LOGIKA

Zdanie. Zaprzeczenie zdania

Definicja 1.
Zdaniem (w logice) nazywamy wypowiedź oznajmującą, o której możemy powiedzieć, że jest prawdziwa albo fałszywa.

Definicja 2.
Zaprzeczeniem zdania p nazywamy zdanie „nieprawda, że p" i oznaczamy $\neg p$; zaprzeczeniem zdania prawdziwego jest zdanie fałszywe; zaprzeczeniem zdania fałszywego jest zdanie prawdziwe.

Definicja 1.
Koniunkcją zdań p oraz q nazywamy zdanie „p i q" i oznaczamy „$p \wedge q$"; koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba tworzące ją zdania są prawdziwe.

Mówiąc inaczej: koniunkcja dwóch zdań jest fałszywa tylko wtedy, gdy co najmniej jedno zdanie ją tworzące jest fałszywe.

i $\longrightarrow$ $\wedge$

Definicja 2.
Alternatywą zdań p oraz q nazywamy zdanie „p lub q" i oznaczamy „$p \vee q$"; alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań ją tworzących jest prawdziwe.

Inaczej mówiąc: alternatywa dwóch zdań jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba tworzące ją zdania są fałszywe.

lvb $\longrightarrow$ $\vee$

Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie

Definicja 1.
Implikacją o poprzedniku p i następniku q nazywamy zdanie „jeśli p, to q" i oznaczamy „$p \Rightarrow q$"; implikację uznajemy za prawdziwą wtedy, gdy poprzednik i następnik są prawdziwe oraz wtedy, gdy poprzednik jest fałszywy (wówczas następnik może być prawdziwy lub fałszywy).

Definicja 2.
Równoważnością zdań p oraz q nazywamy zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" i oznaczamy „$p \Leftrightarrow q$"; równoważność dwóch zdań uznajemy za prawdziwą tylko wtedy, gdy tworzące ją zdania mają tę samą wartość logiczną, tzn. oba są prawdziwe lub oba są fałszywe.

Prawa logiczne. Prawa De Morgana

Definicja 1.
Prawem logicznym (prawem rachunku zdań) nazywamy taki schemat zdania złożonego, dla którego zdanie utworzone według tego schematu jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań w nim występujących.

Symbolicznie prawo zaprzeczenia alternatywy zapisujemy tak:

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ (I prawo De Morgana)

Prawo to wypowiadamy następująco: zaprzeczeniem alternatywy dwóch zdań jest koniunkcja zaprzeczeń tych zdań.

Symbolicznie prawo zaprzeczenia koniunkcji zapisujemy tak:

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$ (II prawo De Morgana)

Prawo to wypowiadamy następująco: zaprzeczeniem koniunkcji dwóch zdań jest alternatywa zaprzeczeń tych zdań.

Kolejne prawa również dotyczą koniunkcji i alternatywy. Pierwsze cztery prawa intuicyjnie są oczywiste.

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	(przemienność alternatywy)
$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	(łączność alternatywy)
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	(przemienność koniunkcji)
$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	(łączność koniunkcji)
$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	(rozdzielność koniunkcji względem alternatywy)
$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	(rozdzielność alternatywy względem koniunkcji)

Pierwsze to prawo przechodniości implikacji:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Kolejne prawo logiczne to prawo zaprzeczenia implikacji:

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Jeśli implikację $p \Rightarrow q$ nazwiemy **implikacją prostą**, to implikację:

$q \Rightarrow p$ nazwiemy **implikacją odwrotną**
$\neg p \Rightarrow \neg q$ nazwiemy **implikacją przeciwną**
$\neg q \Rightarrow \neg p$ nazwiemy **implikacją przeciwstawną**.

Mamy następujące prawa:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (równoważność implikacji prostej i przeciwstawnej)

Na mocy tego prawa zdanie: „Jeśli rozwiązałem dużo zadań z matematyki, to byłem dobrze przygotowany do pracy klasowej" jest równoważne zdaniu: „Jeśli nie byłem dobrze przygotowany do pracy klasowej, to nie rozwiązałem dużo zadań z matematyki".

$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ (równoważność implikacji odwrotnej i przeciwnej)

UWAGA: Implikacja prosta $(p \Rightarrow q)$ i odwrotna $(q \Rightarrow p)$ nie są równoważne.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Definicja 1.
Zbiory A i B **są równe** (co oznaczamy $A = B$) wtedy, gdy każdy element należący do zbioru A należy do zbioru B i każdy element należący do zbioru B należy do zbioru A.

Definicja 2.
Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B (co oznaczamy $A \subset B$) wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.
Zbiór A jest **podzbiorem właściwym** zbioru B wtedy, gdy $A \subset B$ i $A \neq B$.

