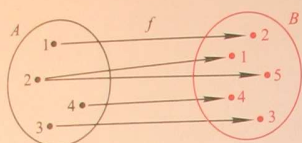


ZADANIA WPROWADZAJĄCE

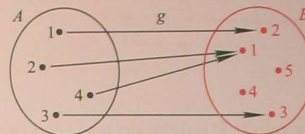
Zdający potrafi	• podawać przykłady funkcji • określać funkcję wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym • wyznaczać wartość funkcji dla danego argumentu
Zdający zna	• pojęcia: miejsce zerowe funkcji, zbiór wartości funkcji

3.1 Które z podanych przyporządkowań jest funkcją? Jeśli przyporządkowanie jest funkcją, to podaj jej dziedzinę.

a)



b)



c) Każdej liczbie całkowitej dodatniej przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.

d) Każdej liczbie całkowitej dodatniej przyporządkowujemy jej dzielniki.

e) Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy taką liczbę całkowitą d , że odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej d jest najmniejsza z możliwych.

3.2 Funkcja $f: \{-2, -1, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{R}$ jest określona w następujący sposób: każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ przyporządkowana jest jej wartość bezwzględna pomniejszona o 1.

a) Określ funkcję f za pomocą: 1) grafu; 2) tabelki; 3) wzoru.

b) Podaj zbiór wartości funkcji f .

3.3 Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Wyznacz

a) $f(0)$; b) $f(0,5)$; c) $f(a)$; d) $f(3b)$; e) $f(x-1)$; f) $f(x+2)$.

3.4 Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2 - 4x - 12$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6.

b) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 9.

c) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

d) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq -12$.

3.5 Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 3x$ i $g(x) = 2x + 6$.

a) Znajdź te argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość.

b) Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja g .

c) Rozwiąż nierówność $f(x+1) \leq g(3x-1)$.

3.6 Wyznacz miejsca zerowe funkcji

a) $f(x) = 2x + 7$; b) $f(x) = 2x^2 + 7x$; c) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x - 28$; d) $f(x) = \frac{2x+7}{x-5}$.

Zdający potrafi	• wyznaczać dziedzinę funkcji określonej wzorem • wyznaczać dziedzinę funkcji homograficznej • wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej
-----------------	---

3.7 Wyznacz dziedzinę funkcji

a) $f(x) = x^2 - 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$;

d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$;

e) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$;

f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

g) $f(x) = \sqrt{x}$;

h) $f(x) = \sqrt{x+5}$;

i) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$;

j) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$;

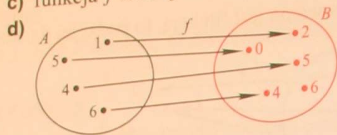
k) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.

Zdający potrafi

- szkicować wykres funkcji określonej: grafem, tabelką, wzorem, słownie
- określać funkcję wykresem

3.8 Podaj współrzędne dwóch punktów należących do wykresu funkcji f określonej w następujący sposób:

- a) $f(x) = x^3 + x + 1$;
 b) funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje połowę liczby do niej przeciwnej;
 c) funkcja f każdej liczbie rzeczywistej różnej od zera przyporządkowuje odwrotność jej kwadratu;

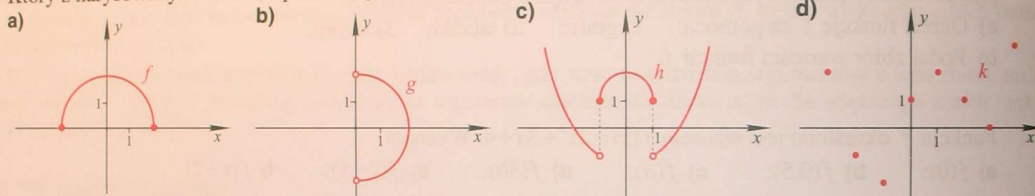


3.9 Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f , jeżeli

- a) $P = (-2, 20)$, $f(x) = x^4 - 3x - 2$;
 b) $P = (3, 17)$, $f(x) = 2x^2 - x$;
 c) $P = (-1, 1)$, $f(x) = (x^5 - 4x - 4)^{100}$;
 d) $P = (1, 0)$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

3.10 Punkt $A = (-1, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Znajdź współczynnik a .

3.11 Który z narysowanych zbiorów punktów jest wykresem pewnej funkcji zmiennej rzeczywistej x ?



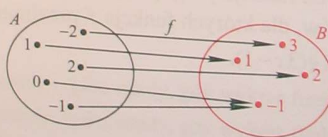
3.12 Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ i punkty przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych.

