



Pytania i zadania

1. Jakie znasz podstawowe własności relacji równości i relacji nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych?
2. Podaj przykłady nierówności o tym samym zwrocie i nierówności o zwrocie przeciwnym.
3. Zbadaj, która z liczb jest większa:
a) 2 czy $3\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $3 + 2\sqrt{5}$ czy $5 + 3\sqrt{2}$; c) $-\frac{1}{10}$ czy $-\frac{1}{100}$; d) $\frac{22}{7}$ czy 3,1429.
4. Wykaż, że jeżeli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.
5. Rozstrzygnij, czy dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d , jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$.
6. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie oraz $a < b$ i $c < d$, to $ac < bd$.
7. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c, d są ujemne oraz $a < b$ i $c < d$, to $ac > bd$.
8. Wykaż, że:
a) $\left(a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0\right)$ i $\left(a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 0\right)$;
b) $\left(a^2 < b^2 \text{ i } a \cdot b > 0\right) \Leftrightarrow (0 < a < b \text{ lub } b < a < 0)$.
- 9*. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności $a + b < c + d$, $b + c < d + e$, $c + d < e + a$, $d + e < a + b$. Która z liczb a, b, c, d jest najmniejsza, a która największa?
- 10*. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności $a + b + c \leq 3d$, $b + c + d \leq 3a$, $c + d + a \leq 3b$, $d + a + b \leq 3c$, to są równe.

7. Dowodzenie nierówności

W poprzednim podrozdziale przypomnieliśmy sobie szereg elementarnych własności relacji nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych. Niektóre z nich zawarte są w podanych na końcu zadaniach (zob. zadania 4, 6, 7 i 8).

Wiemy zatem, że nierówności o tym samym zwrocie wolno dodawać stronami, ale **nie wolno odejmować!** Przykładowo, prawdziwe są nierówności $8 < 10$ i $2 < 7$, ale nie jest prawdziwa nierówność $8 - 2 < 10 - 7$, to jest nierówność $6 < 3$.

Wiadomo też, że można mnożyć stronami nierówności o zgodnym zwrocie między liczbami tego samego znaku, przy czym jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$, natomiast gdy $a < b < 0$ i $c < d < 0$, to $ac > bd$.

Nie wolno mnożyć nierówności o tym samym zwrocie między liczbami przeciwnych znaków, to znaczy nieprawdą jest, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d , jeśli $a < 0 < b$ i $(0 < c < d \text{ lub } c < 0 < d)$, to $ac < bd$. Na przykład, z prawdziwych nierówności $-3 < 4$ i $2 < 3$ musiałaby wtedy wynikać nierówność $-3 \cdot 2 > 4 \cdot 3$ albo z nierówności $-3 < 4$ i $-2 < 3$ – nierówność $-3 \cdot (-2) > 4 \cdot 3$.

Nie wolno też dzielić nierówności stronami; nie jest prawdą, iż dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d jeśli $a < b$ i $c < d$, to $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, gdyż na przykład z nierówności $6 < 15$ i $2 < 5$ (oczywiście prawdziwych!) musiałaby wynikać nierówność $\frac{6}{2} < \frac{15}{5}$, która, jak widzimy, nie zachodzi.

Obecnie zajmujemy się dowodzeniem rozmaitych nierówności z zastosowaniem zarówno poznanych własności, jak też innych oczywistych faktów. Przejdźmy zatem od razu do rzeczy.

Przykład 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

oraz rozstrzygnij, kiedy $a^2 + b^2 = 2ab$.

Rozwiązanie:

□ Zauważ, że $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Stąd $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ i ostatecznie $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Ponadto widzimy, że

$$a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b. \quad \square$$

Przykład 2. Udowodnij, że jeżeli $a \cdot b > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, przy czym $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Rozwiązanie:

□ Wiemy, że dla każdych liczb a i b prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Po podzieleniu obu jej stron przez $ab > 0$ otrzymujemy nierówność $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab}$, czyli nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Ponadto widzimy, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$. □

Przykład 3. Wykaż, że dla każdych trzech liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Rozwiązanie:

□ Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzą nierówności $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

$$b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad c^2 + a^2 \geq 2c, \quad \text{które dodane do siebie stronami dają nierówność}$$

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca, \quad \text{czyli nierówność}$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca).$$

Stąd po podzieleniu obu jej stron przez 2 otrzymujemy żadaną nierówność. □

Przykład 4. Udowodnij, że jeżeli $a \geq b$ i $c \geq d$, to $ac + bd \geq ad + bc$.

Rozwiązanie:

□ Wykażemy, że $ac + bd - ad - bc \geq 0$.

