

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie	7
Funkcja wykładnicza i jej własności	10
Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych	12
Równania wykładnicze	15
Nierówności wykładnicze	19
Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań	22
Logarytm – powtórzenie wiadomości	23
Funkcja logarytmiczna i jej własności	26
Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej	28
Równania logarytmiczne	31
Nierówności logarytmiczne	34
Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe	36
Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań	37
Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym	39
Test sprawdzający do rozdziału 1.	40
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.	43

2. Analiza matematyczna

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów	46
Granica funkcji w punkcie	47
Obliczanie granicy funkcji w punkcie	49
Granice jednostronne funkcji w punkcie	50
Granica funkcji w nieskończoności	52
Granica niewłaściwa funkcji	53
Ciągłość funkcji w punkcie	55
Ciągłość funkcji w zbiorze	57
Asymptoty wykresu funkcji	59
Pochodna funkcji w punkcie	61
Funkcja pochodna	62
Styczna do wykresu funkcji	64
Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji	64
Ekstrema lokalne funkcji	65
Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale	67
Badanie przebiegu zmienności funkcji	68
Zadania optymalizacyjne	69
Test sprawdzający do rozdziału 2.	71
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.	75

3. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka	79
Kąt między niezerowymi wektorami	81
Równanie kierunkowe prostej	82
Równanie ogólne prostej	84
Kąt między prostymi	85
Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi.	89
Pole trójkąta. Pole wielokąta	90
Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło	91
Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu.	94
Wzajemne położenie dwóch okręgów.	97
Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych	98
Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej	101
Test sprawdzający do rozdziału 3.	103
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.	106

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania	109
Wariacje	111
Permutacje	114
Kombinacje	116
Kombinatoryka – zadania różne	119
Doświadczenie losowe	122
Zdarzenia. Działania na zdarzeniach	123
Określenie prawdopodobieństwa	127
Prawdopodobieństwo klasyczne	128
Doświadczenia losowe wieloetapowe	134
Prawdopodobieństwo warunkowe	136
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym	138
Niezależność zdarzeń	140
Test sprawdzający do rozdziału 4.	142
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.	144

5. Elementy statystyki opisowej

Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej	151
Średnia z próby	153
Mediana z próby i moda z próby	157
Wariancja i odchylenie standardowe.	160
Test sprawdzający do rozdziału 5.	162
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.	165

6. Geometria przestrzenna

Płaszczyzny i proste w przestrzeni	168
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę	169
Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę	170
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.	171
Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny	172
Graniastopy	173
Ostrostopy	175
Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu	178
Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów	181
Objętość graniastopu	181
Objętość ostrostupa	182
Przekroje wielościanów – konstrukcje	184
Przekroje wielościanów – zadania	185
Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych	188
Walec	188
Stożek	189
Kula i sfera	191
Objętość brył obrotowych	192
Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej	195
Test sprawdzający do rozdziału 6.	197
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.	199

Odpowiedzi do zadań	204
---------------------------	-----

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

1.1. Oblicz wartość wyrażenia (nie używaj kalkulatora).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{147^2 \cdot 6^2 + 147^2 \cdot 8^2} & \text{b) } \sqrt[3]{216 \cdot 12 + 216 \cdot 8 + 216 \cdot 7} \\ \text{c) } \sqrt{113^2 - 112^2} + \sqrt{89^2 - 80^2} & \text{d) } \sqrt{666^2 + 888^2} \end{array}$$

1.2. Liczbę x przedstaw w postaci a^w , gdzie a jest liczbą naturalną, natomiast w jest liczbą wymierną.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x = \sqrt[3]{16} \cdot (0,125)^{-\frac{1}{2}} & \text{b) } x = \sqrt[4]{125^3} \cdot (0,008)^{-\frac{1}{3}} \\ \text{c) } x = \frac{(0,5)^{-4} \cdot 81}{\sqrt[5]{216}} & \text{d) } x = \frac{81^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt[3]{72}} \end{array}$$

1.3. Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y , jeśli:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x = \frac{27^9 + 81^7}{9^{13}}, y = \frac{8^{16} + 4^{25}}{5 \cdot 16^{12}} & \text{b) } x = \frac{5^{-20} + 5^{-19}}{125^{-6}}, y = \frac{6^{-14} + 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15}}{(0,5)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{15}} \end{array}$$

1.4. Która z liczb m i n jest większa, jeśli:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } m = 5^6 + 2^{12}, n = 5^{12} - 2^{24} & \text{b) } m = 4^{12} - 9^6, n = 2^{12} + 3^6 \end{array}$$

1.5. Oblicz wartość wyrażenia. Wynik przedstaw w postaci liczby dziesiętnej.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{2}{3} - 2^{-2}\right)^{-1} & \text{b) } \left(\sqrt[3]{8^{-1}} + \sqrt[4]{9^{-2}}\right)^{-1} \\ \text{c) } \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - (1,5)^{-1}\right]^{-2} & \text{d) } \left[(1,25)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right]^{-2} \end{array}$$

1.6. Oblicz:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{9} \cdot [(1,5)^{-1} + 9^{-1,5}] - 27^{-\frac{2}{3}} & \text{b) } \left[\left(\frac{81}{625}\right)^{-0,75} : \left(1\frac{2}{3}\right)^3 - (0,125)^{\frac{1}{3}}\right]^{-2} \end{array}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{0,375} \cdot \sqrt[3]{9} + \left(3^{-1} - \sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^{-2} \quad \text{d) } \left[\frac{125^{\frac{2}{3}} - (0,2)^{-1}}{(0,5)^{-2}} \cdot (0,2)^{-3} \right]^{\frac{3}{4}}$$

1.7 Oblicz:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{(1,4)^{-5} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-5} + 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}}{(3^{1,5} - \sqrt{7})(3^{1,5} + \sqrt{7})} & \text{b) } & \frac{\left(3^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3}\right)\left(3^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}\right)}{(0,75)^{-3} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} + 23^{\frac{1}{3}} \cdot 23^{\frac{1}{3}} \cdot 23^{\frac{1}{3}}} \\ \text{c) } & \frac{\left(6 - 11^{\frac{1}{2}}\right)\left(6 + 11^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{6 - \sqrt{11}} - \sqrt{6 + \sqrt{11}}\right)^2} & \text{d) } & \left[\left(3 - \sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3 + \sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \cdot \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 28^0 \right] \end{aligned}$$

1.8. Porównaj liczby:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x = 1024^8 \text{ i } y = 81^{20} & \text{b) } & x = \left(\frac{1}{27}\right)^{-48} \text{ i } y = 243^{28} \\ \text{c) } & x = (2\sqrt{2})^{28} \text{ i } y = \left(\frac{\sqrt{8}}{64}\right)^{-6} & \text{d) } & x = \left(\frac{\sqrt[3]{81}}{9\sqrt[4]{27}}\right)^{-12} \text{ i } y = (27\sqrt[3]{9})^6 \end{aligned}$$

1.9. Uporządkuj rosnąco liczby x, y, z, t, u , jeśli:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x = (0,125)^{-8}, y = 64^{1,5}, z = 128, t = (0,5)^{-12}, u = \sqrt[4]{16} \\ \text{b) } & x = (3\sqrt[4]{3})^{12}, y = (\sqrt[6]{27})^{12}, z = 81^4, t = 243^{\frac{9}{5}}, u = \left(\frac{1}{9}\right)^{-4} \end{aligned}$$

1.10. Oblicz x , jeśli:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x \cdot (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) = \sqrt{48} - \sqrt{32} \\ \text{b) } & 4^{-0,25} - 2^{0,5} = \frac{x}{4^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \\ \text{c) } & \frac{\sqrt[3]{25} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt[6]{25})^2 \cdot \sqrt{5} \cdot x} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left[\left(\frac{x^3 \sqrt{y}}{y \sqrt{x^3}} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{x}}{x^8 \sqrt{y^3}} \right)^2 \right] : \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right) \quad \text{d) } \left(\frac{9}{x+8} - \frac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^3 - 2x^{\frac{1}{3}} + 4} \right) \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{1}{3}}}$$

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.17. Wykaż, że wykresy funkcji $y = (0,8)^x$ oraz $y = (1,25)^x$ są symetryczne względem osi OY .

1.18. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $A(-2, 4)$. Napisz wzór funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie ustal, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 2.

1.19. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$. Napisz wzór funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie ustal, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż 1.

1.20. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby:

a) $k = (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}, l = (\sqrt{3})^{1+\sqrt{2}}, m = (\sqrt{3})^{\pi}, n = (\sqrt{3})^{-\sqrt{2}}, p = (\sqrt{3})^{-1}$

b) $k = \left(\frac{1}{7}\right)^{-\sqrt{5}}, l = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}}, m = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}, n = \left(\frac{1}{7}\right)^{1+\sqrt{3}}, p = \left(\frac{1}{7}\right)^0$

1.21. Poniższe nierówności są prawdziwe. Jaki związek zachodzi między wykładnikami m i n , jeśli:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^m > (0,6)^n$ b) $\left(\frac{9}{2}\right)^m < \left(4\frac{1}{2}\right)^n$

c) $(1+\sqrt{2})^m > \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n$ d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^m < \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^n$?

1.22. Wywnioskuj na podstawie poniższych równości, czy liczba x jest dodatnia, czy ujemna, jeśli:

a) $6^x = 2$

b) $(0,12)^x = 4$

c) $(\sqrt{5})^x = 0,4$

d) $10^x = 5$

e) $(0,75)^x = 12$

f) $\left(\frac{8}{3}\right)^x = \frac{1}{2}$

1.23. Wykaż, że jeśli ciąg wybranych argumentów $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ funkcji wykładniczej $f(x) = 7^x$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg wartości tej funkcji $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots)$ jest ciągiem geometrycznym.

1.24. Zbadaj parzystość funkcji:

a) $f(x) = 5^x + \frac{1}{5^x}$

b) $f(x) = 3^x - \frac{1}{3^x}$

c) $f(x) = 2^x + \cos x$

d) $f(x) = \left(7^x - \frac{1}{7^x}\right) \cdot \sin x$

e) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \cdot x^3$

f) $f(x) = \frac{3^{2x} - 1}{3^{x+1}}$

***1.25.** Funkcja określona wzorem $f(x) = 9^x + 9^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, przyjmuje dla pewnego argumentu x_0 wartość równą 14. Jaką wartość dla tego samego argumentu przyjmuje funkcja $g(x) = 3^x + 3^{-x}$?

***1.26.** Funkcja określona wzorem $f(x) = 4^x + 4^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, przyjmuje dla pewnego argumentu x_0 wartość równą 23. Jaką wartość dla tego samego argumentu przyjmuje funkcja $g(x) = 2^x + 2^{-x}$?

1.27. Wyznacz zbiór wartości funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x + 4$

b) $f(x) = -36^x - 4 \cdot 6^x - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2 \cdot 25^x} - 5^{-x} + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{-2}{9^x} - \frac{8}{3^x} - 12$

1.28. Wyznacz zbiór wartości funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \frac{2}{3^x + 1}$

b) $f(x) = \frac{2^x + 4}{2^x + 1}$

c) $f(x) = \frac{-2 \cdot 5^x - 7}{5^x + 4}$

d) $f(x) = \frac{-3 \cdot (0,25)^x - 5}{(0,25)^x + 1}$

***1.29.** Dziedzina funkcji f jest zbiór D . Wyznacz zbiór wartości funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-6x}$, $D = \langle 1, 2 \rangle$

b) $f(x) = 2^{-x^2+9}$, $D = \langle -1, 1 \rangle$

c) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{x^2-2x+1}$, $D = \langle 0, 3 \rangle$

d) $f(x) = \left(\sqrt[3]{7}\right)^{x^2-2x+3}$, $D = \langle 3, 5 \rangle$

Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych

1.30. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 2^{x+1} - 4$

b) $y = -3^x + 2$

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

d) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$

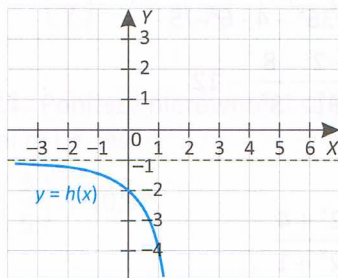
e) $y = 3^{x+1} - 2$

f) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

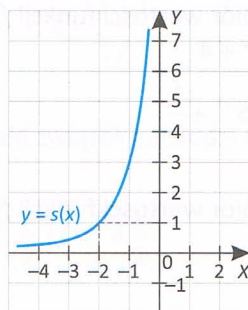
Wskaż na wykresie każdej funkcji dwa punkty o współrzędnych całkowitych.

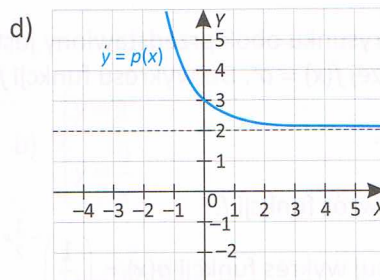
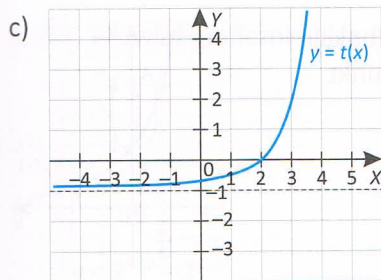
1.31. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji wykładniczych, które powstały w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 3^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Wybierz z ramki, znajdujące się pod tymi wykresami, wzór funkcji i przyporządkuj go odpowiedniemu wykresowi.

a)



b)





1. $y = 3^{-x} + 2$

2. $y = 3^{x+2}$

3. $y = 3^{x-2} - 1$

4. $y = -3^x - 1$

1.32. Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u} = [2, -1]$ i otrzymano wykres funkcji g .

- Napisz wzór funkcji g .
- Naszkicuj wykres funkcji g .
- Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY .
- Sprawdź, czy punkt $A(42, 16^{10} - 3^0)$ należy do wykresu funkcji g .

1.33. Dana jest funkcja wykładnicza f , opisana wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Naszkicuj wykres funkcji g , wiedząc, że $g(x) = -f(x) + 1$.
- Napisz wzór funkcji g .
- Odczytaj z wykresu zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są większe od -2 .
- Oblicz wartość funkcji g dla argumentu -4 .