3.13 Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) Funkcja $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbf{R}$ określona jest w następujący sposób: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \{0, 1, 2\} \\ x & \text{dla } x \in \{3, 4\} \end{cases}$.

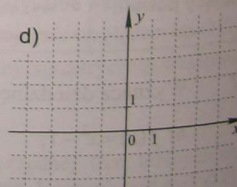
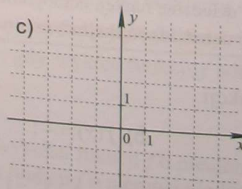
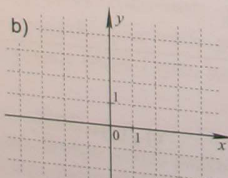
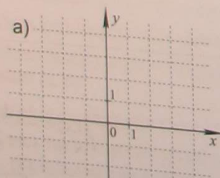
b) Funkcja $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$ określona jest w następujący sposób: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-4; -2) \cup (2; 4) \\ 2 & \text{dla } x \in \{-2, 2\} \\ 3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \end{cases}$.

c) Funkcja f określona jest grafem:



d) Funkcja f określona jest za pomocą tabeli:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	2	2	1



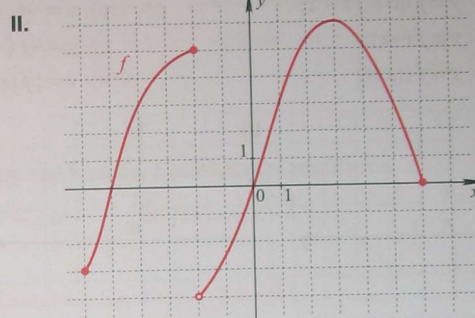
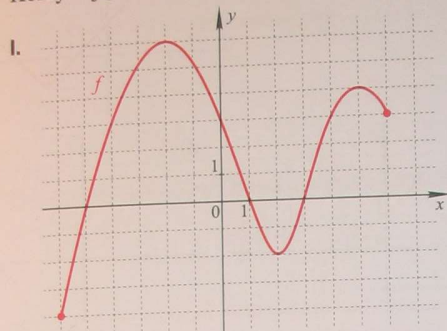
3.14 Znajdź punkty wspólne wykresów funkcji f i g , jeśli

- a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 5$;
 b) $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x + 6$.

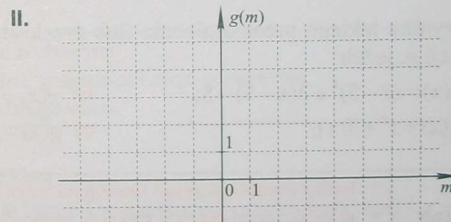
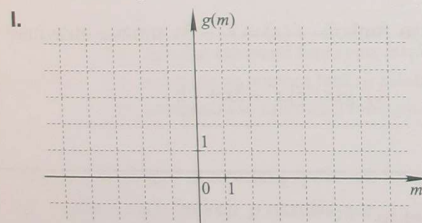
Zdający potrafi

- określać z wykresu: 1. dziedzinę funkcji, 2. zbiór wartości funkcji, 3. wartość funkcji mając dany argument, 4. argument mając daną wartość funkcji, 5. miejsca zerowe funkcji 6. przedziały monotoniczności funkcji, 7. zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), 8. najmniejszą i największą wartość funkcji.

3.15 Korzystając z wykresu funkcji f , wykonaj poniższe polecenia.



- Określ dziedzinę funkcji f .
- Podaj miejsca zerowe funkcji f .
- Jaką wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu 4?
- Podaj najmniejszą wartość funkcji f .
- Podaj zbiór wartości funkcji f .
- Podaj te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
- Podaj te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.
- W jakich przedziałach funkcja f rośnie, a w jakich maleje?
- Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość największą?
- Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2?
- Jaką wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu 0?
- Podaj wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji f są większe od 3.
- Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = -1$?
- Ile rozwiązań ma równanie $|f(x)| = 2$?
- Naszkicuj wykres funkcji g , która każdej wartości parametru $m \in \langle -5; 7 \rangle$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$.