Element $\in$ ZBIÓR

Natomiast zawieranie się zbiorów jest zależnością między zbiorem a zbiorem.

ZBIÓR $\subset$ ZBIÓR

Definicja 3.
Sumą zbiorów A oraz B (oznaczenie $A \cup B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

Zapis symboliczny: $x \in A \cup B \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} (x \in A \lor x \in B)$

$A \cup B$ $\qquad$ $A \cup B$

Element należy do sumy zbiorów, jeśli należy co najmniej do jednego z tych zbiorów.

s∪ma zbiorów $\longrightarrow$ $\cup$

Definicja 4.
Różnicą zbiorów A oraz B (oznaczenie $A - B$ albo $A \setminus B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

Zapis symboliczny: $x \in A - B \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} (x \in A \land x \notin B)$

$A - B$ $\qquad$ $A - B = A$

Definicja 5.
Częścią wspólną (iloczynem) **zbiorów** A oraz B (oznaczenie $A \cap B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.

Zapis symboliczny: $x \in A \cap B \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} (x \in A \land x \in B)$

$A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \varnothing$

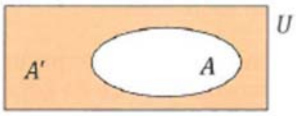
∩loczyn zbiorów $\longrightarrow$ $\cap$

Zbiory A i B nazywamy **zbiorami rozłącznymi** wtedy, gdy $A \cap B = \varnothing$.

Definicja 6.

Niech A będzie dowolnym zbiorem w przestrzeni U, $A \subset U$.
Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni U (oznaczenie $\boldsymbol{A'}$, czytaj: „A prim") nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni U, które nie należą do zbioru A.

Zapis symboliczny: $x \in A' \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} (x \in U \wedge x \notin A)$



Element należy do dopełnienia zbioru A wtedy, gdy należy do różnicy $U - A$.
Łatwo zauważyć, że zbiór i jego dopełnienie są rozłączne ($A \cap A' = \varnothing$) oraz że ich suma jest całą przestrzenią ($A \cup A' = U$).

Definicja 1.

Formą zdaniową zmiennej x nazywamy wyrażenie, w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem logicznym po zastąpieniu x nazwą pewnego elementu.

Definicja 2.

Rozwiązaniem równania z jedną niewiadomą x nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, która spełnia to równanie.

Definicja 3.

Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające to równanie.

Definicja 3.

Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, którego nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny równania.

Definicja 4.

Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę należącą do dziedziny tego równania.

Przedziały

Definicja 1.

Przedziałem otwartym o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie mniejsze od b.

Zapis symboliczny:

$$(a, b) \underset{\text{z def.}}{=} \{x: x \in \boldsymbol{R} \wedge a < x < b\}$$

Na osi liczbowej przedział otwarty zaznaczamy następująco:

Definicja 2.

Przedziałem domkniętym o końcach a, b, ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są nie mniejsze od a (czyli większe od a lub równe a) i jednocześnie nie większe od b (czyli mniejsze od b lub równe b).

Zapis symboliczny:

$$\langle a, b\rangle \underset{\text{z def.}}{=} \{x: x \in \boldsymbol{R} \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$$

Na osi liczbowej przedział domknięty zaznaczamy tak:

$\langle a, b)$ – **przedział lewostronnie domknięty** (nazywany też prawostronnie otwartym).

W przedziale tym najmniejszą liczbą jest a, nie ma za to liczby największej.

$(a, b\rangle$ – **przedział lewostronnie otwarty** (nazywany też prawostronnie domkniętym).

Definicja 3.

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a.

Zapis symboliczny:

$$(a, +\infty) \underset{\text{z def.}}{=} \{x: x \in \boldsymbol{R} \wedge x > a\}$$

Przedział ten zaznaczamy na osi liczbowej tak:

Podobnie definiuje się następujące przedziały nieograniczone:

$\langle a, +\infty)$ – **przedział lewostronnie domknięty nieograniczony**

$(-\infty, a)$ – **przedział prawostronnie otwarty nieograniczony**

$(-\infty, a\rangle$ – **przedział prawostronnie domknięty nieograniczony**

Rozwiązywanie prostych nierówności

Definicja 1.
Rozwiązaniem nierówności z jedną niewiadomą x nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, która spełnia tę nierówność.

Definicja 2.
Rozwiązać nierówność z jedną niewiadomą x to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających daną nierówność lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające tę nierówność.

Definicja 3.
Nierównością tożsamościową nazywamy nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę należącą do dziedziny tej nierówności.