1.34. Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$, a następnie naszkicuj wykres funkcji g , wiedząc, że $g(x) = f(-x) - 4$.

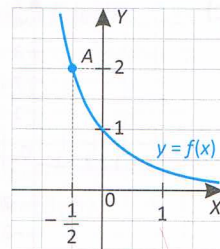
- Napisz wzór funkcji g .
- Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY .
- Sprawdź, czy liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji g .
- Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości ujemne.

1.35. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = (0,5)^x$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g .

- Napisz wzór funkcji g .
- Naszkicuj wykres funkcji g .
- Odczytaj z wykresu funkcji g argument, dla którego wartość funkcji wynosi 8 .
- Dla jakich argumentów wartości funkcji g są większe od 4 ?

1.36. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Do wykresu funkcji f należy punkt

$$A\left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$



a) Napisz wzór funkcji f .

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}x} - 2$.

c) Wyznacz miejsce zerowe funkcji g , a następnie odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości nieujemne.

d) Sprawdź, czy do wykresu funkcji g należy punkt $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)$.

1.37. Naszkicuj wykres funkcji i omów jej własności.

a) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

b) $y = |2^{-x} - 1|$

c) $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1\right| - 2$

d) $y = -3^{|x|} + 4$

1.38. Naszkicuj wykres funkcji i omów jej własności.

a) $y = 4^{|x-1|+1}$

b) $y = 2^{|x|-3}$

c) $y = (0,5)^{|x-1|-2|x+1|}$

d) $y = 2^{|x+2|} \cdot 4^{|x|}$

1.39. Rozwiąż graficznie równania:

a) $-2^{x-1} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| = -2x^2 - 8x - 5$

c) $4^{|x|} = 5 - |x|$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = |1 - x^2|$

1.40. Rozwiąż graficznie nierówności:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \leq 1$

b) $2^{x-2} \leq 5 - x$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq -x^2 + 3\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$

d) $2^{|x|} < 3 - |x|$

1.41. Rozwiąż graficznie układy równań:

a)
$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = -\frac{7}{6}x + \frac{5}{3} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = 2^{x-3} - 1 \\ \left(y + \frac{1}{2}x - 3\right)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = 2^x \cdot 2^{|x|} \\ y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4} \end{cases}$$

1.42. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$):

a) $4^{x-1} = m + 2$

b) $4 \cdot 2^{|x-1|} = m$

c) $\left|2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right| = m^2 - 1$

d) $2^{|x-2|+x} = m^2$

***1.43.** Dla jakich wartości parametru m , gdzie $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, równanie

$$\frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{4x} + \dots} = \frac{2-m}{m^2-1}$$

ma rozwiązanie?

***1.44.** Dla jakich wartości parametru m , gdzie $m \in \mathbb{R} - \{-3\}$, równanie

$$4^x + 4^{2x} + 4^{3x} + 4^{4x} + \dots = \frac{m}{m+3}$$

ma rozwiązanie?

Równania wykładnicze

1.45. Rozwiąż równania:

a) $(0,4)^x = 6,25$

b) $(0,375)^x = \frac{9}{64}$

c) $(0,75)^x = 1\frac{1}{3}$

d) $(12,25)^x = 3,5$

e) $(2,25)^x = 5,0625$

f) $(0,8)^x = 0,512$

1.46. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}$

b) $\left(\frac{25}{4}\right)^{2x-1} = (0,4)^{3x-12}$

c) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{2x-4} = \left(\frac{6}{7}\right)^{x+2}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4} = 8^{2x+1}$

1.47. Rozwiąż równania:

a) $(0,8)^{\frac{1}{3x-2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2x}}$

b) $(0,75)^x = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{2x-2}{x}}$

c) $(0,5)^{\frac{x}{x-1}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{x+2}}$

d) $(\sqrt[3]{3})^x = 3^{\frac{1}{2x+1}}$

1.48. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(1\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x}$

b) $2^{x^3+x^2} = 32^{x+1}$

c) $\left(\frac{25}{81}\right)^{x^3-\frac{1}{2}} = (1,8)^{2x-x^2}$

d) $\frac{3^{x^3}}{81} = 9^{x-x^2}$

1.49. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{81\sqrt[3]{3}}{\sqrt{27}}\right)^{6x} = 3^{x^2}$

b) $\left(\frac{25\sqrt{5}}{0,2}\right)^{2x} = 5^{x^2+10}$

c) $\left(\sqrt[3]{4\sqrt[4]{4}}\right)^{6x+6} = 8^{\frac{1}{3}x^2+3}$

d) $\left(\frac{3\sqrt[4]{9}}{\sqrt[3]{81}}\right)^{6x^2+12x} = (\sqrt{3})^{16}$

1.50. Rozwiąż równania:

a) $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \cdot 8^x = \frac{2^{x-1}}{8}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2+5x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{x-2} \cdot (0,75)^{x^2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-1} \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{-2x} = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{4x-4x^2}$

1.51. Rozwiąż równania:

a) $\frac{2^{x^3}}{(\sqrt[3]{2})^{12}} = \frac{4^{2x}}{(\sqrt{2})^{2x^2}}$

b) $\frac{3^{x^3}}{(\sqrt[4]{3})^{4x+4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$

c) $(0,5)^{x^3} \cdot 4^{x^2-x} = \frac{1}{32^x}$

d) $\frac{(0,5)^{x^3}}{(0,125)^{x^2}} = \frac{1}{2^{3-x}}$

1.52. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt[6]{4^x \cdot (0,125)^{\frac{1}{x}}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{(\sqrt{2})^x}$

b) $2^{\frac{3x-9}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{(0,25)^{\frac{3x-1}{2x-2}}} = 1$

c) $\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}-4}$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}-1} = (0,4)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}-5}$

1.53. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^x$

b) $3^{x+2} = 25 \cdot 5^x$

c) $3^{2x+5} \cdot 3^{-x+1} = 2^{x+6}$

d) $5^{x+2} \cdot 7^{2x+4} = 21^{x+2}$

e) $2^{5x-1} \cdot 3^{3x-1} = 6^{x+8} \cdot 4^x$

f) $9^{3x+2} \cdot 5^{10x+4} = 15^{3x+2} \cdot 25^{2x}$

1.54. Rozwiąż równania:

a) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14$

b) $3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 15$

c) $8 \cdot 5^x + 7 \cdot 5^{x-1} = 22 + 5^{x+1}$

d) $7 \cdot 4^x - 2^{2x+1} = 26 + 7 \cdot 4^{x-1}$

e) $3^{2x} + \frac{4}{27} = 2 \cdot 3^{2x+1} - 9^x$

f) $5 \cdot 2^{3x} + 8^x - 2 \cdot 4^{1,5x} = 16$

1.55. Rozwiąż równania:

a) $4^{\sqrt{x-1}+1} - 4^{\frac{2\sqrt{x-1}-1}{2}} = 7$

b) $3^{|x+1|+1} - 5 \cdot 3^{|x+1|-1} = 12$

c) $2^{x^2-x+2} + 5 \cdot 2^{x^2-x-1} = 26$

d) $2^{2+\frac{x-3}{x}} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-x}{x}+2} = 11$

1.56. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 = 0$

b) $7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 5 = 0$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 24 \cdot 5^{-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 0$

d) $2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

1.57. Rozwiąż równania:

a) $4^{3x} - 7 \cdot 4^{2x} + 14 \cdot 4^x - 8 = 0$

b) $2^{3x} - 2^{2x+3} - 2^{x+4} + 128 = 0$

c) $9^{3x} - 9^{2x+\frac{1}{2}} - 3^{2x} + 3 = 0$

d) $5^{3x} - 7 \cdot 5^{1+2x} + 11 \cdot 5^{2+x} - 625 = 0$

1.58. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3^x + 2}{3^x + 3} = \frac{3^x - 2}{3^x - 3}$

b) $\frac{1}{2^x - 2} + 2^{1-x} = 1$

c) $\frac{3^{x^2-2} + 5}{3^{x^2-1} - 9} = \frac{14}{3(3^{x^2-2} - 3)}$

d) $\frac{3}{2^{\sqrt{x+2}} - 1} + \frac{1}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} = \frac{18}{2^{2\sqrt{x+2}} - 1}$

***1.59.** Rozwiąż równania:

a) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$

b) $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$

c) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$

d) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$

1.60. Rozwiąż równania:

a) $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 10^x - 4 \cdot 5^x = 0$

b) $6^x - 9 \cdot 2^x - 15^x + 9 \cdot 5^x = 0$

c) $3^x \cdot 2^{x+1} - 16 \cdot 3^x = 2^{x+4} - 2^{2x+1}$

d) $5^{2x-2} + \frac{10^x}{25} = 5^{x+3} + 125 \cdot 2^x$

1.61. Rozwiąż równania, gdzie $x \in \mathbb{N}_+$:

a) $5^{1+3+5+7+\dots+(2x-1)} = (0,2)^{100-20x}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3+6+9+\dots+3x} = (1,5)^{-30}$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2+4+6+\dots+2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{12}$

d) $4^{1+5+9+13+\dots+(4x-3)} = 64$

1.62. Rozwiąż równania:

a) $4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4^{x+1}} + 2$

b) $5^x + 5^{x-2} + 5^{x-4} + \dots = \frac{\sqrt{100 \cdot 5^x + 5}}{24}$

1.63. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \frac{81^x}{3^y} = 243 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases}$

Nierówności wykładnicze

1.64. Rozwiąż nierówności:

a) $25^x < \frac{1}{5}$

b) $(0,6)^x \geq 2\frac{7}{9}$

c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^x > 0$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1$

e) $(0,8)^{2x-1} \geq (1,25)^{x+2}$

f) $\left(\sqrt[3]{\frac{49}{81}}\right)^{x-4} < \left(\frac{7}{9}\right)^{3x}$

1.65. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \leq (1,5)^{|x+2|}$

b) $(\sqrt{2})^{|x-1|} < 4$

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{|x+2|} > (2\sqrt[3]{2})^3$

d) $(0,4)^{|x-6|} \leq 2,5$

1.66. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1} \cdot 16^{x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}$

c) $8^{2x} \cdot (0,5\sqrt[3]{2})^{3x+3} \geq (0,25)^{3x-2}$

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-3} \cdot 5^{2x+6} \leq 625^{\frac{1}{2}x-1}$

1.67 Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{2x+3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} \geq (0,75)^{x-6}$

b) $\frac{(\sqrt{2})^{x+1}}{(2\sqrt[3]{2})^{x+1}} \geq \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-2} < \left(2\frac{1}{2}\right)^{2x+5}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4} \cdot \left(\frac{81}{16}\right)^{x-2} \leq (2,25)^{4x+1}$

1.68. Rozwiąż nierówności:

a) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} < \frac{8}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{3^{x^2}}{(\sqrt{3})^{x+\frac{1}{2}}} \geq \sqrt[4]{3}$

c) $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{2x}}{4^{\frac{1}{2}x^2}} < \frac{1}{64}$

d) $\frac{25^{x^2}}{(\sqrt[4]{5})^{8x}} \leq \frac{625}{5^{4x}}$

1.69. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{x}} < \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2x-3}{x+2}} < 81$

d) $\frac{4}{25} \geq (2,5)^{\frac{x+1}{x-1}}$

e) $4^{\frac{x+2}{x-1}} \leq 2^8$

f) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{4x-3}{x+2}} \geq \sqrt[4]{\frac{49}{9}}$

1.70. Rozwiąż nierówności:

a) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 5 \cdot 2^{x+2} < 34$

b) $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} + \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \geq \frac{8}{9}$

c) $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} < 80$

d) $(0,4)^{x+3} + (2,5)^{-x-2} < 3,5$

1.71. Rozwiąż nierówności:

a) $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 > 0$

b) $3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0$

c) $8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8x} - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 27 \geq 0$

d) $16^x + 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 < 0$

1.72. Rozwiąż nierówności:

a) $8^{3x} - 3 \cdot 8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 8 \geq 0$

b) $5^{3x} - 2 \cdot 5^{2x} - 5^{x+1} - 50 > 0$

c) $3^{12x} - 11 \cdot 3^{8x} + 19 \cdot 3^{4x} - 9 \geq 0$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} + 64 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \cdot (1 + 2^{2-x})$

1.73. Rozwiąż nierówności:

a) $5^{|x-2|} \leq (\sqrt{5})^{x-2}$

b) $16^{|x+2|} \cdot 16^{|x-3|} \leq 2^{x+31}$

c) $3^{|x+1|} \leq \frac{9^x}{3^{|x-2|+1}}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+3|} \cdot 8^{|2-x|} > 2^{|x-1|}$

1.74. Rozwiąż nierówności:

a) $2^{2x} + 10^x > 6^x + 15^x$

b) $6^x - 3 \cdot 5^x < 10^x - 3^{x+1}$

c) $6^x - 9 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x + 72 > 0$

d) $10^x - 4 \cdot 5^x < 125 \cdot 2^x - 500$

e) $12^x - 8 \cdot 3^x > 24^x - 8 \cdot 6^x$

f) $6^x + 3 \cdot 7^x < 21^x + 3 \cdot 2^x$

1.75. Rozwiąż nierówności:

a) $2^{3x-2} \geq 5^{x-\frac{2}{3}}$

b) $7^{x-3} < 3^{2x-6}$

c) $13 \cdot 14^{3x} + 2^{3x} \cdot 7^{3x} \leq 1$

d) $6^{2x+4} - 3^{3x} \cdot 2^{x+8} > 0$

1.76. Dane są funkcje $f_1(x) = 5^{2x} + 2^{2x}$ oraz $f_2(x) = 5^{x-4} + 2^{x+2}$ określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Rozwiąż nierówność $f_2(x+2) \geq f_1\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.77. Dane są funkcje $f_1(x) = 4^{x+3} - 7 \cdot 3^{x+2}$ oraz $f_2(x) = 3^{3x+2} - 5 \cdot 4^{3x}$ określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Rozwiąż nierówność $f_1(x-2) \geq f_2\left(\frac{x}{3}\right)$.