Zdający potrafi

- przesuwając wykres funkcji wzdłuż osi x lub osi y układu współrzędnych
- **przesuwając wykres funkcji o dany wektor**
- **zapisywać wzór funkcji otrzymanej w wyniku przesunięcia o dany wektor**

3.16 Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\langle 2; +\infty \rangle$. Określ zbiór wartości funkcji g , której wykres otrzymamy przesuwając wykres funkcji f a) wzdłuż osi OY o 3 jednostki do góry; b) wzdłuż osi OX o 5 jednostek w prawo; c) wzdłuż osi OY o 4 jednostki w dół.

3.17 Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$ i malejąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g , której wykres otrzymamy przesuwając wykres funkcji f a) wzdłuż osi OY o 3 jednostki do góry; b) wzdłuż osi OX o 5 jednostek w prawo; c) wzdłuż osi OX o 3 jednostki w lewo.

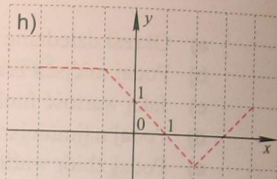
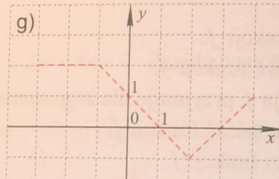
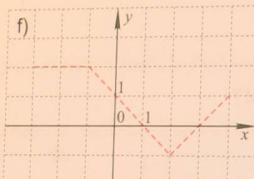
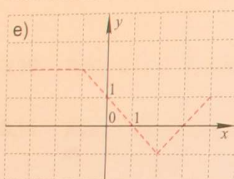
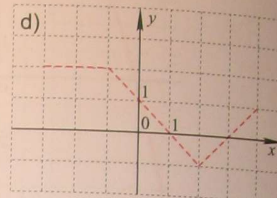
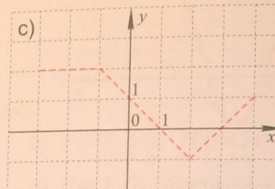
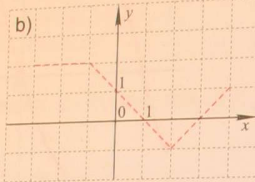
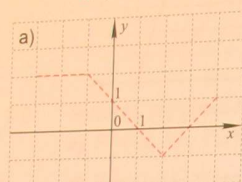
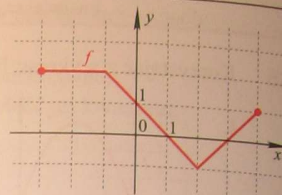
3.18 Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ przesunięto o wektor $\vec{v}$. Wyznacz wzór funkcji, której wykres otrzymano, jeśli a) $\vec{v} = [0, 3]$; b) $\vec{v} = [1, 0]$; c) $\vec{v} = [-1, -9]$.

Zdający potrafi

- na podstawie danego wykresu funkcji $y=f(x)$ sporządzać wykresy funkcji:
 $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $y=f(x-a)+b$, $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$
- zapisywać wzór funkcji otrzymanej w wyniku danego przekształcenia

3.19 Obok zamieszczono wykres funkcji f . Sporządź wykres funkcji

- a) $y=f(x-1)$; b) $y=f(x)+2$;
 c) $y=f(x+1)-1$; d) $y=-f(x)$;
 e) $y=f(-x)$; f) $y=-f(-x)$;
 g) $y=f(|x|)$; h) $y=|f(x)|$.



3.20 Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2+x+1$. Znajdź wzór funkcji g , której wykres otrzymamy

- a) przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi OY ;
 b) przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi OX ;
 c) przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem punktu $(0, 0)$;
 d) przesuwać wykres funkcji o wektor $[-1; -3]$, a następnie otrzymany wykres przekształcając w symetrii względem osi OY ;
 e) dokonując obu przekształceń z punktu d), ale w odwrotnej kolejności.

3.21 W wyniku jakiego przekształcenia (lub przekształceń) wykresu funkcji $f(x)=x^4+3x$ można otrzymać wykres

- a) $g(x)=(x-5)^4+3(x-5)-5$; b) $g(x)=x^4-3x$; c) $g(x)=|x^4+3x+1|$;
 d) $g(x)=x^4+3|x|$; e) $g(x)=-x^4+3x$.

