

1. ciąg arytmetyczny etap 3 2011-12 10 punktów

Odp. $a_n = 4n - 10$

3. Suma czterech początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0, a suma ich kwadratów wynosi 80. Znajdź wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

2. ciąg geometryczny etap 2 2010-11 10 punktów

Odp. tak

2. Sprawdź, czy ciąg

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

jest ciągiem geometrycznym.

3. ciąg geometryczny funkcje etap 2 2009-10 20 punktów

6. Funkcja f spełnia dla każdego x należącego do jej dziedziny równanie

$$1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = \frac{x}{2} + 1,$$

gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f . Naszkicuj jej wykres.

4. ciągi etap 1 2011-12 10 punktów

2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , w którym
 $a_1 = 3, \quad a_2 = 33, \quad a_3 = 333, \quad a_4 = 3333, \quad \dots$

5. ciągi etap 1 2012-13 20 punktów

7. Ciąg trzech liczb całkowitych (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, którego iloraz jest liczbą całkowitą. Jeżeli do najmniejszej z nich dodamy 9, to otrzymamy trzy liczby, które odpowiednio uporządkowane utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź wszystkie takie ciągi (a, b, c) .

6. ciągi etap 3 2010-11 10 punktów

2. Oblicz sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych niepodzielnych przez 7.

7. dowód liczby etap 1 2010-11 20 punktów

5. Liczba naturalna a ma $2n$ cyfr, z których pierwsze n cyfr to same czwórki, a pozostałe cyfry to ósemki. Udowodnij, że $\sqrt{a + 1}$ jest liczbą naturalną dla każdego n .

8. dowód nierówność etap 2 2014-15 10 punktów

1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

9. dowód nierówności etap 3 2011-12 10 punktów

1. Niech a i b będą dwiema liczbami rzeczywistymi, przy czym $a > b$. Udowodnij, że

$$a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b.$$

10. dowód własności liczb etap 3 2012-13 10 punktów

1. Udowodnij, że zbiór $S = \{6n + 3 : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

11. dowody własności liczb etap 2 2012-13 20 punktów

5. Wykaż, że $(2n+2)$ -cyfrowa liczba $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_{n+1} 5$ jest kwadratem liczby naturalnej (dla dowolnego n).

12. działania na liczbach etap 1 2010-11 10 punktów

2. Suma kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych a, b, c jest równa 2010. Ile jest wśród nich liczb parzystych?

13. dziedzina logarytmu etap 3 2008-09 10 punktów

2. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \log_2(x^3 - 4x^2 - 3x + 18).$$

14. dziedzina pierwiastek wielomian etap 2 2011-12 10 punktów

2. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}.$$

15. dziedzina funkcji, granice etap 2 2015-16 10 punktów

3. Wyznacz dziedzinę D funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x^2 - x - 12}$$

i zbadaj jej granice w punktach należących do zbioru $\mathbb{R} \setminus D$.

16. Ciągłość funkcji etap 2 2014-15 10 punktów

3. Znajdź punkty nieciągłości funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 + x^3 + 8x + 8}.$$

W których z tych punktów można określić wartość funkcji tak, żeby była ciągła?

17. dziedzina pierwiastek, logarytmy etap 2 2012-13 10 punktów

3. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\log_{\pi-1}(2x-1) - \log_{\pi-1}(5-3x)}.$$

18. dziedzina wymierna wielomiany etap 3 2010-11 10 punktów

3. Wyznacz dziedzinę funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x}.$$

Zbadaj granice funkcji f w punktach nienależących do dziedziny.

19. dziedzina wymiernej parzystość etap 1 2012-13 10 punktów

3. Wyznacz dziedzinę i zbadaj parzystość funkcji

$$f(x) = (x^2 + 1) \frac{3^{2x} + 3^{-2x}}{\sin^2 2x + 2} - x^3 \log \frac{3x^2 + 5x + 8}{3x^2 - 5x + 8}.$$

20. funkcja wykładnicza etap 1 2013-14 10 punktów

4. Sporządź wykres funkcji danej wzorem

$$f(x) = 5^{\lfloor \log_{0,2} x \rfloor}.$$

21. funkcja wymierna etap 3 2015-16 20 punktów

6. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej m liczbę pierwiastków równania

$$\left| \frac{4x+2}{x^2+2} \right| = m.$$

Naszkicuj wykres funkcji f .

22. **funkcje geometria analityczna etap 1 2011-12 20 punktów** Odp. $y = 2x^2$. $x^2 - ax - 2 = 0$; $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a^2}{2}$

5. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem środków wszystkich cięciw paraboli $y = x^2 - 2$ przechodzących przez początek układu współrzędnych. Naszkicuj tę krzywą.

23. **geometria analityczna etap 1 2012-13 10 punktów**

Odp. (7;10).

4. Znajdź rzut równoległy punktu $A(1, -2)$ na prostą $x - y + 3 = 0$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1, 2]$.

