

- 5.150 Niech S będzie sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie q , w którym pierwszy wyraz jest liczbą dodatnią. Wobec tego
- ☐ a) $S > 0$;
 - ☐ b) jeśli $q > 0$, to $S > a_1$;
 - ☐ c) jeśli $q < 0$, to $S < a_1$.
- 5.151 Jeśli każdy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy sumie wyrazów następujących po nim, to
- ☐ a) $a_1 = 0$;
 - ☐ b) $q = 0,5$;
 - ☐ c) $a_1 = 0$ lub $q = 0,5$.
- 5.152 Jeśli istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , to istnieje również suma ciągu (b_n) , gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$
- ☐ a) $b_n = |a_n|$;
 - ☐ b) $b_n = (-1)^n \cdot a_n$;
 - ☐ c) $b_n = 100 \cdot a_n$.
- 5.153 Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i sumie wyrazów S , zaś ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = a_n^2$. Wynika stąd, że suma ciągu (b_n)
- ☐ a) istnieje;
 - ☐ b) jest równa S^2 ;
 - ☐ c) jest równa $\frac{a_1 S}{1+q}$.

ZAGADNIENIA RÓŻNE

- 5.154 Grupa piętnastu uczniów ustawiła się w kolejce po lody. Wiadomo, że jeśli na n -tym miejscu w tej kolejce ($n \in \{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$) stoi dziewczynka, to bezpośrednio za nią również stoi dziewczynka. Wynika stąd, że
- ☐ a) w kolejce stoją tylko dziewczynki;
 - ☐ b) jeśli na przedostatnim miejscu w kolejce stoi dziewczynka, to w kolejce stoją co najmniej dwie dziewczynki;
 - ☐ c) jeśli na początku kolejki stoi dziewczynka, to w kolejce stoją tylko dziewczynki.

- 5.155 Rozważmy pewne twierdzenie T dotyczące liczb naturalnych. Dla dowolnej liczby naturalnej k z założenia prawdziwości twierdzenia T dla k wynika prawdziwość tego twierdzenia dla $k + 1$. Wynika stąd, że
- ☐ a) twierdzenie T jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej;
 - ☐ b) twierdzenie T jest prawdziwe dla nieskończenie wielu liczb naturalnych;
 - ☐ c) jeśli twierdzenie T jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k_0 , to jest prawdziwe dla nieskończenie wielu liczb naturalnych.
- 5.156 O równości R wiadomo, że z założenia prawdziwości tej równości dla dowolnie wybranej liczby naturalnej k wynika jej prawdziwość dla liczby $k + 1$. Wiadomo też, że równość R jest prawdziwa dla liczby 5. Wynika stąd, że równość R
- ☐ a) jest prawdziwa dla liczby 6;
 - ☐ b) jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych;
 - ☐ c) nie jest prawdziwa dla co najwyżej pięciu liczb naturalnych.
- 5.157 Liczba 0 ma własność W . Wiadomo też, że dla dowolnej liczby naturalnej k , jeśli k ma własność W , to $k + 2$ również ma własność W . Wynika stąd, że
- ☐ a) każda liczba naturalna ma własność W ;
 - ☐ b) każda parzysta liczba naturalna ma własność W ;
 - ☐ c) żadna nieparzysta liczba naturalna nie ma własności W .
- 5.158 (S_n) jest ciągiem sum częściowych ciągu (a_n) .
- ☐ a) Jeżeli ciąg (a_n) jest rosnący, to ciąg (S_n) jest rosnący.
 - ☐ b) Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to ciąg (S_n) jest rosnący.
 - ☐ c) Jeżeli ciąg (S_n) jest rosnący, to wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
- 5.159 Niech (S_n) będzie ciągiem sum częściowych ciągu (a_n) .
- ☐ a) Jeżeli ciąg (S_n) jest ciągiem stałym, to wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są równe 0.
 - ☐ b) Jeżeli ciąg (S_n) jest ciągiem stałym, to $a_n = 0$ dla każdego $n > 1$.
 - ☐ c) Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (S_n) są ujemne, to w ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.