1.78. Rozwiąż nierówności, jeśli wiadomo, że $x \in \mathbf{N}_+$:

a) $0,7^{2+4+6+\dots+2x} \geq (0,7)^{12}$

b) $4,5^{3+6+9+\dots+3x} \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{-9}$

c) $2^1 \cdot 2^6 \cdot 2^{11} \cdot \dots \cdot 2^{(5x-4)} \leq 8^5$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{(3x-1)} \geq \left(\frac{1}{36}\right)^{6x}$

1.79. Rozwiąż nierówności z niewiadomą x :

a) $(0,1)^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}+\dots} < \sqrt[3]{(0,1)^{(3x+5)x}}$

b) $5^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}+\dots} \geq 125^{\frac{x+1}{x}}$

c) $\left(\frac{8}{27}\right)^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{4^n}+\dots} \geq \left(\frac{16}{81}\right)^{|x+1|-|x|}$

d) $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\dots+(-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n+\dots} \leq \frac{1}{2^{x^3} \cdot 4^x}$

1.80. Rozwiąż nierówności:

a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots \leq 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 2^x + 4}$

b) $0,5^x + 0,5^{x+1} + 0,5^{x+2} + \dots > 2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x} + 2$

c) $2^x + 4^x + 8^x + \dots \leq \frac{2^{x+1} + 1}{2}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^x - \left(\frac{1}{81}\right)^x + \dots \geq 3^{2-x} - 0,9$

Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań

1.81. Wyznacz wartość parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla której liczby 2^m , $2^{2m} - 47$, $2^m + 18$ są kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) . Dla wyznaczonej wartości parametru m podaj wyraz ogólny tego ciągu.

1.82. Dla pewnej wartości x liczby: $3^x + 2$, $\frac{3^{2x} + 71}{3^x - 1}$, $3^{2x} - 54$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Wyznacz x oraz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

1.83. Dla pewnej wartości x liczby: $\frac{1}{4^x + 11}$, $2^x - 1$, $16^x - 13$ są kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) .
a) Wyznacz x .
b) Napisz wyraz ogólny ciągu (a_n) .

1.84. Wyznacz te wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których liczby: $4 \cdot (2^m + 1)$, $10 \cdot 2^m - 2$, $9(2^m + 1)$ są kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) . Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

1.85. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $|x^2 + 4x| = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-3}$ ma dwa rozwiązania ujemne.

1.86. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) równanie $\left|\frac{x+6}{x+3}\right| = \left(\frac{1}{4}\right)^{m+5}$, gdzie $x \neq -3$, ma więcej rozwiązań ujemnych niż dodatnich?

1.87. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $x^2 - (2^m - 1)x - 3 \cdot (4^{m-1} - 2^{m-2}) = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków.

1.88. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $4^x + (m - 2) \cdot 2^x + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

1.89. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $3^{2x} - 2(m - 1) \cdot 3^x + m + 5 = 0$ ma jedno rozwiązanie.

1.90. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $(m+1) \cdot 49^x + 2(m-3) \cdot 7^x + m-1 = 0$ nie ma rozwiązań.

1.91. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których równanie $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots = 2^{2x-1} + m$ ma jedno rozwiązanie.

1.92. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) równanie

$$4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} + \dots = m - \frac{1}{3} \cdot 4^{2x}$$

nie ma rozwiązań?

1.93. Rozwiąż równanie:

a) $2^{1+2\cos 2x} + 16^{\sin^2 x} = 9$ w zbiorze $(-\pi, \pi)$

b) $4^{\lg^2 x} = 80 - 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$ w zbiorze $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) - \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

1.94. Rozwiąż nierówność:

a) $4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9 < \frac{1}{3^{\cos 2x}}$ w zbiorze $\mathbb{R}$

b) $3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}} - 2^{\lg x} < 1$ w zbiorze $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Logarytm – powtórzenie wiadomości

1.95. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 81$	b) $\log_2 128$	c) $\log_9 729$	d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}$
e) $\log_7 1$	f) $\log_{\frac{1}{2}} 64$	g) $\log_6 \frac{1}{216}$	h) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

1.96. Oblicz:

a) $\log_{2\sqrt{2}} 16$	b) $\log_{\sqrt[3]{3}} 9\sqrt{3}$	c) $\log_{\frac{1}{5}} 5\sqrt{5}$	d) $\log_{\frac{1}{6}} 36\sqrt[4]{6}$
e) $\log_{\sqrt{3}} 27\sqrt[4]{3}$	f) $\log_{\frac{1}{2}} 16\sqrt[3]{2}$	g) $\log_5 125\sqrt{5}$	h) $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$

1.97. Oblicz:

a) $\log_3 \frac{27}{\sqrt[4]{243}}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{256\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{81\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

d) $\log_5 \frac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{125}}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2\sqrt[5]{64}}{\sqrt{8}}$

f) $\log_6 \frac{\sqrt[3]{36}}{216}$

1.98. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\log_2 48 - \log_2 3$

b) $\log_3 \frac{1}{6} + \log_3 \frac{2}{3}$

c) $2\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} + \log_{\frac{1}{2}} 5\frac{1}{3}$

d) $(\log_5 16 - \log_5 80)^2$

e) $\log_{\frac{2}{3}} 4 - 2\log_{\frac{2}{3}} 3$

f) $\log_{\sqrt{2}} 50 - \log_{\sqrt{2}} 25$

g) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_{\frac{1}{3}} 8$

h) $2\log_{\frac{1}{4}} 8 - 3\log_{\sqrt{3}} 9$

1.99. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $3\log_{0,4} 2 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125$

b) $\frac{1}{2} \log_5 4 \cdot \log_2 30 - \log_5 6$

c) $\log_4 9 \cdot \log_3 128$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 625$

1.100. Oblicz:

a) $3^{\log_3 2}$

b) $100^{1+\log 5}$

c) $8^{\log_2 5 - \frac{1}{3}}$

d) $4^{-1+\log_2 3}$

e) $5^{\frac{1}{2}\log_5 16}$

f) $16^{\log_2 \sqrt{3} + 0,25}$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 0,25 + 1}$

h) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 5 - \frac{1}{2}}$

1.101. Wyznacz x, jeśli:

a) $\log_2 8 + x \cdot \log_{\sqrt{3}} 3 = \log 1$

b) $(2x - 3) \cdot \log_4 16 = \log_2 18 - \log_2 9$

c) $\log_3 \frac{1}{27} - x \cdot \log_{\sqrt{2}} 4 = (x + 1) \cdot \log 100$

d) $(x + 2) \cdot \left[\log_3 \frac{3}{7} + \log_3 21 \right] = \log_4 4^{x-1}$

e) $\log_3 3^{2x-1} - 3 \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = x \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8$

f) $2x \cdot \log_5 25 - (3x + 2) \cdot \log_2 0,5 = \log_3 48 - 2\log_3 4$

1.102. Wykaż, że liczba:

a) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$

b) $\sqrt{10^{2+0,5\log 16}}$

c) $\log_{125} 3 \cdot \log_{\sqrt[3]{6}} 36 \cdot \log_9 5$

d) $\log \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

jest liczbą naturalną.

1.103. Wykaż, że liczby m i n są równe, jeśli:

$$m = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{5\sqrt{5}} \quad \text{ i } \quad n = \log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}.$$

1.104. Wykaż, że liczby k i l są równe, jeśli:

$$k = 3^{\log_9 36} \cdot 10^{1-\log 2} \quad \text{ i } \quad l = 8^{\log_4 \sqrt[3]{9}} \cdot 10^{\log 2 + \log 5}.$$

1.105. Wykaż, że:

a) $\frac{1 - \log_2^3 3}{(\log_2 3 + \log_3 2 + 1) \cdot \log_2 \frac{2}{3}} = \log_2 3$

b) $\frac{8 + \log_2^3 5}{\log_5 16 + \log_2 5 - 2} + 1 = \frac{1}{\log^2 2}$

c) $\frac{(\log_2 7 + \log_7 2 + 2) \cdot \log_7 2}{\log_7 2 + 1} = \log_7 14$

d) $\frac{(\log_5^2 2 - 1) \cdot \log_2 5}{\log_2 5 + \log_5 2 + 2} = \log \frac{2}{5}$

1.106. Wiedząc, że:

a) $\log_3 2 = a$, oblicz $\log_2 13,5$

b) $\log_2 5 = b$, oblicz $\log_2 400$

c) $\log_3 7 = a$, oblicz $\log_7 5 \frac{4}{9}$

d) $\log_3 2 = a$, oblicz $\log_6 16$

1.107. Wiedząc, że:

a) $\log_5 2 = a$ i $\log_5 7 = b$, oblicz $\log_{125} 28$

b) $\log_6 2 = a$ i $\log_6 5 = b$, oblicz $\log_{36} 0,8$

c) $\log_3 2 = a$ i $\log_6 5 = b$, oblicz $\log_{216} 225$

d) $\log_2 3 = a$ i $\log_3 5 = b$, oblicz $\log_{27} 200$

***1.108.** Wiedząc, że:

a) $\log_{14} 2 = a$ i $\log_{14} 5 = b$, oblicz $\log_7 50$

b) $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, oblicz $\log_2 360$

c) $\log_{21} 3 = a$ i $\log_{21} 5 = b$, oblicz $\log_7 1125$

d) $\log_2 30 = a$ i $\log_2 36 = b$, oblicz $\log 9$

Funkcja logarytmiczna i jej własności

1.109. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$ i omów jej własności.

- a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt[6]{9\sqrt{9}}$.
 b) Oblicz argument, dla którego wartość funkcji wynosi $-0,5$.

1.110. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ i omów jej własności.

- a) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od $0,5$.
 b) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt $A((3 - 2\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2}), 0)$.

1.111. Liczba rzeczywista p należy do przedziału $(k, k + 1)$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Wyznacz k , jeśli:

- a) $p = \log_3 5$ b) $p = \log_{\frac{1}{2}} 3$ c) $p = \log_{15} 7$ d) $p = \log_{\frac{1}{3}} 4$
 e) $p = \log_6 21$ f) $p = \log_{\frac{1}{8}} 5$ g) $p = \log_7 50$ h) $p = \log_{\frac{1}{3}} 19$

1.112. Określ, czy podana liczba jest dodatnia, ujemna czy równa zero, jeśli:

- a) $\frac{\log_2 7}{\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{2}{3}} 8}$ b) $\frac{\log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_5 5}{\log_{\frac{1}{2}} 15}$
 c) $\frac{\log_5 \sqrt{2} - \log_5 6}{\log_{\frac{1}{3}} 11 - \log_{\frac{1}{3}} 17}$ d) $\frac{\log_2 \sqrt{3} + \log_{0,8} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\log_8 \sqrt{11} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}}$

1.113. Liczby a i b należą do zbioru $\mathbb{R}_+ - \{1\}$. Porównaj liczby a i b , jeśli wiadomo, że poniższe nierówności są prawdziwe:

- a) $\log_a 5 > \log_b 5$ b) $\log_a \frac{1}{2} < \log_b \frac{1}{2}$
 c) $\log_a \sqrt{2} < \log_b \sqrt{2}$ d) $\log_a 0,75 > \log_b 0,75$

1.114. Rozwiąż nierówność liniową. Wskaż dwie liczby całkowite, które należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

- a) $(3 - \log_2 5)x > 2$ b) $x \log_2 3 < 2 - x \log_4 5$
 c) $x \log_{\frac{1}{3}} 4 < 1 + 3^{\log_3 2} \cdot x$ d) $x \log_{\frac{1}{2}} 5 > -x - 3$

1.115. Wyznacz dziedzinę funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x)$

b) $f(x) = \log_2 \frac{x}{1-x}$

c) $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x^2 + 5x + 4)$

d) $f(x) = \log_5(x^4 - x^2)$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 4)$

f) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(4^{2x} - 8^x)$

1.116. Wyznacz dziedzinę funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

b) $f(x) = \log_{x^2}(3 - x)$

c) $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2 - 2x - 3)$

d) $f(x) = \log_x(2^x - 16\sqrt{2})$

e) $f(x) = \log_{x+3} \frac{x}{x+1}$

f) $f(x) = \log_{|x-1|}(x^3 - x^2 + 3x - 3)$

1.117. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, jeśli:

a) $f(x) = \log_3(x^2 + 3x - 2m)$

b) $f(x) = \log_{\frac{3}{2}}(x^2 + mx + 1)$

c) $f(x) = \log(mx^2 + 4mx + m + 3)$

d) $f(x) = \log[(m^2 + m - 6)x^2 + (m - 2)x + 1]$

1.118. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których funkcja:

a) $f(x) = \log_{2m-3}x$ jest rosnąca

b) $f(x) = \log_{m^2}x$ jest malejąca

c) $f(x) = \log_{|4-m|}x$ jest rosnąca

d) $f(x) = \log_{2m-m^2}x$ jest malejąca.

***1.119.** Wykaż, na podstawie definicji, że funkcja f określona wzorem:

a) $f(x) = \log_5x$ jest rosnąca w zbiorze $(0, +\infty)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}x$ jest malejąca w zbiorze $(0, +\infty)$

c) $f(x) = \log_2^2x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$

d) $f(x) = \log_3^2x$ jest malejąca w zbiorze $(0, 1)$.

***1.120.** Dziedziną funkcji f jest zbiór D . Wyznacz:

a) najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(x^2 + 2x + 3)$, jeśli $D = \left\langle -1\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$

b) największą wartość funkcji $f(x) = \log_3(8 - x^2)$, jeśli $D = \langle 1, 2 \rangle$

c) najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 4)$, jeśli $D = \langle -1, 2 \rangle$

d) największą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(x^2 - 4x)$, jeśli $D = \langle -2, -1 \rangle$.

1.121. Wykaż, że:

- a) funkcja $f(x) = \log_2(1-x) - \log_2(x+1)$ jest nieparzysta
- b) funkcja $f(x) = x^3 \log \frac{2-x}{2+x}$ jest parzysta
- c) funkcja $f(x) = \log_3 \cos 2x$ jest parzysta
- d) funkcja $f(x) = \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$ jest nieparzysta.

1.122. Wykaż, że jeśli wybrane argumenty $x_1, x_2, x_3, \dots$ funkcji $f(x) = \log_3 x$ tworzą ciąg geometryczny, to wartości funkcji $\log_3 x_1, \log_3 x_2, \log_3 x_3, \dots$ tworzą ciąg arytmetyczny.

