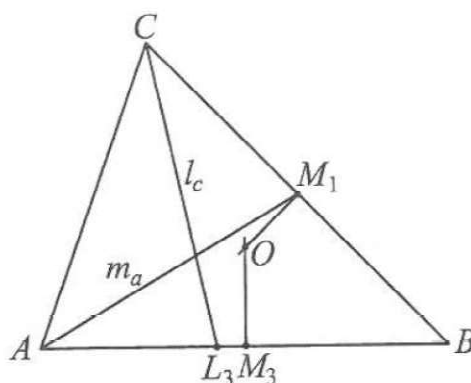
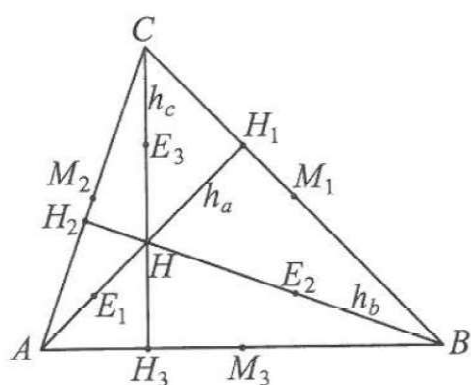
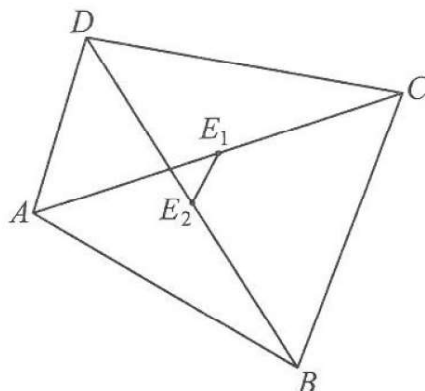
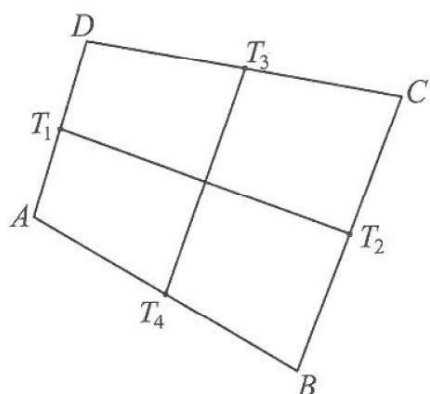


Oznaczenia w trójkącie ABC



M_1, M_2, M_3 – środki boków,
 H_1, H_2, H_3 – spodki wysokości,
 H – ortocentrum (punkt wspólny wysokości),
 O – środek okręgu opisanego,
 R – promień okręgu opisanego,
 M – środek ciężkości (punkt wspólny środkowych),
 L_1, L_2, L_3 – spodki dwusiecznych,
 E_1, E_2, E_3 – punkty Eulera będące środkami odcinków których końcami są wierzchołki trójkąta i ortocentrum,
 I – środek okręgu wpisanego (*incentrum* – punkt wspólny dwusiecznych),
 r – promień okręgu wpisanego,

l_a, l_b, l_c – długości odpowiednich dwusiecznych,
 m_a, m_b, m_c – długości odpowiednich środkowych,
 h_a, h_b, h_c – długości odpowiednich wysokości,
 a, b, c – długości boków (BC, AC, AB),
 α, β, γ – kąty przy odpowiednich wierzchołkach A, B, C ,
 I_a, I_b, I_c – środki okręgów dopisanych (stycznych odpowiednio do boków BC, AC, AB).



T_1, T_2, T_3, T_4 – środki boków AD, BC, DC, AB ,

E_1, E_2 – środki przekątnych AC, BD .

Odcinek T_1T_2 nazywamy pierwszą linią średnią.

Odcinek T_3T_4 nazywamy drugą linią średnią.

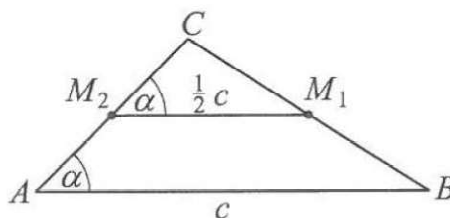
Odcinek E_1E_2 nazywamy trzecią linią średnią.

WOKÓŁ OKRĘGU EULERA

Tytuł brzmi bardzo poważnie i odstrasza, ale to bardzo dobry początek. Dla rozwiązania kilkunastu poniższych zadań korzystamy z dobrze znanych podstawowych faktów:

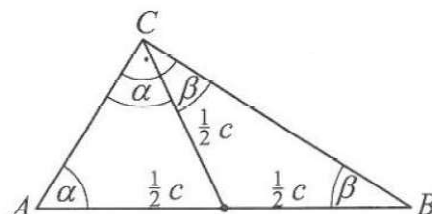
Fakt 1

Odcinek łączący środki boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy.



Fakt 2

Środkowa przeciwprostokątnej równa jest jej połowie i dzieli trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.



Zad. 1

Wykaż, że $M_1M_2 = H_1M_3$.

Zad. 2

Wykaż, że $H_1M_2 = H_3M_2$.

Zad. 3

Wykaż, że $M_1H_2 + M_2M_3 = BC$.

Zad. 4

Wykaż, że symetralna odcinka H_2H_3 przechodzi przez M_1 .

Fakt 3

Odległość wierzchołka trójkąta od *ortocentrum* jest dwa razy większa niż odległość środka okręgu opisanego od środka boku przeciwległego, np. $CH = 2OM_3$.

Zad. 5

Wykaż, że $\sphericalangle AE_1H_3 = \sphericalangle CE_3H_1$.

Zad. 6

Wykaż, że kąt między prostymi H_3M_2 i H_2E_3 jest równy kątowi między prostymi H_2M_3 i H_3E_2 .