5.160 Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n$. Wówczas

- ☐ a) $S_{2k} = k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$;
☐ b) $S_{2k+1} = -k - 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$;
☐ c) $S_{2k+1} = -k + 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$.

5.161 Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego, w którym piąty wyraz jest równy 0. Wynika stąd, że

- ☐ a) $S_5 < 0$;
☐ b) $S_9 = 0$;
☐ c) $S_{10} > 0$.

5.162 Jeśli $a \neq 0$ i ciąg (p_n) o wyrazie ogólnym $p_n = an^2 + bn + c$ jest rosnący, to

- ☐ a) $a > 0$;
☐ b) $-\frac{b}{2a} \leq 1$;
☐ c) $-\frac{b}{2a} < 2$.

5.163 Ciąg geometryczny o ilorazie q i pierwszym wyrazie różnym od 0 jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

- ☐ a) $q < 1$;
☐ b) $q \in (-1; 1)$;
☐ c) $q \in (-1; 1)$.

5.164 Jeśli istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego, to jest on

- ☐ a) ograniczony;
☐ b) malejący;
☐ c) zbieżny do zera.

5.165 Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym i $a_n \in \langle 0; 1 \rangle$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Wobec tego ciąg (b_n) określony przez równość

- ☐ a) $b_n = \sin a_n$ jest malejący;
☐ b) $b_n = \cos a_n$ jest malejący;
☐ c) $b_n = \operatorname{tg} a_n$ jest rosnący.

5.166 Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \pi n$. Wówczas ciąg (b_n) dany wzorem

- ☐ a) $b_n = \sin a_n$ jest arytmetyczny;
☐ b) $b_n = \cos a_n$ jest arytmetyczny;
☐ c) $b_n = \cos a_n$ jest geometryczny.

5.167 Liczby $2 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, $2 + \sqrt{3}$

- ☐ a) nie są kolejnymi wyrazami ani ciągu arytmetycznego, ani ciągu geometrycznego;
☐ b) są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego;
☐ c) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

5.168 Niech (a_n) będzie ciągiem, w którym dla pewnych różnych k i m wyrazy a_k i a_m są równe. Wobec tego

- ☐ a) ciąg (a_n) jest ciągiem stałym;
☐ b) jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to jest ciągiem stałym;
☐ c) jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny, to jest ciągiem stałym.

5.169 Liczby x, y, z są kolejnymi wyrazami ciągu (a_n) i dokładnie dwie z nich są ujemne.

- ☐ a) Jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny, to $xz > 0$.
☐ b) Jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to $xy > 0$ lub $yz > 0$.
☐ c) Jeśli $y = 0$, to ciąg (a_n) nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

5.170 Liczby x, y, z są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) i ciągu geometrycznego (g_n) . Wynika stąd, że

- ☐ a) $x = y = z$;
☐ b) $a_4 = g_4$;
☐ c) (a_n) i (g_n) są ciągami stałymi.

5.171 Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = p^{a_n}$, gdzie $p > 0$. Wynika stąd, że (b_n) jest ciągiem

- ☐ a) arytmetycznym;
☐ b) geometrycznym o ilorazie p^{a_1} ;
☐ c) geometrycznym o ilorazie $p^{a_2 - a_1}$.

5.172 O ciągach (a_n) i (b_n) wiadomo, że żaden z nich nie jest zbieżny do zera. Wynika stąd, że ciągiem zbieżnym do zera nie jest również ciąg

- ☐ a) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$;
☐ b) $(a_n + b_n)$;
☐ c) $(a_n \cdot b_n)$.

5.173 Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^{(-1)^n}$. Wobec tego

- ☐ a) ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$;
- ☐ b) ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu;
- ☐ c) ciąg (a_{2n+1}) jest zbieżny.

5.174 Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ jest

- ☐ a) rosnący;
- ☐ b) ograniczony;
- ☐ c) zbieżny do 1.