Zdający potrafi

- badać monotoniczność funkcji na podstawie definicji
- określać na podstawie wykresu różnowartościowość funkcji
- badać różnowartościowość funkcji z wykorzystaniem definicji

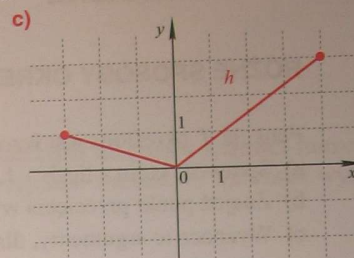
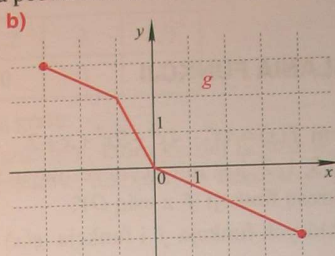
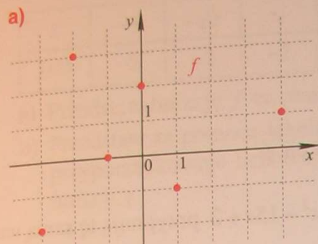
3.22 Korzystając z definicji funkcji rosnącej wykaż, że funkcja

- a) $f(x)=3x-5$ jest rosnąca;
 b) $f(x)=x^2-4x$ jest rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$;
 c) $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}_+$.

3.23 Korzystając z definicji funkcji malejącej wykaż, że funkcja

- a) $f(x)=|x+2|$ jest malejąca w zbiorze $(-\infty; -2)$;
 b) $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$ jest malejąca w przedziale $(3; +\infty)$;
 c) $f(x)=-x^3-3x+4$ jest malejąca.

3.24 Określ różnowartościowość funkcji na podstawie zamieszczonego wykresu.

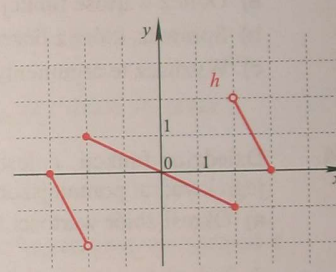
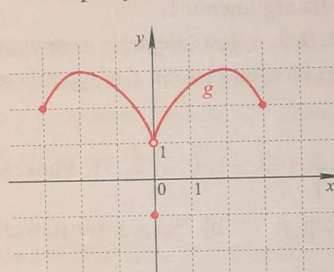
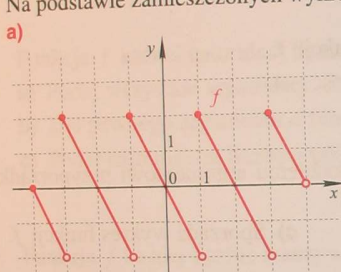


3.25 Korzystając z definicji funkcji różnowartościowej, zbadaj, czy funkcja f jest różnowartościowa

a) $f(x) = 5x + 2$; b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; c) $f(x) = x^2 - 3x$; d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Zdający potrafi	- określać na podstawie wykresu parzystość, nieparzystość i okresowość funkcji - badać z wykorzystaniem definicji: parzystość i nieparzystość funkcji
-----------------	--

3.26 Na podstawie zamieszczonych wykresów określ parzystość lub nieparzystość funkcji.



3.27 Korzystając z definicji funkcji parzystej i nieparzystej, zbadaj, czy funkcja f jest parzysta lub nieparzysta.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5$; b) $f(x) = x^3 - 3x$; c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; d) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 3}$.

Zdający potrafi	- określać zależność funkcyjną między wielkościami liczbowymi - opisywać za pomocą funkcji zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym - interpretować zależności funkcyjne na podstawie danego wzoru
-----------------	--

3.28 Samochód jadący autostradą spala 5,6 litra paliwa na 100 km.

- a) Napisz wzór funkcji p określającej zużycie paliwa (w litrach) w zależności od przebytej drogi s (w km).
 b) Napisz wzór funkcji s określającej przebytą drogę (w kilometrach) w zależności od zużytego paliwa p (w litrach).

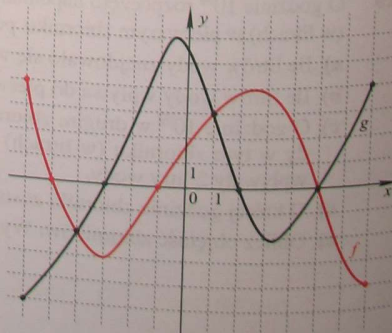
3.29 O godzinie 10^{00} rozpoczęto napełnianie wodą dwóch identycznych, częściowo wypełnionych zbiorników. Ilość wody (w litrach) w pierwszym zbiorniku po upływie t sekund od rozpoczęcia napełniania wyraża wzór $w_1(t) = 3t + 1900$.