Zad. 7

Wykaż, że $E_1H_2 = OM_1$.

Zad. 8

Wykaż, że $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$.

Zad. 9

Wykaż, że $M_1E_2 \parallel M_2E_1$.

Zad. 10

Wykaż, że $M_1E_2 \perp AB$.

Zad. 11

Wykaż, że $M_2E_1 \perp E_1E_2$.

Zad. 12

Wykaż, że $\sphericalangle M_2M_1H_3 = \beta$.

Zad. 13

Wykaż, że odcinek M_1E_2 zawiera się w dwusiecznej kąta BM_1H_3 .

Zad. 14

Wykaż, że $\sphericalangle M_1M_3H_1 = \sphericalangle H_1M_2M_1$.

Zad. 15

Wykaż, że $\sphericalangle M_2H_3H_1 = \sphericalangle M_2M_1H_3$.

Zad. 16

Wykaż, że $\sphericalangle M_1M_3H_1 = \sphericalangle H_1M_2M_1$.

Zad. 17

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 M_3 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 18

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 H_2 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 19

Wykaż, że $\sphericalangle E_1 E_2 M_1 = 90^\circ$.

Zad. 20

Wykaż, że $\sphericalangle M_1 E_1 H_1 = \sphericalangle M_1 H_2 H_1 = \beta - \gamma$.

Przy rozwiązywaniu kolejnych zadań będziemy wykorzystywali następujące twierdzenie.

Fakt 4

Trójkąt (zwany spodkowym), którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta ostrokątnego, odcina od niego trzy trójkąty podobne, przy czym $\sphericalangle H_1 H_3 B = \sphericalangle H_2 H_3 A = \gamma$, $\sphericalangle H_3 H_1 B = \sphericalangle H_2 H_1 C = \alpha$ oraz $\sphericalangle H_3 H_2 A = \sphericalangle H_1 H_2 C = \beta$.

Zad. 21

Wykaż, że M_1, M_2, M_3, H_1 leżą na jednym okręgu.

Zad. 22

Wykaż, że punkty H_1, H_2, H_3, M_1 są współokręgowe.

Zad. 23

Wykaż, że punkty E_1, E_2, M_1, H_1 są współokręgowe.

Zad. 24

Wykaż, że punkty H_1, H_2, E_1, E_2 leżą na jednym okręgu.

Zad. 25

Wykaż, że punkty O, M i H leżą na jednej prostej (Eulera), przy czym $2OM = MH$.

Zad. 26

Wykaż, że $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$.

Zad. 27

Wykaż, że odcinki OH i M_1E_1 przecinają się w połowie.

Zad. 28

Wykaż, że odcinki M_1E_1, M_2E_2, M_3E_3 przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je na pół.

Zad. 29

Wykaż, że $EH_1 = EH_2 = EH_3 = \frac{1}{2}R$.

Zad. 29

Wykaż, że $EH_1 = EH_2 = EH_3 = \frac{1}{2}R$.

Zad. 30

Wykaż, że punkty $E_1, E_2, E_3, M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3$ leżą na jednym okręgu (okrąg dziewięciu punktów lub okrąg Eulera).

ZADANIA Z EULEREM W TLE

Zad. 31

W $\triangle ABC$ odcinki BE_1 i H_2M_3 przecinają się w T . Wykaż, że $P_{H_2E_1T} = P_{BM_3T}$.

Zad. 32

Niech W_1 oznacza punkt przecięcia się dwusiecznej kąta α z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Wykaż, że $CW_1 = W_1B = IW_1$ (tzw. równość trójliścia).

Zad. 33

Wykaż, że $P_{ABC} = Rp_H$, gdzie p_H oznacza połowę obwodu trójkąta spodkowego.

Zad. 34

Niech W_1 oznacza punkt przecięcia się dwusiecznej kąta α z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Wykaż, że $AI \cdot IW_1 = 2Rr$.

Zad. 35

Wykaż prawdziwość wzoru Eulera $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Zad. 36

Wykaż, że $R \geq 2r$.

Zad. 37

Pole czworokąta $H_1E_3E_1E_2$ jest równe S . Stosunek AH do HH_1 wynosi 1,5. Oblicz pole trójkąta ABC .

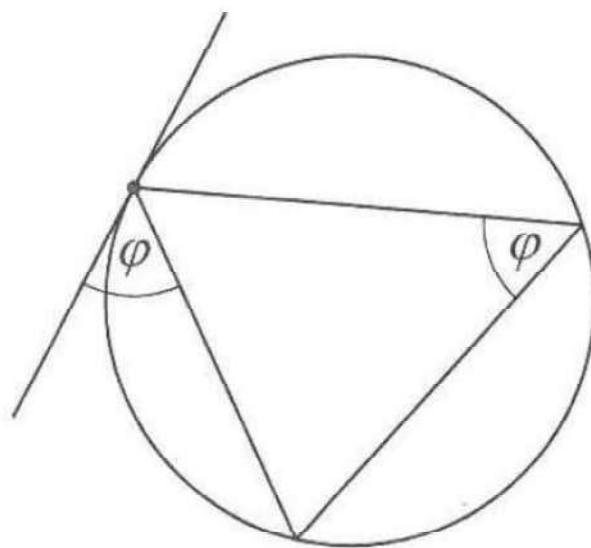
Zad. 37

Pole czworokąta $H_1E_3E_1E_2$ jest równe S . Stosunek AH do HH_1 wynosi 1,5. Oblicz pole trójkąta ABC .

DWA OKRĘGI PRZECINAJĄCE SIĘ

Fakt

Miara kąta dopisanego jest równa mierze kąta wpisanego opartego na łuku zawartym między styczną a cięciwą.



