

Działania arytmetyczne

Dodawanie $a + b = s$, gdzie a, b – składniki, s – suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Jeżeli $a < 0$ i $b < 0$, to $a + b < 0$.

Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to $a + b > 0$.

Odejmowanie $a - b = r$, gdzie a – odjemna, b – odjemnik, r – różnica

$$a - b = r \Leftrightarrow r + b = a$$

$$a - b = a + (-b)$$

$$0 - a = -a$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Mnożenie $a \cdot b = i$, gdzie a, b – czynniki, i – iloczyn

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ lub } b = 0$$

$$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ i } b > 0 \text{ lub } a > 0 \text{ i } b < 0$$

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ i } b < 0 \text{ lub } a > 0 \text{ i } b > 0$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$ab = ba$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

$$-(-a) = a$$

$$(-a)b = -(ab) = a(-b)$$

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

Dzielenie $a : b = q$, $b \neq 0$, gdzie a – dzielna, b – dzielnik, q – iloraz

Jeżeli $b \neq 0$, to $a : b = q \Leftrightarrow b \cdot q = a$.

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Jeżeli $b \neq 0$ i $a = 0$, to $\frac{a}{b} = 0$.

Dzielenie przez zero jest niewykonalne.

Kolejność działań arytmetycznych

Przy obliczaniu wartości wyrażeń niezawierających nawiasów wykonujemy najpierw mnożenia i dzielenia w kolejności ich występowania, a następnie dodawania i odejmowania w kolejności ich występowania.

Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych.

Zbiór liczb naturalnych $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Jeżeli dla liczb naturalnych dodatnich w , d , n zachodzi równość $w = d \cdot n$, to liczbę d nazywamy **dzielnikiem** liczby w , natomiast w jest **wielokrotnością** liczby d . Liczby d i n nazywamy też **czynniki** liczby w .

Mówimy też, że liczba w jest podzielna przez d .

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę naturalną większą od jedności, która ma dokładnie dwa dzielniki (jeden i siebie samą).

Liczbą złożoną nazywamy liczbę naturalną większą od jedności niebędącą liczbą pierwszą.

Liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Każda liczba naturalna większa od 2 albo jest liczbą pierwszą, albo można ją przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki iloczyn nazywamy **rozkładem na czynniki pierwsze**. Ten rozkład jest jednoznaczny.

Jeżeli a , b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich **największym wspólnym dzielnikiem** ($NWD(a, b)$) nazywamy największą z liczb naturalnych, przez którą dzieli się bez reszty każda z liczb a , b .

Liczby naturalne a , b nazywamy **względnie pierwszymi**, jeśli $NWD(a, b) = 1$.

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWD(224, 1890) = 2 \cdot 7 = 14$	Rozkładamy liczby a , b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy czynniki wspólne i mnożymy je. Otrzymany iloczyn to $NWD(a, b)$.

Jeżeli a , b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich **najmniejszą wspólną wielokrotnością** ($NWW(a, b)$) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, która dzieli się bez reszty przez a i przez b .

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWW(224, 1890) =$ $= 2^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^3 = 30\,240$	Rozkładamy liczby a , b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy wszystkie czynniki jednej liczby i dopisujemy do nich te czynniki z rozkładu drugiej liczby, których nie było w rozkładzie pierwszej. Iloczyn tak wybranych czynników to $NWW(a, b)$.

Cechy podzielności przez niektóre liczby

Dzielnik	Przykład	Cechy podzielności
2	$76\,548 = 2 \cdot 38\,274$	Ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.
3	$571\,215 = 3 \cdot 190\,405$ $5 + 7 + 1 + 2 + 1 + 5 = 21 = 3 \cdot 7$	Suma cyfr dzieli się przez 3.
4	$1\,547\,584\,964 = 4 \cdot 386\,896\,241$ $64 = 4 \cdot 16$	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 4.
5	$67\,334\,215 = 5 \cdot 13\,466\,843$	Ostatnią cyfrą jest 0 albo 5.

7	$164\,207\,393 = 7 \cdot 23\,458\,199$ $(393 + 164) - 207 = 350 = 7 \cdot 50$	Zaczynając od prawej strony, łączymy kolejno cyfry w grupy trzycyfrowe.
13	$7\,636\,878\,405 = 13 \cdot 587\,452\,185$ $(405 + 636) - (878 + 7) =$ $= 1041 - 885 = 156 = 13 \cdot 12$	Od sumy liczb utworzonych z grup stojących na miejscach nieparzystych odejmujemy sumę liczb z grup stojących na miejscach parzystych. Jeżeli różnica dzieli się przez 7 (13), to badana liczba też dzieli się przez 7 (13).
8	$4\,502\,744 = 8 \cdot 562\,843$ $744 = 8 \cdot 93$	Liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr dzieli się przez 8.
9	$51\,118\,884 = 9 \cdot 5\,679\,876$ $5 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8 + 8 + 4 = 36$	Suma cyfr dzieli się przez 9.
10	$2\,788\,890 = 10 \cdot 278\,889$	Ostatnia cyfra jest zerem.
11	$5\,773\,581 = 11 \cdot 524\,871$ $(8 + 3 + 7) - (1 + 5 + 7 + 5) =$ $= 18 - 18 = 0 = 11 \cdot 0$	Różnica między sumą cyfr stojących na miejscach parzystych i sumą cyfr stojących na miejscach nieparzystych jest liczbą podzielną przez 11.
25	$76\,508\,475 = 25 \cdot 3\,060\,339$ $75 = 25 \cdot 3$	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 25.