- a) Ile litrów wody znajdowało się w zbiorniku o godzinie 10^{00} ?
 b) Ile litrów wody wpływa do pierwszego zbiornika w ciągu minuty?
 c) O godzinie 10^{00} w drugim zbiorniku znajdowało się 4 600 l wody. Napisz wzór funkcji określającej ilość wody w tym zbiorniku (w litrach) w zależności od czasu (w sekundach), jeżeli wiadomo, że w ciągu sekundy wpływały 2 litry wody.
 d) O której godzinie zbiorniki zostały napełnione, jeśli wiadomo, że ich napełnienie nastąpiło równocześnie?
 e) Oblicz objętość zbiorników. Wynik podaj w m^3 .

ZADANIA MATURALNE

RÓŻNE SPOSOBY OKREŚLANIA FUNKCJI

71. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$.
 a) Sprawdź, która z liczb $-1, 0, 5, 1, 2$ jest miejscem zerowym funkcji f .
 b) Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OY .
 c) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f i funkcja $g(x) = 7x^2 - 15x + 2$ przyjmują tę samą wartość.
72. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$.
 a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 b) Dla którego z argumentów: $-\frac{3}{2}$ czy $\sqrt{3} - 3$ funkcja f przyjmuje większą wartość?
73. Funkcja f określona jest następująco: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{dla } x < 1 \\ x^2 - 4x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$.
 a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 1.
 b) Sprawdź, która z liczb $-3, 0, 2, 4$ jest miejscem zerowym funkcji f .
 c) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość -4 .
74. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Funkcja f każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat pomniejszony o 1.
 a) Określ zbiór wartości funkcji f . b) Podaj wzór funkcji f . c) Sporządź wykres funkcji f .
75. Funkcja f , określona na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, każdej liczbie $x \in \mathbf{R}_+$ przyporządkowuje jej odwrotność pomnożoną przez 18.
 a) Podaj wzór funkcji f .
 b) Uzasadnij, że wszystkie punkty wykresu funkcji f znajdują się w I ćwiartce układu współrzędnych.
 c) Wyznacz wszystkie te punkty należące do wykresu funkcji f , których obie współrzędne są liczbami naturalnymi.
76. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcja f każdej liczbie ujemnej $k \in D$ przyporządkowuje jej wartość bezwzględną, a każdej liczbie nieujemnej $m \in D$ przyporządkowuje sumę liczby m i liczby o 6 od niej mniejszej.
 a) Oblicz $f(-1)$ i $f(1)$.
 b) Podaj wszystkie argumenty x , dla których zachodzi równość $f(x) = 2$.
 c) Podaj wszystkie argumenty x spełniające nierówność $f(x) \leq 0$.
77. Obok zamieszczono wykresy funkcji f i g .
 a) Określ zbiór wartości funkcji f oraz funkcji g .
 b) Podaj te wartości funkcji g , które nie są wartościami funkcji f .
 c) Podaj te argumenty, dla których wartości obu funkcji są równe.
 d) Podaj zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .
 e) Podaj te argumenty x , dla których $f(x) < 0$ i $g(x) < 0$.
 f) Podaj te argumenty x , dla których $f(x) \cdot g(x) = 0$.
 g) Podaj te argumenty x , dla których $f(x) \cdot g(x) < 0$.



78. Funkcja f określona jest za pomocą poniższej tabelki.

x	-3	$-\sqrt{3}$	0	1,2	3	$4\sqrt{5}$
$f(x)$	-2	-2	-2	0	0	2

- a) Przedstaw funkcję f za pomocą grafu.
 b) Przedstaw za pomocą tabelki funkcję g , która każdej liczbie w , należącej do zbioru wartości funkcji f , przyporządkowuje liczbę argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość w . Sporządź wykres funkcji g .

79. Funkcja rosnąca $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \mathbb{C}$ została częściowo określona za pomocą tabelki.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-2		0	5	9			12

- a) Uzupełnij tabelkę.
 b) Podaj punkty wspólne wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.
 c) Podaj ten argument a , dla którego zachodzi równość $f(f(a)) + 2 = 0$.

80. Funkcja f każdej naturalnej liczbie trzycyfrowej przyporządkowuje sumę jej cyfr.

- a) Podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 2.
 b) Dla pewnego argumentu a funkcja f przyjmuje wartość 15. Uzasadnij, że a dzieli się przez 3.
 c) Podaj najmniejszą liczbę a taką, że $f(a) = 20$.

81. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje największą liczbę parzystą mniejszą od x .

- a) Oblicz $f(\pi)$ i $f(10)$.
 b) Podaj zbiór wszystkich miejsc zerowych funkcji f .
 c) Określ zbiór wartości funkcji f .
 d) Naskicuj wykres funkcji f dla $x \in \langle 2; 8 \rangle$.

82. Funkcja f każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę cyfr potrzebnych do jej zapisania w zapisie dziesiętnym, np. $f(7285) = 4$.

- a) Podaj zbiór wartości funkcji f .
 b) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3?
 c) Podaj wszystkie argumenty $n < 3000$ spełniające równość $f(n+1) = f(n) + 1$.

83. Funkcja f , określona na zbiorze liczb naturalnych większych od 9, przyporządkowuje każdej liczbie n cyfrę dziesiątek liczby n .

- a) Określ zbiór wartości funkcji f .
 b) Dla ilu argumentów mniejszych od 999 funkcja f przyjmuje wartość 5?
 c) Dla jakich $k \in \mathbb{C}_+$ liczba $10k$ jest miejscem zerowym funkcji f ?
 d) Dla jakich n nie zachodzi równość $f(n+1) = f(n)$?

84. Funkcja f każdej liczbie całkowitej dodatniej przyporządkowuje liczbę jej dzielników naturalnych.

- a) Oblicz $f(12)$.
 b) Funkcja g określona jest następująco: $g(n) = f(n) - 2$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n . Ile miejsc zerowych należących do zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ma funkcja g ?
 c) Jaką własność mają te liczby n , dla których $f(n)$ jest liczbą nieparzystą?

85. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ określonej wzorem $f(n) = \begin{cases} (-1)^n \cdot \frac{n}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą} \\ (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$.

86. 1b Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dla których zachodzi równość $2f(x) + f(1-x) = x$.
Zadanie to można rozwiązać w następujący sposób:

- podstawiamy do danego równania w miejsce x wyrażenie $1-x$: $2f(1-x) + f(x) = 1-x$;
- rozwiązując układ równań $\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x \\ 2f(1-x) + f(x) = 1-x \end{cases}$ (traktując $f(x)$ i $f(1-x)$ jako niewiadome) otrzymujemy wzór funkcji $f: f(x) = x - \frac{1}{3}$.

W podobny sposób

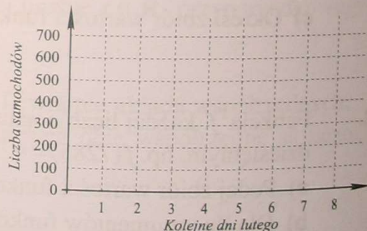
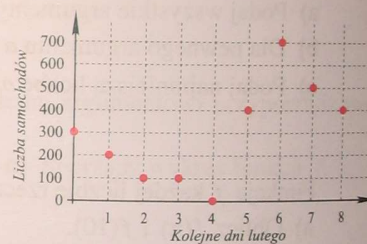
- a) znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dla których zachodzi równość $xf(x) - f(1-x) = 2$.

- b) znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, dla których zachodzi równość $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$.

ZADANIA Z KONTEKSTEM REALISTYCZNYM

87. Na pewnym przejściu granicznym celnicy odprawiają codziennie 200 samochodów ciężarowych. Na wykresie pokazano liczby ciężarówek oczekujących na odprawę celną o godzinie 24⁰⁰ każdego z pierwszych ośmiu dni lutego.

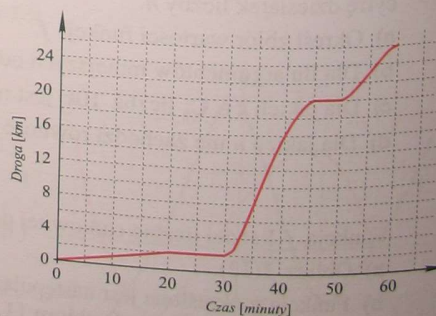
- a) Wymień te dni, w których stanęło w kolejce do odprawy celnej co najmniej 200 samochodów ciężarowych?
- b) Pewnego dnia o północy związkowcy z „Samoobrony” zablokowali na 24 godziny dojazd do przejścia granicznego. Kiedy miała miejsce ta blokada?
- c) Dziedzina funkcji f jest zbiór $\{1 \text{ II}, 2 \text{ II}, \dots, 8 \text{ II}\}$. Funkcja f każdemu argumentowi przyporządkowuje liczbę ciężarówek, które w danym dniu stanęły w kolejce do odprawy celnej. Sporządź (w narysowanym obok układzie współrzędnych) wykres funkcji f .