Istotnie,

$$ac + bd - ad - bc = (ac - ad) - (bc - bd) = a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d) \geq 0, \quad \text{gdyż z założenia } a - b \geq 0 \text{ i } c - d \geq 0. \quad \square$$

Przykład 5. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a - b)^2.$$

Rozwiązanie:

□ Przeprowadźmy najpierw analizę tej nierówności. Będziemy przekształcać tę nierówność, otrzymując kolejno nierówności jej równoważne. Mamy:

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a - b)^2 \quad (\text{korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów})$$

⇕

$$\begin{aligned}
& ((a-b)(a+b))^2 \geq 4ab(a-b)^2 && \text{(potęgujemy iloczyn)} \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^2(a+b)^2 \geq 4ab(a-b)^2 && \text{(przenosimy wszystko na lewą stronę)} \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^2(a+b)^2 - 4ab(a-b)^2 \geq 0 && \text{(wyłączmy wspólny czynnik } (a-b)^2 \text{ przed nawias)} \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^2((a+b)^2 - 4ab) \geq 0 && \text{(korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażen)} \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^2(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 && \text{(korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażen)} \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^2(a-b)^2 \geq 0 \\
& \Downarrow \\
& (a-b)^4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, więc również wszystkie kolejno ją poprzedzające nierówności są prawdziwe. Stąd wnioskujemy, że zachodzi także wyjściowa nierówność. $\blacksquare$

Przykład 6. Udowodnij, że jeżeli $m > -1$ i $m \neq 0$, to $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$.

Rozwiązanie:

$\blacksquare$ Podobnie jak w poprzednim przykładzie, będziemy daną nierówność przekształcać, otrzymując nierówności równoważne.

Mamy:

$$\begin{aligned}
& m + \frac{4}{m^2} \geq 3 && \text{(mnożymy obie strony przez } m^2) \\
& \Downarrow \\
& m^3 + 4 \geq 3m^2 && \text{(dodajemy do obu stron } -3m^2) \\
& \Downarrow \\
& m^3 - 3m^2 + 4 \geq 0 && \text{(rozkładamy } -3m^2 \text{ na } m^2 - 4m^2) \\
& \Downarrow \\
& m^3 + m^2 - 4m^2 + 4 \geq 0 && \text{(grupujemy wyrazy w pary)} \\
& \Downarrow \\
& (m^3 + m^2) - 4(m^2 - 1) \geq 0 && \text{(rozkładamy na czynniki)} \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$m^2(m+1) - 4(m+1)(m-1) \geq 0 \quad (\text{wyłączamy wspólny czynnik przed nawias})$$

$$\Downarrow$$

$$(m+1)(m^2 - 4(m-1)) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(m+1)(m^2 - 4m + 4) \geq 0 \quad (\text{związujemy w kwadrat})$$

$$\Downarrow$$

$$(m+1)(m-2)^2 \geq 0.$$

Widzimy więc, że ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $m+1 > 0$ (z założenia) oraz $(m-2)^2 \geq 0$. Wychodząc z niej, otrzymujemy prawdziwość wszystkich kolejno ją poprzedzających nierówności, a zatem i nierówności zadania. $\square$

Przykład 7. Wykaż, że jeżeli $a+b > 0$, to $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

Rozwiązanie:

I sposób:

Wiadomo, że $(a-b)^2 \geq 0$, czyli że $a^2+b^2-2ab \geq 0$ i wreszcie $a^2-ab+b^2 \geq ab$.

Mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez $a+b$, otrzymujemy nierówność

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b), \quad \text{gdzie } a+b > 0.$$

Stąd $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, na mocy wzoru na sumę sześcianów.

II sposób:

Wykażemy, że $a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$.

$$\text{Mamy } a^3+b^3-a^2b-ab^2 = (a^3-a^2b) - (ab^2-b^3) =$$

$$= a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)(a^2-b^2) = (a-b)(a-b)(a+b) =$$

$$= (a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

gdzie $(a-b)^2 \geq 0$ i $a+b > 0$ (z założenia).

Przykład 8. Udowodnij, że jeżeli $a+b > 0$, to $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Rozwiązanie:

$\square$ Będziemy tę nierówność przekształcać równoważnie. Otóż

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3) \geq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Leftrightarrow 3(a^3+b^3) \geq 3ab(a+b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b).$$

A ta jest prawdziwa, o czym mieliśmy okazję przekonać się przed chwilą. Także wszystkie poprzedzające ją kolejno nierówności są prawdziwe. $\square$



Pytania i zadania

1. Udowodnij, że jeżeli $a \cdot b < 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.
2. Wykaż, że:
 - a) $(a^2 - b^2)^2 \geq (a - b)^4$, jeśli $a \cdot b \geq 0$; b) $(a^2 - b^2)^2 \leq (a - b)^4$, jeśli $a \cdot b \leq 0$.
3. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, to:
 - a) $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$;
 - b) $a + b \leq \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$.
- 4*. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b zachodzą nierówności:
 - a) $2a^4 + 2b^4 \geq ab(a+b)^2$;
 - b) $a^3(b+1) + b^3(a+1) \geq a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2)$.
- 5*. Udowodnij, że jeżeli $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, to $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$.
- 6*. Jaś ma wagę dwuramienną, której ramiona nie są równe. Chcąc odważyć 2 kg cukru, postępuje tak: kładzie ciężarek 1 kg na lewej szalce, a na prawą sypie cukier aż do zrównoważenia; następnie opróżniwszy obie szalki, kładzie ciężarek 1 kg na prawej szalce, a na lewą sypie cukier aż do zrównoważenia. Czy Jaś odważył w ten sposób mniej niż 2 kg, więcej niż 2 kg, czy też dokładnie 2 kg cukru?