24. geometria analityczna etap 3 2010-11 20 punktów**Odp.** $y = \frac{3}{4}x - 2 \vee y = -\frac{3}{4}x + 6$;

$$r_1 = 1,25 \quad r_2 = 20.$$

7. Znajdź równania stycznych do okręgu C o równaniu

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

przechodzących przez punkt $P = (\frac{16}{3}, 2)$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obydwu prostych i do okręgu C .**25. geometria analityczna etap 3 2011-12 20 punktów****Odp.** $A=(;)$, $B=(;)$, $C=(;)$, $P = 60j^2$.7. Prosta $2x + y - 13 = 0$ zawiera bok AB trójkąta ABC , prosta $x - y - 5 = 0$ zawiera bok BC , a prosta $3x - y - 7 = 0$ zawiera dwusieczną kąta ACB . Znajdź wierzchołki tego trójkąta i oblicz jego pole.**26. geometria analityczna etap 1 2008-09 20 punktów** **Odp:** $C=(-4;10)$, $P = 54j^2$

$$(x - 6 + \sqrt{10})^2 + (y - \sqrt{10})^2 = \left(\frac{18}{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}\right)^2.$$

5. Punkty $A = (2, -2)$ i $B = (8, 4)$ są końcami podstawy trójkąta równoramiennego ABC . Wierzchołek C leży na prostej $x - 3y + 34 = 0$. Znajdź równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC .**27. geometria analityczna etap 1 2009-10 20 punktów**6. Oblicz pole trójkąta, mając dane dwie proste $4x + 5y + 17 = 0$ i $x - 3y = 0$, zawierające środkowe trójkąta, oraz jeden jego wierzchołek $A = (-1, -6)$.**28. geometria analityczna etap 1 2010-11 10 punktów****Odp.** $C_1(1;0)$ lub $C_2(1;4)$.4. Punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (1, 2)$ są wierzchołkami trójkąta T . Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka wiedząc, że pole trójkąta T jest równe 3, a środek jego ciężkości leży na osi OY .**29. geometria analityczna etap 1 2011-12 10 punktów****Odp.** $P=20$, bo

$$A(3,2), B(7,2), C(-2,-3), D(2,-3)$$

1. Pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$xy^2 - y^3 - xy + x^2 + 5 = 0$$

są współrzędnymi wierzchołków pewnego wielokąta. Oblicz jego pole.

30. geometria analityczna etap 2 2007-08 20 punktów **Odp:** $y = -\frac{4}{3}x + 8$, $O': (x-10)^2 + (y-3)^2 = 25$

6. Znajdź równanie stycznej l do okręgu C o równaniu

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

w punkcie $A(6, 0)$. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu C względem prostej l .

31. geometria analityczna etap 2 2009-10 20 punktów **Odp.** $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$,
 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 36$

5. Znajdź równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ przechodzących przez początek układu współrzędnych. Znajdź równania obrazów tego okręgu i jednej z wyznaczonych stycznych w jednokładności o środku w punkcie $S = (1, 2)$ i skali $k = -3$.

32. geometria analityczna etap 2 2010-11 20 punktów

7. Zbadaj w zależności od parametru k wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \quad kx + y = 2, \quad \text{oraz} \quad l_2 : \quad x + ky = k + 1.$$

Dla jakich k te proste przecinają się wewnątrz kwadratu, w którym punkty $A = (2, -2)$ i $C = (-2, 2)$ są końcami przekątnej?

33. geometria analityczna etap 2 2011-12 20 punktów

6. Dane są dwa punkty $A = (7, 5)$, $B = (1, -1)$ oraz punkt $P = (3, 3)$ przecięcia wysokości trójkąta ABC . Oblicz pole trójkąta ABC i napisz równanie okręgu opisanego na nim.

34. geometria analityczna etap 2 2012-13 20 punktów

6. Dane są punkty $A = (-5, 0)$, $B = (-3, -4)$, $C = (3, 4)$, $M = (7, 1)$. Z punktu M poprowadzono styczne k i l do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Oblicz pole trójkąta KLM , gdzie K i L są punktami styczności prostych k i l z tym okręgiem.

35. geometria analityczna etap 3 2007-08 10 punktów

4. Znajdź równania okręgów o promieniu 3 stycznych jednocześnie do osi OX i do prostej $12x + 5y = 0$.

36. geometria analityczna etap 3 2008-09 10 punktów

1. Znajdź współrzędne obrazu punktu $C = (20, 25)$ w symetrii osiowej względem prostej przechodzącej przez punkty $A = (6, 2)$ i $B = (3, -4)$.

37. geometria analityczna etap 3 2009-10 10 punktów

3. Zbadaj wzajemne położenie okręgów:

$$o_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 45 = 0, \quad o_2 : x^2 + y^2 + 2y - 97 = 0.$$

38. geometria analityczna parametr etap 2 2008-09 20 punktów

5. Dla jakich m proste $mx + (m + 1)y = 2$ i $4x + (m + 4)y = 1$ przecinają się w punkcie leżącym wewnątrz II lub IV ćwiartki układu współrzędnych?

39. geometria analityczna wektory etap 2 2010-11 10 punktów

3. Dane są punkty $A = (-1, -8)$ oraz $B = (5, 4)$. Znajdź taki punkt C , że $\vec{AC} = 5 \vec{CB}$.

40. geometria analityczna etap 2 2013-14 20 punktów

5. Okrąg O ma równanie $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$. Okrąg O' jest obrazem okręgu O przez translację o wektor $\vec{v} = [7, 1]$. Znajdź równania osi symetrii sumy $O \cup O'$ tych okręgów. Wyznacz punkty wspólne obu okręgów. Znajdź równania prostych stycznych jednocześnie do O i O' .

41. geometria analityczna etap 2 2014-15 20 punktów

5. Figura B jest obrazem figury

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 7y + 25 \geq 0\}.$$

przez symetrię względem prostej $x - 2y = 0$. Znajdź nierówności opisujące figurę B i oblicz jej obwód.

42. geometria analityczna etap 2 2015-16 20 punktów

6. Okrąg O' jest obrazem okręgu O o równaniu

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

w symetrii środkowej względem punktu $M = (6, 6)$. Napisz równanie okręgu O' i równania wszystkich prostych, które są jednocześnie styczne do obu okręgów.