1.123. Sprawdź, czy funkcje f i g są równe, jeśli:

- a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$
- b) $f(x) = \log_2(x-1) - \log_2(3-x)$ i $g(x) = \log_2 \frac{1-x}{x-3}$
- c) $f(x) = \frac{1}{2} \log_3 x^2$ i $g(x) = \log_3 |x|$
- d) $f(x) = \log x^4$ i $g(x) = 4 \log x$.

Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej

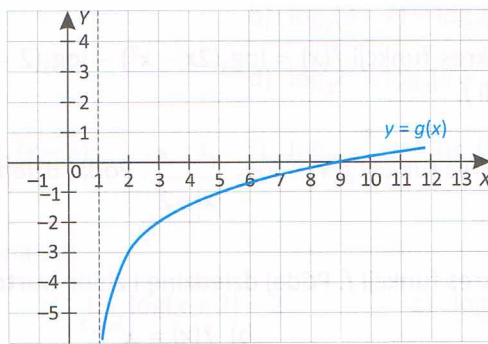
1.124. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\log_3(x+2)$.

- a) Podaj dziedzinę funkcji f .
- b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 25.
- c) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt $A \left(\sqrt{2}, \log_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$.

1.125. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) - 1$.

- a) Podaj dziedzinę funkcji f .
- b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY .
- c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu 6. Odczytaj wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od -3 .

1.126. Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$, który powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_2 x$ o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.



- Napisz wzór funkcji g .
- Upewnij się, wykonując obliczenia, że punkty $A(2, -3)$, $B(3, -2)$, $C(5, -1)$ oraz $D(9, 0)$ należą do wykresu funkcji g , a następnie odczytaj z wykresu:
 - dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości z przedziału $\langle -3, -1 \rangle$
 - dla jakich argumentów wartości funkcji g są mniejsze od -2
 - dla jakich argumentów wartości funkcji g są dodatnie.

1.127. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3(-x) - 2$.

- Podaj dziedzinę funkcji f .
- Podaj współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OX .
- Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne?

1.128. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_2(x + 3)$.

- Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.
- Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od 1.
- Sprawdź, czy punkt $A(4^{\log_2 \sqrt{5}}, -2)$ należy do wykresu funkcji f .

1.129. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności:

- $f(x) = |\log_2(x + 4)|$
- $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$
- $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x + 2| \right|$

1.130. Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x) = \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 6x + 9)$ oraz $g(x) = \log_2(x - 3)$.

Podaj dziedzinę funkcji f i dziedzinę funkcji g .

1.131. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x+2}$. Podaj dziedzinę funkcji f . Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geq -3$.

1.132. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3(2x - x^2) - \log_3(2 - x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .

1.133. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .

1.134. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{10^{\log x^2}}$

b) $f(x) = x^{\log_x 2}$

c) $f(x) = (\sqrt{3})^{\log_3(x^2 - 2x + 1)}$

d) $f(x) = \frac{\log_3 x}{\log_9 x}$

1.135. Rozwiąż graficznie równania:

a) $\log_2(x - 1) = 4 - x$

b) $\log_3(x + 2) = x^2 - 2x + 2$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{2}|x - 1| = 0$

d) $\log_4|x| = 1 - x^2$

1.136. Rozwiąż graficznie nierówności:

a) $\log_2(x - 2) - 1 \geq 4x - x^2$

b) $|\log_3 x| > \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

c) $1 - \log_{\frac{1}{2}} x > \frac{4}{x}$

d) $|\log_5|x|| \geq |x| - 4$

1.137. Rozwiąż graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} y = -|x - 2| - 2 \\ y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \\ y = \log_3 x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{3}{7}x + 3\frac{2}{7} \\ y = \log_2(x + 4) + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = |\log_3(x - 1)| + 1 \\ y = -(x - 10)^2 + 3 \end{cases}$

Równania logarytmiczne

1.138. Rozwiąż równania:

a) $\log_2 x = \log_2(3 - x)$

b) $\log_7(3 - x) = \log_7(x - 6)$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{3}} 4$

d) $\log_3 x^2 = \log_3(x + 2)$

e) $\log_{\frac{1}{5}}(1 - x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(x - 5)$

f) $\log_4 \frac{2}{x-1} = \log_4(4 - x)$

1.139. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(x - 1) = 3$

b) $\log(x + 2) = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x - 4\right) = -2$

d) $\log_{\frac{2}{3}}\left(x + 2\frac{1}{2}\right) = -2$

e) $\log_4(3 - x) = \frac{1}{2}$

f) $\log_{27}\left(\frac{1}{2} - x\right) = -\frac{1}{3}$

1.140. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(x^2 - 4) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) = -1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) = -1$

d) $\log_3(x^2 + 5) = 2$

1.141. Rozwiąż równania:

a) $\log_3\left(\frac{2}{x} - 1\right) = 2$

b) $\log_4\left(\frac{1}{x} - 2\right) = 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x} + 3\right) = -2$

d) $\log_2\left(4 - \frac{3}{x}\right) = 3$

1.142. Rozwiąż równania:

a) $\log_x 27 = 3$

b) $\log_x 81 = -2$

c) $\log_x 64 = 2$

d) $\log_x 25 = -2$

e) $\log_x 32 = 5$

f) $\log_x 10 = \frac{1}{2}$

1.143. Rozwiąż równania:

a) $\log_{x-4} 2x = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}x+1} 4x = 2$

c) $\log_{2x}(4x - 1) = 2$

d) $\log_x(6x - 9) = 2$

e) $\log_{x+1}(4x + 1) = 2$

f) $\log_{3x+5} 30x = 2$

1.144. Rozwiąż równania:

a) $\log_{x-1}(3x-1) = 3$

b) $\log_{x-1}(2x^2 + 4x - 6) = 2$

c) $\log_x(4x^2 + x - 4) = 3$

d) $\log_x \frac{x+2}{x} = 1$

e) $\log_{x^2}(x+2) = 1$

f) $\log_{4-x^2} 16 = 2$

1.145. Rozwiąż równania:

a) $\log_4(\log_3 x) = 0$

b) $\log_2(\log_4 x) = 1$

c) $\log[3 + 2\log(1+x)] = 0$

d) $\log_2[1 - \log_3(x+4)] = 1$

e) $\log_5[3 + \log_4(\log_2 x + 10)] = 1$

f) $\log_4\left\{1 + \log_3\left[1 + \log_2(x+3)\right]\right\} = \frac{1}{2}$

g) $\log_3[7 + \log_5(x^2 + 9)] = 2$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} = 0$

1.146. Rozwiąż równania:

a) $\log_4(x+3) - 2 = \log_4(x-1) - \log_4 8$

b) $\log(x-3) - \log(2-x) = \log(x^2 - 4)$

c) $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20)$

d) $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$

1.147. Rozwiąż równania:

a) $2\log_3(x-5) - \log_3 4 = \log_3(3x-20)$

b) $\log \sqrt{5x-4} + \log \sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$

c) $\frac{1}{2} \log(x-5) + \log \sqrt{2x-3} = \log 30 - 1$

d) $\log_4 \sqrt{x} + \frac{1}{2} \log_4(x+4) = \frac{5}{4}$

***1.148.** Rozwiąż równania:

a) $\log_2 x^2 - 2 = 2\log_2(x+1)$

b) $\log_3(x^2 + 10x + 25) = 2\log_3(3-x) + 4$

c) $\log_2(x^2 - 2) - \frac{1}{2} \log_2(x-3)^2 = 1$

d) $\log_4(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \log_4(x-4)^2 = 1\frac{1}{2}$

***1.149.** Rozwiąż równania:

a) $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

b) $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$

c) $\log_2(x+1)^2 + \log_2|x+1| = 6$

d) $\log(x-5)^2 + \log(x+6)^2 = 2$

1.150. Rozwiąż równania:

a) $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$

b) $\frac{\log x^2}{\log(6x-5)} = 1$

c) $\frac{\log(9-x^3)}{\log(3-x)} = 3$

d) $\frac{\log(2x-19) - \log(3x-20)}{\log x} = -1$

1.151. Rozwiąż równania:

a) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 8 = 0$

b) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 5 = 0$

c) $(\log_2 x - 3)\log_2 x + \frac{2}{3}(\log_2 x + 1) = 0$

d) $\log_5^3 x + 2\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$

e) $\log_4^3 x + 2\log_4 x + 3 = 0$

f) $\log_2^4(x-1) + 3\log_2^2(x-1) - 4 = 0$

1.152. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3}{\log x - 1} = \log x + 1$

b) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$

c) $\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log x - 1}$

d) $\frac{1 + \log(x-1)}{1 - \log^2(x-1)} + \frac{1}{1 - \log(x-1)} = 1$

1.153. Rozwiąż równania:

a) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$

b) $\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 - 3\log_{100x} 10 = 0$

c) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$

d) $2\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3$

e) $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{25}} x = 5$

f) $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$

1.154. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_y x = \log_x y \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2 \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_2 y \\ \log_4(xy) = 1 \end{cases}$

Nierówności logarytmiczne

1.155. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_2(x-1) > 2$

b) $\log_3(2-x) \leq 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5) > -3$

d) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-4) < -2$

e) $\log_{\sqrt{2}}(3x+1) \leq 4$

f) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-x) \geq -2$

1.156. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_2|x-3| > 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}}|x+2| > -2$

c) $\log_{\frac{1}{2}}|x+5| \leq -3$

d) $\log_4|x-7| \geq 0$

e) $\log_{\frac{3}{4}}|x-1| > 1$

f) $\log_5|x+2| \leq 2$

1.157. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x+6) < 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5+4x-x^2) > -3$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1) \geq 0$

d) $\log_3(x^2-4x+3) < 1$

1.158. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{0,25}\frac{x}{2-x} > -1$

b) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{x+1}{x-1} < 0$

c) $\log_8\frac{x+2}{1-x} \geq 1$

1.159. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 < 0$

b) $-2\log_4^2 x + 3\log_4 x - 1 > 0$

c) $\log_2^3 x - 7\log_2^2 x + 14\log_2 x - 8 > 0$

d) $\log_{\frac{1}{3}}^3 x - 3\log_{\frac{1}{3}}^2 x - \log_{\frac{1}{3}} x + 3 < 0$

1.160. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{\log x+1} < 1$

b) $\frac{1}{\log_2 x} < 1 + \frac{1}{\log_2 x - 1}$

c) $\frac{1}{\log_2 x - 4} > \frac{1}{\log_2 x}$

d) $\frac{1}{\log_3 x - 2} - \frac{1}{\log_3 x} > 0$

1.161. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_3 x \cdot \log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{16}$

c) $\log_5 x \cdot \log_{\frac{2}{3}} x > \log_{\frac{2}{3}} 5$

d) $\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_2 x \leq \log_2 3^{-16}$

1.162. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4(x^2 - 5)] > 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x} \right) > 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) < 0$

d) $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$

1.163. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - 2,5$

b) $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$

c) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$

d) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

1.164. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$

b) $\log_{3x+4} x^2 < 1$

c) $\log_{x^2-x} (x+3) < 1$

d) $\log_{|x|} \frac{2x^2 - x}{2} > 1$

1.165. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_3 x + \log_3^2 x + \log_3^3 x + \dots < 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}^3(x+1) + \dots > 1$

c) $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots \leq \frac{1}{2}$

d) $(1 - \log x)^2 + (1 - \log x)^3 + (1 - \log x)^4 + \dots \leq 3 \log x - 1$

1.166. Wyznacz dziedzinę funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \log_{x+5}(x^2 - 4) + \sqrt{6 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{\log(9 - x^2)}}{2^x - 4}$

c) $f(x) = \log_2[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)]$

d) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2 - 1}}$

1.167. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja

$f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(2x + 1)$ przyjmuje mniejsze wartości niż funkcja $g(x) = \log_{\frac{1}{5}}(16 - x^2) + 1$.

***1.168.** Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = \log^2(100x) - \log^2(10x)$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = 9 - \log x$?

1.169. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x$ są mniejsze od 6?

1.170. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \log_4(x+7)$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = \log_2(x+1)$?

Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe

1.171. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(4^x + 4) = \log_2(2^{x+1} + 3)$

b) $\log_3(3^x + 8) = 2 - x$

c) $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$

d) $\log(10^{2x} + 9) = x + 1$

1.172. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

b) $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$

c) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$

d) $\log_6(3^{x^2} + 1) - \log_6(3^{2-x^2} + 9) = \log_6 2 - 1$

1.173. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 5x + 8)} \leq 2,5$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 3x + 1)} < 1$

c) $0,3^{\log_2 \frac{3x-1}{3x+2}} > 1$

d) $0,2^{6 - \frac{3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x - 1}}$

1.174. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_2(3^{x+1} + 1) > 1 + \log_2(9^x - 2)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot 2^x + 3) \leq \log_{\frac{1}{3}}(4^x - 1) - 1$

c) $\log_{0,1}(4^{x^2+4x} - 2^{x^2+4x} - 2) > -1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(9^{x+2} + 3^{x+2}) > \log_{\frac{1}{2}} 2$

1.175. Rozwiąż równania:

a) $x^{2\log^3 x - \frac{3}{2}\log x} = \sqrt{10}$

b) $x^{2 - \frac{1}{2}\log x} = 100$

c) $x^{\log_3 3^x} = 9$

d) $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$

1.176. Rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_4 x + \log_y 2 = 1 \\ 2^{\log_{\sqrt{2}} y} = x^4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (\sqrt{2})^x \cdot (\sqrt[5]{5})^y = 80 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-y) = -1 \end{cases}$$

Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań

1.177. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których układ równań

$$\begin{cases} x - y \cdot \log_2 m = 1 \\ x \cdot \log_2 m - y = 0 \end{cases}$$

jest oznaczony i spełnia go para liczb (x, y) taka, że $x < y$.

1.178. Wyznacz wszystkie wartości x , dla których ciąg $(\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3))$ jest ciągiem arytmetycznym. Podaj różnicę tego ciągu.

1.179. Liczby $\log_2(x-4)$, $\log_2 2x$, $\log_2 x^2$, dla pewnej rzeczywistej wartości x , są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz x oraz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

1.180. Liczby $2\log_2(x-2)$, $\log_2(x-2)$, $\frac{1}{2}$ dla pewnej rzeczywistej wartości x , są trzema początkowymi kolejnymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) . Wyznacz x oraz wyraz ogólny tego ciągu.

