

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

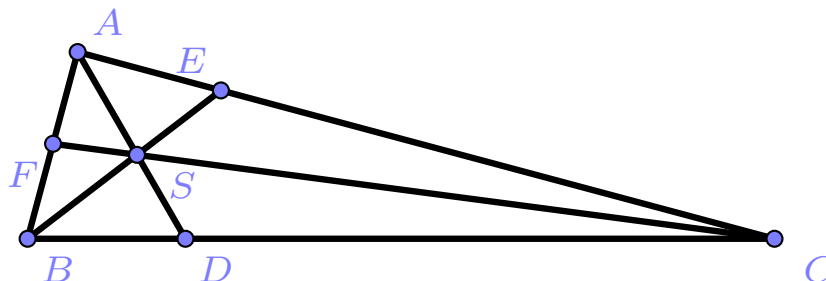
zadanie 173

Bartosz Rzepa

20 listopada 2020

Treść zadania

W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .



Rozwiązanie

Niech F i E będą takimi punktami, że BE i CF są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach B i C oraz S będzie punktem przecięcia dwusiecznych trójkąta a więc także środkiem okręgu weń wpisanego.

$$\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Korzystając z *twierdzenia o dwusiecznej* dla dwusiecznych CS oraz BS można zapisać:

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AS|}{|DS|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AS|}{|DS|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$|CD| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AC|$$

$$|BD| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AB|$$

Korzystając z *twierdzenia Pitagorasa*:

$$|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

$$|AC|^2 + |AB|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AC| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AB| \right)^2$$

$$|AC|^2 + |AB|^2 = \frac{2}{3}|AC|^2 + \frac{4}{3}|AC||AB| + \frac{2}{3}|AB|^2$$

$$|AC|^2 + |AB|^2 = 4|AC||AB|$$

$$|AC|^2 - 4|AC||AB| + |AB|^2 = 0$$

Traktuję tę równość jako równanie kwadratowe z argumentem $|AC|$ i parametrem $|AB|$.

$$\Delta = 16|AB|^2 - 4|AB|^2 = 12|AB|^2$$

$$|AC|_1 = \frac{4|AB| - 2\sqrt{3}|AB|}{2} = |AB|(2 - \sqrt{3})$$

$$|AC|_2 = \frac{4|AB| + 2\sqrt{3}|AB|}{2} = |AB|(2 + \sqrt{3})$$

$$|BC| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AC| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AB| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3 - \sqrt{3})|AC| \quad \vee \quad |BC| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AC| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|AB| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3 + \sqrt{3})|AC|$$

$$\sin \angle |ABC| = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3 - \sqrt{3})|AC|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \vee \quad \sin \angle |ABC| = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3 + \sqrt{3})|AC|} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\angle |ABC| = \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{5\pi}{12} \quad \vee \quad \angle |ABC| = \arcsin \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{12}$$

Otrzymujemy dwa różne wyniki w zależności od tego, jak oznaczymy boki, kąty ostre trójkąta prostokątnego mają zatem miary $\frac{5\pi}{12}$ i $\frac{\pi}{12}$.