43. geometria analityczna etap 3 2013-14 20 punktów

7. Oblicz promień mniejszego z dwóch okręgów stycznych w punkcie $M(2, 1)$ do prostej $x - 7y + 5 = 0$ i jednocześnie stycznych do prostej $x + y + 13 = 0$. Napisz równania wszystkich okręgów o tym promieniu stycznych jednocześnie do obydwu prostych.

44. geometria analityczna etap 3 2015-16 20 punktów

5. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (2, 1)$, $B = (-2, 7)$, $C = (-6, 5)$.
- Znajdź współrzędne punktu D , dla którego czworokąt $ABCD$ (w tej kolejności wierzchołków) jest równoległobokiem.
 - Figura F jest sumą prostej AB i prostej CD . Napisz równania wszystkich osi symetrii figury F .
 - Znajdź obraz figury F w jednokładności o środku w punkcie A i skali równej 3.

45. geometria analityczna etap 1 2014-15 20 punktów

7. Wyznacz równania stycznych do okręgu

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$

poprowadzonych z punktu $M = (1, 0)$. Jaką krzywą stanowi zbiór wszystkich środków cięciw tego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt M ? Napisz jej równanie.

46. geometria analityczna etap 1 2015-16 20 punktów

6. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (6, -1)$, $C = (-2, 3)$. Zbadaj wzajemne położenie tego okręgu oraz jego obrazu w symetrii osiowej względem prostej

$$3x + 4y + 26 = 0.$$

47. geometria analityczna etap 3 2014-15 10 punktów

3. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{u} = [3, -4]$ i $\vec{v} = [4, 4]$.

48. granica ciągu etap 1 2007-08 10 punktów

3. Oblicz granicę ciągu, którego n -ty wyraz jest równy

$$a_n = n^3 - \sqrt{n^6 - 5n^3}.$$

49. granica ciągu etap 1 2008-09 10 punktów

3. Znajdź liczbę c , dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3^{n+c} - 2^n}{\sqrt{5^n + 9^{n-2c}}}$$

jest równa 2.

50. granica ciągu etap 1 2010-11 10 punktów

3. Znajdź liczbę p , dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 9pn} - \sqrt[3]{n^3 - 5pn^2}$$

jest równa 2.

51. granica ciągu etap 2 2009-10 10 punktów

4. Wyznacz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^6 + 5n^4} - n^2).$$

52. granica ciągu etap 2 2012-13 10 punktów

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) , gdzie

$$a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{(2n + 1)^2}.$$

53. granica ciągu etap 3 2008-09 10 punktów

3. Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n}).$$

54. granica ciągu etap 3 2009-10 10 punktów

4. Oblicz granicę ciągu, którego n -ty wyraz jest równy

$$a_n = \frac{1}{3^n + 2^n} + \frac{3}{3^n + 2^n} + \frac{9}{3^n + 2^n} + \dots + \frac{3^n}{3^n + 2^n}.$$

55. granica ciągu etap 1 2014-15 10 punktów

3. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 2^{3+2n}}{2^{2n+1} + 3^n}.$$

56. iloczyn skalarny etap 2 2011-12 10 punktów

3. Oblicz miarę kąta między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wiedząc, że wektory $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{v} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ są prostopadłe oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

57. kombinatoryka ciągu etap 1 2012-13 10 punktów

1. Ile jest ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$?

58. logarytmy i trygonometria etap 2 2008-09 10 punktów

4. Oblicz $\log_9 \cos \frac{11\pi}{6} - \log_9 \sin \frac{29\pi}{6}$.

59. nierówność wykładnicza etap 1 2014-15 20 punktów

5. Dla jakich wartości parametru m nierówność

$$(m^2 - 1) \cdot 25^x - 2(m - 1) \cdot 5^x + 2 > 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x ?

60. nierówność wykładnicza etap 3 2014-15 10 punktów

4. Rozwiąż nierówność

$$25 \cdot 0,04^x - 0,2^{x^2-2} \leq 0.$$

61. nierówności wykładnicze etap 1 2015-16 10 punktów

3. Rozwiąż nierówność $3^x - 2^x > 3^{x-2}$.

62. nierówność logarytmiczna etap 2 2013-14 10 punktów

3. Rozwiąż nierówność $|3 \log_x 2 - 2| > 1$.

63. nierówność logarytmiczna etap 2 2014-15 20 punktów

6. Rozwiąż nierówność

$$\log_{2x}(x^4 + 3) \geq 2.$$

64. nierówność logarytmiczna etap 2 2015-16 10 punktów

2. Rozwiąż nierówność $\log_x(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) - 2 < 0$.

65. nierówność logarytmiczna etap 1 2010-11 20 punktów

6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie narysuj zbiór

$$A = \{(x, y) : \log_y(8x + y - 2 - x^2) \geq \log_y(8 - x^2 + 8x - 2y - y^2)\}.$$

66. nierówność logarytmiczna etap 1 2011-12 20 punktów

6. Narysuj w układzie współrzędnych zbiór

$$S = \{(x, y) : \log_x |y - 2| > \log_{|y-2|} x\}.$$

67. nierówność pierwiastek etap 1 2009-10 10 punktów

2. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2x > 0.$$

68. nierówność pierwiastek etap 3 2011-12 10 punktów

4. Rozwiąż nierówność

$$1 + \sqrt{x + 5} > x.$$

69. nierówność stopnia 4 z wartością bezwzględną etap 1 2007-08 10 punktów

2. Rozwiąż nierówność

$$|2x^4 - 17| < 15.$$

70. nierówność wartość bezwzględną etap 3 2012-13 10 punktów

4. Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 16x + 64} + x \leq 7 + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

71. nierówność wymierna etap 1 2012-13 10 punktów

2. Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{5 - x}{2x + 1}.$$

Rozwiąż nierówność $f(x + 5) \geq f(x - 3)$.

