

Dzień dobry, dzisiaj zaprezentujemy piękne zadanie 17, oraz mniej piękne jego rozwiązanie.

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla równoległoboku $ABCD$:

$$|AB| = |CD| = a, |BC| = |AD| = b, |BD| = p, |AC| = r, \alpha = |\angle DAB|$$

T: $a^2 + b^2 \geq pr$

Z tw. cosinusów dla trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ otrzymujemy następujące równania:

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

Mnożąc te równania przez siebie:

$$p^2 r^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) = (a^2 + b^2)^2 - (2ab \cos \alpha)^2 \quad (1)$$

Wiemy że $T \Leftrightarrow p^2 r^2 \leq (a^2 + b^2)^2$, możemy więc za $p^2 r^2$ podstawić prawą stronę (1)

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 - (2ab \cos \alpha)^2 &\leq (a^2 + b^2)^2 \\ (2ab \cos \alpha)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

■

Przepraszam, że zadanie 17 a nie 18, ale tworząc dokument zapomniałem, że zmienił mi się numer.