

Planimetria - mieszanka zadań ciekawych ZI-TK

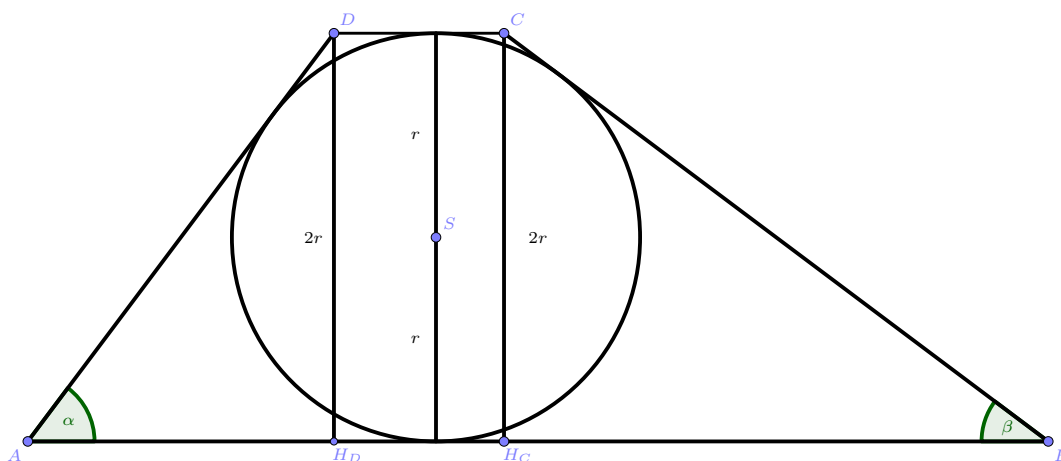
zadanie 210

Bartosz Rzepa

21 listopada 2020

Treść zadania

Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.



Rozwiązanie

Niech punkty A, B, C, D będą wierzchołkami trapezu, $AB \parallel CD$, r szukaną długością promienia okręgu weń wpisanego, a punkty H_C, H_D spodkami wysokości opuszczonych kolejno z wierzchołków C, D na podstawę AB . Jako, że w trapez można wpisać okrąg zachodzi równość:

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkątach ABH_D oraz BCH_C można zapisać:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|DH_D|}{|AD|} & \sin \beta &= \frac{|CH_C|}{|BC|} \\ |AD| &= \frac{|DH_D|}{\sin \alpha} = \frac{2r}{\sin \alpha} & |BC| &= \frac{|CH_C|}{\sin \beta} = \frac{2r}{\sin \beta} \end{aligned}$$

Korzystając z wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{(|AB| + |CD|) 2r}{2} = \frac{(|BC| + |AD|) 2r}{2} = (|BC| + |AD|) r = \left(\frac{2r}{\sin \beta} + \frac{2r}{\sin \alpha} \right) r$$

$$P = 2r^2 \left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = 2r^2 \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$r^2 = \frac{P \sin \alpha \sin \beta}{2 (\sin \alpha + \sin \beta)}$$

$$r = \sqrt{\frac{P \sin \alpha \sin \beta}{2 (\sin \alpha + \sin \beta)}}$$