8. Średnie liczb i zależności między nimi



Średnią arytmetyczną n liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy liczbę

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Na przykład średnią arytmetyczną liczb 1, 2, 3, 4, 5 jest liczba

$$A_5 = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3.$$



Średnią geometryczną n liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Na przykład średnią geometryczną liczb 3, 9 i 27 jest liczba

$$G_3 = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 27} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9.$$

Przykład

Porównajmy średnie liczb 1, 2, 3, 4, 5:

$$A_5 = 3, G_5 = \sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt[5]{120}$$

Widzimy, że

$$A_5 = 3 = \sqrt[5]{243} > \sqrt[5]{120} = G_5.$$

Podobnie średnie liczb 3, 9 i 27:

$$A_3 = \frac{3+9+27}{3} = 13; G_3 = 9$$

spełniają nierówność $A_3 > G_3$.

Zależności te nie są bynajmniej przypadkowe. Udowodnimy bowiem, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Średnia arytmetyczna każdych n liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, to znaczy zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

☐ Dowód. Zastosujemy indukcję matematyczną względem n . Gdy $n = 2$, mamy

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0,$$

skąd $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Wykażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1, jeśli średnia arytmetyczna każdych n liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, to średnia arytmetyczna każdych $n+1$ liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej. Niech zatem $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ będą liczbami nieujemnymi. Podstawmy

$$(*) a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = A^{n(n+1)}, a_{n+1} = B^{n+1}.$$

Wówczas $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = A^{n+1}$, $\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = A^n \cdot B$ i na mocy założenia indukcyjnego oraz wzoru $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

– otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \\ &= \frac{n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq \quad \left(\text{bo } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \right) \\ &\geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \quad \text{(na mocy (*))} \end{aligned}$$

- b) Ostatnią cyfrą liczby n jest 1.
 c) $n - 38$ jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Mieszkańcy miasta A mówią tylko prawdę, mieszkańcy miasta B – tylko kłamią, a mieszkańcy miasta C na przemian – mówią prawdę i kłamią. Dyżurny straży pożarnej odebrał telefon: „U nas jest pożar, przyjeżdżajcie szybko!”. „Gdzie?” – spytał. „W mieście C ” – usłyszał. Do którego z miast wyjechał wóz straży pożarnej gasić pożar?

11. O dowodzeniu twierdzeń

W matematyce dowodzimy twierdzeń dwojako: wprost i nie wprost.

Dowód wprost polega na tym, że przyjmując za prawdziwe wszystkie założenia (poprzednik implikacji), rozumujemy dotąd, aż dojdziemy do prawdziwości tezy (następnika implikacji). W dowodzeniu wprost korzystamy między innymi z reguły odrywania, czyli – przypomnijmy – z tautologii: $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$, oraz z prawa przechodniości implikacji (to jest z tautologii: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$).

Dowód nie wprost polega na rozumowaniu przez sprzeczność (łac. *reductio ad absurdum* – sprowadzenie do niedorzeczności), w którym, przyjmując wszystkie założenia za prawdziwe, dołączamy zaprzeczenie tezy, co w konsekwencji prowadzi do sprzeczności albo z założeniem, albo też z innym faktem, udowodnionym wcześniej lub przyjętym jako pewnik. Dowód nie wprost oparty jest na tautologii:

$$[(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q).$$

Z przykładami dowodzenia twierdzeń wprost lub nie wprost spotkamy się w tym podręczniku wiele razy.

Warto wiedzieć, że metodę dowodzenia twierdzeń nie wprost zawdzięczamy greckiemu filozofowi – Platonowi (IV w. p.n.e.).

7. Zasada indukcji matematycznej

Bardzo wiele twierdzeń w matematyce orzeka coś o liczbach naturalnych. Najczęściej jest to jakaś równość, nierówność, podzielność bądź też pewien wzór. Oto przykłady takich twierdzeń:

1. Dla każdej liczby naturalnej n

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dla każdej liczby naturalnej n

$$2^n > n.$$

3. Dla każdej liczby naturalnej n

$$6 \mid 10^n - 4.$$

4. Dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 3 suma kątów wewnętrznych dowolnego n -kąta wypukłego wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Jak dowodzić takich twierdzeń? Zanim o tym opowiemy – krótka anegdota.

Student na egzaminie z analizy matematycznej miał udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej zachodzi równość – i tu pan profesor napisał na tablicy pewną równość. Chwila ciszy, po której profesor zapytał studenta: „Jak pan będzie postępował?”.

Student: Sprawdzę prawdziwość równości dla 1.

Profesor: Dobrze, i co dalej?

Student: Sprawdzę słuszność dla 2.

Profesor: No dobrze ...

Student: Sprawdzę prawdziwość dla 3.

Profesor: ...

Student: Sprawdzę prawdziwość równości dla 4, dla 5, dla 6, ...