88. Na wykresie obok pokazano, jak zmieniała się droga, którą przebył pan Kowalski udając się pewnego dnia do pracy. Pierwszy odcinek drogi (z domu do stacji kolejowej) pan Kowalski pokonał piechotą i zajęło mu to 20 min. Kolejny etap pokonał pociągiem, a ostatni autobusem.

- a) Odpowiedz na pytania:
- 1) jak daleko mieszka pan Kowalski od stacji kolejowej?
 - 2) ile minut jechał pan Kowalski pociągiem?
 - 3) jak długo czekał pan Kowalski na autobus?
- b) Uzupełnij tabelę.

Przedział czasu (w min)	(0; 25)	(25; 40)	(40; 45)	(45; 60)
Przebyta droga (w km)				



- c) Oblicz, z jaką przeciętną prędkością pokonałby pan Kowalski drogę z domu do pracy, gdyby nie musiał czekać ani na pociąg, ani na autobus.

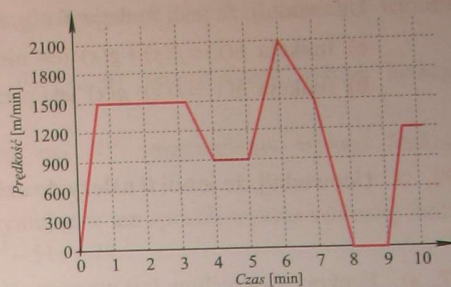
89.

Pan Nowak wyruszył samochodem na wczasy. Na wykresie pokazano jak zmieniała się prędkość w czasie pierwszych 10 minut podróży.

- a) Z jaką maksymalną prędkością jechał pan Nowak w rozpatrywanym przedziale czasu? Wynik podaj w km/godz.
b) W piątej minucie pan Nowak przejeżdżał przez teren zabudowany. Ustal, czy nie złamał przepisów, jeżeli wiadomo, że w tym miejscu obowiązywało ograniczenie prędkości do 60 km/godz.

c) W kilka minut po rozpoczęciu podróży pan Nowak musiał zatrzymać się przed przejazdem kolejowym. Jak długo trwał ten nieplanowany postój?

d) Wiadomo, że droga przebyta od momentu t_1 do momentu t_2 jest równa polu obszaru ograniczonego wykresem prędkości będącej funkcją czasu, osią OX i prostymi $x = t_1$, $x = t_2$. Sprawdź, w którym okresie pan Nowak pokonał większą odległość: w ciągu 2 i 3 minuty jazdy czy w ciągu 6 i 7 minuty jazdy.



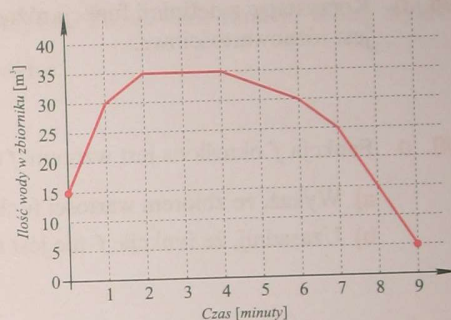
90.

Podczas napełniania zbiornika uszkodzony został zawór odpływowy, przez który zaczęła wydostawać się woda z prędkością $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Awarię usunięto po 9 minutach. Na wykresie pokazano, jak zmieniała się ilość wody w zbiorniku od momentu wystąpienia awarii do momentu jej usunięcia.

a) Oblicz

- 1) ile m^3 wody dostarczono do zbiornika w ciągu dwóch początkowych minut,
- 2) z jaką prędkością (w m^3/min) dostarczano wodę do zbiornika w ciągu piątej i szóstej minuty,
- 3) ile m^3 wody wydostało się ze zbiornika w czasie trwania awarii.

- b) W jakim przedziale czasu dostarczano wodę do zbiornika z prędkością $10 \text{ m}^3/\text{min}$?
c) W którym momencie przestano dostarczać wodę do zbiornika?



NIKTÓRE WŁASNOŚCI FUNKCJI

91. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \sqrt{4-x} - 2\sqrt{x}$.