Zbiór liczb całkowitych $C = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}$

Dla dowolnych liczb całkowitych w i d ($d > 0$) istnieją takie liczby całkowite n i r , że $w = nd + r$, $r < d$.

Liczbę r nazywamy **resztą** z dzielenia liczby w przez d .

Liczby całkowite podzielne przez dwa nazywamy liczbami **parzystymi**, zaś niepodzielne przez dwa nazywamy liczbami **nieparzystymi**.

Zbiór liczb wymiernych W

Liczbami wymiernymi nazywamy liczby, które można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne, okresowe lub skończone.

Działania na ułamkach

Niech a i b będą dowolnymi liczbami całkowitymi i $b \neq 0$, wtedy $a : b = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, k \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$$

Zbiór liczb niewymiernych NW

Liczbami niewymiernymi nazywamy liczby, których nie można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.

Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie dziesiętne, które jest nieskończone i nieokresowe.

Przykłady liczb niewymiernych: $\sqrt{2}$; π ; e ; $0,101001000100001\dots$

Zbiór liczb rzeczywistych R

Liczby wymierne i liczby niewymierne razem tworzą zbiór **liczb rzeczywistych**.

Zbiór Z zawarty w zbiorze liczb rzeczywistych R nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m nie większa od dowolnej liczby zbioru Z . O liczbie m mówimy wówczas, że ogranicza zbiór Z z dołu. Największą z liczb ograniczających zbiór Z z dołu nazywamy **kresem dolnym** tego zbioru.

Zbiór Z zawarty w zbiorze liczb rzeczywistych R nazywamy **ograniczonym z góry**, jeżeli istnieje liczba rzeczywista m nie mniejsza od dowolnej liczby zbioru Z . O liczbie m mówimy wówczas, że ogranicza zbiór Z z góry. Najmniejszą z liczb ograniczających zbiór Z z góry nazywamy **kresem górnym** tego zbioru.

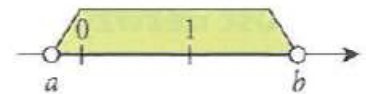
Każdej liczbie rzeczywistej jest przyporządkowany dokładnie jeden punkt na osi liczbowej.

Każdemu punktowi na osi liczbowej jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista.

Przedziały liczbowe

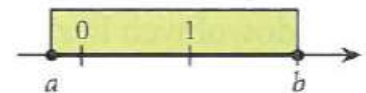
Przedział otwarty $(a; b)$

$$a < x < b$$



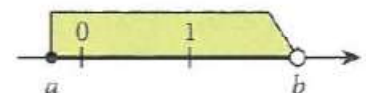
Przedział domknięty $\langle a; b \rangle$

$$a \leq x \leq b$$



Przedział lewostronnie domknięty
(prawostronnie otwarty) $\langle a; b \rangle$

$$a \leq x < b$$



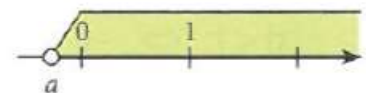
Przedział prawostronnie domknięty
(lewostronnie otwarty) $(a; b]$

$$a < x \leq b$$



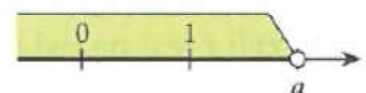
Przedział lewostronnie otwarty
nieograniczony $(a; +\infty)$

$$x > a$$



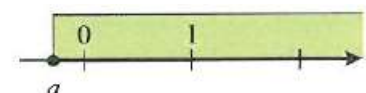
Przedział prawostronnie otwarty
nieograniczony $(-\infty; a)$

$$x < a$$



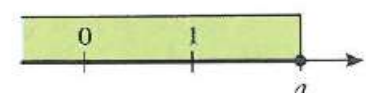
Przedział lewostronnie domknięty
nieograniczony $\langle a; +\infty \rangle$

$$x \geq a$$



Przedział prawostronnie domknięty
nieograniczony $(-\infty; a]$

$$x \leq a$$



Własności równości w zbiorze R

$$a = a$$

a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

$$\text{Jeżeli } a = b, \text{ to } b = a.$$

$$\text{Jeżeli } a = b \text{ i } b = c, \text{ to } a = c.$$

$$\text{Jeżeli } a = b, \text{ to } a + c = b + c.$$

$$\text{Jeżeli } a = b \text{ i } c = d, \text{ to } a + c = b + d.$$

$$\text{Jeżeli } c \neq 0, \text{ to } \left(a = b \Leftrightarrow ac = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \right).$$