Profesor: Jak długo zamierza pan to jeszcze sprawdzać? – zapytał studenta zirytowany profesor.

Student: No..., aż do ... n – odparł niefrasobliwy student.

Metodą dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych jest indukcja matematyczna, zwana też indukcją zupełną. Opiera się ona na następującej zasadzie:

Zasada indukcji matematycznej. Jeśli $T(n)$ oznacza pewne twierdzenie mówiące o liczbie naturalnej n , to aby udowodnić, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 (n_0 może być 1 albo inną ustaloną liczbą naturalną), wystarczy:

1. Dowieść, że jest ono prawdziwe dla liczby n_0 , to znaczy sprawdzić, że zachodzi $T(n_0)$.
2. Dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 , wychodząc z założenia, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczby n , wyprowadzić, że jest ono prawdziwe dla $n+1$, chodzi bowiem o to, aby wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

Przykład. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 zachodzi równość:

$$T(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mamy wykazać, że suma n początkowych liczb naturalnych równa jest $\frac{n(n+1)}{2}$.

Sprawdzamy najpierw prawdziwość zdania $T(1)$, czyli zdania: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. Równość ta oczywiście zachodzi.

Wykażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1, jeśli

$$(*) T(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ to}$$

$$T(n+1): 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)}_{\text{na mocy } (*)} &= \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{na mocy } (*)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Zatem:

- sprawdziliśmy prawdziwość zdania $T(1)$,
- dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 wykazaliśmy implikację $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość zdania $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1.

Dowód przeprowadzony metodą indukcji matematycznej nazywamy **dowodem indukcyjnym**. Składa się on z dwóch etapów:

- sprawdzenia, że $T(n_0)$ jest prawdziwe (w naszym przykładzie $n_0 = 1$);
- dowodu, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 , jeśli $T(n)$ jest prawdziwe, to $T(n+1)$ jest prawdziwe.

Pierwszy etap to **sprawdzenie**, drugi etap to tak zwany **krok indukcyjny**; zakładamy w nim, że dla liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 zdanie $T(n)$ jest prawdziwe – **założenie indukcyjne** i na tej podstawie wyprowadzamy prawdziwość zdania $T(n+1)$ – **teza indukcyjna**.

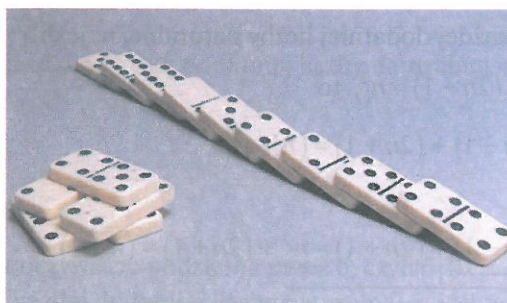
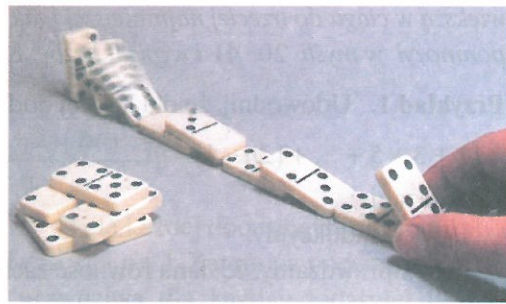
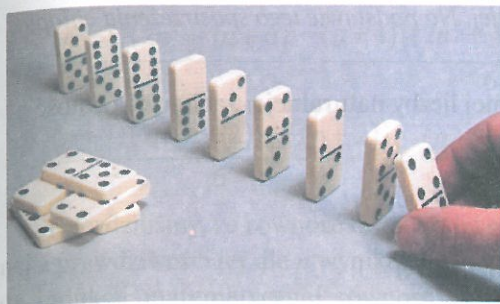
Zasadę indukcji matematycznej można zilustrować na kostkach domina. Wyobraźmy sobie bowiem kostki domina ustawione jedna za drugą w odległości mniejszej niż wysokość kostki (ryc. 3.2).

chodzi równość:

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

$\frac{n(n+1)}{2}$. Równość

eśli



Ryc. 3.2. Zasada indukcji matematycznej

Co trzeba wiedzieć, by przewidzieć, że wszystkie kostki się przewrócą? Oczywiście, że:

- przewrócono pierwszą kostkę;
- upadek którejkolwiek kostki obala następne.

Zasada, która mówi, że sztuka z kostkami domina musi się wtedy udać, to właśnie zasada indukcji matematycznej.

8. Dowodzenie przez indukcję matematyczną

Rozdział ten poświęcimy licznym przykładom dowodów indukcyjnych, ale najpierw – krótka anegdota, która wiąże się ze wzorem na sumę kolejnych liczb naturalnych od jeden do n . Historia ta dotyczy sławnego matematyka niemieckiego Carla Friedericha Gaussa zwanego księciem matematyków.