Zad. 38

Określi przecinają się w A i B . Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w X i Y . Wykaż, że $\angle XBY$ nie zależy od wyboru siecznej.

Zad. 39

Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie. Przez punkt styczności prowadzimy dwie sieczne. Wykaż, że cięciwy łączące końce siecznych są równoległe.

Zad. 40

Okręgi przecinają się w A i B . Przez A prowadzimy styczne do obu okręgów. M i N – punkty przecięcia się stycznych z okręgami. Wykaż, że $\sphericalangle ABN + \sphericalangle MAN = 180^\circ$.

Zad. 41

Okręgi przecinają się w A i B . Prosta przecina pierwszy okrąg w C i D , drugi w E i F , przy czym E leży między C i D . Wykaż, że $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DBF$.

Zad. 42

Okręgi przecinają się w A i B . Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w C i D . Przez C i D prowadzimy styczne, które przecinają się w E . Wykaż, że: $\sphericalangle CED$ nie zależy od wyboru siecznej oraz na czworokącie $BCED$ można opisać okrąg.

Zad. 43

Okręgi przecinają się w A i B . Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w C i D , a przez B sieczną, która przecina okręgi w E i F , przy czym punkty C i E leżą na jednym okręgu, a punkty D i F na drugim. Wykaż, że $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EAF$.

Zad. 44

Okręgi przecinają się w A i B . Przez dowolny punkt X jednego z okręgów prowadzimy prostą XA , która przecina drugi okrąg w Y , oraz prostą XB przecinającą drugi okrąg w Z . Wykaż, że prosta YZ jest prostopadła do średnicy pierwszego okręgu o końcu X .

Zad. 45

Okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w A i B . Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecina okręgi w M i N . Wykaż, że $\sphericalangle O_1MB = \sphericalangle O_2NB$.

Zad. 46

Okręgi przecinają się w A i B . Przez A prowadzimy cięciwy AC i AD styczne do okręgów. Wykaż, że proste BC i BD są symetryczne względem prostej AB .

Zad. 47

Przez jeden z punktów wspólnych dwóch jednakowych okręgów prowadzimy sieczną. Wykaż, że okrąg o średnicy będącej wspólną cięciwą tych okręgów dzieli odcinek siecznej ograniczony okręgami na pół.

Zad. 48

Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w A . AB jest średnicą większego okręgu. Cięciwa BK większego okręgu jest styczna do mniejszego w C . Wykaż, że AC jest dwusieczną $\sphericalangle BAK$.

Zad. 49

Dwa okręgi przecinają się w A i B przy czym pierwszy okrąg przechodzi przez środek drugiego. Styczna do pierwszego okręgu w B przecina drugi okrąg w C . Wykaż, że $AB = BC$.

Zad. 50

Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w K . Prowadzimy wspólną styczną zewnętrzną do obu okręgów w A i B . Równoległe do tej stycznej prowadzimy styczną do okręgu z punktem B w punkcie T . Wykaż, że punkty A, K, T są współliniowe.

Zad. 51

Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w D . Prosta styczna do jednego z nich w A , drugi przecina w B i C . Wykaż, że A jest równoodległy od prostych BD i CD .

Zad. 52

Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Punkt A leży na jednym z okręgów i należy do wspólnej stycznej. AB jest średnicą okręgu. Z B prowadzimy styczną do drugiego okręgu w punkcie M . Wykaż, że $AB = BM$.

Zad. 53

Dwa okręgi o różnych promieniach przecinają się w A i B . Promienie OA i OB mniejszego okręgu przedłużamy do przecięcia się z większym okręgiem w C i D odpowiednio. Wykaż, że $AC = BD$.

Zad. 54

Na cięciwie AB okręgu o środku O obrano dowolny punkt C . Przez punkty A , O , C poprowadzono okrąg, który przecina wyjściowy w D ($D \neq A$). Wykaż, że $CD = CB$.

Zad. 55

Okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w A i B . Półproste O_1A i O_2A przecinają okręgi odpowiednio w D i C . Wykaż, że punkty B , D , C i oba środki leżą na jednym okręgu.

Zad. 56

Przez punkt A przecięcia się okręgów poprowadzono dwie sieczne, które przecinają okręgi odpowiednio w punktach B i C oraz D i E . Cięciwy BD i EC przedłużono do przecięcia się w M . Wykaż, że $\angle BME$ nie zależy od wyboru siecznych.

Zad. 56

Przez punkt A przecięcia się okręgów poprowadzono dwie sieczne, które przecinają okręgi odpowiednio w punktach B i C oraz D i E . Cięciwy BD i EC przedłużono do przecięcia się w M . Wykaż, że $\angle BME$ nie zależy od wyboru siecznych.

KĄTY WPISANE

Zad. 57

Dwa okręgi przecinają się w N i K . Prowadzimy przez te punkty proste AB i CD , przecinające pierwszy okrąg w A i C , drugi w B i D . Wykaż, że $AC \parallel BD$.

Zad. 58

Na okręgu dane są kolejno punkty A, B, C, D . A_1, B_1, C_1, D_1 – odpowiednio środki łuków AB, BC, CD, DA . Wykaż, że $A_1C_1 \parallel B_1D_1$.

Zad. 59

Niech P i Q – rzuty prostokątne dowolnego punktu M wewnątrz kąta o wierzchołku A na jego ramiona. Z A prowadzimy prostopadłą AK do odcinka PQ . Wykaż, że $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MAQ$.

Zad. 60

Na okręgu dane są punkty w kolejności A, B, C, D . Niech M – środek łuku AB . Oznaczmy przecięcia cięciw MC i MD z cięciwą AB przez E i K . Wykaż, że na czworokącie $EKCD$ można opisać okrąg.