Własności nierówności w zbiorze R

$$\text{Jeżeli } a < b \text{ i } b < c, \text{ to } a < c.$$

a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

$$\text{Jeżeli } a < b, \text{ to } a + c < b + c.$$

$$\text{Jeżeli } a < b, \text{ to } a - c < b - c.$$

$$\text{Jeżeli } c > 0, \text{ to } \left(a < b \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \right).$$

$$\text{Jeżeli } c < 0, \text{ to } \left(a < b \Leftrightarrow ac > bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \right).$$

$$\text{Jeżeli } a < b \text{ i } c < d, \text{ to } a + c < b + d.$$

III RÓWNANIA

A) KOLEJNOŚĆ CZYNNOŚCI PRZY ROZWIĄZywANIU RÓWNAŃ :

- pozbywamy się nawiasów
- pozbywamy się ułamków, mnożąc przez mianownik lub NWW
- przenosimy wyrazy równania na drugą stronę zmieniając znak na przeciwny
- możemy pomnożyć lub podzielić obie strony równania przez tę samą liczbę różną od zera np.:

$$-\frac{2x+5}{6} + \frac{5(x-2)}{4} - \frac{2(2x+1)}{3} - 1 = 0$$

$$-\frac{2x+5}{6} + \frac{5x-10}{4} - \frac{4x+2}{3} - 1 = 0 \quad \bullet /12$$

$$-\frac{12(2x+5)}{6} + \frac{12(5x-10)}{4} - \frac{12(4x+2)}{3} - 12 \cdot 1 = 0 \cdot 12$$

$$-4x - 10 + 15x - 30 - 16x - 8 - 12 = 0$$

$$-4x + 15x - 16x = 10 + 30 + 8 + 12$$

$$-5x = 60 \quad :/-5$$

$$x = -12$$

B) ILOŚĆ ROZWIĄZAŃ

- np.:
- 1) $x = 2$ - jedno rozwiązanie (równanie oznaczone)
 - 2) $0 \cdot x = 0$ - nieskończenie wiele rozwiązań (równanie nieoznaczone)
 - 3) $0 \cdot x = 2$ - brak rozwiązań (równanie sprzeczne)

Rozwiąż równania:

$$3.1 \quad 2y[3(y-1) - 1] = 3y(2y+1) - 22 \quad (\text{odp.: } y = 2)$$

$$3.2 \quad 2z(z+3) + (z+1)(z-2) = (z-1)(3z+2) \quad (\text{odp.: } z = 0)$$

$$3.3 \quad \frac{3u(u+1)}{2} - u(4u-3) = 2\frac{1}{2}(1-u)(u+1) \quad (\text{odp.: } u = \frac{5}{9})$$

$$3.4 \quad \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} = \frac{x-5}{2} + \frac{x-4}{8} \quad (\text{odp.: } x = 22)$$

$$3.5 \quad \frac{3x+5}{6} + \frac{6x+2}{4} - 2 = 0$$

(odp.: $x = \frac{1}{3}$)

$$3.6 \quad \frac{x-2}{x+2} = \frac{2x-7}{2x-1}$$

(odp.: $x = 8$)

$$3.7 \quad \frac{x-5}{x-7} = \frac{x+1}{x+3}$$

(odp.: $x = 2$)

$$3.8 \quad 2x - \frac{(3x-2)(3x+2)}{3} = 3 - 3(x-1)^2$$

(odp.: $x = \frac{1}{3}$)

$$3.9 \quad (3x+1)^2 - \frac{1}{3}(x-2) \cdot (-6) = (3x-2)^2 - (4x-8) : (-2)$$

(odp.: $x = \frac{1}{6}$)

$$3.10 \quad x - \frac{1}{2}(x-3)(x+3) = 1 - \frac{(x-1)(x+1)}{2}$$

(odp.: $x = -3$)

$$3.11 \quad \frac{(x-2)(x+2)}{5} - \frac{(x-5)^2}{2} = \frac{2}{5}x - 13,6 - \frac{3}{10}x^2$$

(odp.: $x = -\frac{3}{46}$)

$$3.12 \quad 1 + 2x^2 + (x+5)^2 - 2(x+7)(x-7) = (x-6)^2$$

(odp.: $x = -4$)

$$3.13 \quad (8x+2)^2 - (8x+5)(8x-5) = (2x+3)^2 - (2x+10)(2x-10)$$

(odp.: $x = 4$)

$$3.14 \quad 2(x-1)^2 - 3(x+1)^2 = 1 - \frac{(2-x)^2}{2} - \frac{1}{2}x(1+x)$$

(odp.: $x = 0$)

$$3.15 \quad (x-2)^2 - x = (x-3)(x+3) + \sqrt{64}$$

(odp.: $x = 1$)

$$3.16 \quad \frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{3} = \frac{1}{6}(x-3)^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

$$3.17 \quad \frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{2(x-2)^2}{3} - (x+1)^2 = 1 - \frac{x(x+2)}{6}$$

(odp.: $x = 7$)

(odp.: $x = -1\frac{7}{12}$)

$$3.18 \quad 5 - \frac{3x-14}{6} + \frac{4x-3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)3}{2} + 4 - 3x$$