Siedmioletniego Gaussa uczył matematyki surowy, starszy wiekiem nauczyciel. Chcąc w spokoju poprawiać podczas lekcji uczniowskie zeszyty, zadał swym wychowankom następujące zadanie do samodzielnego rozwiązania: „Znaleźć sumę wszystkich liczb od 1 do 40”. Nauczyciel liczył na dłuższą chwilę spokoju, a tymczasem mały Gauss błyskawicznie zorientował się w rozwiązaniu tego zadania. Oto schemat rozumowania genialnego chłopca:

$$\begin{array}{r} 1, 2, 3, \dots, 20 \\ 40, 39, 38, \dots, 21 \\ \hline 41, 41, 41, \dots, 41 \end{array}$$

Największa i najmniejsza liczba ciągu dają w sumie 41. To samo otrzymamy, dodając drugą z kolei liczbę ciągu do drugiej od dołu; ten sam też wynik uzyskamy, dodając trzecią naj-

większą w ciągu do trzeciej najmniejszej i tak dalej. Na podstawie tego spostrzeżenia chłopiec pomnożył w myśli $20 \cdot 41$ i wypisał liczbę: 820.

Przykład 1. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzamy, że dana równość zachodzi, gdy $n = 1$:

$$1 = 1^2 = 1.$$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , jeśli

$$(*) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \text{ to}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Rzeczywiście,

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{\text{na mocy } (*)} + (2n + 1) = \underbrace{n^2}_{\text{na mocy } (*)} + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość dowodzonej równości dla każdej dodatniej liczby naturalnej n .

Przykład 2. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie równości, gdy $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1.$$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , jeśli

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ to}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2}_{\text{na mocy } (*)} &= \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{na mocy } (*)} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \end{aligned}$$

żenia chłopiec

dzi równość

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)((2n^2+4n)+(3n+6))}{6} = \\
 &= \frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
 \end{aligned}$$

Stwierdziliśmy, że równość ta zachodzi gdy $n = 1$ i dla każdej dodatniej liczby naturalnej z prawdziwości jej dla n wynika jej prawdziwość dla $n + 1$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej równość ta jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby naturalnej n .

Przykład 3. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$$6 \mid 10^n - 4.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie dla $n = 1$.

Liczba $10^1 - 4 = 6$ jest oczywiście podzielna przez 6, czyli $6 \mid 10^1 - 4$.

2. Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , jeśli

ej równości dla

$$(*) \quad 6 \mid 10^n - 4, \text{ to } 6 \mid 10^{n+1} - 4.$$

Faktycznie, $10^{n+1} - 4 = 10^n \cdot 10 - 4 = \underbrace{(10^n - 4)}_{(*)} \cdot 10 + 36$, więc liczba $10^{n+1} - 4$, jako su-

ma dwóch składników podzielnych przez 6, jest podzielna przez 6.

Zatem na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $6 \mid 10^n - 4$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n .

Przykład 4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 0$.

$$11^{0+2} + 12^{2 \cdot 0 + 1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133.$$

Rzeczywiście,

$$133 \mid 11^{0+2} + 12^{2 \cdot 0 + 1}.$$

2. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej, jeśli

$$133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}, \text{ to } 133 \mid 11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned}
 11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot 12^2 = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot 144 = \\
 &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot (11 + 133) = 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1}
 \end{aligned}$$

i widzimy, że liczba $11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1}$ jest podzielna przez 133, jako suma dwóch składników podzielnych przez 133, przy czym pierwszy z tych składników jest podzielny przez 133 na mocy założenia indukcyjnego. Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n .

Przykład 5. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $2^n > n$.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 1$.

$$2^1 = 2 > 1.$$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$$2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1).$$

Rzeczywiście,

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 = n + n \geq n + 1, \text{ czyli}$$

$$2^{n+1} > n + 1, \text{ jeśli } 2^n > n.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $2^n > n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n .

Przykład 6. Wykaż, że dla każdej liczby x większej od -1 oraz dla każdej liczby naturalnej n

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 0$.

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \geq 1 + 0 \cdot x.$$

2. Wykażemy, że dla każdej liczby x większej od -1 oraz dla każdej liczby naturalnej n

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

Faktycznie,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

gdyż $nx^2 \geq 0$ oraz $1+x > 0$, gdy $x > -1$.

Zatem na mocy indukcji matematycznej wnioskujemy, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Uwaga. Udowodniona przed chwilą nierówność to tak zwana nierówność Jakoba Bernoulliego (czyt. bernuliego).

Przykład 7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 suma kątów wewnętrznych dowolnego n -kąta wypukłego równa jest $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 3$, jest oczywiste, gdyż suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest rzeczywiście równa 180° .
2. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2, jeśli suma kątów wewnętrznych dowolnego n -kąta wypukłego równa jest $(n-2) \cdot 180^\circ$, to suma kątów wewnętrznych dowolnego $(n+1)$ kąta wypukłego jest równa $(n-1) \cdot 180^\circ$.