Zad. 61

Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie w M . Niech AB – cięciwa większego okręgu, styczna do mniejszego w T . Wykaż, że MT jest dwusieczną $\sphericalangle AMB$.

Zad. 62

AB i CD – średnice pewnego okręgu. Punkt M na okręgu rzucamy prostopadłe na te średnice. Wykaż, że odległość rzutów nie zależy od położenia punktu M .

Zad. 63

Na okręgu dane są kolejno punkty: A, C_1, B, A_1, C, B_1 .

- a) Wykaż, że jeśli proste AA_1, BB_1, CC_1 są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC , to są wysokościami trójkąta $A_1B_1C_1$.
- b) Wykaż, że jeśli proste AA_1, BB_1, CC_1 są wysokościami trójkąta ABC , to są dwusiecznymi kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.
- c) W okrąg wpisano trójkąty T_1, T_2 tak, że wierzchołki T_2 są środkami łuków, na które okrąg dzieli wierzchołki T_1 . Wykaż, że przekątne sześciokąta, będącego wspólną częścią trójkątów T_1 i T_2 , łączące przeciwległe wierzchołki są równoległe do boków T_1 i przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 64

Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie dzieli odcinek łączący środki okręgów wpisanego i dopisanego na pół.

Zad. 65

Dany jest czworokąt wpisany i opisany na okręgu. Wykaż, że odcinki łączące przeciwległe punkty styczności są prostopadłe.

Zad. 66

W trapezie $ABCD$: O – punkt przecięcia się przekątnych. $\triangle OCD$ jest równoboczny. Wykaż, że środki odcinków OA, BC i OD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Zad. 67

Okręgi o promieniach R_1 i R_2 przecinają się w K . Niech M i N – punkty styczności z okręgami wspólnej stycznej. Znajdź promień R okręgu opisanego na $\triangle KMN$.

Zad. 68

Trzy okręgi o jednakowym promieniu R przecinają się w jednym punkcie S i w punktach M, N, P , przy czym S leży wewnątrz $\triangle MNP$. Wykaż, że okrąg opisany na $\triangle MNP$ ma promień R .

Zad. 69

Wykaż, że suma kwadratów odcinków, na jakie dzielą się prostopadłe cięciwy okręgu, jest stała dla danego okręgu.

Zad. 70

W trójkącie równoramiennym $AB = BC$. $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Niech X wewnątrz trójkąta taki, że $\sphericalangle XAC = 10^\circ$, $\sphericalangle XCA = 30^\circ$. Oblicz $\sphericalangle BXC$.

Zad. 71

W trójkącie ABC : $\sphericalangle B = 60^\circ$ i dwusieczne AD i CE przecinają się w I . Wykaż, że $ID = IE$.

KOŁA I KĄTY (dla zaawansowanych)

Zad. 72

Dany jest kąt o wierzchołku O i okrąg w niego wpisany, styczny do ramion w A i B . Niech K dowolny punkt na krótszym z dwóch łuków $\widehat{AB}$ tego okręgu. Na prostej OB punkt L taki, że $OA \parallel KL$. Niech M punkt przecięcia się okręgu S opisanego na $\triangle KLB$ z prostą AK ($M \neq K$). Wykaż, że prosta OM jest styczna do S .

Zad. 73

Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$. Niech l_a, l_b, l_c, l_d to dwusieczne kątów zewnętrznych. $K = l_a \cap l_b$, $L = l_b \cap l_c$, $M = l_c \cap l_d$, $N = l_d \cap l_a$. Wykaż, że jeśli okręgi opisane na $\triangle ABK$ i $\triangle CDM$ są styczne zewnętrznie, to okręgi opisane na $\triangle BCL$ i $\triangle DAN$ też.

Zad. 74

Okrąg S o środku O przecina się z okręgiem S' w punktach A i B . Na łuku okręgu S leżącym wewnątrz S' wzięto punkt C . Niech AC i BC przecinają S' odpowiednio w E i D (różne od A i B). Wykaż, że $DE \perp OC$.

Zad. 75

W $\triangle ABC$ przedłużono środkowe do przecięcia się z okręgiem opisanym w punktach A_o, B_o, C_o . Środek ciężkości M dzieli odcinek CC_o na pół. Wykaż, że $\triangle A_o B_o C_o$ jest równoramienny.

Zad. 76

Dwusieczne kątów A i C przecinają okrąg opisany na $\triangle ABC$ w A_o i C_o . Prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ jest równoległa do AC i przecina się z prostą A_oC_o w P . Wykaż, że prosta PB jest styczna do okręgu opisanego.

Zad. 77

Ze środka symetrii dwóch jednakowych okręgów przecinających się poprowadzono dwie półproste przecinające okręgi w czterech punktach (nieleżących na jednej prostej). Wykaż, że punkty te leżą na jednym okręgu.

Zad. 78

W $\triangle ABC$ ($AB < BC$): I – *incentrum*, M_2 – środek AC , N – środek łuku ABC okręgu opisanego. Wykaż, że $\sphericalangle IM_2A = \sphericalangle INB$.

Zad. 79

Dwa prostokątne trójkąty położone są na płaszczyźnie tak, że środki ich przeciwprostokątnych są do siebie równoległe. Wykaż, że kąt między przyprostokątnymi jest dwa razy mniejszy niż między przeciwprostokątnymi.

Zad. 80

Punkty A_2, B_2, C_2 – środki wysokości AH_1, BH_2, CH_3 w trójkącie ostrokątnym. Znajdź sumę kątów $\sphericalangle B_2H_1C_2 + \sphericalangle C_2H_2A_2 + \sphericalangle A_2H_3B_2$.

Zad. 81

W trójkącie równoramiennym ABC ($AC = CB$) na BC punkt D taki, że $OD \perp BI$. Wykaż, że $ID \parallel AC$.