72. nierówności ciągu etap 3 2007-08 10 punktów

2. Rozwiąż nierówność

$$0,1^x \cdot 0,1^{x^3} \cdot 0,1^{x^5} \cdot \dots > \frac{\sqrt[3]{10000}}{100}.$$

73. nierówności szeregi etap 3 2013-14 10 punktów

4. Rozwiąż nierówność

$$3x^2 + 6x^3 + 12x^4 + \dots \leq 1.$$

74. szereg równanie etap 1 2013-14 10 punktów

2. Rozwiąż równanie

$$5 + \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{25} + \frac{x^6}{125} - \frac{x^8}{625} + \dots = x^2 + 1, (4),$$

75. nierówności kwadratowa z parametrem etap 3 2008-09 20 punktów7. Dla jakich wartości parametru m nierówność

$$(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2 > 0$$

jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$? Czy istnieje takie x , aby dla każdego $m \in \mathbb{R}$ powyższa nierówność była prawdziwa?

76. nierówności logarytmiczne wielomianowe etap 1 2009-10 20 punktów5. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$, gdzie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \log_{0,5}(x + 3) \geq \log_{0,5}(6 - 2x)\}.$$

77. nierówności szereg logarytmy etap 3 2012-13 20 punktów

7. Rozwiąż nierówność

$$3 - \log_{0,5} x - \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5}^3 x - \dots \geq 4 \log_{0,5} x.$$

78. optymalizacja tekstowe etap 3 2010-11 10 punktów

4. Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x, y jest równa dodatniej liczbie a . Jaką najmniejszą wartość może mieć suma kwadratów liczb x i y ?

79. optymalizacja tekstowe etap 2 2008-09 10 punktów

1. Suma dwóch liczb rzeczywistych wynosi 6. Jaką największą wartość może mieć ich iloczyn?

80. planimetria etap 1 2007-08 10 punktów

1. W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy a i ramienia b . Oblicz długość wysokości tego trójkąta opuszczonej na jego ramię.

81. planimetria etap 1 2011-12 10 punktów

3. W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, w którym ramię jest nachylone pod kątem α do podstawy będącej średnicą okręgu. Oblicz pole trapezu.

82. planimetria etap 2 2008-09 10 punktów

3. Odległość środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od przyprostokątnych wynosi odpowiednio p i q . Oblicz obwód tego trójkąta.

83. planimetria etap 3 2007-08 10 punktów

1. W trapezie o polu P stosunek długości podstaw jest równy $k > 1$. Oblicz pola dwóch trójkątów, na które ten trapez dzieli jego przekątna.

84. planimetria etap 2 2014-15 20 punktów

7. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 15$ cm, $b = 20$ cm wpisany jest okrąg. Oblicz odległości od każdego wierzchołka trójkąta do punktu styczności okręgu z przeciwległym bokiem.

85. podzielność etap 1 2007-08 20 punktów

7. Rozłóż na czynniki wielomian

$$W(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Udowodnij, że wartość $W(n)$ tego wielomianu dla dowolnej liczby naturalnej n jest podzielna przez 12. Dla jakich naturalnych n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 60?

86. podzielność etap 3 2011-12 10 punktów

2. Ile dzielników w zbiorze liczb naturalnych ma liczba $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$?

87. podzielność liczb etap 1 2008-09 10 punktów

4. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, które nie są podzielne ani przez 9, ani przez 12?

88. podzielność etap 2 2015-16 10 punktów

1. Wyznacz największą liczbę naturalną k taką, że liczba $2016!$ jest wielokrotnością liczby 10^k .

89. podzielność etap 3 2014-15 10 punktów

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne mniejsze niż 7, przez które podzielna jest liczba

$$L = 3^{2016} + 4.$$

90. podzielność etap 3 2015-16 10 punktów

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie

$$(x - 2y - 1)(x + 2y + 1) = 3.$$

91. podzielność liczb całkowitych etap 1 2013-14 10 punktów

1. Udowodnij, że żaden element zbioru $S = \{6n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

92. podzielność liczby całkowite etap 1 2014-15 10 punktów

1. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby p przez 30 nie jest liczbą złożoną.

93. kombinatoryka etap 1 2013-14 10 punktów

3. Na ile sposobów można n kul rozmieścić w n pudełkach tak, żeby dokładnie dwa pudełka zostały puste? Załóż, że $n \geq 3$ oraz zarówno kule jak i pudełka są między sobą rozróżnialne.

94. kombinatoryka etap 1 2014-15 10 punktów

4. Na ile sposobów można zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $n \geq 3$, podzielić na trzy niepuste podzbiory?

95. kombinatoryka etap 1 2015-16 10 punktów

2. Na ile sposobów można grupę $3k$ osób posadzić przy dwóch okrągłych stołach, jeżeli przy jednym stole jest $2k$ ponumerowanych krzeseł, a przy drugim k ? A na ile sposobów można to zrobić tak, by ustalone dwie osoby siedziały obok siebie, jeżeli $k \geq 2$?

96. prawdopodobieństwo etap 2 2007-08 10 punktów

1. Z ustalonego zbioru n liczb rzeczywistych losujemy kolejno k liczb, otrzymując ciąg różnowartościowy $(a_1, \dots, a_k)$. Zakładając, że $2 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwo, że ten ciąg nie jest ciągiem rosnącym.

97. prawdopodobieństwo etap 2 2008-09 20 punktów

6. k pasażerów wsiada do pociągu złożonego z 3 wagonów, przy czym każdy wybiera wagon niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Zakładając, że $k \geq 3$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A - wszyscy wsiadą do jednego wagonu,

B - dokładnie jeden wagon będzie pusty,

C - żaden wagon nie będzie pusty.