Niech $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n A_{n+1}$ będzie dowolnym $(n+1)$ -kątem wypukłym. Wtedy oczywiście $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n$ będzie n -kątem wypukłym (ryc. 3.3) oraz suma kątów wewnętrznych $(n+1)$ -kąta równa jest sumie kątów wewnętrznych tego n -kąta oraz kątów wewnętrznych trójkąta $A_n A_{n+1} A_1$, to jest liczb $(n-2) \cdot 180^\circ$ i 180° . Zatem suma kątów wewnętrznych rozważanego $(n+1)$ -kąta wynosi

$$(n-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = (n-1) \cdot 180^\circ = ((n+1)-2) \cdot 180^\circ.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy więc, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 suma kątów wewnętrznych dowolnego n -kąta wypukłego wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

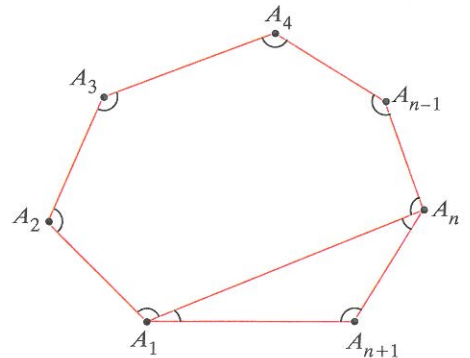
Przykład 8. Udowodnij, że n różnych prostych na płaszczyźnie przechodzących przez dany punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.

Rozwiązanie:

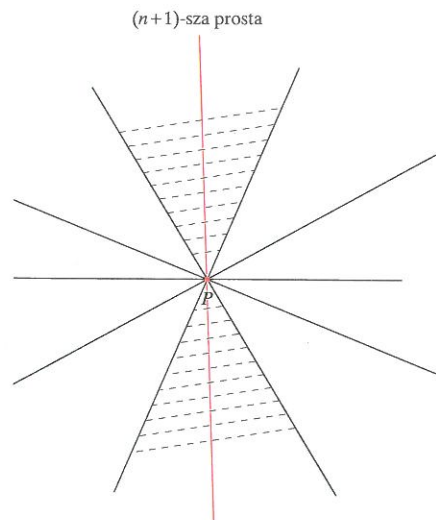
Dowód indukcyjny.

1. Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi, gdyż jedna prosta, leżąca na płaszczyźnie i przechodząca przez punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.
2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , jeśli n prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części, to $n+1$ prostych na tej płaszczyźnie przechodzących przez punkt P dzieli ją na $2n+2$ części.

Istotnie, rozważmy n prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt P i poprowadźmy przez ten punkt jeszcze jedną prostą (ryc. 3.4).



Ryc. 3.3.



Ryc. 3.4.

Ta $(n+1)$ -sza (czyt. „ n plus pierwsza”) prosta dzieli tylko dwie spośród $2n$ części płaszczyzny, przy czym każdą z nich na dwie części. W ten sposób części, na które została podzielona płaszczyzna, mamy o dwie więcej. Jest ich więc $2n+2=2(n+1)$. Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość twierdzenia dla każdej dodatniej liczby naturalnej n .



Pytania i zadania

- Podaj zasadę indukcji matematycznej.
- Co to jest:
 - założenie indukcyjne,
 - teza indukcyjna,
 - krok indukcyjny?
- Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą równości:
 - $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
 - $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;
 - $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;
 - $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;
 - $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$; g) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
- Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą podzielności:
 - $9 \mid 10^n - 1$; b) $11 \mid 10^n - (-1)^n$; c) $43 \mid 6^{n+2} + 7^{2n+1}$; d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$;
 - $41 \mid 5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n}$; f) $11 \mid 5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$; g) $10 \mid 9 \cdot 3^{4n} + 1$;
 - $25 \mid 2^{n+2} 3^n + 5n - 4$; i) $169 \mid 3^{3n} - 26n - 1$.
- Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n :
 - $3 \mid 4^n + 5$; b) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n-1}$; c) $1001 \mid 10^{3n} - (-1)^n$; d) $19 \mid 5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$.
- Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n :
 - $3^n > n^3$; b) $3n > \sqrt{n} + 1$; c) $(n-1)^2 > \frac{n-8}{n+1}$; d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.
- Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 każdy n -kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.
- Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , n prostych dzieli płaszczyznę najwyżej na 2^n części.

Pytania i zadania

1. Uprość wyrażenia:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(2\pi - x) \left(\operatorname{ctg}(\pi + x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\right);$

b) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x};$ c) $\sqrt{\sin^2 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)}.$

2. Oblicz:

a) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, jeśli $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$; b) $\sin^3 x + \cos^3 x$, jeśli $\sin x + \cos x = 1$;

c) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$, jeśli $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, jeśli:

a) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ i $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$; b) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$ i $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

9. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

Tożsamość trygonometryczna to po prostu równość zawierająca wyłącznie funkcje trygonometryczne kąta lub zmiennej rzeczywistej i prawdziwa dla wszelkich kątów lub wartości zmiennej rzeczywistej, dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

Poznane związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu są, jak pamiętamy, tak zwanymi tożsamościami trygonometrycznymi **podstawowymi**. Obecnie zastosujemy je do dowodzenia tożsamości bardziej złożonych.