Zad. 82

Na boku BC czworokąta wypukłego $ABCD$ punkty E i F (E bliżej B niż F). Wiadomo, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDF$ i $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FDE$. Wykaż, że $\sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB$.

Zad. 83

W $\triangle ABC$ na boku AC takie punkty D i E , że $AB = AD$ i $BE = EC$ (E między A i D). F – środek łuku BC okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Wykaż, że B, E, D, F są współokręgowe.

PODOBIENSTWO

Zad. 84

Na boku BC punkt D taki, że $BD : DC = 2 : 1$. W jakim stosunku środkowa CM dzieli odcinek AD ?

Zad. 85

W trójkąt ABC wpisano kwadrat tak, że jeden bok zawiera się w boku BC trójkąta. Znajdź bok kwadratu, znając wysokość h opuszczoną na BC i długość a boku BC .

Zad. 86

Podstawy trapezu a i b . Znajdź długość odcinka wyciętego z pierwszej linii średniej przez przekątne oraz długość odcinka równoległego do podstaw, przechodzącego przez punkt wspólny przekątnych, zawartego między ramionami trapezu.

Zad. 87

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE . Wykaż, że $DC : EC = AC : BC$.

Zad. 88

Dwusieczna AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w P . Wykaż, że trójkąty ABP i BDP są podobne.

Zad. 89

Jedna z przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą. Wykaż, że rzuty prostokątne przeciwległych boków na drugą przekątną są sobie równe.

Zad. 90

Na boku AD równoległoboku punkt P taki, że $AP = \frac{1}{n}AD$. Q – punkt przecięcia się prostej AC z BP . Oblicz stosunek $AQ : AC$.

Zad. 91

Punkty K i L dzielą boki BC i AC trójkąta w stosunku $BK : KC = 1 : p$ oraz $AL : LC = 1 : q$. W jakim stosunku dzielą się odcinki AK i BL ?

Zad. 92

Punkty A i B wycinają z okręgu o środku O łuk o mierze 60° . Na tym łuku punkt M . Wykaż, że prosta przechodząca przez środek odcinka AM i środek odcinka OB jest prostopadłą do prostej przechodzącej przez środki odcinków BM i OA .

Zad. 93

W prostokącie $ABCD$ M i N to środki boków AD i BC . Na przedłużeniu odcinka DC poza punkt D obrano punkt P . Prosta PM przecina prostą AC w Q . Wykaż, że $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.

Zad. 94

Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w O . Wykaż, że $AO \cdot BO = CO \cdot DO \iff BC \parallel AD$.

Zad. 95

Niech H to *ortocentrum* w $\triangle ABC$. H_1, H_2, H_3 – spodki wysokości. Wykaż, że $AH \cdot H_1H = BH \cdot H_2H = CH \cdot H_3H$.

Zad. 96

Na boki BC i CD (lub ich przedłużenia) równoległoboku $ABCD$ opuszczono prostopadłe AM i AN . Wykaż, że $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

Zad. 97

Niech B to środek odcinka AC . Punkty D i E leżą po jednej ze stron prostej AC oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EBC$ i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCE$. Wykaż, że $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ADB$.

Zad. 98

Na dwusiecznej kąta prostego w trójkącie obrano punkt P i poprowadzono przez niego prostą, która na ramionach kąta odcina odcinki o długości a i b . Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nie zależy od wyboru prostej.

Zad. 99

Na boku BC trójkąta równobocznego ABC jako na średnicy zbudowano półokrąg (na zewnątrz). Punkty K i L dzielą półokrąg na trzy równe łuki. Wykaż, że proste AK i AL dzielą bok BC na trzy równe części.

Zad. 100

Podstawy trapezu to a i b . Wyznacz długość odcinka równoległego do podstaw dzielącego pole trapezu na pół.

Zad. 101

Wewnątrz okręgu o promieniu 15 dany jest punkt M odległy od środka o 13. Przez M prowadzimy cięciwę $AB = 18$. Na jakie odcinki M dzieli cięciwę?

SIECZNE OKRĘGU WYCHODZĄCE Z JEDNEGO PUNKTU

Twierdzenie

Niech okrąg przecina ramiona kąta o wierzchołku A w punktach B , C oraz M , N . Wówczas $AB \cdot AC = AM \cdot AN$.

Zad. 102

Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu w P i sieczną przechodzącą przez środek okręgu i przecinającą go w M i N ($AM < AN$). Wiedząc, że $AP = 2AM$, oblicz stosunek promienia okręgu do AP .

Zad. 103

Z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu poprowadzono dwie sieczne przecinające okrąg w B i C ($AB < AC$) oraz w M i N ($AM < AN$). Wykaż, że trójkąty $\triangle ABM$ i $\triangle ACN$ są podobne.

Zad. 104

Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu w P oraz sieczną przecinającą okrąg w M i N . Wiedząc, że $AP = 16$, $AN = 32$ oraz odległość siecznej od środka wynosi 5, oblicz promień okręgu.

Zad. 105

Z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu O_1 o środku O i promieniu R poprowadzono sieczną przecinającą okrąg w M i N ($AM < AN$). Na odcinku MN jako na średnicy zbudowano okrąg O_2 styczny do odcinka AO w D . Wiedząc, że $AO = m$, oblicz AD .

Zad. 106

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b wysokość dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, na których jako na średnicach zbudowano półokręgi. Jakie odcinki półokręgi te wycinają z przyprostokątnych?

Zad. 107

Okrąg przechodzący przez wierzchołek C trójkąta jest styczny do boku AB w jego środku, a boki AC i BC przecina odpowiednio w D i E . Wiedząc, że $AB = 12$, $CD = \frac{7}{2}$ oraz $EB = \frac{9\sqrt{5}}{5}$, znajdź $\sphericalangle C$.