1.181. Liczby $\log_4 x_1$, $\log_4 x_2$, $\log_4 x_3$ są kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego $(\log_4 x_n)$. Oblicz sumę 1001 początkowych wyrazów tego ciągu, jeśli wiadomo, że $x_1 + x_2 + x_3 = 84$ i $x_4 = 256$.

1.182. Wyznacz granicę ciągu (a_n) , jeśli wiadomo, że $a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ oraz dla

każdego $n \in \mathbb{N}_+ - \{1\}$ spełniony jest warunek
$$\begin{cases} \log_{0,5} x_1 = 3 \\ \log_{0,5} x_n - \log_{0,5} x_{n-1} = 3 \end{cases}$$

1.183. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2x + \frac{1}{4} \log_2(m+1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma odwrotności jest równa -8 .

1.184. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność $x^2 \cdot \log_3 m + 2x - 1 < 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

***1.185.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność $\log_2[m(x^2 + 1)] \leq \log_2(4x^2 + 4x + 7)$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

1.186. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają poniższe warunki:

a) $\log \frac{x-1}{2} - \log y = 0$

b) $\log_2 \frac{xy}{2} - \log_2 x \cdot \log_2 y = 0$

c) $\log y = \log(y + 2x) - \log x$

d) $\log_x(y + 1) = \log_{y+1} x$

1.187. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają poniższe warunki:

a) $\log_2(x^2 + y) \leq 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(y + 1) \geq x + 1$

1.188. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin^4 x - \cos^4 x = \log_{\frac{1}{2}}(m + 4)$ ma rozwiązanie?

***1.189.** Rozwiąż równania:

a) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

b) $\log_{\sqrt{2} \sin x}(1 + \cos x) = 2$

c) $\log_2(\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(-\sin x) = 0$

d) $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$

1.190. Rozwiąż nierówności w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

a) $\log_{\sqrt{2}} \cos x < -1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x \geq -\log_2 \sin x$

c) $\log_{\sqrt{3}} \sin x \leq \log_{\sqrt{3}} \cos x - 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} \sin 2x \leq \frac{1}{4}$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

1.191. Pewna substancja radioaktywna ma masę 50 gramów, a rozpad powoduje zmniejszenie jej masy o 20% każdego roku.

- a) Napisz wzór funkcji $M(t)$ opisującej masę tej substancji po czasie t (t – czas liczony w latach).
- b) Oblicz, po jakim czasie masa substancji będzie równa 25,6 grama.

1.192. W laboratorium podgrzano pojemnik z płynem, a następnie pozwolono, by płyn wystygł. Temperaturę płynu T ($^{\circ}\text{C}$) opisuje wzór funkcji $T(t) = 90 \cdot 1,5^{-0,2t}$, gdzie t oznacza czas stygnięcia w minutach.

- a) Jaką temperaturę miał płyn, gdy rozpoczynał się proces stygnięcia?
- b) Jaka jest temperatura płynu po piątej minucie?
- c) Oblicz, ile minut potrzeba, aby płyn osiągnął temperaturę 40°C .

1.193. Pewien gatunek sosny ma średni przyrost roczny wynoszący 7%. Posadzono sosnę o wysokości 2 m.

- a) Jaka będzie wysokość sosny rok po zasadzeniu?
- b) Jaka będzie wysokość sosny po 6 latach?
- c) Podaj wzór opisujący wysokość sosny po n latach, przy założeniu, że 7% przyrost jest stały.
- d) Po ilu latach wysokość drzewa przekroczy 20 metrów?

1.194. Pan Kowalski założył lokatę bankową w wysokości 8000 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 5% w skali roku.

- a) Oblicz, ile złotych znajduje się na lokacie pana Kowalskiego po roku oszczędzania.
- b) Napisz wzór opisujący stan konta pana Kowalskiego po n latach oszczędzania.
- c) Po ilu latach oszczędzania na koncie pana Kowalskiego będzie kwota równa 9216 zł?

1.195. Liczba mieszkańców pewnego miasta na początku 2010 roku wynosiła 600 000. Przyrost naturalny w tym mieście jest stały i jest równy 0,4% w skali roku.

- a) Napisz wzór funkcji opisującej liczbę ludności tego miasta po n latach.
- b) Oblicz liczbę ludności miasta na koniec 2012 roku. Wynik zaokrąglaj do pełnych dziesiątek.
- c) Oblicz, o ile procent zwiększyła się liczba ludności w tym mieście na koniec 2014 roku (po upływie 5 lat).

1.196. Wartość samochodu maleje wraz z upływem lat.

Wzór funkcji $W(t) = w_0 \cdot (0,8)^t$ opisuje wartość samochodu po t latach od chwili zakupu, gdzie w_0 oznacza cenę nowego samochodu (w złotych).

- Pan Nowak kupił nową Skodę Fabię za 40 000 zł. Oblicz, o ile złotych wartość samochodu zmniejszy się po roku.
- Wartość samochodu pana Nowaka wynosi 20 480 zł. Ile lat użytkował ten samochód pan Nowak?
- Po ilu latach użytkowania wartość samochodu pana Nowaka będzie stanowić 40,96% ceny zakupu?

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Liczba $\frac{444\,444\,444^{-2}}{555\,555\,555^{-2}}$ należy do zbioru:

- A. $(0, 1)$ B. $\left\langle 1, 1\frac{1}{2} \right\rangle$ C. $\left\langle 1\frac{1}{2}, 2 \right\rangle$ D. $\langle 2, +\infty \rangle$.

2. Liczba $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ jest równa:

- A. $2^{\frac{1}{8}}$ B. $2^{\frac{3}{8}}$ C. $2^{\frac{7}{16}}$ D. $2^{\frac{15}{16}}$.

3. Wartość wyrażenia $\left[\left(4 + 7^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(4 - 7^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$ jest równa:

- A. 8 B. 14 C. $2\sqrt{7}$ D. $4\sqrt{7}$.

4. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{4\sqrt[3]{9} + 6\sqrt[3]{3} + 9}$, wystarczy jego licznik i mianownik pomnożyć przez:

- A. $\sqrt[3]{9}$ B. $\sqrt[3]{3} - 3$ C. $2\sqrt[3]{3} + 3$ D. $2\sqrt[3]{3} - 3$.

5. Wiadomo, że $x = \log 12 + (\log_4 10)^{-1}$. Wobec tego 10^x ma wartość:

- A. 48 B. 32 C. 24 D. 16.

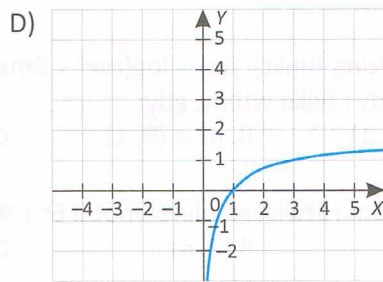
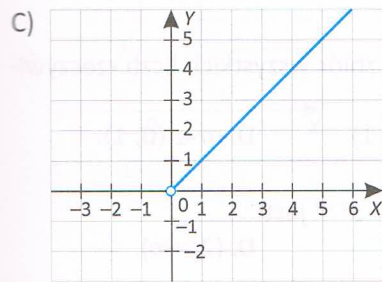
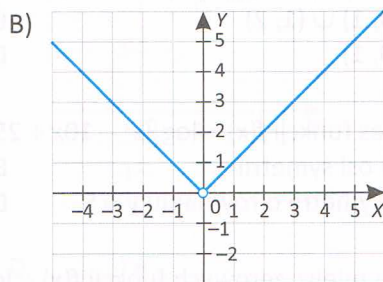
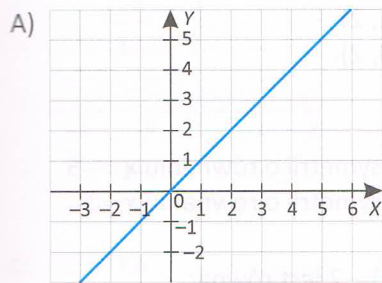
6. Wiadomo, że $a = \log_2 5$ i $b = \log_3 125$. Zatem $\log_{25} 12$ jest równy:

- A. $\frac{3a+2b}{2ab}$ B. $\frac{6a+b}{4ab}$ C. $\frac{ab+3}{6a}$ D. $\frac{2ab+6}{3a}$.

7. Dane są liczby $a = \log \operatorname{tg} 22^\circ + \log \operatorname{tg} 68^\circ$ oraz $b = \log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 1$. Wobec tego:

- A. $a \cdot b < 0$ B. $a = b$ C. $a > b$ D. $a < b$.

8. Wskaż wykres funkcji $f(x) = (\sqrt{3})^{\log_3 x^2}$.



9. W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ przez symetrię osiową względem prostej $y = x$ otrzymamy wykres funkcji:

- A. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $f_2(x) = 2^x$
C. $f_3(x) = 2^{-x}$ D. $f_4(x) = \log_2 x$.

10. Dziedziną funkcji $f(x) = \log_{\sin x} \frac{x+2}{2-x}$ jest zbiór:

- A. $(-2, 2)$ B. $(0, \pi)$ C. $(0, 2) \cup (2, \pi)$ D. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

11. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = (0,5)^{\frac{x^2-3x}{x-3}}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R}_+ - \left\{\frac{1}{8}\right\}$ B. $(0, 3) \cup (3, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $\mathbb{R} - \{3\}$.

12. Wykres funkcji $f(x) = 6^{1+\log_6(10+x)} \cdot \log(5-x)$ przecina jedną z osi układu współrzędnych w punkcie:

- A. $(0, 11)$ B. $(6, 0)$ C. $(0, 30)$ D. $(3, 0)$.

13. Funkcja $f(x) = \log_{|m-1|}x$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ B. $m \in (1, 2)$
C. $m \in (0, 1)$ D. $m \in (0, 2)$.

14. Wykres funkcji $f(x) = \log_2(x^2 - 10x + 25)$:

- A. nie ma osi symetrii B. ma oś symetrii o równaniu $x = -5$
C. ma oś symetrii o równaniu $y = 5$ D. ma oś symetrii o równaniu $x = 5$.

15. Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = \log_x(2x - 1) - 2$ jest równa:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

16. Dziedziną funkcji $f(x) = \log(mx^2 + 2mx + 1)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $m \in (0, 1)$ B. $m \in \langle 0, 1 \rangle$ C. $m \in (0, 1)$ D. $m \in \langle 0, 1 \rangle$.

17. Zbiorem rozwiązań nierówności $6^x + 9^x > 9 \cdot 2^x + 3^{x+2}$ jest:

- A. $(0, 2)$ B. $(2, 4)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(2, +\infty)$.

18. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{\sqrt{2}}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{|\cos x|} < 1$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ jest:

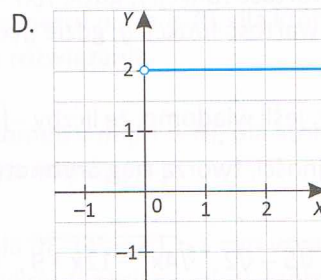
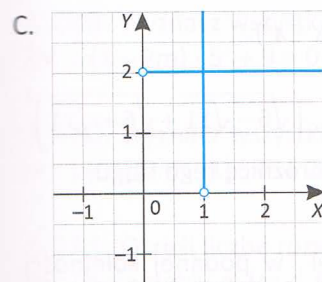
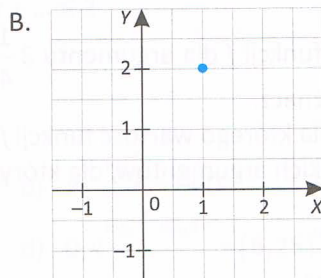
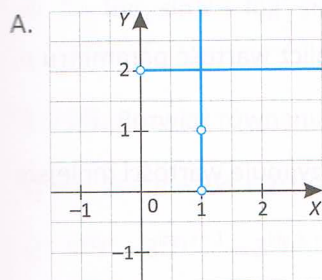
- A. $\emptyset$
B. $\left\langle -\pi, -\frac{2}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}\pi, \pi \right\rangle$
C. $\left\langle -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \right\rangle$
D. $\left\langle -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi \right\rangle$.

19. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \log x_n$, gdzie (x_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Wynika stąd, że ciąg (a_n) :

- A. jest ograniczony B. jest rosnący
C. jest ciągiem arytmetycznym D. jest ciągiem geometrycznym.

20. Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) spełniających

warunek $\frac{\log_2 x}{\log_y 2} = \log_2 x$ przedstawia rysunek:



Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

1.197. Wykresy funkcji $f(x) = 2^{x-1} - 3$ oraz $g(x) = \log_3(x+3) + k$ mają z osią OY ten sam punkt wspólny A. Oblicz k i podaj współrzędne punktu A.

1.198. Funkcje $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 1$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(19+x) + p$ mają to samo miejsce zerowe. Oblicz wartość parametru p .

1.199. Dana jest funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_4(x - k) + 3$, gdzie k jest parametrem. Dziedziną funkcji f jest przedział $(2, +\infty)$. Podaj wartość parametru k , a następnie oblicz:

- a) wartość funkcji f dla argumentu 18
- b) argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 3,5
- c) dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

1.200. Dana jest funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x - 1) + p$, gdzie p jest parametrem. Wartość funkcji f dla argumentu $3\frac{1}{4}$ wynosi 3. Oblicz wartość parametru p ,

a następnie wyznacz:

- a) argument, dla którego wartość funkcji f wynosi 6
- b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 1.

1.201. Wyznacz:

- a) największą wartość funkcji f , gdzie $f(x) = \log_3(6x - x^2)$
- b) najmniejszą wartość funkcji g , gdzie $g(x) = \log_{0,4}(4 - 3x - x^2)$.

1.202. Oblicz x , jeśli wiadomo, że liczby $-(8\sqrt[3]{2})^{0,3}$, $|x - 1|$, $(\sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}})^2$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz różnicę tego ciągu.

1.203. Liczby $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4x^2 - 12x + 9}$, $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x .

1.204. Dla jakich x , liczby: 1, $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$, 25, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz tego ciągu.

1.205. Liczby 4 , $3 \cdot (\sqrt{2})^{2x-4}$, $\frac{5}{2^{-x+2}}$, w podanej kolejności, są wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x oraz wyznacz różnicę tego ciągu.

