

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

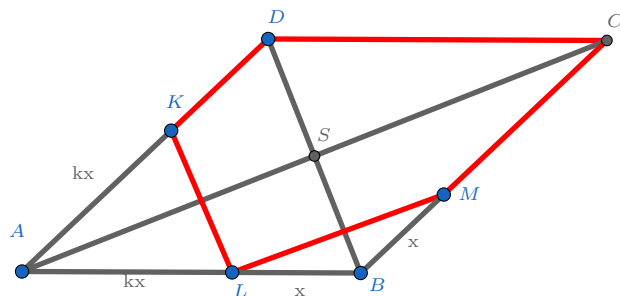
ZADANIE 28

Ola Spisak

18 listopada 2020

Treść zadania

Na bokach AD, AB i BC rombu ABCD wybrano punkty K, L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta KLMCD stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.



Rozwiązanie

$$P_{KLMCD} = \frac{11}{16} P_{ABCD}$$

$$KL \parallel BD \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ALK$$

$$\frac{P_{ALK}}{P_{ASD}} = \left(\frac{AL}{AB}\right)^2$$

$$\frac{P_{ALK}}{\frac{1}{2}P_C} = \left(\frac{kx}{kx+x}\right)^2$$

$$P_{ALK} = \frac{1}{2} \frac{k}{(k+1)^2} P_C$$

$$AC \parallel LM \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle LBM$$

$$\frac{P_{BLM}}{P_{ABC}} = \left(\frac{LB}{BA}\right)^2$$

$$\frac{P_{BLM}}{\frac{1}{2}P_C} = \left(\frac{x}{kx+x}\right)^2$$

$$P_{BLM} = \frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} P_C$$

$$P_{ALK} + P_{BLM} = P_C - \frac{11}{16} P_C = \frac{5}{16} P_C$$

$$\frac{5}{16} P_C = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{(k+1)^2}\right) P_C + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k+1)^2}\right) P_C \quad * \quad \frac{16(k+1)^2}{P_C}$$

$$\begin{aligned}
 5(k+1)^2 &= 8(k^2+1) \\
 5k^2+10k+5 &= 8k^2+8 \\
 3k^2-10k+3 &= 0 \\
 (k-3)(3k-1) &= 0 \\
 k=3 \vee k &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$