(odp.: $x = 1$)

$$3.19 \quad \frac{2(x-1)+3(4-x)}{3} + \frac{5(2x+1)-2(3+4x)}{2} = 3$$

(odp.: $x = \frac{1}{4}$)

$$3.20 \quad [(25x^3 + 15x^2 + 5x) : 5x - 5x^2]^3 = 3x(3x+1)^2 + 3(3x^2 - 1)$$

(odp.: $x = -\frac{2}{3}$)

$$3.9 \quad (3x+1)^2 - \frac{1}{3}(x-2) \cdot (-6) = (3x-2)^2 - (4x-8) : (-2) \quad (\text{odp.: } x = \frac{1}{6})$$

$$3.10 \quad x - \frac{1}{2}(x-3)(x+3) = 1 - \frac{(x-1)(x+1)}{2} \quad (\text{odp.: } x = -3)$$

$$3.11 \quad \frac{(x-2)(x+2)}{5} - \frac{(x-5)^2}{2} = \frac{2}{5}x - 13,6 - \frac{3}{10}x^2 \quad (\text{odp.: } x = -\frac{3}{46})$$

$$3.12 \quad 1 + 2x^2 + (x+5)^2 - 2(x+7)(x-7) = (x-6)^2 \quad (\text{odp.: } x = -4)$$

$$3.13 \quad (8x+2)^2 - (8x+5)(8x-5) = (2x+3)^2 - (2x+10)(2x-10) \quad (\text{odp.: } x = 4)$$

$$3.14 \quad 2(x-1)^2 - 3(x+1)^2 = 1 - \frac{(2-x)^2}{2} - \frac{1}{2}x(1+x) \quad (\text{odp.: } x = 0)$$

$$3.15 \quad (x-2)^2 - x = (x-3)(x+3) + \sqrt{64} \quad (\text{odp.: } x = 1)$$

$$3.16 \quad \frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{3} = \frac{1}{6}(x-3)^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

$$3.17 \quad \frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{2(x-2)^2}{3} - (x+1)^2 = 1 - \frac{x(x+2)}{6} \quad (\text{odp.: } x = 7)$$

$$3.18 \quad 5 - \frac{3x-14}{6} + \frac{4x-3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^3}{2} + 4 - 3x \quad (\text{odp.: } x = 1)$$

$$3.19 \quad \frac{2(x-1)+3(4-x)}{3} + \frac{5(2x+1)-2(3+4x)}{2} = 3 \quad (\text{odp.: } x = \frac{1}{4})$$

$$3.20 \quad [(25x^3 + 15x^2 + 5x) : 5x - 5x^2]^3 = 3x(3x+1)^2 + 3(3x^2 - 1) \quad (\text{odp.: } x = -\frac{2}{3})$$

+ 1. Doprowadź następujące wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$

b) $(x+4)^2 + 4(x-1)^2 =$

c) $3(2-y)^2 + 4(y-5)^2 =$

d) $5(3-5a)^2 - 5(3a-7)(3a+7) =$

- e) $(m+1)^2 + 3(m-1)^2 - 5(m+1)(m-1) =$
 f) $(a-1)^2 - 4(a+1)^2 - 6(a+1)(a-1) =$
 g) $-(3+x)^2 + 5(1-x)^2 - 3(1-x)(1+x) =$
 h) $(x-2)(x+2) - (x-3)^2 + (x+1)^2 =$

2. Oblicz:

- a) $(x-2)^2 + (2x-3)^2 =$
 b) $(3y-1)^2 - (2y-5)(2y+5) - 3y^2 =$
 c) $(5a-2)(5a+2) - (3a-1)^2 + 4a^2 =$
 d) $(4b+3)^2 - 2(b-3)(b+3) - (b-1)^2 =$
 e) $5(x+2)^2 - 3(x-3)^2 - (x+5)(x-5) =$
 f) $6(y-2)(y+2) + (3y-2)^2 - 4(y-1)^2 =$
 g) $2(2a+b)^2 - (2b+a)^2 + (a-2b)^2 =$
 h) $(4x-y)^2 + (2y-3x)^2 - (5x-y)(5x+y) =$

3. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

- a) $(2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) - (2x-3)^2 =$
 b) $3(a-4)^2 - (5a-3)^2 + (3a-2)(2+3a) =$
 c) $-(2-x)^2 - 8(1-x)^2 + 5(1+x)(1-x) =$
 d) $4a + (7a-1)(7a+1) - (4a-9)^2 - 3(5a-1)^2 =$
 e) $5[(x-5)^2 - (3x+7)^2] - (5x-2)(5x+2) =$
 f) $(3x-4)(5x+1) - (3x-4)^2 + 2(5x+1)^2 + (x-2)(x+2) =$
 g) $2(a-5b)^2 + 3a(b-3)^2 - (4a-5)(4a+5) =$
 h) $(2a-5b)^2 - 4(2a+5b)^2 + (5b-3)(3b-2) - (2a-5)(2a+5) =$

4. Doprowadź następujące wyrażenia do najprostszej postaci, a następnie oblicz ich wartości liczbowe dla podanych wartości zmiennych.

