

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

zadanie 141

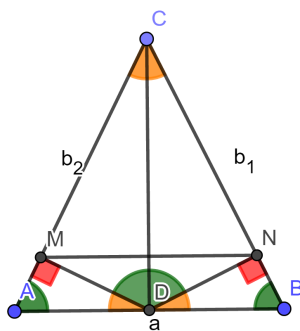
Aleksandra Wieczorek

26.11.2020

Treść zadania

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkt M i N są rzutami prostokątnymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wykaż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .

Rozwiązanie



$$Z: |AC| = |BC| = b \wedge |AB| = a \wedge \overline{DM} \perp \overline{AC} \wedge \overline{DN} \perp \overline{BC}$$

$$|CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2$$

$$|CD|^2 + \frac{a^2}{4} = b^2$$

$$|CD| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

$$\triangle CMD \sim \triangle CDA \quad (\text{KKK})$$

$\Downarrow$

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CM|}{|CD|} \Rightarrow |CM| = \frac{|CD|^2}{|AC|} = \frac{b^2 - \frac{a^2}{4}}{b} = \frac{4b^2 - a^2}{4b}$$

$$\triangle CMN \sim \triangle CAB \quad (\text{BKB})$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{\frac{4b^2-a^2}{4b}}{b} = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}$$

$$\frac{P_{\triangle CMN}}{P_{\triangle CAB}} = k^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\triangle CMN} = k^2 \cdot P_{\triangle CAB}$$

$$\begin{aligned} P_{AMNB} &= P_{\triangle CAB} - P_{\triangle CMN} \\ &= P_{\triangle CAB} - k^2 \cdot P_{\triangle CAB} \\ &= P_{\triangle CAB} \cdot (1 - k^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{4b^2-a^2}{4b^2}\right)^2\right) \\ &= \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4} \cdot \frac{16b^4 - (16b^4 - 8a^2b^2 + a^4)}{16b^2} \\ &= \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}(8a^2b^2 - a^4)}{64b^2} \\ &= \frac{8a^3b^2 - a^5}{64b^2} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2} \end{aligned}$$