98. prawdopodobieństwo etap 2 2009-10 20 punktów

7. Liczby $1, 2, 3, \dots, n$, gdzie $n \geq 3$, losowo ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń

A : liczba n nie będzie ostatnim wyrazem tego ciągu;

B : liczby $1, 2, 3$ wystąpią obok siebie w kolejności wzrastania;

C : iloczyn każdej pary sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.

Wyniki zapisz w najprostszej postaci.

99. prawdopodobieństwo etap 2 2010-11 20 punktów

5. Liczby $1, 2, \dots, n$, gdzie $n > 2$, przestawiamy w dowolny sposób. Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:
- A – pierwszy wyraz otrzymanego ciągu będzie większy od ostatniego,
 - B – liczby 1 i 2 nie będą ustawione obok siebie,
 - C – liczby 1, 2 i 3 będą ustawione obok siebie w kolejności wzrastania.

100. prawdopodobieństwo etap 2 2011-12 20 punktów

5. Ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$ losujemy trzy liczby i ustawiamy je w ciąg rosnący (a, b, c) . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń
- A : iloczyn abc jest liczbą parzystą,
 - B_k : $b = k$, gdzie k jest ustaloną liczbą ze zbioru S .
- Dla jakich k prawdopodobieństwo zdarzenia B_k jest największe?

101. prawdopodobieństwo etap 2 2012-13 20 punktów

7. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
- A : reszka wypadła dokładnie k razy;
 - B : reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
 - C : przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną.

102. prawdopodobieństwo etap 3 2007-08 20 punktów

7. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ losujemy trójelementowy podzbiór $T = \{p, q, r\}$, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania każdego podzbioru jest jednakowe.
- a) Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn pqr jest podzielny przez 3.
 - b) Niech φ będzie funkcją przyporządkowującą każdemu wylosowanemu podzbiorowi T „element pośredni” (tzn. jeśli $p < q < r$, to $\varphi(T) = q$). Jaka wartość funkcji φ jest najbardziej prawdopodobna?

103. prawdopodobieństwo etap 3 2008-09 20 punktów

5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, losujemy ze zwracaniem dwie liczby x i y . Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
- $A : x = y$; $B : \text{iloczyn } xy \text{ jest liczbą parzystą};$ $C : \frac{x}{y} \in (0; 1).$

104. prawdopodobieństwo etap 3 2009-10 20 punktów

6. Dany jest n -elementowy zbiór S . Ze zbioru wszystkich podzbiorów zbioru S losujemy kolejno ze zwracaniem dwa zbiory (prawdopodobieństwo wylosowania każdego zbioru jest jednakowe). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
- A : przynajmniej jeden z wylosowanych zbiorów jest zbiorem pustym,
 - B : każdy z wylosowanych zbiorów ma dokładnie $n - 1$ elementów,
 - C : wylosowane zbiory są rozłączne.
- Wyniki zapisz w najprostszej postaci.

105.prawdopodobieństwo etap 3 2010-11 10 punktów

1. Dany jest n -elementowy zbiór X oraz jego k -elementowy podzbiór S . Ze zbioru X wybieramy losowo m elementów, tworząc zbiór B . Zakładając, że $k > 0, m > 0$ oraz $m + k \leq n + 1$, oblicz prawdopodobieństwo, że zbiory B i S będą miały dokładnie jeden element wspólny.

106.prawdopodobieństwo etap 3 2011-12 20 punktów

5. Ze zbioru $L = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby x, y . Następnie powtarzamy to losowanie dotąd, aż otrzymamy punkt (x, y) należący do zbioru

$$S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}.$$

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A - będziemy losować dokładnie cztery razy,

B - liczba losowań będzie parzysta.

107.prawdopodobieństwo etap 3 2012-13 20 punktów

6. Rzucamy n razy sześcienną kością do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A : ani razu nie wypadła szóstka,

B : parzysta liczba oczek wypadła więcej razy niż nieparzysta,

C : suma wyrzuconych oczek jest równa $6n - 2$.

108.prawdopodobieństwo szuflady etap 1 2007-08 10 punktów

4. Na ile sposobów można rozmieścić k kul ($k \geq 4$, każda kula innego koloru) w k ponumerowanych pudełkach tak, aby
- żadne pudełko nie było puste?
 - dokładnie jedno pudełko było puste?
 - dokładnie $k - 2$ pudełka były puste?

109.prawdopodobieństwo etap 2 2013-14 20 punktów

7. Do windy na parterze budynku czteropiętrowego wsiada osiem osób. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A : wszyscy wysiadą na tym samym piętrze,

B : na czwartym piętrze wysiadą co najmniej dwie osoby,

C : na każdym piętrze wysiadą po dwie osoby.

110.prawdopodobieństwo etap 2 2015-16 20 punktów

7. Losowo wybieramy liczbę k ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a następnie rzucamy k razy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A : wypadną same szóstki,

B : iloczyn wyrzuconych oczek będzie liczbą parzystą,

C : suma wyrzuconych oczek będzie mniejsza niż 22.

111.prawdopodobieństwo etap 3 2013-14 10 punktów

2. Rzucono trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest mniejsza niż sześć.

112.prawdopodobieństwo etap 3 2014-15 20 punktów

6. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Wiedząc, że $3 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
- A - a_k jest największą liczbą wśród wylosowanych;
 - B - a_k jest podzielna przez 3;
 - C - $a_1 + a_2 + \dots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$.