- a) $3(x+2)^2 - 5(2x-1)^2 + 3x$ $x = -2,$
 b) $2(x-1)(x+1) - 4(5x-2)^2 - 4x(x-1) =$ $x = 0,5,$
 c) $(2k-3)^2 - 4k(2k-6) + (k-5)^2 =$ $k = 3,$
 d) $2(2a-3)^2 - (2a+3)^2 - 5(a+2)(a-2) =$ $a = \frac{1}{4},$
 e) $5(1-y)^2 - (3+y)^2 - 3(1+y)(1-y) =$ $y = -4,$
 f) $3a(2a-5)^2 - 4a(3-2a)(3+2a) - 5a^3 =$ $a = -1,$
 g) $3(4a-b)^2 + 4(a+3b)^2 - 2(a+b)(a-b) =$ $a = -2, b = 3,$
 h) $(3x-y)(3x+y) - (3x-2y)^2 + 5(2x-y)^2 =$ $x = -1, y = 1.$

5. Doprowadź następujące wyrażenia do najprostszej postaci, a następnie

oblicz ich wartości liczbowe dla $a = -3, b = -\frac{1}{2}, x = 4, y = \frac{1}{2}$:

- a) $(x^2+2)^2 - (x-2)(x+2)(x^2+4) =$
 b) $(a^2-2)^2 - (a+1)(a-1)(a^2+1) =$
 c) $(b-1)(b+2)^2 - (b+3)^2 - b^3 =$
 d) $(2y-1)^2(y-2) - (2y-3)(2y+3)y + 3y^2 =$
 e) $(2a+b)^2 - (b-3a)(b+3a) - 4ab =$
 f) $(4x+b)^2 + (x-2b)(x+2b) \cdot 4 - 10xb =$
 g) $(x-3)(x+3) - 4x(x-2y) + (2x-y)(x+y) + y^2 =$
 h) $(2y^2-3b)^2 - (2y-b)(2y+b)y + 12by^2 + 4y^3 =$

6. O ile zwiększy się pole kwadratu o boku a cm, gdy jego bok zwiększymy o 4 cm? Napisz odpowiedź w postaci wyrażenia, doprowadź je do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = 6$ cm.
7. O ile zwiększy się pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi x cm, jeżeli jego krawędź zwiększymy o 5 cm? Zapisz odpowiednie wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = 10$ cm.

Odpowiedzi:

1. a) $4xy$; b) $5x^2 + 20$; c) $7y^2 - 52y + 112$; d) $80a^2 - 150a + 290$; e) $-m^2 - 4m + 9$; f) $-9a^2 - 10a + 3$; g) $7x^2 - 16x - 7$; h) $x^2 + 8x - 12$. 2. a) $5x^2 - 16x + 13$; b) $2y^2 - 6y + 26$; c) $20a^2 + 6a - 5$; d) $13b^2 + 26b + 26$; e) $x^2 + 38x + 18$; f) $11y^2 - 4y - 24$; g) $8a^2 + 2b^2$; h) $6y^2 - 20xy$. 3. a) $-9x^2 + 16x - 7$; b) $-13a^2 + 6a + 35$; c) $-14x^2 + 20x - 7$; d) $-42a^2 + 106a - 85$; e) $-65x^2 - 260x - 116$; f) $57x^2 + 27x - 22$; g) $-14a^2 - 38ab + 50b^2 + 3ab^2 + 27a + 25$; h) $-16a^2 - 60b^2 - 19b + 31 - 100ab$. 4. a) $-17x^2 + 35x + 7$, -131 ; b) $-102x^2 + 84x - 18$, $-1\frac{1}{2}$; c) $-3k^2 + 2k + 34$, 13 ; d) $-a^2 - 36a + 29$, $19\frac{15}{16}$; e) $7y^2 - 16y - 7$, 169 ; f) $23a^2 - 60a^2 + 39a$, -122 ; g) $50a^2 + 41b^2$, 569 ; h) $20x^2 - 8xy$, 28 . 5. a) $4x^2 + 20$, 84 ; b) $-4a^2 + 5$, -31 ; e) $2b^2 - 6b - 13$, $-9,5$; d) $-9y^2 + 18y - 2$, $4\frac{3}{4}$; e) $13a^2$, 117 ; f) $20x^2 - 2bx - 15b^2$, $320\frac{1}{4}$; g) $-x^2 + 9xy - 9$, -7 ; h) $4y^2 + b^2y + 9b^2$, $2\frac{5}{8}$.

$$\begin{aligned} \text{b)} & 4x - 3(x + 7) - 5x + 2(x - 1) = 9, \\ \text{c)} & (x + 2)^2 - 2x + 32 = (x - 4)^2, \\ \text{d)} & (2x - 3)(2x + 3) - 4x(x + 2) + 49 = -4x, \\ \text{e)} & \frac{1}{2}x - 7 = \frac{x - 36}{3}, \\ \text{f)} & \frac{5x - 8}{2} + (x - 3)^2 - x^2 = 12. \end{aligned}$$

