierwiastki.

Zadanie 16

Wyznacz te wartości parametru m , dla których suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (mx^3 - x) \left(\frac{6m}{m+3}x^2 + (m^2 - 1)x + 3 \right)$ jest równa 0.

Zadanie 17

Dane są wielomiany: $W(x) = 3px^2(x^2 - p) + x(15x^3 + 8x^2 - 2)$ i $P(x) = (4x^3 - x)(3x + q)$. Wyznacz p i q , dla których wielomiany są równe.

Zadanie 18

Dane są $\log_a x = p$ i $\log_b x = q$, gdzie a , b , x są liczbami dodatnimi i a , b oraz ab są liczbami różnymi od 1. Wyraż za pomocą p i q

a) $\log_x ab$, b) $\log_{ab} \sqrt{ax}$.

Zadanie 19

Podaj dziedzinę wyrażenia $\left(\frac{x^2+y^2}{x} - y \right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} : \left(1 - \frac{y}{x} \right)$ i wykonaj działania.

Zadanie 20

Równanie $x^3 + px^2 + qx - 80 = 0$ ma 3 pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny. Suma tych pierwiastków jest równa 15. Jeżeli środkowy wyraz tego ciągu zmniejszymy o 1, a pozostałe nie zmienią się, to otrzymany ciąg jest geometryczny. Wyznacz p i q .

Zadanie 21

Wykaż, że $\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-b^{-2})}{a^{-3}+3a^{-2}b^{-1}+3a^{-1}b^{-2}+b^{-3}} = \frac{b-a}{a+b}$.

Zadanie 22

Wykaż, że wyrażenie $\frac{2x^4+6x^3+7x^2+9x+6}{2x^2+3}$ jest trójmianem kwadratowym.

Zadanie 23

Wykaż, że liczba 2 jest rozwiązaniem równania

$$x^3 + (a-2)x^2 + (b-2a)x - 2b = 0$$

niezależnie od wartości a i b .

Zadanie 24

Wykaż, że $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Zadanie 25

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \leq \frac{1}{2}$.

Zadanie 26

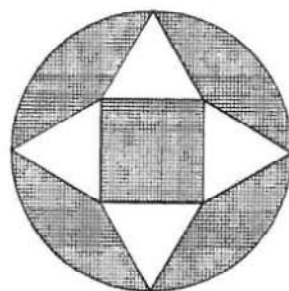
Wykaż, że wykresem równania $3x^2 - 3x^2y - 5xy + 8x + 2y - 3 = 0$ jest hiperbola o równaniu $y = 1 + \frac{1}{x+2}$ bez punktu, którego odcięta jest równa $\frac{1}{3}$.

Zadanie 27

Wykaż, że jeśli $a \leq b$, to $4(a^3 - b^3) \leq (a - b)^3$.

Zadanie 28

Na bokach kwadratu o przekątnej długości $2a$ zbudowano trójkąty równoboczne. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru wyraża się wzorem $a^2 [\pi(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3}]$.



Zadanie 29

Wykaż, że dla $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ równość $\log_a b^2 = \log_b a^2$ zachodzi tylko wówczas, gdy $b = a$ lub $b = a^{-1}$.

Zadanie 30

Udowodnij, że jeśli $a, b \in (1, \infty)$, to $\log_a \frac{a+b}{2} + \log_b \frac{a+b}{2} \geq 2$.

Zadanie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \in R, a \geq b$, zachodzi nierówność $a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$.

Dowód.

$a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) \geq -ab(a-b) \Leftrightarrow a^2+ab+b^2 \geq -ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2$, a ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $a, b \in R$, co kończy dowód.

Czy ten dowód jest poprawny?

Zadanie 2

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^3-8}{3(x^2+2x+4)}$ dla $x = 7$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3

Oblicz wartość wyrażenia $\log_2 3^{\frac{5}{12}} \cdot \left(\frac{\log_2 6}{\log_2 3} - 1\right)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4

Wyznacz wszystkie pary liczb wymiernych a i b spełniające warunek $\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Odwrotność sumy iloczynów $a \cdot b$ zapisz z dokładnością 10^{-3} i zakoduj wszystkie cyfry po przecinku.

Zadanie 5

Dla $x \in (0, \infty)$ pierwiastek $\sqrt[n+2]{x^5} \cdot \sqrt[n]{x^{10}}$ jest równy:

- A. $\sqrt[n+2]{x^5}$, B. $\sqrt[n]{x^{5(n+2)}}$, C. $\sqrt[2n]{x^5}$, D. $\sqrt[n]{x^5}$.

Zadanie 6

Wyrażenie $\log_x(x+1) - \log_{x^2}(x+1)$, $x > 0$ i $x \neq 1$ zapisane w postaci jednego logarytmu ma postać:

- A. $\log_{x^2} \frac{1}{2}$, B. $\log_x(x+1)$, C. $\log_x \sqrt{x+1}$, D. $\log_{x^2} \sqrt{x+1}$.