

Zadanie 32

Zięba Jakub

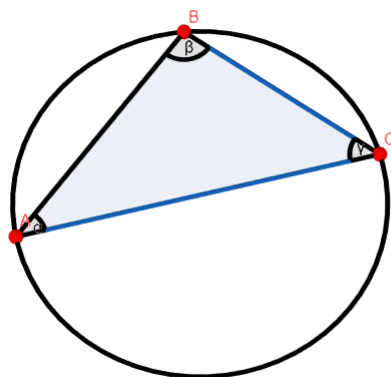
16 listopada 2020

Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$$

to trójkąt ten jest prostokątny.

Rozwiązanie



Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{2R}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Z założenia:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} \iff \\ \frac{a}{2R} &= \frac{\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = \\ &= \frac{\frac{b+c}{2R}}{\frac{2ab(a^2+c^2-b^2)+2ac(a^2+b^2-c^2)}{4abc}} = \\ &= \frac{b+c}{2R} * \frac{2abc}{a^2b - b^3 + bc^2 + a^2c + b^2c - c^3} = \\ &= \frac{b+c}{2R} * \frac{2abc}{a^2(b+c) + bc(b+c) - (b^3+c^3)} = \\ &= \frac{b+c}{2R} * \frac{2abc}{a^2(b+c) + bc(b+c) - (b+c)(b^2-bc+c^2)} = \\ &= \frac{b+c}{2R} * \frac{2abc}{(b+c)(a^2+2bc-b^2-c^2)} = \\ &= \frac{abc}{R(a^2+2bc-b^2-c^2)} \cdot \\ \frac{a}{2R} &= \frac{abc}{R(a^2+2bc-b^2-c^2)} \\ \frac{1}{2} &= \frac{bc}{a^2+2bc-b^2-c^2} \\ a^2+2bc-b^2-c^2 &= 2bc \\ a^2=b^2+c^2 &\implies \text{trójkąt ABC jest prostokątny CBDU} \end{aligned}$$