113.prawdopodobieństwo etap 3 2015-16 10 punktów

2. Przy okrągłym stole z 10 ponumerowanymi krzesłami siada 5 kobiet i 5 mężczyzn, wybierając miejsca w sposób przypadkowy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jedna osoba usiądzie obok osoby tej samej płci?

114.procenty etap 2 2007-08 10 punktów

3. Cena akcji pewnej firmy spadła o 60%. O ile procent musi teraz wzrosnąć cena tych akcji, aby wróciła do poprzedniego poziomu?

115.procenty ułamek okresowy etap 3 2008-09 10 punktów

4. Znajdź liczbę, której 59% stanowi okresowy ułamek dziesiętny $2,6(81)$.

116.procenty etap 2 2014-15 10 punktów

4. W każdym z ostatnich dwóch notowań cena ropy spadała o $k\%$, gdzie $k \in (0; 100)$. O ile procent musiałaby cena wzrosnąć w najbliższym notowaniu, żeby wróciła do początkowego poziomu?

117.przekształcenia wykresów funkcji etap 2 2007-08 10 punktów

4. Niech P będzie izometrycznym przekształceniem płaszczyzny, w którym obrazem wykresu funkcji $f(x) = x^2$ jest wykres funkcji $g(x) = x^2 + x + 1$. Znajdź to przekształcenie i podaj wzór funkcji, której wykres jest obrazem wykresu funkcji $h(x) = \log_2 x$ poprzez przekształcenie P .

118.równanie granica funkcji etap 1 2011-12 10 punktów

4. Rozwiąż równanie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1}) = \frac{2}{3}.$$

119.równanie kwadratowe wzory Viete'a etap 1 2009-10 20 punktów

7. Ile jest równań postaci

$$x^2 - px + q = 0,$$

które mają dwa pierwiastki mniejsze od 7, przy czym liczby p i q są całkowite i dodatnie.

120.funkcja kwadratowa etap 3 2014-15 20 punktów

5. Wartość funkcji g w punkcie m jest równa sumie pierwiastków równania

$$|mx^2 - 2x| = m,$$

przy czym każdy pierwiastek jest w tej sumie uwzględniany tylko raz niezależnie od jego krotności. Znajdź funkcję $g : m \rightarrow g(m)$ i naszkicuj jej wykres.

121. funkcja kwadratowa etap 2 2014-15 10 punktów

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji danej wzorem $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$.

122.równanie kwadratowe z parametrem etap 1 2007-08 20 punktów

6. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$(m - 3)x^4 - 3(m - 3)x^2 + m + 2 = 0$$

w zależności od parametru m .

123.równanie kwadratowe z parametrem trygonometria etap 1 2008-09 20 punktów

6. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ jeden z pierwiastków równania

$$(12p + 6)x^2 + 16px + 9p = 0$$

jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta rozwartego?

124. równanie kwadratowe etap 3 2013-14 20 punktów

5. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych p , dla których pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$x + 1 = \frac{px}{p - 1} + \frac{p + 1}{x}$$

spełniają nierówność

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2p + 1.$$

125. równanie logarytmiczne etap 2 2010-11 10 punktów

4. Rozwiąż równanie

$$\log_{x-2} (x^3 - x^2 - 7x + 10) = 2.$$

126.równanie logarytmiczne z parametrem etap 3 2011-12 20 punktów

6. Dla jakich m równanie

$$\log_3(x - m) + \log_3 x = \log_3(3x - 4)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych?

127.równanie logarytmiczne z parametrem etap 3 2010-11 20 punktów

6. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\frac{\log(px^2)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

128.równanie stopnia 3 z parametrem etap 3 2012-13 20 punktów

5. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru m równanie

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich m wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?

129.równanie trygonometryczne etap 1 2009-10 10 punktów

4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$4 \cos 2x \sin 2x + 1 = 0$$

należące do przedziału $(-\pi; \pi)$.

130.równanie trygonometryczne etap 3 2012-13 10 punktów

2. Rozwiąż równanie $4 \cos^2 2x = 3$.

131. równanie trygonometryczne etap 3 2014-15 10 punktów

2. Rozwiąż równanie

$$2 \cos^3 x + 5 \sin^2 x - 11 \cos x - 9 = 0.$$

132.równanie wykładnicze etap 2 2009-10 10 punktów

2. Dane są funkcje $f(x) = 2^{x+1} + 5^{x-5}$ i $g(x) = 25^x + 4^x$. Rozwiąż równanie $g\left(\frac{x}{2}\right) = f(x+3)$.

133.równanie wykładnicze etap 2 2012-13 10 punktów

1. Rozwiąż równanie $(5\sqrt{2} - 7)^{x-1} = (5\sqrt{2} + 7)^{3x}$.

134.równanie wykładnicze szereg etap 1 2010-11 20 punktów

7. Naskicuj wykres funkcji $g : m \rightarrow g(m)$, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania

$$2^{2x+2} + 4^x + 4^{x-1} + \dots = m + 16^x.$$

135.równanie wykładnicze trygonometryczne etap 3 2009-10 10 punktów

1. Rozwiąż równanie

$$(x^2 + 1)^{\sin 2x + \cos 2x} = 1.$$

136.równanie wykładnicze etap 1 2014-15 10 punktów

2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

137.równanie wykładnicze etap 3 2013-14 10 punktów

1. Rozwiąż równanie

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\sin 2x} = 1.$$

138.równanie wykładnicze z parametrem etap 1 2012-13 20 punktów

6. Naskicuj wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę $f(m)$ pierwiastków równania

$$4^{|x|} + (m + 1)2^{|x|+1} = 5 - m^2$$

z niewiadomą x .