8. Rozwiąż i podaj ilustrację geometryczną rozwiązania następujących nierówności:

- $5(y - 1) - 4(y + 3) - 5 < 3(y - 1),$
- $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)^2 > 5x - 3,$
- $(3x + 2)(3x - 2) - (3x + 4)^2 + 6x(x - 1) < 2x(3x + 5),$
- $\frac{2(x - 1) + 3(4 - x)}{3} + \frac{5(2x + 1) - 2(3 + 4x)}{2} > 3,$
- $\frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{4}(2x - 9) < \frac{1}{12},$
- $x(x + 3) - 3x(x + 1) \geq 0,$
- $(x + 3)^2 - 2x(x + 3) > 9,$
- $3x^2(x + 2) - 3(x - 1)(x^2 + x + 1) \geq 3.$

*9. Rozwiąż równania:

- $[(3x - 1) - (2x + 1)]^2 - x(x - 1) = 0,$
- $[3x(x^2 - x + 2) - 3x^3 + 3x^2 + 1]^2 - (6x + 2)(6x - 2) = 1,$
- $3\{3[3(3x - 2) - 2] - 2\} - 2 = 1,$
- $(x + 3)^2(x + 3) + (2x - 5)^2 = (x + 2)(x - 2)(x + 3) - 2(1 - 5x^2),$
- $(0,5x - 1)(0,5x + 1)4x + 3x^2 = (x + 1)(x + 1)^2 + 6.$

*10. Rozwiąż i podaj ilustrację geometryczną rozwiązania następujących nierówności:

- $\frac{3(x - 1)^2}{2} - \frac{2(x + 3)^2}{3} < \frac{5(x^2 - 8x - 3)}{6},$
- $\frac{(x - 1)^2}{2} - (x - 1)(x + 1) \geq -\frac{(x + 2)^2}{2},$
- $\frac{(x - 2)(x + 2)}{2} - \frac{(x - 3)^2}{4} \leq \frac{(x - 1)^2}{4},$
- $x[4(x - 2) - 3(x + 1)] > (x - 1)(x + 1) + 23.$

Odpowiedzi:

2. a) -2 , b) $-0,5$, c) -1 , d) 1 , e) -7 , f) 1 . 3. a) $x > -6$, b) $x \leq 4$, c) $x < 2$, d) $x \geq -1$, e) $x > -1$, f) $x \leq 3$, g) $x < -12$, h) $x < 11$. 4. a) $0,5$, b) $x < 1$, c) 3 , d) $x \leq 8$, e) -2 , f) $x > 4$, g) $x \leq 0,5$, h) 1 . 5. a) 6 , b) 36 , c) 9 , d) 15 , e) 10 , f) 3 , g) -1 , h) -3 . 6. a) $x > -7$, b) $x \leq 1\frac{1}{4}$, c) brak rozw. d) $x \geq 15$. 7. a) 4 , b) -16 , c) -2 , d) 10 , e) -30 , f) -2 . 8. a) $y > -9,5$, b) $x > 10$, c) $x > -0,5$, d) $x > 0,25$, e) $x < -7$, f) $x = 0$, g) brak rozw. h) $x \in \mathbb{R}$. 9. a) $1\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{3}$, c) 1 , d) -6 , e) -1 . 10. a) $x > -6$, b) $x \geq -3,5$, c) $x \leq -2\frac{1}{4}$, d) $x < -2$.

IV.4. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI Z WZORAMI SKRÓCONEGO MNOŻENIA

1. Rozwiąż równania:

- a) $x^2 - (x - 2)^2 = 16$,
b) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 21$,
c) $x(x - 1) = (x + 1)^2 + 2$,
d) $(x - 3)^2 = (x - 1)(x + 2) - 3$,
e) $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 1) = 6$,
f) $(x - 3)^2 - x^2 = 3$,
g) $(x - 0,2)^2 = x^2 + 0,44$.

2. Rozwiąż i sprawdź następujące równania:

- a) $(x - 1)^2 - x^2 = 7$,
b) $(x - 1)(x + 1) - x^2 = 8x$,
c) $3(x + 2)^2 - 3x^2 = 18$,
d) $2(x - 4)^2 - 2x^2 = 16$,
e) $5(x + 7)^2 - 5x^2 = 105$,
f) $6x^2 - 6(x + 3)(x - 3) + 3x = 39$,
g) $4x^2 - 4(x + 5)^2 = 20$,
h) $(2x - 7)(2x + 7) + 5x = 4x^2 + 11$,
i) $(2x + 3)^2 - 4(x^2 + 8) = 13$,
j) $(3x - 2)^2 - 3(3x^2 - 5) = -5$.

3. Rozwiąż następujące nierówności i podaj ilustrację geometryczną ich rozwiązania na osi liczbowej:

- a) $(x + 2)^2 - x^2 > 4$,
b) $(x - 5)^2 - x^2 < 21$,
c) $(x + 4)(x - 4) - x^2 < 2x$,
d) $2(x - 6)^2 - 2x^2 \geq 10 + 7x$,
e) $3(x + 8)^2 - 3x^2 \leq 16 + 4x$,
f) $9x^2 - 9(x - 2)^2 > 36$,
g) $7x^2 - 7(x + 9)(x - 9) < 2x + 561$,
h) $(x - 5)(x + 5) - (x + 3)^2 > -4$.

