

Zadanie 27

Kacper Słoniec

16 listopada 2020

Treść zadania:

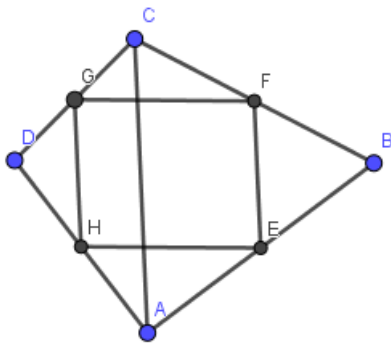
Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.

Rozwiązanie:

Z: Środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się.

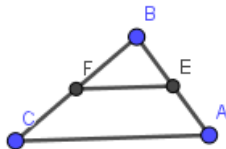
T: Pola tych czworokątów są równe.

D:



Mamy czworokąt $ABCD$. Środkami jego boków są punkty: E, F, G, H . Prowadzimy przekątną AC , która dzieli czworokąt $ABCD$ na $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$.

Rozpatrujemy $\triangle ABC$:



Odcinek EF łączy środki boków $\triangle ABC \Rightarrow$
 $EF \parallel AC \wedge |EF| = \frac{|AC|}{2} \wedge H_{\triangle EBF} = \frac{H_{\triangle ABC}}{2} \Rightarrow$
 $P_{\triangle EBF} = \frac{P_{\triangle ABC}}{4} \quad (1)$

Analogicznie dla $\triangle ACD$: $P_{\triangle GDH} = \frac{P_{\triangle ACD}}{4} \quad (2)$

$$Z \quad (1) \wedge (2) \Rightarrow P_{\triangle EBF} + P_{\triangle GDH} = \frac{P_{\triangle ABC}}{4} + \frac{P_{\triangle ACD}}{4} \Leftrightarrow P_{\triangle EBF} \cup \triangle GDH = \frac{P_{ABCD}}{4} \quad (3)$$

Analogicznie dla przekątnej BD : $P_{\triangle AEH} \cup \triangle FCG = \frac{P_{ABCD}}{4} \quad (4)$

$$Z \quad (3) \wedge (4) \Rightarrow P_{EFGH} = \frac{P_{ABCD}}{2} \Leftrightarrow P_{ABCD} = 2 * P_{EFGH}$$

Punkty E, F, G, H dla każdego czworokąta znajdują się w jednym, stałym miejscu $\Rightarrow P_{EFGH} = const \Rightarrow P_{ABCD} = const \Rightarrow$ teza
c.n.d