Zad. 108

W trójkącie równoramiennym na ramieniu jako na średnicy zbudowano okrąg, który odcina z podstawy odcinek o długości 6, a z drugiego ramienia odcinek o długości $\frac{36}{7}$ (oba leżą poza okręgiem). Oblicz środkową ramienia.

Zad. 109

Dwa okręgi o promieniach R i r ($R > r$) są styczne wewnętrznie w A . Przez punkt B obrany na większym okręgu prowadzimy styczną do mniejszego okręgu w C . Wiedząc, że $BC = a$, oblicz AB .

Zad. 110

Dwa okręgi o promieniach R i r ($R > r$) są styczne zewnętrznie w A . Przez punkt B obrany na większym okręgu prowadzimy styczną do mniejszego okręgu w C . Wiedząc, że $AB = a$, oblicz BC .

Zad. 111

Znaleźć punkt poza kołem o promieniu R taki, że jest początkiem stycznej do koła i siecznej przechodzącej przez środek koła, przy czym styczna jest dwa razy krótsza od siecznej.

Zad. 112

Okrąg o środku O i promieniu r przechodzi przez wierzchołki A i B trójkąta, przecina bok BC w M i jest styczny do boku AC w A . Oblicz MC , jeśli $\sphericalangle ACO = \alpha$ i $\sphericalangle MAB = \beta$.

Zad. 113

Stosując tw. o stycznej i siecznej udowodnić tw. Pitagorasa.

Zad. 114

Stosując tw. o stycznej i siecznej wykaż, że odcinki styczne o wspólnym początku są sobie równe.

Zad. 115

Dwa okręgi o różnych promieniach R i r są styczne zewnętrznie w S . W większym okręgu poprowadzono średnicę AB i z punktów A i B poprowadzono styczne do mniejszego okręgu odpowiednio w punktach C i D . Wykaż, że suma $AC^2 + BD^2$ nie zależy od wyboru średnicy AB .

LINIE ŚREDNIE W TRAPEZIE I CZWOROKĄCIE

Zad. 116

Wykaż, że pierwsza i druga linia średnia trapezu połowią się.

Zad. 117

Wykaż, że jeśli pierwsza i druga linia średnia są sobie równe, to przekątne trapezu są wzajemnie prostopadłe.

Zad. 118

Wykaż, że jeśli pierwsza i druga linia średnia są sobie równe, to punkty T_1, T_2, T_3, T_4 są współokręgowe.

Zad. 119

W czworokąt $T_1T_2T_3T_4$ wpisano okrąg. Wykaż, że trapez jest równoramienny.

Zad. 120

Wykaż, że druga linia średnia dzieli pole trapezu na pół.

Zad. 121

Wykaż, że pole trapezu jest równe iloczynowi długości drugiej linii średniej przez sumę odcinków prostopadłych opuszczonych na nią z końców jednej z przekątnych.

Zad. 122

Pole trapezu wynosi S . Oblicz pole czworokąta $T_1T_2T_3T_4$.

Zad. 123

Wykaż, że pole trapezu równe jest podwojonemu iloczynowi drugiej linii średniej przez odległość środka ramienia od tej linii.

Zad. 124

Wykaż, że pole trapezu jest równe iloczynowi długości ramienia przez odległość od niego środka drugiego ramienia.

Zad. 125

Wykaż, że punkt E (przecięcie się przedłużeń ramion trapezu) i punkt O przecięcia się przekątnych należą do prostej T_3T_4 .

Zad. 126

W trapezie suma kątów przy mniejszej podstawie wynosi 270° . Oblicz długość drugiej linii średniej, jeśli długości podstaw wynoszą a i b .

Zad. 127

Wysokość trapezu – h . Na ramionach jako na średnicach zbudowano okręgi wzajemnie styczne. Znajdź promień koła wpisanego i opisanego w trójkąt ABE .

Zad. 128

Wykaż, że trzy linie średnie czworokąta przecinają się w jednym punkcie, dzieląc się na pół.

Zad. 129

Przekątne w czworokącie są sobie równe. Wykaż, że pierwsza (lub druga) linia średnia przecina je pod tym samym kątem.

Zad. 130

W czworokącie $ABCD$ (wypukłym) odcinki T_1E_1 i T_2E_2 przedłużono do przecięcia się z T_3T_4 w punktach K i L . Wykaż, że czworokąt T_1KT_2L jest równoległobokiem.

Zad. 131

Wykaż, że $T_1T_2^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + DC^2 + AC^2 + BD^2 - BC^2 - AD^2)$.

Zad. 132

(Wzór Eulera) Wykaż, że trzecia linia średnia w czworokącie $ABCD$ spełnia warunek $E_1E_2^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)$, gdzie a, b, c, d to długości boków oraz e, f to długości przekątnych czworokąta.

Zad. 133

W czworokącie $ABCD$ suma kątów przy boku AB wynosi 90° oraz $BC = AD$. Wykaż, że środki przekątnych i środki boków AB i CD są wierzchołkami kwadratu.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA PTOLEMEUSZA

Twierdzenie

Twierdzenie Ptolemeusza. Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.

Zad. 134

Niech X to dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC . Wykaż, że największy z odcinków XA , XB , XC jest równy sumie dwóch pozostałych.

Zad. 135

Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Oznaczmy przez m , n , k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC , AC , AB . Wykaż, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{k}$, gdzie a , b , c – długości boków BC , AC , AB .

Zad. 136

Długości boków trójkąta ABC tworzą ciąg arytmetyczny ($b > a > c$). Wykaż, że jeśli na trójkącie opisać okrąg i przedłużyć dwusieczną AI do przecięcia z okręgiem w punkcie W , to $AI = IW$, gdzie I to środek okręgu wpisanego (*incentrum*).