139.równanie wykładnicze z parametrem etap 2 2007-08 20 punktów

7. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$(p - 2) \cdot 9^x + (p + 1) \cdot 3^x - p = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

140.równanie wykładnicze z parametrem etap 3 2007-08 20 punktów

6. Dla jakich wartości parametru m dokładnie jeden pierwiastek równania

$$(m - 2) 9^x + (m + 1) 3^x - m = 0$$

jest mniejszy od 2?

141.równanie wykładnicze z parametrem etap 3 2009-10 20 punktów

7. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$(p - 3)(9 - 4\sqrt{5})^x - (2p + 6)(\sqrt{5} - 2)^x + p + 2 = 0$$

ma dokładnie jeden pierwiastek ?

142.średnia prędkość etap 3 2007-08 10 punktów

3. Połowę drogi kierowca jechał autostradą z prędkością 120 km/h, a drugą połowę na drogach lokalnych ze średnią prędkością 60 km/h. Oblicz średnią prędkość całej podróży.

143.stereometria etap 1 2012-13 20 punktów

5. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym miary kątów nachylenia ściany bocznej i krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa wynoszą odpowiednio α i β . Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli wpisanej w niego.

144.stereometria ciągu etap 3 2012-13 10 punktów

3. Sfera S_1 jest wpisana w sześcián, sfera S_2 jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześciánu, a sfera S_3 jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.

145.stereometria etap 1 2007-08 20 punktów

5. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa długości krawędzi podstawy. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w ten ostrosłup do objętości kuli opisanej na nim.

146.stereometria etap 1 2008-09 20 punktów

7. Cztery kule, z których trzy mają promień r , a czwarta R , ułożono na stole w piramidę w taki sposób, że każda kula jest styczna do trzech pozostałych, przy czym kule przystające tworzą podstawę piramidy. Oblicz największą odległość punktu kuli o promieniu R od stołu. Podaj warunek, jaki muszą spełniać promienie, aby ustawienie piramidy było możliwe.

147.stereometria etap 1 2009-10 10 punktów

1. Na półsfery o promieniu R leżą dwa styczne do siebie okręgi o promieniu r . Wyznacz największą odległość między dwoma punktami należącymi do tych okręgów.

148.stereometria etap 1 2010-11 10 punktów

1. Kula K jest wpisana w sześcián. Kula K' jest styczna do trzech ścian tego sześciánu i do kuli K . Oblicz stosunek promienia kuli K do promienia kuli K' .

149.stereometria etap 2 2008-09 20 punktów

7. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC , w którym bok AB ma długość a , a kąty wewnętrzne do niego przyległe mają miary β i γ . Krawędź boczna ostrosłupa wychodząca z wierzchołka C jest prostopadła do podstawy i ma długość d . Oblicz objętości brył, na które ten ostrosłup dzieli płaszczyzna równoległa do podstawy i odległa od niej o $\frac{d}{3}$.

150.stereometria etap 2 2009-10 10 punktów

1. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy. Ile razy objętość stożka jest większa od objętości kuli wpisanej w ten stożek?

151.stereometria etap 2 2010-11 10 punktów

1. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości $a = 1$ cm i wysokości opuszczonej na podstawę $H = 2$ cm. Oblicz odległość wierzchołka podstawy od przeciwległej ściany.

152.stereometria etap 2 2011-12 20 punktów

7. Stożek i walec mają równe tworzące, równe objętości i równe pola powierzchni bocznej. Oblicz
 - a) sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy,
 - b) stosunek pola przekroju osiowego walca do pola przekroju osiowego stożka.

153.stereometria etap 2 2012-13 10 punktów

2. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa jest prostopadła do jego podstawy, będącej prostokątem o bokach długości 5 cm i 12 cm. Najdłuższa krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

154.stereometria etap 3 2007-08 20 punktów

5. Na czworościanie foremnym opisano walec w ten sposób, że dwie krawędzie czworościanu leżące na prostych skośnych są średnicami podstaw walca. Oblicz stosunek pola powierzchni sfery opisanej na walcu do pola powierzchni sfery wpisanej w czworościan.

155.stereometria etap 3 2008-09 20 punktów

6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości h krawędź boczna jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α . Oblicz promień kuli wpisanej w ten ostrosłup. Jakie wartości może przyjmować miara kąta α ?

156.stereometria etap 3 2009-10 20 punktów

5. W ostrosłupie prawidłowym ośmiokątnym krawędź podstawy ma długość a , a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę α . Wysokość ostrosłupa podzielono na n odcinków równej długości i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy, dzieląc w ten sposób ostrosłup na n „warstw”. Zakładając, że $n \geq 3$, oblicz objętość drugiej warstwy (licząc od podstawy).

157.stereometria etap 3 2010-11 20 punktów

5. W prawidłowy graniastosłup sześciokątny wpisano sferę (styczną do wszystkich ścian bocznych i do obu podstaw). Oblicz stosunek pola powierzchni tej sfery do pola powierzchni sfery opisanej na graniastosłupie.

158.stereometria optymalizacja etap 3 2009-10 10 punktów

2. Jakie największe pole powierzchni bocznej może mieć stożek obrotowy, w którym obwód przekroju osiowego ma długość C ?

159. stereometria etap 1 2013-14 20 punktów

5. Dany jest prawidłowy ostrosłup czworokątny. Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej skośnej względem tej przekątnej jest równe P . Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa wynosi S . Oblicz iloraz $\frac{P}{S}$.

160. stereometria etap 1 2014-15 20 punktów

6. W sześcianie o krawędzi długości a zawarte są dwie sfery zewnętrznie styczne, przy czym ich środki leżą na przekątnej sześcianu i każda z nich jest styczna przynajmniej do trzech ścian sześcianu. Oblicz promienie tych sfer, dla których suma ich pól powierzchni jest a) największa, b) najmniejsza.