Definicja 4.
Nierównością sprzeczną nazywamy nierówność, której nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny tej nierówności.

Przykład 6.

Dziedziną nierówności $x^2 + 5 < 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \mathbf{R}$.
Ale nie istnieje liczba rzeczywista, która by spełniała tę nierówność. Wartość lewej strony nierówności dla dowolnej liczby rzeczywistej nigdy nie jest ujemna (wyjaśnij dlaczego). Nierówność $x^2 + 5 < 0$ jest sprzeczna.
Zbiór rozwiązań nierówności jest zbiorem pustym.

Przykład 7.

Wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 \leqslant 0$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \mathbf{R}$.
Nierówność $x^2 \leqslant 0$ ma taki sam zbiór rozwiązań jak alternatywa

$$x^2 < 0 \vee x = 0$$

Nierówność $x^2 < 0$ jest sprzeczna. Natomiast równanie $x = 0$ jest spełnione tylko przez jedną liczbę 0. Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa, gdy <u>co najmniej</u> jedno zdanie jest prawdziwe:

$$\underbrace{0^2 < 0}_{\text{zdanie fałszywe}} \vee \underbrace{0 = 0}_{\text{zdanie prawdziwe}} \text{ (alternatywa prawdziwa)}$$

Ostatecznie tylko liczba 0 spełnia nierówność $x^2 \leqslant 0$.
Zbiór rozwiązań tej nierówności jest jednoelementowy: $\{0\}$.

Zbiór liczb naturalnych

Przypomnijmy, zbiór liczb naturalnych to zbiór $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Definicja 1.
Liczba naturalna n **jest podzielna przez liczbę naturalną** m różną od zera wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n, zaś o liczbie n mówimy wówczas, że jest **wielokrotnością** liczby m. Fakt, że m jest dzielnikiem liczby n, oznaczamy: $m|n$.

Definicja 2.
Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami są 1 oraz n.
Liczbą złożoną nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

Liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze, tzn. przedstawić ją w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienie to nazywamy **rozkładem liczby na czynniki pierwsze**. Okazuje się, że jest tylko jeden sposób rozkładu danej liczby na

Twierdzenie 1. (cechy podzielności liczb naturalnych)
Dowolna liczba naturalna jest:
- podzielna przez 2 $\Leftrightarrow$ cyfrą jedności tej liczby jest 0, 2, 4, 6 lub 8;
- podzielna przez 3 $\Leftrightarrow$ suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3;
- podzielna przez 4 $\Leftrightarrow$ dwie ostatnie cyfry tej liczby są zerami lub przedstawiają liczbę podzielną przez 4;
- podzielna przez 5 $\Leftrightarrow$ cyfrą jedności tej liczby jest 0 lub 5;
- podzielna przez 6 $\Leftrightarrow$ jest podzielna jednocześnie przez 2 i przez 3;
- podzielna przez 8 $\Leftrightarrow$ trzy ostatnie cyfry tej liczby są zerami lub przedstawiają liczbę podzielną przez 8;
- podzielna przez 9 $\Leftrightarrow$ suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9.

Definicja 3.
1) Niech dane będą liczby naturalne a, b, z których co najmniej jedna jest różna od zera.
   Największym wspólnym dzielnikiem liczb a, b nazywamy największą liczbę naturalną, która jest dzielnikiem każdej z liczb a i b; oznaczamy ją $NWD(a, b)$.
2) Niech dane będą liczby naturalne a, b, obie różne od zera.
   Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od 0, która jest podzielna przez a i przez b; oznaczamy ją $NWW(a, b)$.

Definicja 4.
Liczby naturalne a, b, z których co najmniej jedna jest różna od zera, nazywamy **liczbami względnie pierwszymi** wtedy, gdy $NWD(a, b) = 1$.

Twierdzenie 2.
Dla dowolnych liczb naturalnych a, b większych od zera prawdziwa jest równość

$$NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$$

Definicja 5.
Niech n i m będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. W wyniku dzielenia liczby n przez liczbę m otrzymujemy **resztę** r wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, dla której $n = m \cdot k + r$, gdzie $k, r \in \boldsymbol{N}$ oraz $r < m$.

Zbiór liczb całkowitych

Definicja 1.
Liczba całkowita a **jest podzielna przez liczbę całkowitą** b różną od zera (b jest dzielnikiem liczby a) wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k, dla której $a = k \cdot b$.
Fakt, że b jest dzielnikiem liczby a, oznaczamy: $b|a$.