Zad. 137

Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta równa jest sumie promieni okręgów opisanego i wpisanego.

Zad. 138

Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki o długościach m i n , a na dwusiecznej o długości l . Wykaż, że stosunek $\frac{m+n}{l}$ nie zależy od położenia okręgu ani jego promienia.

Zad. 139

Niech $ABCDEFG$ to siedmiokąt foremny. Wykaż, że $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

Wskazówka: Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ABDG$.

Zad. 140

W trójkąt ABC wpisano półkole tak, że średnica półkola zawiera się w boku BC . F_1, F_2 – punkty styczności z ramionami trójkąta. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie W . Dowiedz, że pole trójkąta $S = \frac{1}{2} F_1 F_2 \cdot AW$.

Zad. 141

Na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat na zewnątrz. Wyznacz odległość wierzchołka kąta prostego od środka symetrii kwadratu, wiedząc, że suma przyprostokątnych m .

Zad. 142

W trójkącie ABC punkty A, M_2, M_3, L_1 leżą na jednym okręgu. Wykaż, że $a\sqrt{2} = b + c$, gdzie M_2 i M_3 to odpowiednio środki boków AC i AB , L_1 – punkt przecięcia się dwusiecznej $\sphericalangle BAC$ z BC .

Zad. 143

Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach W_1, W_2 i W_3 . Udowodnij, że $AW_1 + BW_2 + CW_3 > AB + BC + AC$.

ZADANIA RÓŻNE

Zad. 144

Niech I – środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, O – środek okręgu opisanego na AIC . Wykaż, że BIO są współliniowe.

Zad. 145

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg styczny do ramion AD i BC w punktach E i F , odpowiednio. Wykaż, że $AE \cdot ED = CF \cdot FB$.

Zad. 146

W trapezie $ABCD$ dwusieczna $\sphericalangle ADC$ przecina linię średnią w P , a podstawę AB w Q . Znajdź $\sphericalangle APQ$.

Zad. 147

W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg o środku O . Przez wierzchołki prowadzimy prostopadłe do AO, BO, CO, DO , które przecinając się, tworzą czworokąt $KLMN$. Wykaż, że przekątne KM i LN przecinają się w O .

Zad. 148

Na ramieniu kąta ostrego obrano punkt A . Na tym samym ramieniu znaleźć punkt M , którego odległość od drugiego ramienia będzie równa AM .

Zad. 149

Dwusieczne kątów zewnętrznych wypukłego czworokąta $ABCD$ utworzyły nowy czworokąt. Dowieść, że suma długości przekątnych nowego czworokąta jest nie mniejsza niż obwód wyjściowego czworokąta.

Zad. 150

Bok AD czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu na nim opisanego. Skonstruować trójkąt wpisany w ten okrąg o polu równym polu czworokąta.

Zad. 151

Wysokość BD trójkąta ABC przecina dwusieczną CK w punkcie M , a wysokość KL trójkąta CKB przecina wysokość BD w N . Okrąg opisany na trójkącie CKN przecina prostą AC w $P \neq A$. Dowieść, że trójkąt KPM jest równoramienny.

Zad. 152

Niech X dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie ABC . Wykaż, że jego rzuty prostokątne na proste zawierające boki trójkąta są współliniowe.

Zad. 153

Dany jest trójkąt równoramienny ($AC = CB$). Na boku AC obrano punkt D . Na trójkątach ADB i DBC opisano okręgi S_1 i S_2 . Styczna do S_1 w punkcie D przecina okrąg S_2 w M . Wykaż, że $CM \parallel AB$.

Zad. 154

W trójkącie ABC na boku AC obrano D i E tak, że $AB = AD$ i $BE = EC$ (E między A i D). Punkt F – środek łuku BC okręgu opisanego na ABC . Wykaż, że punkty B, E, D, F są współokręgowe.

Zad. 155

Niech I, O – środki okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie równoramiennym ($AC = CB$). Okręgi opisane na trójkącie ABC i IOA przecinają się w A i D . Wykaż, że prosta DC jest styczną do okręgu opisanego na trójkącie IOA .

Zad. 156

Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. D i $E \in AB$ przy czym $DS \parallel AC$ i $ES \parallel BC$. Wykaż, że obwód $\triangle DES$ równy jest AB .

Zad. 157

W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków AB, AC, BC w C_1, B_1, A_1 . Niech K – punkt na okręgu symetryczny do C_1 względem *incentrum* I . D – punkt przecięcia prostych B_1C_1 i A_1K . Wykaż, że $CD = CB_1$.

Zad. 158

W trójkącie równoramiennym kąt C prosty. Na bokach AC i BC punkty M i N takie, że $CM = CN$. Z punktów M i C prowadzimy prostopadłe do AN przecinające AB w D i F . Wykaż, że $DF = FB$.

Zad. 159

Dwusieczne kątów A i C przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach W_1 i W_3 . Prosta przechodząca przez *incentrum* równoległa do boku AC przecina prostą W_1W_3 w P . Wykaż, że prosta PB jest styczną do okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Zad. 160

W trójkącie ostrokątnym ABC : AL_1 – dwusieczna, BH_2 – wysokość. Wykaż, że $\angle CH_2L_1 > 45^\circ$.

Zad. 161

Ortocentrum w trójkącie ostrokątnym ABC należy do trzech okręgów, z których każdy jest styczny do jednego z boków w spodku wysokości. Wykaż, że pozostałe punkty przecięcia się tych okręgów są wierzchołkami trójkąta podobnego do ABC .

Zad. 162

Dany jest czworokąt $ABCD$. Na prostych AC i BD wzięto punkty K i M tak, że $BK \parallel AD$ i $BC \parallel AM$. Wykaż, że $KM \parallel CD$.