1.206. Rozwiąż równania:

- a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots = 2 \cdot \sqrt{8 - 2^{x+1}}$
- b) $\frac{1}{4}\sqrt{12 - 3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} + \dots$

- c) $1 + \log_2 \cos x + \log_2^2 \cos x + \log_2^3 \cos x + \dots = 0,6$, gdzie $x \in \mathbf{R}$
- d) $1 + \log_2 \sin 2x + \log_2^2 \sin 2x + \log_2^3 \sin 2x + \dots = \frac{2}{3}$, gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

1.207. Rozwiąż nierówności:

- a) $2^{\sin x} + 4^{\sin x} + 8^{\sin x} + \dots \leq 1$
- b) $2^{-\cos x} + 4^{-\cos x} + 8^{-\cos x} + \dots \leq 1$
- c) $\log(x-2) + \log^2(x-2) + \log^3(x-2) + \dots < 1$
- d) $1 + \log_{\frac{1}{2}} \sin x + \log_{\frac{1}{2}}^2 \sin x + \log_{\frac{1}{2}}^3 \sin x + \dots \leq 2$

***1.208.** Rozwiąż równania:

- a) $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$
- b) $x^{3 - \log \frac{x}{3}} = 900$
- c) $5^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x - 1} = 3^{\log_2 x + 1} - 5^{\log_2 x - 1}$
- d) $0,4^{\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 3x} = (6,25)^{\log_3 x^2 + 2}$

1.209. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których równanie $25^x + (1-2m) \cdot 5^x + 9 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

1.210. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których równanie $m \cdot 16^x + (2m-1) \cdot 4^x + 2 - 3m = 0$ nie ma rozwiązań.

1.211. Określ liczbę rozwiązań równania $m \cdot (4^x - 2^x) = 1 - m$ w zależności od wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$). Naszkicuj wykres funkcji $y = g(m)$, która każdej wartości parametru m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

1.212. Wykaż, że jeśli ciąg $(\log_a x, \log_b x, \log_c x)$ jest ciągiem geometrycznym, to $\log_a b = \log_b c$.

1.213. Udowodnij, że jeśli ciąg (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg $(\log a, \log b, \log c)$ jest ciągiem arytmetycznym.

1.214. Wykaż, że jeśli $y = 10^{x^2}$ i $z = 10^{y^2}$ to $x^2 = \frac{\log(\log z)}{2}$.

1.215. Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, i $a > 3b$, i $a^2 + 9b^2 = 7ab$, to $\log(a-3b) = \log \sqrt{a \cdot b}$.

2. Analiza matematyczna

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów

2.1. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-8n^2}{2n^2+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n)(5-2n)}{2n^2+1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+7n^2+4}{4n^5+n^3+1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4+8n^2-10}{(2n^2-1)(2n^2+1)}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n+3n^2-6n^3}{n(2n+1)^2}$

2.2. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1-4n}{2n+5} \right|$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(\frac{3}{n} - 4 \right) \right|$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n^3-4n^2+2n+7}{6n(n-1)^2} \right|$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)^3}{(n-1)^3} \right|$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3-n^2}{n} + n \right|$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3-2n^2+1}{n^2} - n \right|$

2.3. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+2n-3n^2)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^3-4n+17)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(2n+1)(1-n)^2]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2+9n+7}{4n-12}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n-5n^2-6n^3}{7-4n-8n^2}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(2n-3)^2}$

2.4. Czy prawdziwe jest zdanie: „Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n) (o wyrazach niezerowych), dla którego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ ”? Odpowiedź uzasadnij.

Granica funkcji w punkcie

2.5. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 8)$ | b) $\lim_{x \rightarrow -1} (6 - 2x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} (7x - 3)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -4} (2x^2 + 5x - 1)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x^2 + 4x + 7)$ |

2.6. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4 + x}{16 - x^2}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 + x}{16 - x^2}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ |

2.7. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, jeśli:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 3}, x_0 = -3$ | b) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8}, x_0 = -2$ |
| c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 1}, x_0 = 5$ | d) $f(x) = \frac{2x - 14}{-x^2 + 9x - 14}, x_0 = 7$ |
| e) $f(x) = \frac{6 - 3x}{12 - 4x - x^2}, x_0 = -4$ | f) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - 5x + 3}, x_0 = 1,5$ |

2.8. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, jeśli:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, x_0 = 1$ | b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, x_0 = -1$ |
| c) $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}, x_0 = 2$ | d) $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}, x_0 = -2$ |
| e) $f(x) = \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}, x_0 = 27$ | f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{x + 64}, x_0 = -64$ |

2.9. Wskaż dwa ciągi (a_n) i (b_n) , dla których $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ oraz

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$, i na tej podstawie wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 , jeśli:

a) $f(x) = \frac{|x-6|}{x-6}, x_0 = 6$

b) $f(x) = \frac{x+7}{|x+7|}, x_0 = -7$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4|x|}{2x}, x_0 = 0$

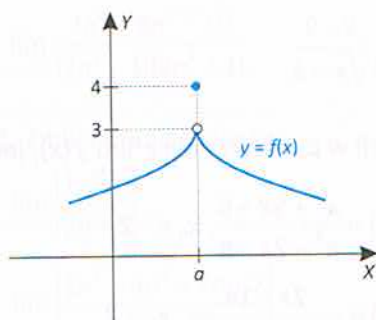
d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{|x-4|}, x_0 = 4$

e) $f(x) = \frac{|x^2 + 3x + 2|}{x^2 - 1}, x_0 = -1$

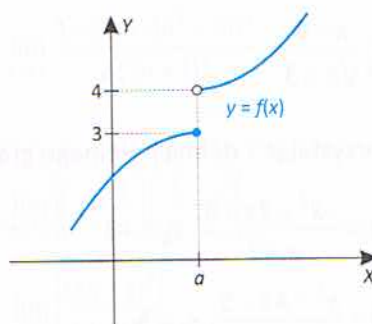
f) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-1}{|x+4|}, x_0 = -4$

2.10. Na podstawie wykresu funkcji f ustal, czy istnieje granica funkcji f w punkcie a . Jeśli tak, to podaj tę granicę.

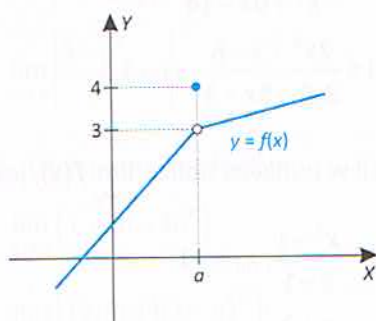
a)



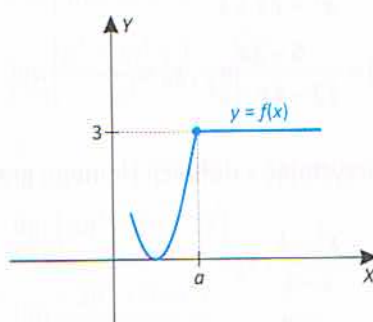
b)



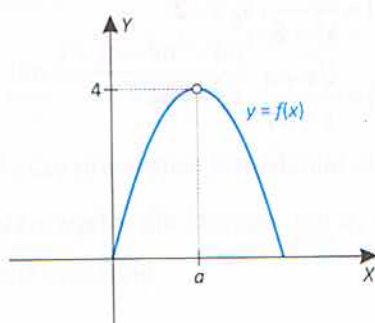
c)



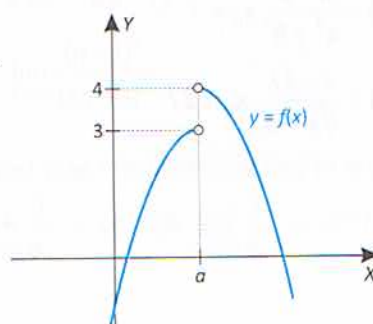
d)



e)



f)



Obliczanie granicy funkcji w punkcie

2.11. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} [(2x-3)^5(x+5)]$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} [(5-x)^2(3x+2)^3]$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+8}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{(1-x)(4-2x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4x-5)(2-x)}{(5x-12)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+5x-9}{(7x-6)(x-12)}$

2.12. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2+10x-24}{x^2-2x-24}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{125-x^3}{4x^2-100}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-8x^2-9}{x^3+3x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-5x^2+4}{x^4+2x^2-8}$

2.13. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\frac{1}{x}}{3-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2-x-2}{x-2} + \frac{x-2}{x^3-8} \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x^3+8}{x^4-16} - \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+6} \right]$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} \right]$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x(x+1)}{x^4-1} - \frac{2}{x^4-1} \right]$

2.14. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{9+x}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{5x+6}}$

***2.15.** Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{1-3x}+2}{x-3}$$

2.16. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^4 \sin \frac{1}{x^3} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(7x \sin \frac{1}{x^2} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$$

2.17. Wyznacz parametr a , wiedząc, że:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+2\sqrt{x}}{\sqrt{ax}+7} = \frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{ax^2+2}}{3x+a} = -2$$

2.18. O funkcji ciągłej f wiemy, że $f(x) > 0$, jeśli $x > 5$, $f(x) < 0$, jeśli $x < 5$. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

Granice jednostronne funkcji w punkcie

2.19. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i na tej podstawie ustal, czy istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, a następnie narysuj wykres funkcji f , jeśli:

$$a) f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}, x_0 = 1$$

$$b) f(x) = \frac{4-x^2}{|2+x|}, x_0 = -2$$

$$c) f(x) = \frac{x^3-2x}{|x|}, x_0 = 0$$

$$d) f(x) = \frac{|x-3|^3}{(x-3)^2} + 2, x_0 = 3$$

$$e) f(x) = \frac{|2+x|^3}{x+2} - 1, x_0 = -2$$

$$f) f(x) = \frac{x^2+|x|}{|x|}, x_0 = 0$$

2.20. Oblicz granice jednostronne:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4^-} (2 + \sqrt{16-x^2})$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3^-} 5x\sqrt{x^2-9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{5-x}{\sqrt{(x-5)^2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{\sqrt{2x+12}-2}{x+4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x^2-1}$$

2.21. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 . Jeśli tak, to oblicz tę granicę.

$$a) f(x) = \begin{cases} -3x+5, & \text{jeśli } x > 1 \\ 2x, & \text{jeśli } x < 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{3x-2}, & \text{jeśli } x > 2 \\ x^2-1, & \text{jeśli } x < 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^3+5, & \text{jeśli } x > -3 \\ -x^2+4x-1, & \text{jeśli } x < -3 \end{cases} \quad x_0 = -3$$

$$d) f(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{jeśli } x > -1 \\ \sqrt{6-3x}, & \text{jeśli } x < -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{4-x}, & \text{jeśli } x > 4 \\ 3x-4, & \text{jeśli } x < 4 \end{cases} \quad x_0 = 4$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{x}, & \text{jeśli } x > 0 \\ \frac{2x-3}{4x-9}, & \text{jeśli } x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

2.22. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 . Jeśli tak, to oblicz tę granicę.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{-3x^2+5x-2}{x-1}, & \text{jeśli } x < 1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{9x^2+20x+4}{4-x^2}, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \\ \frac{x^3+8}{x^2+3x+2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \end{cases} \quad x_0 = -2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-16x+21}{3x-9}, & \text{jeśli } x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}, & \text{jeśli } x > 3 \end{cases} \quad x_0 = 3$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{|2x+6|}, & \text{jeśli } x < -4 \\ \frac{x^2+13x+36}{x+4}, & \text{jeśli } x > -4 \end{cases} \quad x_0 = -4$$

Granica funkcji w nieskończoności

2.23. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-5}{2x+7}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{3x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{6-7x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-6x}{1+3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x+6}{7-x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x-9}{4x+1}$

2.24. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+7x-1}{6x^2-4x+5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x+x^2}{2x^2-4x-9}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^2}{(1-3x)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{-x^2+2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{4x^2-7x+15}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(3x+1)^2}{x^2-(4x+2)^2}$

2.25. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+6x-7}{2x^3-9x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x^2)^2}{x^4-x^3+6x^2-7x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x-2)^3}{(2+3x^2)(2-3x^2)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3-10x^2+x}{1-8x-10x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+1)^3}{(1-2x)^2 \cdot x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2+5x)(1-x^2)}{(3-7x^2)(5+x^2)}$

2.26. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+5} - x \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+7}{x-5} + \frac{3-4x^2}{2x+7} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(3x+1)^2}{3x-5} - \frac{3x^2-7}{x+5} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \frac{5+3x^4}{x^3+2x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+5} + \frac{1-x^3}{x^2-11} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{x^2-1} - \frac{x^3-1}{x^2+1} \right)$

2.27. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 5}}{2x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 5}}{2x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 7}}{9 - 3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 7}}{9 - 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3x - 2|}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x - 2|}{x - 1}$

2.28. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+5}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-4x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 1})$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x+5| - |6-x|)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|7-x| - |3+x|)$

2.29. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, wykaż, że:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 \sin x}{\sqrt{x^2 + 5}} = 0$

Granica niewłaściwa funkcji

2.30. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x+5}{(x+4)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-8}{|x+1|}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-4x}{|x-3|}$

f) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{|3-5x|}{|7-x|}$

2.31. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x^2 + 3x - 7)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 2x^4 + x + 1)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 10)$

2.32. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x)^2(x+3)]$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-3x(2-x)(2+x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-3)^3(2-3x)^2]$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(5-x)(3-x)^2(x+2)]$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})]$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(9-2x)^3(7-x)^3]$

2.33. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+8x+10}{2x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+8x+10}{2x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-7x+15}{2-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-7x+15}{2-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$

2.34. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+7x+15}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+7x+15}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2+2x+10})$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{x^2+2x+10})$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$

2.35. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+3}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2-3}{x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2-3}{x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-x^2+1}{x+3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-x^2+1}{x+3}$

2.36. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2-3x-12}{(5-x)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2-3x-12}{(5-x)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x+21}{(x+2)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x+21}{(x+2)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2}{(x-1)^4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2}{(x-1)^4}$

2.37. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - x - 12}{(x-4)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x - 12}{(x-4)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^2 - 2x - 24}{-3(x-6)^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x^2 - 2x - 24}{-3(x-6)^3}$

2.38. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+5}{x^2+4x-5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+5}{x^2+4x-5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4x+7}{-x^2-x+6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x+7}{-x^2-x+6}$

e) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x-10}{x^2-2x-35}$

f) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x-10}{x^2-2x-35}$

2.39. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x^4-2x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x^4-2x^2+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2x}{x^3-8x^2+20x-16}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-2x}{x^3-8x^2+20x-16}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64}$

Ciągłość funkcji w punkcie**2.40.** Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0 :

a) $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ 2x+7, & \text{jeśli } x \in [-2, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ 4-3x, & \text{jeśli } x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+7}{x-3}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 2) \\ 2-3x-x^2, & \text{jeśli } x \in [2, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = 2$

$$d) f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-4x}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{6+5x}{2+x}, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$e) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 24, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -3) \\ 3x^2 + 10x + 3, & \text{jeśli } x \in (-3, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = -3$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 5x - 1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ 4x^2 + 10x - 2, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = -1$$

2.41. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0 :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}, & \text{jeśli } x \neq 3 \\ 7, & \text{jeśli } x = 3 \end{cases} \quad x_0 = 3$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 + 7x^2 + 5x + 1}{x + 1}, & \text{jeśli } x \neq -1 \\ 0, & \text{jeśli } x = -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 10x + 25}, & \text{jeśli } x \neq 5 \\ 9, & \text{jeśli } x = 5 \end{cases} \quad x_0 = 5$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 5x + 4}, & \text{jeśli } x \neq -4 \\ 3, & \text{jeśli } x = -4 \end{cases} \quad x_0 = -4$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{9+12x^2} - 3}{x^2}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 2, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{12+4x^2} - 4}{x - 1}, & \text{jeśli } x \neq 1 \\ 1, & \text{jeśli } x = 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

2.42. Zbadaj, czy istnieje taka liczba a , dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}, & \text{jeśli } x \neq 3 \wedge x \neq -3 \\ a, & \text{jeśli } x = 3 \vee x = -3 \end{cases} \quad \text{jest ciągła w punktach } -3 \text{ i } 3.$$

2.43. Zbadaj, czy funkcja $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3nx+4}{nx+2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła w punktach $-1, 0, 1$.

