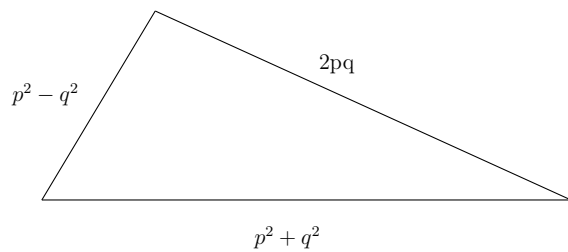


Alicja Placek
3d

November 19, 2020

109

Boki trójkąta to $p^2 + q^2$, $2pq$, $p^2 - q^2$ (gdzie $p, q > 0$ i $p > q$).



Zauważam, że:

$$\begin{aligned}(p - q)^2 &> 0 \\ p^2 + q^2 - 2pq &> 0 \\ p^2 + q^2 &> 2pq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^2 - q^2 &= p^2 + q^2 - 2q^2 < p^2 + q^2 \\ p^2 + q^2 &> p^2 - q^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^2 + q^2 &> 0 \quad | - 2p^2 \\ -p^2 + q^2 &> -2p^2 \quad | \cdot (-1) \\ p^2 - q^2 &< 2p^2 \\ p^2 - q^2 &< 2p^2 < 2pq \quad (\text{bo } p > q \wedge p, q > 0 \implies 2p^2 > 2pq) \quad p^2 - q^2 < 2pq\end{aligned}$$

$$p^2 - q^2 < 2pq < p^2 + q^2$$

Wiemy więc, że $p^2 + q^2$ jest najdłuższym bokiem trójkąta, a $p^2 - q^2$ najkrótszym. Obliczam sumę kwadratów krótszych boków:

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2$$

Zauważam, że suma kwadratów krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi dłuższego boku, więc, zgodnie z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Pitagorasa, jest to trójkąt prostokątny.

Wyznaczam p i q dla najkrótszego boku równego 13:

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= 13 \\ (p - q)(p + q) &= 13 \end{aligned}$$

13 jest liczbą pierwszą, więc jedynymi naturalnymi rozwiązaniami powyższego równania mogą być:

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 13 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} p - q = 13 \\ p + q = 1 \end{cases}$$

Przy czym drugi przypadek jest sprzeczny, ponieważ $p + q \neq 1$, bo $p, q \in \mathbb{N}_+ \wedge p > q$. Obliczam więc pierwszy przypadek:

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 13 \end{cases} \quad \text{Sumuję oba równania}$$

$$2p = 14$$

$$p = 7$$

$$q = p - 1 = 6$$

ODP: Jedyne naturalne wartości p i q dla których najkrótszy bok trójkąta ma długość 13 to $p=7$ i $q=6$.