Zad. 163

Cięciwa CD jest prostopadła do średnicy AB , a cięciwa AE dzieli promień OC na pół. Wykaż, że cięciwa DE dzieli na pół cięciwę BC .

Zad. 164

W równoramiennej trójkącie ABC ($AC = BC$) poprowadzono dwusieczną BD . Prosta prostopadła do BD przechodząca przez środek okręgu opisanego na ABC przecina BC w E . Prosta przechodząca przez E równoległa do BD przecina AC w F . Wykaż, że $CE = FD$.

Zad. 165

Dane są dwa punkty A i B . Wyznacz zbiór wszystkich punktów X , dla których trójkąt ABX jest ostrokątny.

Zad. 166

W $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle B = 60^\circ$, dwusieczna kąta A przecina bok BC w M . Na boku AC wzięto punkt K taki, że $\sphericalangle AMK = 30^\circ$. Znajdź $\sphericalangle OKC$, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle AMC$.

Zad. 167

Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D takie, że $AC < AD$ oraz $BC < BD$. Wykaż, że dla dowolnego punktu wewnętrznego M odcinka AB zachodzi nierówność $CM < DM$.

Zad. 168

W $\triangle ABC$ poprowadzono środkową AD i $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$. Znajdź kąt $\sphericalangle BAC$, wiedząc, że $AB \neq AC$.

Zad. 169

W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość. Powstały dwa trójkąty. Wykaż, że $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, gdzie r_1 , r_2 i r to promienie kół wpisanych w te trójkąty.

Zad. 170

Rozważmy trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości trójkąta. Wykazać, że *ortocentrum* tego trójkąta jest środkiem okręgu wpisanego w rozważany trójkąt.

Zad. 171

Dany jest trójkąt równoramienny ($AC = BC$). Na boku AC obrano punkt D . Na trójkątach ADB i DBC opisano okręgi S_1 i S_2 . Styczna do S_1 w punkcie D przecina okrąg S_2 w punkcie M . Wykaż, że CM jest równoległa do AB .

Zad. 172

W trójkąt o kątach α , β , γ wpisano okrąg. Oblicz kąty w trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności.

Zad. 173

Wykaż, że kwadrat długości odcinka dwusiecznej zawartego w trójkącie równy jest różnicy iloczynów długości boków (o wspólnym wierzchołku z dwusieczną) i długości odcinków, na jakie dwusieczna dzieli trzeci bok.

Zad. 174

Dany jest trójkąt równoramienny ($AC = CB$). Pewien okrąg o środku w O jest styczny do boku BC w B , a do przedłużenia boku AC poza punkt C w punkcie D . Wykaż, że punkt przecięcia się prostych DO i AB leży na okręgu.

Zad. 175

Niech D będzie punktem symetrycznym do ortocentrum względem boku BC . Odległość D od boku AC wynosi h , a kąt $C = 45^\circ$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zad. 176

Po jednej stronie prostej k leżą punkty A i B . Na prostej k znaleźć punkt D taki, że różnica $DA - DB$ jest największa.

Zad. 177

Na bokach AB , BC i AC trójkąta odpowiednio obrano punkty P , Q i R tak, że $AP = CQ$ i na czworokącie $RPBQ$ można opisać okrąg. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach A i C przecinają proste RP i RQ odpowiednio w punktach X i Y . Wykaż, że $RX = RY$.

Zad. 178

Wykaż, że w trójkącie ABC dwusieczna kąta A , linia średnia równoległa do AC i prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami CB i CA przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 179

Na podstawę BC trójkąta równoramiennego ABC opuszczono wysokość AD . Niech M będzie środkiem boku AC . Udowodnij, że $DB - DM < AB - AM$.

Zad. 180

Wykazać, że w trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego jest jednocześnie dwusieczną kąta między wysokością i środkową poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego.

Zad. 181

Dany jest trójkąt prostokątny ABC . O jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Niech K i L – punkty na przyprostokątnych AC i BC takie, że $\sphericalangle KOL = 90^\circ$. Wykaż, że $AK^2 + BL^2 = KL^2$.

Zad. 182

Przekątne czworokąta $ABCD$ są do siebie prostopadłe. Ponadto $AB < BC < CD$. Wykaż, że $BC - AB > CD - AD$.

Zad. 183

Przez punkt H dzielący wysokość trapezu $ABCD$ w stosunku $m : p$ poprowadzono prostą równoległą do podstawy AB , która przecina boki BC i AD odpowiednio w punktach K i L . Wykaż, że $KL = \frac{ma+pb}{m+p}$ gdzie $a = AB$ i $b = CD$.

Zad. 184

Wykaż, że w trójkącie ABC $\sphericalangle HAB = \sphericalangle OAC$.

Zad. 185

Dowieść, że w trójkącie ABC kąt HAC równy jest kątowi OAB , gdzie H – ortocentrum (punkt przecięcia się wysokości), a O – środek okręgu opisanego na trójkącie.

Zad. 186

Wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta tworzą z bokami jednakowe kąty. Środkowa ma długość m . Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie.

Zad. 187

W trójkącie ABC dwusieczne AD i CE przecinają się w F . Punkty B, D, E i F leżą na okręgu. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Zad. 188

W trapezie równoramiennym wysokość jest równa średniej geometrycznej podstaw. Wykaż, że w trapez można wpisać okrąg.

Zad. 189

Prosta przechodząca przez środki przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ przecina boki AD i BC w punktach M i N . Wykaż, że $P_{\triangle ADN} = P_{\triangle BMC}$.

Zad. 190

Wykaż, że punkt symetryczny do wierzchołka C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC , środek boku AB i ortocentrum są współliniowe.