Zapis symboliczny: $(a \in C \wedge b \in C \wedge b \neq 0) \Rightarrow \left(b|a \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} \bigvee_{k \in C} a = k \cdot b \right)$

Definicja 2.
Liczbę całkowitą nazywamy **liczbą parzystą** wtedy, gdy jest podzielna przez 2; w przeciwnym wypadku mówimy, że jest **liczbą nieparzystą.**

Liczby parzyste: $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
Liczby nieparzyste: $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

Liczba całkowita parzysta p jest podzielna przez 2, zatem istnieje taka liczba k, $k \in C$ dla której $p = 2k$. Liczbę całkowitą parzystą zapisujemy jako $2k$, gdzie $k \in C$.
Podobnie liczbę całkowitą:
- podzielną przez 5 zapisujemy jako $5k$, gdzie $k \in C$
- podzielną przez 2 i przez 3 (czyli podzielną przez 6) jako $6k$, gdzie $k \in C$
- podzielną przez 4 i przez 6 (czyli podzielną przez 12) jako $12k$, gdzie $k \in C$.

Definicja 3.
Liczba całkowita a przy dzieleniu przez liczbę całkowitą b różną od zera daje resztę r, $r \in N$, wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita k, dla której $a = k \cdot b + r$, gdzie $0 \leqslant r < |b|$. Symbol $|b|$ oznacza większą z dwóch liczb: $b, -b$.

Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych

Definicja 1.
1) **Częścią całkowitą liczby** x nazywamy największą liczbę całkowitą, która jest nie większa od x, i oznaczamy symbolem $[x]$.
2) **Częścią ułamkową liczby** x nazywamy różnicę między liczbą x a jej częścią całkowitą, czyli liczbę $x - [x]$.

Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

- **Własności dodawania**

Dodawanie jest działaniem łącznym, tzn.

Dodawanie jest działaniem przemiennym, tzn.

Elementem neutralnym dodawania jest liczba 0, tzn.

- **Własności mnożenia**

Mnożenie jest działaniem łącznym, tzn.

Mnożenie jest działaniem przemiennym, tzn.

- **Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania**

  Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tzn.
  dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definicja 1.

Proporcją nazywamy równość $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, gdzie $b \neq 0$ i $d \neq 0$.

Liczby a i d nazywamy **wyrazami skrajnymi** tej proporcji, zaś liczby b i c – **wyrazami środkowymi**.

wyrazy skrajne

$$a : b = c : d$$

wyrazy środkowe

Twierdzenie 1.

W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych, czyli równość:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest równoważna równości $a \cdot d = b \cdot c$, gdzie $b \neq 0$ i $d \neq 0$.

Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych

Definicja 1.

Dwa równania określone w tej samej dziedzinie **są równoważne** wtedy, gdy mają takie same zbiory rozwiązań w tej dziedzinie.

Twierdzenie 1.

Jeśli po jednej stronie lub po obu stronach równania wykonamy występujące tam działania albo przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Twierdzenie 2.

Jeśli do obu stron równania dodamy (lub od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny równania, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Twierdzenie 3.
Jeśli obie strony równania pomnożymy (lub podzielimy) przez tę samą liczbę różną od zera lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny równania i którego wartość nie jest równa zeru, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych

Definicja 1.
Dwie nierówności z jedną niewiadomą x określone w tej samej dziedzinie **są równoważne** wtedy, gdy mają takie same zbiory rozwiązań w tej dziedzinie.

Twierdzenie 1.
Jeśli po jednej stronie lub po obu stronach nierówności wykonamy występujące tam działania albo przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

– Jeśli każdy z chłopców dostałby teraz od ojca taką samą liczbę znaczków (c), to w dalszym ciągu Adam miałby mniej znaczków niż Bartek:

jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$

– Jeśli każdy z tych chłopców oddałby taką samą liczbę znaczków (c) swojej młodszej siostrze, to również wtedy Adam miałby mniej znaczków niż Bartek:

jeśli $a < b$, to $a - c < b - c$

Twierdzenie 2.
Jeśli do obu stron nierówności dodamy (lub od obu stron nierówności odejmiemy) tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Można udowodnić, że

1) jeśli $a > b$ i $c > 0$, to $a \cdot c > b \cdot c$ oraz $a : c > b : c$
2) jeśli $a > b$ i $\underline{c < 0}$, to $a \cdot c < b \cdot c$ oraz $a : c < b : c$

Twierdzenie 3.

a) Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy (lub podzielimy) przez tę samą liczbę dodatnią lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności i które przyjmuje tylko wartości dodatnie dla liczb z dziedziny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

b) Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy (lub podzielimy) przez tę samą liczbę ujemną lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności i które przyjmuje tylko wartości ujemne dla liczb z dziedziny, oraz zmienimy zwrot nierówności na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.