4. Rozwiąż i sprawdź następujące równania:

- a) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 95$,
b) $(x + 5)^2 = 48 + (x - 1)^2$,
c) $(y + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5 + 2y^2$,
d) $(x + 4)^2 - (x + 8)(x - 8) = 96$,
e) $-(x - 0,4)(x + 0,4) + (x - 0,4)^2 = -0,08$,
f) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 28$,
g) $5(x + 3)^2 - 5(x - 4)(x + 4) + 12 = 77$,
h) $(2y - 1)(2y + 1) - (2y - 3)^2 + 12y = 38$.

5. Rozwiąż następujące nierówności:

- a) $(x - 1)^2 - 7 > x^2 - 6$,
b) $(x - 2)(x + 2) < -3x + 8 + x^2$,
c) $(x + 5)^2 - 35 - x(x - 1) \geq 12$,
d) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 21$,
e) $(x - 1)^2 + 7 \geq (x + 4)^2$,
f) $x^2 + 2x + (x + 3)(3 - x) < 13$,
g) $(x - 3)^2 > (x - 1)(x + 2) + 4$,
h) $(x - 4)(x + 4) - x^2 < 2(x - 3)$.

*6. Rozwiąż następujące równania:

- a) $(x + 5)^2 - (x + 3)(x - 3) + 56 = -30$,
- b) $-5(x - 2) - (2x - 3)^2 + 4(x - 1)(x + 1) = 18$,
- c) $(3x - 1)^2 + 5(4 - x^2) - (2x - 5)(2x + 5) = 10$,
- d) $2(x - 8)(x + 8) - 7(x^2 - 2) + 5(x - 3)^2 = -9$,
- e) $2x(x + 3) + (x + 4)^2 = (x - 1)(3x + 2) + 3$,
- f) $(2x - 3)(x + 5) - 2(x + 2)^2 = 3x - 3$,
- g) $4x^2 - 2x(x + 5) = 2(x + 3)^2 + 4$,
- h) $(3x + 2)(3x - 2) - (3x + 4)^2 + 6x(x - 1) = 2x(3x + 5)$,
- i) $3x(2x - 3) - 5(x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) = 0$,
- j) $(4x + 1)(4x - 1) - 4(2x - 3)^2 + 12 = -2x$,
- k) $(0,5x - 1)^2 - 0,5x(0,5x + 3) = -2x$,
- l) $5(x + 3)^2 - 5(x - 4)(x + 4) - 5(2x + 8) = -15$.

*7. Rozwiąż następujące nierówności i podaj ilustrację ich rozwiązania na osi liczbowej:

- a) $3x(x - 1) + (x + 1)^2 - 5x > (2x - 1)^2$,
- b) $6x(x^2 - x - 1) - (x + 1)(x - 1) < (2x + 1)^2 + (6x - 11)x^2$,
- c) $(0,2x - 1)^2 - (1 + 0,2x)^2 \leq 1,6$,
- d) $(1,3x + 3)^2 - 1,69x(x + 5) + 0,75 \geq 0$,
- e) $2,5x(3x - 2) - (0,5x + 1)^2 - 8x < 7,25x^2 + 6$,
- f) $(1 + 6x)^2 + (2 + 8x)^2 \geq (1 + 10x)^2$,
- g) $7(6x - 1) - 2(x + 3)^2 < 3(x + 2)^2 - 5(x - 1)^2$.

Odpowiedzi:

1. a) 5; b) 2; c) -1; d) 2; e) 2; f) 1; g) 1,2. 2. a) -3; b) $-\frac{1}{8}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) -2; f) -5; g) -3; h) 12; i) 3; j) 2. 3. a) $x > 0$; b) $x > 0,4$; c) $x > -8$; d) $x \leq 2$; e) $x \leq -4$; f) $x > 2$; g) $x > 3$; h) $x < -5$; 4. a) 9; b) 2; c) 2; d) 2; e) 0,5; f) -6; g) -2; h) 2. 5. a) $x < 0$; b) $x < 4$; c) $x \geq 2$; d) $x \leq 3$; e) $x \leq -0,8$; f) $x < 2$; g) $x < 1$; h) $x > -5$. 6. a) -12; b) 3; c) 6; d) -2; e) -1; f) -5; g) -1; h) $-\frac{1}{2}$; i) 1; j) 0,5; k) 2; l) -5. 7. a) $x < 0$; b) $x > 0$; c) $x > -2$; d) $x \leq 15$; e) $x > -0,5$; f) $x \geq -\frac{1}{6}$; g) $x < 4$.