Aby udowodnić tożsamość, należy:

- przekształcać jedną z jej stron tak długo, aż dojdziemy do postaci, którą ma druga strona, albo
- przekształcać obie jej strony, aby doprowadzić je do tej samej postaci.

Prześledźmy to na przykładach, najpierw stosunkowo prostych, a następnie nieco trudniejszych.

Przykład 1. Wykaż, że $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$.

Rozwiązanie:

Będziemy przekształcać lewą stronę tej tożsamości, by dojść do prawej. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x &= \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x - \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \\ &= (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ctg} x)^2 = 1^2 - \left(\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x. \end{aligned}$$

Przykład 2. Udowodnij, że $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1)$.

Rozwiązanie:

Tym razem przekształcimy prawą stronę, aby otrzymać postać lewej strony. Mamy:

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 1 = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

Przykład 3. Wykaż, że $(1 + \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \cos x$.

Rozwiązanie:

Przekształcając lewą stronę, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (1 + \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) &= (1 + \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \\ &= (1 + \sin x) \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x. \end{aligned}$$

Przykład 4. Sprawdź, że $\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \right) (\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.

Rozwiązanie:

Wychodząc z lewej strony, dojdziemy do prawej. Istotnie,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \right) (\sin x + \cos x) &= \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} (\sin x + \cos x) = \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} (\cos x + \sin x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Przykład 5*. Udowodnij, że $\operatorname{tg}^6 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha &= \sin^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}, \text{ więc}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{-\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{-\frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sin^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^6 \alpha} = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^6 = \operatorname{tg}^6 \alpha.$$

Przykład 6*. Wykaż, że $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

Korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, przekształcamy najpierw osobno licznik i mianownik ułamka stojącego po lewej stronie danej tożsamości. Mamy:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha) = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha, \\ 1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin^2 \alpha - \sin^6 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \cos^6 \alpha) = \sin^2 \alpha (1 - \sin^4 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^4 \alpha) = \\
&= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) = \\
&= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \\
&= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}.$$

Przykład 7*. Udowodnij, że

$$\operatorname{tg}^5 \alpha = \frac{\frac{1}{(1 - \sin \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \sin \alpha)^2}}{\frac{1}{(1 - \cos \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2}}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1 - \sin \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \sin \alpha)^2} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2 - (1 - \sin \alpha)^2}{(1 - \sin \alpha)^2 (1 + \sin \alpha)^2} = \\
&= \frac{(1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha) - (1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha)}{((1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha))^2} = \frac{4 \sin \alpha}{(1 - \sin^2 \alpha)^2} = \frac{4 \sin \alpha}{\cos^4 \alpha}
\end{aligned}$$

i podobnie

$$\frac{1}{(1 - \cos \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^4 \alpha},$$

więc prawa strona P dowodzonej tożsamości jest równa

$$P = \frac{\frac{4 \sin \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{4 \cos \alpha}{\sin^4 \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin^4 \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos^4 \alpha} = \frac{\sin^5 \alpha}{\cos^5 \alpha} = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^5 = \operatorname{tg}^5 \alpha.$$

Pytania i zadania

1. Wykaż tożsamości:

a) $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$; b) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$;

c) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\sin x}$; d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$; e) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \cos^2 x$;

f) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{2}{\cos x}$; g) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = -\frac{2}{\sin x}$.

2. Udowodnij, że

a) $\operatorname{ctg}^6 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$; b) $\operatorname{ctg}^5 \alpha = \frac{\frac{1}{(1 - \cos \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2}}{\frac{1}{(1 - \sin \alpha)^2} - \frac{1}{(1 + \sin \alpha)^2}}.$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

3.115. **3.129.** Oblicz:

$$a) (5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} \cdot 25^{\frac{3}{2}} : \sqrt[4]{625^5}$$

$$b) 24 \cdot 32^{-\frac{3}{5}} + \left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{8}$$

$$c) \left(64^{\frac{1}{6}} \cdot 1024^{-0,3} + 0,25^{\pi}\right)^0 \cdot \left(27^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\sqrt{2}}$$

$$d) (0,2^{-1} \cdot 5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : \left(125^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\sqrt{3}}\right)$$

3.116. **3.130.** Dane są przybliżone wartości pierwiastków:

$\sqrt{2} \approx 1,4$	$\sqrt{3} \approx 1,75$	$\sqrt{5} \approx 2,25$	$\sqrt[3]{2} \approx 1,25$	$\sqrt[3]{4} \approx 1,6$	$\sqrt[3]{6} \approx 1,8$
------------------------	-------------------------	-------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------

Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi:

$$a) 81^{\sqrt{5}}$$

$$b) 1024^{\sqrt{2}}$$

$$c) (0,0625)^{\sqrt{3}}$$

$$d) 32^{\sqrt[3]{6}}$$

$$e) (0,0016)^{\sqrt[3]{2}}$$

$$f) \left(\frac{1}{32}\right)^{\sqrt[3]{4}}$$

3.117. **3.131.** Korzystając z danych z poprzedniego zadania, oblicz przybliżoną wartość potęgi:

$$a) 256^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) 243^{\frac{\sqrt[3]{4}}{4}}$$

$$c) 625^{\frac{1}{3}\sqrt{5}}$$

$$d) (0,0001)^{-\frac{3}{2}}$$

$$e) (0,00032)^{-\frac{1}{9}\sqrt[3]{6}}$$

$$f) 100000^{-\frac{1}{7}\sqrt{2}}$$

Dowodzenie twierdzeń

3.118. **3.132.** Wykaż, że jeśli $a > 3$ i $b > 4$, to $\frac{2a+3b}{6} > 3$.