161. stereometria etap 1 2015-16 20 punktów

7. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $a = 12$ cm, a sinus kąta między ścianami bocznymi wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i dzielącą przeciwległą ścianę boczną na dwie figury o równych polach. Oblicz objętości brył, które powstały w wyniku przecięcia ostrosłupa tą płaszczyzną.

162. stereometria etap 2 2013-14 20 punktów

6. Podstawą ostrosłupa o wysokości H jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AB| = a$ i $|AC| = b$. Krawędź boczna wychodząca z wierzchołka A jest prostopadła do podstawy. Ostrosłup ten podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, która nie jest ostrosłupem.

163. stereometria etap 3 2013-14 20 punktów

6. Dwie ściany ostrosłupa trójkątnego są trójkątami równobocznymi o boku długości a i dwie są trójkątami prostokątnymi. Oblicz pole powierzchni i objętość ostrosłupa.

164. stereometria etap 3 2014-15 20 punktów

7. Wyznacz wysokość stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu $R = 2$ cm.

165. stereometria etap 3 2015-16 20 punktów

7. Trójkąt równoramienny o obwodzie 36 cm obraca się wokół prostej zawierającej podstawę trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była największa?

166. stereometria etap 2 2015-16 20 punktów

5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz stosunek długości promienia kuli wpisanej w ten ostrosłup do jego wysokości.

167. trygonometria ciągi etap 2 2010-11 20 punktów

6. Oblicz sumę trzydziestu największych ujemnych rozwiązań równania

$$\cos 2x + \sin x = 0.$$

168. trygonometria etap 1 2008-09 10 punktów

2. Rozwiąż równanie $\sin 4x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$.

169. trygonometria etap 2 2007-08 20 punktów

5. Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania

$$4 \cos^2 x = 3$$

należących do przedziału $(-8\pi; 10\pi)$.

170. trygonometria etap 2 2009-10 10 punktów

3. Oblicz $\sin 2\alpha$, jeżeli $\sin \alpha = 0,75$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

171. trygonometria ciąg etap 1 2013-14 20 punktów

6. Dla jakich $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ liczby

$$\operatorname{tg} x, \quad 1, \quad \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) ? Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$.

172. trygonometria etap 1 2015-16 20 punktów

5. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\cos^3 x + p \cos x + p + 1 = 0$$

ma dokładnie trzy rozwiązania w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$?

173. trygonometria etap 2 2013-14 10 punktów

2. Kotangens kąta rozwartego α jest równy -3 . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 2α .

174. trygonometria równanie etap 3 2015-16 10 punktów

3. Rozwiąż równanie

$$|\cos x|^{2\cos x+1} = 1.$$

175. liniowa parametr etap 1 2013-14 20 punktów

7. Rozwiąż w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ równanie

$$(1-p)(|x+2|+|x|) = 4-3p.$$

176.układ równań liniowych z parametrem etap 1 2011-12 20 punktów

7. a) Zbadaj w zależności od parametru k , ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} kx + (k+1)y = k-1 \\ 4x + (k+4)y = k. \end{cases}$$

b) Dla jakich wartości parametru k ten układ ma dokładnie jedno rozwiązanie należące do wnętrza trójkąta o wierzchołkach

$$A = (0,0), \quad B = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad C = (0,2).$$

177.własności liczb etap 1 2008-09 10 punktów

1. Ile jest czwórek (x, y, z, t) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $xy + yz + zt + tx = 2008$?

178.wyrażenia algebraiczne etap 2 2007-08 10 punktów

2. Sprowadź do najprostszej postaci (niezawierającej ujemnych wykładników, ani ułamków piętrowych) wyrażenie

$$(1-x^{-1})^{-2} - (1+x^{-1})^{-2}.$$

179.wyrażenia algebraiczne etap 2 2008-09 10 punktów

2. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{(a^3+b^3)(a^{-1}-b^{-1})}{(a^{-1}+b^{-1})[(a-b)^2+ab]}.$$

180.wyrażenia algebraiczne etap 2 2011-12 10 punktów

1. Wykaż, że liczba $a = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ jest całkowita.

181.zadania tekstowe praca etap 2 2011-12 10 punktów

4. Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 6 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 2 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby połowę całej pracy. W jakim czasie każdy automat może samodzielnie wykonać całą pracę?

182.zadanie tekstowe praca etap 1 2009-10 10 punktów

3. Kran A napełnia basen wodą w ciągu 10 godzin, a kran B w ciągu 15 godzin. W ciągu ilu godzin napełniony zostanie basen, jeżeli oba krany będą działać jednocześnie?

183. tekstowe wymierne etap 2 2013-14 10 punktów

1. Urządzenie I wykonuje pewną pracę w ciągu 20 godzin, a urządzenie II w ciągu 30 godzin. W jakim czasie wykonają tę pracę oba urządzenia pracując jednocześnie?

184. zadanie tekstowe roztwory etap 3 2013-14 10 punktów

3. Po zmieszaniu roztworów soli o stężeniach 8% oraz 20% otrzymano 12 litrów roztworu o stężeniu 16%. Oblicz objętości zmieszanych roztworów.

185. zadanie tekstowe układ równań etap 2 2015-16 10 punktów

4. Zespołowi pracowników zlecono pewną pracę. Gdyby było ich o 3 mniej, to pracowaliby o 5 dni dłużej, a gdyby było ich o 4 więcej, to pracowaliby o 2 dni krócej. Ilu było pracowników i jak długo pracowali?