

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

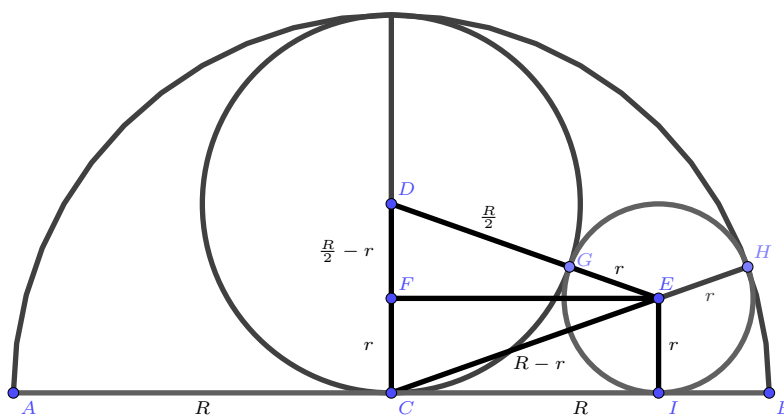
zadanie 62

Bartosz Rzepa

17 listopada 2020

Treść zadania

W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.



Rozwiązanie

Niech C będzie środkiem średnicy AB , więc także punktem styczności okręgu o środku w punkcie D z nią, punkty I, G, H punktami styczności okręgu o środku w punkcie E z kolejno średnicą AB , półokręgiem AB , i okręgiem o środku w punkcie D , a punkt F : $\angle CFE = 90^\circ$. Zatem

$$|DC| = |DG| = \frac{R}{2}, \quad |CH| = R$$

Niech teraz r będzie szukaną długością promienia okręgu, tak więc

$$|EG| = |EI| = |EH| = |CF| = r, \quad |DE| = \frac{R}{2} + r, \quad |DF| = \frac{R}{2} - r, \quad |CE| = R - r$$

Korzystając z *twierdzenia Pitagorasa* można zapisać:

$$\begin{cases} |DF|^2 + |FE|^2 = |DE|^2 \\ |CF|^2 + |FE|^2 = |CE|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |FE|^2 = |DE|^2 - |DF|^2 \\ |FE|^2 = |CE|^2 - |CF|^2 \end{cases}$$

$$|CE|^2 - |CF|^2 = |DE|^2 - |DF|^2$$

Po podstawieniu wartości

$$(R-r)^2 - r^2 = \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$$

$$R^2 - 2Rr + r^2 - r^2 = \left(\left(\frac{R}{2} + r\right) + \left(\frac{R}{2} - r\right)\right) \left(\left(\frac{R}{2} + r\right) - \left(\frac{R}{2} - r\right)\right)$$

$$R^2 - 2Rr = 2Rr$$

$$4R = r$$

$$r = \frac{1}{4}R$$

Zatem długość promienia okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu o środku w punkcie D oraz do średnicy AB $r = \frac{1}{4}R$