3.119. **3.133.** Wykaż, że jeśli $a < 1$ i $b > -4$, to $\frac{4a-2b}{3} < 4$.

3.120. **3.134.** Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a > b > c$, to $a > \frac{b+c}{2}$.

3.121. **3.135.** Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a > b > c$, to $2a - b > 2c - a$.

3.122. **3.136.** Wykaż, że jeśli $x > 2$ i $y > 2$, to $xy + 4 > 2(x + y)$.

3.123. **3.137.** Wykaż, że jeśli $x > 1$ i $y < 1$, to $xy < x + y - 1$.

3.124. **3.138.** Wykaż, że jeśli $a < -2$ i $b > \frac{1}{2}$, to $2ab < a + 2 - 4b$.

3.125. **3.139.** Wykaż, że jeśli $x^2 + y^2 = 2$ i $x + y = 2$, to $x = y = 1$.

3.126. **3.140.** Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, to $a = b = c$.

3.127. **3.141.** Wykaż, że jeśli $x^2 + y^2 = 3$ i $x + y = -2$, to $xy = \frac{1}{2}$.

3.128. **3.142.** Wykaż, że jeśli $x^2 + y^2 = 3$ i $x - y = -2$, to $xy = -\frac{1}{2}$.

3.129. **3.143.** Wykaż, że jeśli dwie dowolne liczby rzeczywiste a, b spełniają nierówność $ab > 5$, to $a^2 + b^2 > 10$.

3.130. **3.144.** Wykaż, że jeśli dwie dowolne liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $ab \leq -3$, to $a^2 + b^2 \geq 6$.

3.131. **3.145.** Wykaż, że jeśli $a^2 b^2 \geq 7$, to $a^4 + b^4 \geq 14$.

3.132. **3.146.** Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

3.136. **3.147.** Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą.

3.137. **3.148.** Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest liczbą parzystą.

3.138. **3.149.** Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest wielokrotnością liczby 8.

3.150. Wykaż, że jeśli liczba naturalna nie jest podzielna przez 3, to kwadrat tej liczby przy podzieleniu przez 3 daje resztę 1.

3.151. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej m , liczba $m^6 - 2m^4 + m^2$ jest podzielna przez 36.

3.152. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej m , liczba $(m + 2)^4 - m^4$ jest wielokrotnością liczby 8.

3.139. **3.153.** Wykaż, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa 2.

3.140. **3.154.** Wykaż, że reszta z dzielenia przez 16 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest równa 8.

3.141. **3.155.** Wykaż, że jeśli liczby całkowite a, b, c przy podzieleniu przez 4 dają odpowiednio reszty 1, 2, 3, to reszta z dzielenia sumy kwadratów tych liczb przez 4 jest równa 2.

3.142. **3.156.** Wykaż, że jeśli $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 1$, to liczba $4^{n+2} - 4^n$ jest podzielna przez 60.

3.143. **3.157.** Wykaż, że jeśli $n \in \mathbf{N}$, to liczba:

a) $3^n + 3^{n+3} + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 4

b) $7^{n+2} - 2^{n+2} + 7^n - 2^n$ jest podzielna przez 10.

3.144. **3.158.** Wykaż, że jeśli $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 2$, to liczba $3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n + 5^n + 5^{n+2}$ jest wielokrotnością liczby 13.

3.145. **3.159.** Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \geq 5$, to liczba $p^2 - 17$ jest podzielna przez 8.

3.146. **3.160.** Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \geq 5$, to liczba $p^2 - 25$ jest podzielna przez 24.

3.147. **3.161.** Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą i liczb $p^2 - 4$ nie jest podzielna przez 3, to $p = 3$.

3.148. **3.162.** Liczba $\sqrt{11}$ jest liczbą niewymierną. Wykaż, że liczby: $7\sqrt{11} + 5$, $\frac{-3\sqrt{11} + 4}{2}$, $\frac{\sqrt{11} - 1}{\sqrt{11}}$ są liczbami niewymiernymi.

3.149. **3.163.** Liczba a jest liczbą niewymierną. Wykaż, że liczby: $3,2a - 5$, $\frac{-2}{a}$, $\frac{a+1}{a-1}$ są liczbami niewymiernymi.

Określenie logarytmu

3.146. **3.164.** Oblicz:

a) $\log_3 243$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

c) $\log 1000$

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$

e) $\log_2 \frac{1}{1024}$

f) $\log_{\frac{1}{6}} 216$

g) $\log_5 625$

h) $\log_{\frac{1}{5}} 1$