- a) Wyznacz dziedzinę i znajdź miejsca zerowe funkcji f .
b) Zbadaj (na podstawie definicji) monotoniczność funkcji f .

92. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$. Korzystając z definicji funkcji rosnącej udowodnij, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

93. D Wykaż, że jeżeli funkcje g i h są określone w tym samym zbiorze i są rosnące, to funkcja określona wzorem $f(x) = g(x) + h(x)$ jest rosnąca.

* * * * *

94. 1a Niech dziedzina D funkcji f ma tę własność, że jeśli $x \in D$, to $-x \in D$. Wówczas funkcję f możemy zapisać w postaci $f(x) = p(x) + n(x)$, gdzie $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, zaś $n(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

- a) Wykaż, że funkcja p jest parzysta, a funkcja n jest nieparzysta.
b) Przedstaw funkcję $f(x) = \frac{1}{x-2}$, określoną w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

95. D Udowodnij, że jeśli funkcje f i g są nieparzyste, to
- funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ jest nieparzysta;
 - funkcja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ jest parzysta.
96. D Udowodnij, że jeżeli 0 należy do dziedziny funkcji nieparzystej f , to $f(0) = 0$.
97. D Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- Wykaż, że funkcja f jest nieparzysta.
 - Wykaż, że zbiór wartości funkcji f zawiera się w zbiorze $\langle -1; 1 \rangle$.

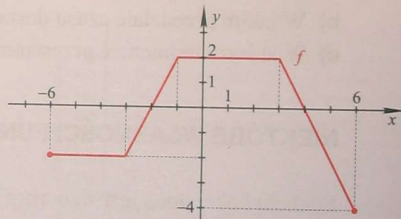
* * * * *

98. D Korzystając z definicji funkcji różnowartościowej wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 + 2x - 3$ jest różnowartościowa.
99. D Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.
- Wykaż, że zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
 - Uzasadnij, że funkcja f nie jest różnowartościowa.

PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI

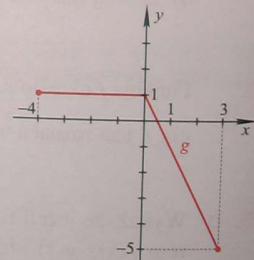
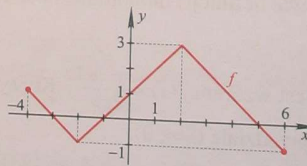
100. Obok zamieszczono wykres funkcji f . Funkcja g określona jest w następujący sposób $g(x) = |f(x-1)| + 2$.

- Naszkicuj wykres funkcji g .
- Podaj zbiór miejsc zerowych funkcji g .
- Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 2x + 4$.



101. Obok zamieszczono wykresy funkcji f i g .

- W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji $y = f(|x|)$ i wykres funkcji $y = -g(-x)$.
- Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(|x|) + g(-x) < 0$.
- Znajdź wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $f(|x|) + g(-x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.



102. Wykres funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [-2, 1]$, a następnie przesunięty wykres odbito symetrycznie względem początku układu współrzędnych. Otrzymano wykres pewnej funkcji g . Znajdź wzór funkcji g i wyznacz jej dziedzinę.

103. 1b Wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x + 1$ przekształcono w symetrii względem prostej $x=2$ i otrzymano wykres funkcji g . Znajdziemy wzór funkcji g w następujący sposób:

- wykres funkcji f i prostą $x=2$ przesuwamy o wektor $\vec{u} = [-2; 0]$: otrzymujemy wykres funkcji $f_1(x) = (x+2)^3 + 3(x+2) + 1$ i prostą $x=0$ (oś OY);
- wykres funkcji f_1 przekształcamy w symetrii względem osi OY : otrzymujemy wykres funkcji $f_2(x) = (-x+2)^3 + 3(-x+2) + 1$;
- wykres funkcji f_2 przesuwamy o wektor $-\vec{u} = [2; 0]$ otrzymując w ten sposób wykres szukanej funkcji g : $g(x) = (-x+4)^3 + 3(-x+4) + 1$, czyli $g(x) = -x^3 + 12x^2 - 51x + 77$.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ przekształcono w symetrii względem prostej $x=-1$ i otrzymano wykres funkcji g . Stosując przedstawioną wyżej metodę wyznacz wzór funkcji g .

104. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x}$. Znajdź taki wektor $\vec{u} = [p, 0]$, aby po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$ otrzymać wykres funkcji parzystej. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f o znaleziony wektor.