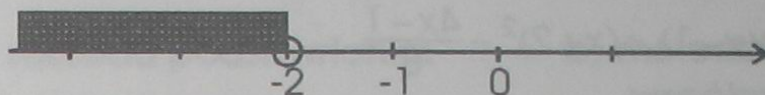
IV NIERÓWNOŚCI

a) Pamiętaj ! Jeżeli mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to zmieniamy znak nierówności na przeciwny, np.:

$$-2x > 4 : / -2$$

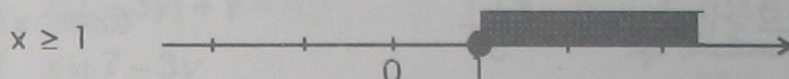
$$x < -2$$

b) Rozwiązanie nierówności przedstawiamy na osi liczbowej



$$x \in (-\infty; -2)$$

c) Jeżeli mamy nierówność nieostrą zwróć uwagę na zapisanie przedziału, np.:



$$x \in [1; +\infty)$$

Rozwiąż następujące nierówności i zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej:

4.1 $x - \frac{2(x+1)}{3} < 1 - x$ (odp.: $x < 1\frac{1}{4}$)

4.2 $3,5 - \frac{x+1,2}{12} < 1,5 - \frac{1,8-x}{18}$ (odp.: $x > 14,4$)

4.3 $\frac{3x+5}{4} - 1 \leq \frac{x-2}{3} + x$ (odp.: $x \geq 1\frac{4}{7}$)

4.4 $\frac{2x-1}{2} - \frac{5-x}{3} > \frac{4x}{5} + \frac{5(x-1)}{6}$ (odp.: $x < -4\frac{4}{9}$)

4.5 $(x-2)^2 + 1 < \frac{x-8}{3} + (x-1)(x+1)$ (odp.: $x > 2$)

4.6 $\frac{(x+1)(x-1) - (x+2)^2}{3} > 2x+4$ (odp.: $x < -1,7$)

4.7 $5(1-3x) + 2x < 3(2-7x) + 2(4x+11)$ (odp.: $x \in \mathbb{R}$)

4.8 $-3x(x+5) + (2x-1)^2 > (x-3)(x+3) - (10x-13)$ (odp.: $x < -\frac{1}{3}$)

$$4.9 \quad (3x-2)^2 - 5x - (3x+2)(3x-2) < (2-3x)^2 - 9x^2 + 4 \quad (\text{odp.: } x > 0)$$

$$4.10 \quad (x+1)^2 - (x+2)(x-2) - 3\left(x+\frac{2}{3}\right) > (x-2)^2 - x^2 + 5x \quad (\text{odp.: } x < -\frac{1}{2})$$

$$4.11 \quad -3x(x+5) + (2x+1)^2 + 2x \geq (x-3)^2 - 5x - 20 \quad (\text{odp.: } x \geq 1)$$

4.12 Wyznacz zbiór A liczb całkowitych jednocyfrowych spełniających tę nierówność:

$$\frac{x+2}{4} + (x+1)(x-1) < (x+2)^2 - \frac{4x-1}{3} \quad (\text{odp.: } x > -2)$$

$$4.13 \quad \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(x-3)(x+3)}{6} \leq x - 3,5 + \frac{1}{12}x^2 \quad (\text{odp.: } x \geq 3)$$

$$4.14 \quad \frac{2}{3} - \frac{x(3x+2)}{6} < \frac{1}{2}x(1+x) - \frac{(2x-1)(2x+1)}{4} \quad (\text{odp.: } x > \frac{1}{2})$$

$$4.15 \quad (3x+1)^2 - \frac{x-3}{2} \leq (3x-4)^2 - \frac{x+1}{3} \quad (\text{odp.: } x \leq \frac{79}{170})$$

$$4.16 \quad [x(x+1) - (x-1)^2]^2 < (\sqrt{5x^2} - 1)(\sqrt{5x^2} + 1) + 4(x+1)^2 - 2 \quad (\text{odp.: } x > 0)$$

$$4.17 \quad (\sqrt{2x} - \sqrt{3})(\sqrt{2x} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2x} - \sqrt{3})^2 < 2(\sqrt{6x} - 1) + x \quad (\text{odp.: } x > -4)$$

$$4.18 \quad 2 + 3\left[\frac{3x+2}{5} - 2\left(\frac{2x-2}{5} - 1\right)\right] \geq 8 \quad (\text{odp.: } x \leq 6)$$

$$4.19 \quad \left(\frac{3x-2}{2}\right)^2 - (x+1)^2 < \frac{5}{4}(x-1)(x+1) - \left(4\frac{1}{2}\right)^2 \quad (\text{odp.: } x > 4,3)$$

$$4.20 \quad \frac{2x-1}{3} + (x+2)(x-2) < x(x-1) - \frac{x+1}{2} \quad (\text{odp.: } x < 1\frac{10}{13})$$

$$4.21 \quad \frac{4}{3}x^2 - \frac{(2x-1)^2 - 3}{4} \leq x + \frac{(x+1)^2}{3} \quad (\text{odp.: } x \geq \frac{1}{4})$$

$$4.22 \quad 3(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1) - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3-x}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$4.23 \quad 16\left(0,25x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1-x}{3} \leq \frac{x(1-x)}{2} + \frac{3}{2}(x+2)(x-2) \quad (\text{odp.: } x \geq -4)$$

$$(\text{odp.: } x \geq 3\frac{31}{73})$$