

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

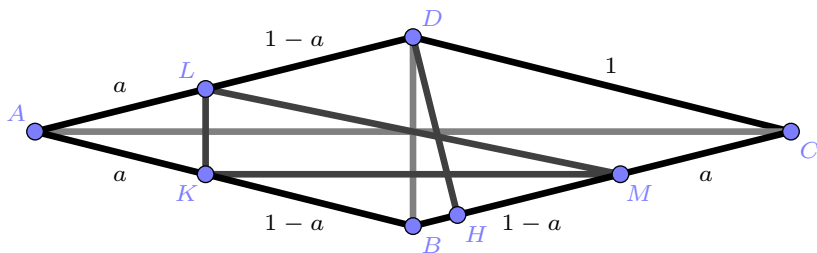
zadanie 136

Bartosz Rzepa

19 listopada 2020

Treść zadania

Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin |\angle BAD| = \frac{1}{7}$. Na bokach AB , AD i BC wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największe możliwe wartości pola trójkąta KLM .



Rozwiązanie

Niech H będzie spodkiem wysokości rombu opuszczonej z wierzchołka D na podstawę BC oraz $|AK| = a$. Jako, że trójkąty AKL i BMK są podobne kolejno do trójkątów ABD i BCA są one także równoramienne, co za tym idzie

$$|AL| = |AK| = a, \quad |KB| = |BM| = 1 - a$$

Można zauważyć, że czworokąt $CDLM$ jest trapezem o podstawach $|DL| = 1 - a$ oraz $|CM| = a$. Długość jego wysokości DH można policzyć korzystając z

$$\sin |\angle BCD| = \sin |\angle BAD| = \frac{1}{7}$$

$$\sin |\angle BCD| = \frac{|DH|}{|CD|}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{|DH|}{1}$$

$$|DH| = \frac{1}{7}$$

Teraz wystarczy policzyć pole trapezu korzystając ze wzoru

$$P_{CDLM} = \frac{(|DL| + |CM|) |DH|}{2} = \frac{(1 - a + a) * \frac{1}{7}}{2} = \frac{1}{14}$$

Pole trójkąta KLM można zapisać jako różnicę:

$$P_{KLM} = P_{ABCD} - P_{AKL} - P_{BMK} - P_{CDLM}$$

$$P_{KLM} = |BC| |DH| - \frac{1}{2} |AK| |AL| \sin |\angle BAD| - \frac{1}{2} |BK| |BC| \sin |\angle KBM| - \frac{1}{14}$$

$$P_{KLM} = 1 * \frac{1}{7} - \frac{1}{2} aa \sin |\angle BAD| - \frac{1}{2} (1 - a)(1 - a) \sin (180^\circ - |\angle BAD|) - \frac{1}{14}$$

$$P_{KLM} = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} a^2 \sin |\angle BAD| - \frac{1 - 2a + a^2}{2} \sin |\angle BAD| - \frac{1}{14}$$

$$P_{KLM} = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} a^2 * \frac{1}{7} - \frac{1 - 2a + a^2}{2} * \frac{1}{7} - \frac{1}{14} = \frac{1}{14} - \frac{2a^2 - 2a + 1}{14} = \frac{-a(a - 1)}{7}$$

Widać zatem, że P_{KLM} jest funkcją kwadratową zmiennej a .

$$P_{KLM}(a) = \frac{-a(a - 1)}{7}, \quad \mathbb{D} : a \in (0, 1)$$

Maksymalną wartość osiągnie ona w wierzchołku paraboli, czyli dla $a = \frac{1}{2} \in \mathbb{D}$

$$P_{KLM} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{7} = \frac{1}{28}$$