2.44. Zbadaj, czy funkcja $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+x^{2n}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła w punktach $-1, 0, 1$.

2.45. Wykaż, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{jeśli } x \neq 2 \\ 3, & \text{jeśli } x = 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-8|}{x-8}, & \text{jeśli } x \neq 8 \\ 1, & \text{jeśli } x = 8 \end{cases} \quad x_0 = 8$$

2.46. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2+3x, & \text{jeśli } x \in \mathbb{C} \\ 18, & \text{jeśli } x \notin \mathbb{C} \end{cases}$. Wyznacz te liczby całkowite, w których funkcja f jest ciągła.

Ciągłość funkcji w zbiorze

2.47. Wyznacz parametr a tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} a^2x+a, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 3) \\ 5ax-15, & \text{jeśli } x \in \langle 3, +\infty \end{cases}$ była ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

2.48. Wyznacz parametry a, b , dla których funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2+ax, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ b, & \text{jeśli } x \in (-2, 5) \\ 2x-3, & \text{jeśli } x \in \langle 5, +\infty \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

2.49. Wyznacz parametry a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -3) \\ ax+b, & \text{jeśli } x \in (-3, 5) \\ -6x+6, & \text{jeśli } x \in \langle 5, +\infty \end{cases}$ była ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

2.50. Wyznacz parametry a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ x - a, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 3 \rangle \\ \frac{a}{x} + b, & \text{jeśli } x \in \langle 3, +\infty \rangle \end{cases}$

była ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

2.51. Wyznacz a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } x = -2 \\ \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x+7}}, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \\ b, & \text{jeśli } x = 2 \end{cases}$ była ciągła w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

*** 2.52.** Dziedziną i zbiorem wartości funkcji ciągłej $y = f(x)$ jest przedział $\langle 0, 1 \rangle$. Wykaż, że równanie $f(x) = x$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

2.53. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -2, 7 \rangle$ oraz $f(-2) = -6$ i $f(7) > 0$. Czy funkcja g , gdzie $g(x) = f(x) + 5$ ma miejsce zerowe w przedziale $\langle -2, 7 \rangle$? Odpowiedź uzasadnij.

2.54. Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że wykresy funkcji $f(x) = x^4 - 7x$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(x) = -3x^3 - 4x + 8$, $x \in \mathbb{R}$, przecinają się w punkcie o odciętej należącej do przedziału $(-3, -2)$.

2.55. Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że funkcja $f(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$, przyjmuje wartość -160 .

2.56. Wykaż, że równanie $3x^5 + 5x^3 + 1 = 2x^4 + 6x^2 + \sqrt{2}x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $(0, 1)$.

2.57. Dana jest funkcja $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że równanie $f(x) = f(x+1)$ ma w przedziale $(2, 6)$ co najmniej dwa rozwiązania (nie rozwiązując tego równania).

2.58. Wykaż, że równanie $\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 2^{-x}$ ma w przedziale $(0, 3)$ co najmniej dwa rozwiązania.

2.59. Wyznacz zbiór wartości funkcji f :

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 24}, x \in \langle -5, 3 \rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, x \in \langle 4, 6 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

d) $f(x) = \frac{1}{\cos x}, x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

Asymptoty wykresu funkcji

2.60. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty pionowe. Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x) = \frac{2x+8}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{6x+2}{3x+1}$

c) $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$

d) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{3}{5x^2 - 10x}$

f) $f(x) = \frac{-6x}{x^2 + 3x}$

2.61. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty pionowe. Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+3)(x-1)}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+4)(x+5)}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{|x^2 - 4|}$

d) $f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x+3}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 + 8x + 4}$

f) $f(x) = \frac{6x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 5}$

2.62. Wyznacz wartości parametrów a, b , dla których wykres funkcji

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + ax + b}$ ma dwie asymptoty pionowe o równaniach $x = -3$ i $x = 2$.

2.63. Wyznacz wartości parametrów a, b , dla których wykres funkcji

$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + ax + b}$ ma tylko jedną asymptotę pionową o równaniu $x = 4$.

2.64. Wyznacz wartości parametrów a, b , dla których wykres funkcji

$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + ax + b}$ ma tylko jedną asymptotę pionową o równaniu $x = 4$.

2.65. Zadać, czy istnieją takie wartości parametrów a, b , dla których wykres funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + bx + a}{x^2 + ax + b} \text{ ma dwie asymptoty pionowe o równaniach } x = 1 \text{ i } x = -5.$$

2.66. Wykaż, że prosta k jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x}$, $k: x - y + 5 = 0$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 3}{x + 1}$, $k: 2x - y + 4 = 0$

c) $f(x) = \frac{3x^3}{8x - x^2}$, $k: 3x + y + 24 = 0$

d) $f(x) = \frac{(2x - 1)^3}{3x^2 + x}$, $k: 24x - 9y - 44 = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $k: x - y = 0$ – asymptota ukośna prawostronna

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, $k: 2x + 2y + 3 = 0$ – asymptota ukośna lewostronna

2.67. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty ukośne (poziome). Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x - 6}$

b) $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \frac{5x^3 + 2x^2}{x^3 - 7}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{2 + x}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 17}{x^3 - 3x^2 + 21}$

f) $f(x) = \frac{(2x + 3)^3}{(2x + 1)^2}$

2.68. Wyznacz asymptoty ukośne (poziome) wykresu funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{|x| + 5}$

b) $f(x) = \frac{4x - 3}{|x| + 2}$

c) $f(x) = \frac{16 - x^2}{|x + 2| - 2}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 1| + 1}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$

f) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x}$

2.69. Wyznacz asymptoty ukośne (poziome) wykresu funkcji f :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-4}{x-3}, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{2-x^3}{x^3+2}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+5}{2x+4}, & \text{jeśli } x \leq -3 \\ \frac{-2x^3}{x^2+1}, & \text{jeśli } x > -3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & \text{jeśli } |x| \leq 4 \\ \frac{2|x|}{x^2+x+5}, & \text{jeśli } |x| > 4 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 5x+2, & \text{jeśli } |x| \leq 3 \\ \frac{3x^2}{|x|+6}, & \text{jeśli } |x| > 3 \end{cases}$$

2.70. Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji:

$$a) f(x) = \frac{5-2x}{x+7}$$

$$b) f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-6}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2-x-12}{x+1}$$

$$d) f(x) = \frac{2x^2-3x+8}{x^2-2x+1}$$

$$e) f(x) = \frac{3x^3-2x^2+6}{x^2-1}$$

$$f) f(x) = \frac{x^5+x^3+1}{x^2-6x+9}$$

2.71. Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji f :

$$a) f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+2x+1}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

$$d) f(x) = \frac{2x^3-6x^2-8x}{x^2-3x-4}$$

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{-x+3}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{6x^2}{|x|+1}, & \text{jeśli } |x| \geq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & \text{jeśli } |x| < 2 \end{cases}$$

Pochodna funkcji w punkcie

2.72. Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 :

$$a) f(x) = -2x, x_0 = 3$$

$$b) f(x) = 3x-5, x_0 = -1$$

$$c) f(x) = 4x^2+3x, x_0 = -2$$

$$d) f(x) = -x^2+5, x_0 = 5$$

$$e) f(x) = \frac{1}{x+5}, x_0 = 4$$

$$f) f(x) = \frac{-2}{x-3}, x_0 = -3$$

2.73. Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 :

a) $f(x) = 2x^3, x_0 = 5$

b) $f(x) = -x^3 + x^2 - x, x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-5}, x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{-3x}{x+1}, x_0 = -2$

e) $f(x) = \sqrt{3x+6}, x_0 = 1$

f) $f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3$

2.74. Zbadaj, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0 :

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x, & \text{jeśli } x \leq -2 \\ -8x - 12, & \text{jeśli } x > -2 \end{cases} \quad x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{jeśli } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ -3x + 6, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{2x + 6}, & \text{jeśli } x \neq -3 \\ -3, & \text{jeśli } x = -3 \end{cases} \quad x_0 = -3$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{jeśli } x \leq 0 \\ x^2 - 3, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 4, & \text{jeśli } x \leq 2 \\ 4, & \text{jeśli } x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

Funkcja pochodna

2.75. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = -3x$

c) $f(x) = 6x - 8$

d) $f(x) = -x^2 + 7$

e) $f(x) = 5x^2 + 3x - \sqrt{2}$

f) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

2.76. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x + 1$

c) $f(x) = -3x^8 + 5x^4 + 6$

d) $f(x) = 5 + 2x^3 - 6x^6$

e) $f(x) = \sqrt{6}x + x^7 - \frac{1}{8}x^8$

f) $f(x) = x^{10} + x^{100} + x^{1000}$

2.77. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}$

d) $f(x) = 2x^4 - \sqrt{x} + 5$

e) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x + \frac{6}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{7} + \sqrt{x}$

2.78. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = (4x - 1)(x^5 + 2)$

b) $f(x) = (2x^2 - 3)(4x^2 + 3x)$

c) $f(x) = (x^3 + x^2 + x)(x^2 + x + 1)$

d) $f(x) = (2x^4 + 4x^2)(x^3 + x + 3)$

e) $f(x) = \left(2\sqrt{x} + x^2 + 1\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x} + x\right)$

2.79. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

b) $f(x) = \frac{-2x}{3x-1}$

c) $f(x) = \frac{5x+1}{-4x+2}$

d) $f(x) = \frac{3x^2+7x}{6x+1}$

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2-5}$

2.80. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3-2}{3x^2+x}$

b) $f(x) = \frac{4x^2-5x}{x^2+x+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+8}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{5}{x^4+x^3+1}$

e) $f(x) = \frac{x^4+3x+2}{x^3+1}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^5-1}$

2.81. Zbadaj, czy istnieją takie wartości parametrów k, m ($k, m \in \mathbb{R}$), dla których funkcja f jest różniczkowana w zbiorze $\mathbb{R}$. Wyznacz f' .

a) $f(x) = \begin{cases} 4x+m, & \text{jeśli } x < 1 \\ kx^2+2x, & \text{jeśli } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{4}x^2-kx, & \text{jeśli } x < 3 \\ \frac{m}{x}-2, & \text{jeśli } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+k^2x, & \text{jeśli } x < 2 \\ x+m, & \text{jeśli } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} mx^2+(k+1)x, & \text{jeśli } x < -1 \\ kx^2-3mx, & \text{jeśli } x \geq -1 \end{cases}$

Styczna do wykresu funkcji

2.82. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P , jeśli:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 7$, $P(1, -2)$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 3$, $P(-2, -7)$

c) $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$, $P(x_0, 2)$

d) $f(x) = \frac{3-x}{2x+18}$, $P\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$

2.83. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x - \frac{1}{3}$ w punkcie $P(-2, y_0)$. Następnie wyznacz współrzędne drugiego punktu wspólnego tej stycznej z wykresem funkcji f .

2.84. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ w punkcie $P(x_0, -8)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji f ma ta styczna?

2.85. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ w punkcie $P\left(x_0, \frac{5}{4}\right)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji ma ta styczna?

2.86. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ w punkcie $P(x_0, -9)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji f ma ta styczna?

2.87. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$, $x \in \mathbb{R}$, w punkcie A przecina ten wykres w punkcie $B(0, -4)$, różnym od punktu A .

a) Wyznacz współrzędne punktu A .

b) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A .

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

2.88. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f :

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$

b) $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 4x^2 - 15x - 7$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5$

d) $f(x) = \frac{-1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 16x^2 - 32x + 7$

2.89. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f :

a) $f(x) = -x^4 - \frac{7}{3}x^3 - x^2 + x + 6$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

c) $f(x) = \frac{-1}{5}x^5 + x^4 - x^3 - 2$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x - 6$

2.90. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f :

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 4}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 14}{x^2 - 5x - 14}$

2.91. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f :

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}, & \text{jeśli } x < 2 \\ x^3 - 2x^2, & \text{jeśli } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 11}{x^2 + 1}, & \text{jeśli } x < 2 \\ \frac{5x^2 - 17}{x^2 - 3}, & \text{jeśli } x \geq 2 \end{cases}$

2.92. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f :

a) $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x}$

2.93. O funkcji $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 6$, $x \in \mathbb{R}$, wiadomo, że:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{3}, 1 \right).$$

a) Oblicz współczynniki a, b .

b) Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .

Ekstrema lokalne funkcji

2.94. Wyznacz ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji f :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x - 10$

b) $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 5x^2 - 24x + 57$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x - 3$

d) $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 - x + 18$

2.95. Wyznacz ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji f :

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 10$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7$

c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - 4x^3 + 84$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3x^3 + 18x - 123$

2.96. Wyznacz ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji f :

a) $f(x) = 5x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 9}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2}$

2.97. Wyznacz ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji f :

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 8x^2 + 21x + 18, & \text{jeśli } x < -2 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}, & \text{jeśli } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 11x^2 - 40x - 48, & \text{jeśli } x < -3 \\ \frac{9 - x^2}{x^2 + 4}, & \text{jeśli } x \geq -3 \end{cases}$

2.98. Wyznacz ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji f :

a) $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 4}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x + |2x - 5|}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x + |7 - 2x|}$

d) $f(x) = \frac{|x^2 + 2x - 3|}{x^2}$

2.99. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \sqrt{8x} - x + 1$

2.100. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x\sqrt{x} - 6x + 3$

2.101. Funkcja $f(x) = \frac{x^2 - ax + b}{x - 5}$ ma w punkcie 3 maksimum lokalne równe 1.

Wyznacz a , b oraz pozostałe ekstrema tej funkcji.

- 2.102.** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{192}{x^2} + ax + b$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ z parametrami a i b . Do wykresu funkcji f należy punkt o współrzędnych $(8, 18)$, a w punkcie 4 funkcja f ma ekstremum lokalne.
- Wyznacz a i b .
 - Określ rodzaj ekstremum w punkcie 4.

- *2.103.** Niech $f(x) = \frac{(m+2)}{3}x^3 - 4x^2 + (8-m)x + 5$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m :
- funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$
 - funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne; określ rodzaj tego ekstremum
 - funkcja f ma dwa ekstrema lokalne w punktach dodatnich?

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

- 2.104.** Wyznacz największą (M) i najmniejszą (m) wartość funkcji f w podanym przedziale:

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - 8$, $x \in \langle -5, 3 \rangle$
- $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$
- $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$
- $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$

- 2.105.** Wyznacz wartości (o ile istnieją) funkcji f : największą (M) i najmniejszą (m) w podanym zbiorze:

- $f(x) = \frac{x^2}{4+x}$, $x \in \langle -10, -5 \rangle \cup \langle -3, 5 \rangle$
- $f(x) = \frac{1-x^2}{x-3}$, $x \in \langle -5, 3 \rangle$
- $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$, $x \in (0, 10)$
- $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle \cup (2, 3)$

2.106. Wyznacz zbiór wartości funkcji f :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 7\frac{2}{3}, x \in (2, 5)$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4\frac{2}{3}, x \in (-3, 2)$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x + 10, x \in (0, 7)$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 6, x \in (-2, 2)$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

2.107. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji f :

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

b) $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 2$

c) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$

d) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$

2.108. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji f :

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \frac{-2x^2}{(x+1)^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{9 - x^2}$

2.109. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji f :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$

2.110. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji f :

a) $f(x) = x - 3 + \frac{2x - 6}{x + 2} + \frac{4x - 12}{(x + 2)^2} + \dots$

b) $f(x) = x - 2 + \frac{x - 2}{x - 5} + \frac{x - 2}{(x - 5)^2} + \dots$

2.111. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji f :

a) $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 2}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$

2.112. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\frac{2x^3}{x^2-9} = m$ w zależności od wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$.

2.113. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $1 + (x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 3x + 1)^2 + \dots = m$ w zależności od wartości parametru m .

2.114. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$ określ liczbę rozwiązań równania $\frac{2x^2}{(2-|x|)^2} = m$ w zależności od wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$.

Zadania optymalizacyjne

2.115. Z kwadratowego arkusza blachy o boku długości 80 cm wycięto w narożach cztery przystające kwadraty o boku długości x . Otrzymany profil odpowiednio zgięto, stykające się krawędzie zlutowano i w ten sposób otrzymano prostopadłościenną skrzynię (bez górnego wieka). Dla jakiej wartości x pojemność otrzymanej skrzyni jest największa? Wyznacz tę pojemność z dokładnością do 0,1 litra.

2.116. Należy wykonać skrzynię w kształcie prostopadłościanu (bez górnego wieka), którego podstawa jest kwadratem. Pojemność skrzyni ma być równa 32 litry. Jakie wymiary (w centymetrach) powinno mieć to pudełko, aby jego pole powierzchni było najmniejsze?

2.117. Z kawałka drutu mającego długość 96 cm wykonano model prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i największej objętości. Jakie są wymiary tego prostopadłościanu?

2.118. Należy sporządzić skrzynię (z pokrywą) w kształcie prostopadłościanu o objętości 72 cm^3 . Stosunek długości krawędzi podstawy tego prostopadłościanu ma być równy $1 : 2$. Jakie powinny być wymiary skrzyni, aby na jej konstrukcję zużyć jak najmniej materiału?

2.119. Suma długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jest równa 54 cm. Długość jednej z tych krawędzi jest dwa razy większa od drugiej. Jakie są długości krawędzi tego prostopadłościanu, który ma największą objętość?

2.120. Z kawałka kątownika mającego długość 9,6 m zrobiono szkielet akwarium, w którym stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 2 : 3. Jakie są wymiary tego akwarium, jeśli jego objętość jest największa?

2.121. Do pewnej liczby a dodano jej kwadrat, a następnie odjęto sześćdziesiąt liczby a . Czy istnieje taka liczba a , dla której wartość otrzymanego wyrażenia jest największa, jeśli:

a) $a \in (0, +\infty)$

b) $a \in \mathbb{R}$?

2.122. Czy istnieje przedstawienie liczby 10 w postaci dwóch składników, dla których iloraz sumy kwadratów tych składników przez iloczyn tych składników jest najmniejszy, jeśli:

a) oba składniki są dodatnie

b) jeden ze składników jest ujemny?

2.123. Wyznacz dwie nieujemne liczby x, y , które spełniają równanie $2x + y = 1$, tak aby suma ich sześciątów $x^3 + y^3$ była:

a) najmniejsza

b) największa.

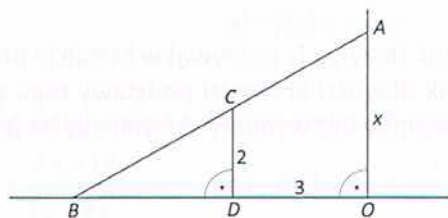
2.124. Wydajność pracy pewnego robotnika zmienia się w ciągu ośmiogodzinnego

dnia pracy i po t godzinach od jej rozpoczęcia osiąga wartość $w(t) = 50 + 9t - t^2 - \frac{1}{9}t^3$,

gdzie $t \in \langle 0, 8 \rangle$. O której godzinie wydajność robotnika jest największa, jeśli rozpoczyna on pracę o godz. 6⁰⁰?

2.125. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa h . Dzieli ona przeciwprostokątną na odcinki mające długość x oraz $y - x$. Wyznacz y jako funkcję x i oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

*** 2.126.** Półproste $OA \rightarrow$ i $OB \rightarrow$ zawierają się w prostych prostopadłych, $CD \perp BD$ oraz $|CD| = 2$ i $|DO| = 3$ (zobacz rysunek poniżej).



Oznaczmy długość odcinka OA przez x .

a) Wyznacz długość $L(x)$ odcinka AB jako funkcję x .

b) Dla jakiej liczby x funkcja L przyjmuje najmniejszą wartość?

2.127. W pewnej firmie koszt wytworzenia x sztuk towaru w ciągu jednego dnia wyraża się wzorem $K(x) = 0,1x^3 + 675$, gdzie $x \in \langle 5, 40 \rangle$. Ile sztuk tego towaru trzeba dziennie wyprodukować, aby koszt wytworzenia jednej sztuki był najmniejszy?

2.128. Dzienny koszt zasadzenia x drzew w parku wyraża się $K(x) = x^2 - x + 250$, gdzie $x \in \langle 4, 65 \rangle$. Ile dziennie trzeba zasadzić drzew w tym parku, aby koszt zasadzenia jednego drzewa był najmniejszy?

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Granica $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ jest równa:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. 1.

2. Równość $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + a} = 6$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $a = 3$ B. $a = -3$ C. $a \in \mathbb{R} - \{3\}$ D. $a \in \mathbb{R} - \{-3\}$.

3. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. -4 D. 4.

4. Niech $W(x) = ax^3 + 2x^2 - x + a$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

- A. Jeśli $a \neq 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x)$
B. Jeśli $a \neq 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x)$
C. Jeśli $a = 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = -\infty$
D. Jeśli $a = 0$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = +\infty$.

5. Funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{x-6}, & \text{jeśli } x < 5 \\ 2x-3, & \text{jeśli } x \geq 5 \end{cases}$:

- A. jest ciągła w punkcie 5
B. jest lewostronnie ciągła w punkcie 5
C. jest prawostronnie ciągła w punkcie 5
D. nie jest ani lewostronnie ciągła w punkcie 5, ani nie jest prawostronnie ciągła w punkcie 5.

6. Niech dana będzie funkcja $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Wiadomo, że $W(1) > 0$, $W(2) > 0$, $W(3) < 0$, $W(4) > 0$. Z tego wynika, że równanie $W(x) = 0$:

- A. nie ma rozwiązań w przedziale $(1, 2)$
- B. nie ma rozwiązań w przedziale $(2, 4)$
- C. ma tylko jedno rozwiązanie w zbiorze R
- D. ma co najmniej dwa rozwiązania w zbiorze R .

7. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 8, & \text{jeśli } x \in C \\ 2x^2, & \text{jeśli } x \in R - C \end{cases}$ jest:

- A. nieciągła w każdym punkcie będącym liczbą całkowitą
- B. ciągła w punkcie 4
- C. ciągła w punkcie -4
- D. ciągła w punkcie -2 .

8. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, & \text{jeśli } x \in R - \{1\} \\ 3, & \text{jeśli } x = 1 \end{cases}$. Zatem:

- A. funkcja f jest ciągła w punkcie 1
- B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie istnieje
- C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
- D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$.

9. Wykres funkcji $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 4}{x - 1}$, gdzie $x \in R - \{1\}$ ma asymptoty obustronne:

- A. pionową $x = 1$ i ukośną $y = -2x + 3$
- B. pionową $x = -1$ i ukośną $y = -2x + 3$
- C. pionową $x = 1$ i ukośną $y = 3x - 2$
- D. pionową $x = -1$ i ukośną $y = 3x - 2$.

10. O funkcji $y = f(x)$ wiadomo, że jest funkcją wymierną, która w punkcie $x_{\min}$ ma minimum lokalne, a w punkcie $x_{\max}$ ma maksimum lokalne. Zatem:

- A. $f(x_{\min}) < f(x_{\max})$
- B. $f(x_{\max})$ jest największą wartością funkcji f
- C. $f(x_{\min}) \cdot f(x_{\max}) > 0$
- D. jest możliwy przypadek, w którym $f(x_{\min}) > f(x_{\max})$.

11. Niech dana będzie funkcja f określona w zbiorze R .

- A. Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca w zbiorze R , to jest różniczkowalna w zbiorze R i $f'(x) > 0$ dla każdej liczby $x \in R$.

- B. Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca w zbiorze R , to jest różniczkowalna w zbiorze R i $f'(x) \geq 0$ dla każdej liczby $x \in R$.
 C. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze R , to $f'(x) > 0$ dla każdej liczby $x \in R$.
 D. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze R , to $f'(x) \geq 0$ dla każdej liczby $x \in R$.

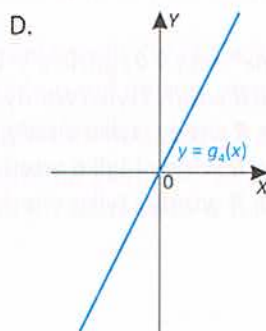
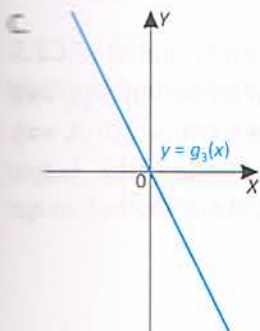
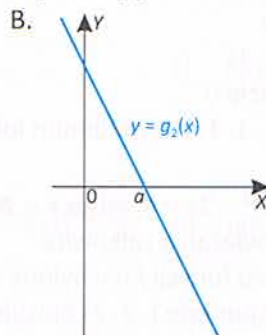
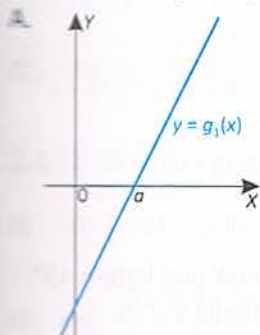
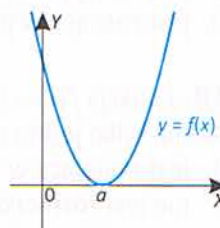
12. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-4}$, gdzie $x \in R - \{-2, 2\}$.

- A. Funkcja f nie ma ekstremów lokalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 2a$.
 B. Jeśli $a = 0$ i $b > 0$, to funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne – maksimum.
 C. Jeśli $a = 0$ i $b > 0$, to funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne – minimum.
 D. Jeśli $a \neq 0$ i $b = 0$, to funkcja f ma dwa ekstrema lokalne.

13. Dziedzina funkcji ciągłej f jest przedział otwarty. Zatem:

- A. zbiorem wartości funkcji f może być przedział domknięty
 B. zbiorem wartości funkcji f może być suma dwóch przedziałów rozłącznych
 C. zbiór wartości funkcji f jest zawsze przedziałem otwartym
 D. funkcja f zawsze przyjmuje wartość najmniejszą i największą.

14. Na rysunku obok dany jest wykres pewnej funkcji kwadratowej f . Wśród czterech wykresów poniżej jest jeden, który przedstawia wykres pochodnej funkcji f . Wskaż ten wykres.



15. Dziedzina funkcji ciągłej f jest zbiór R .

- A. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x_0) = 0$, to w punkcie x_0 jest ekstremum lokalne funkcji f .
- B. Jeśli w punkcie x_0 jest ekstremum lokalne funkcji f , to $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.
- C. Jeśli $f'(x_0)$ nie istnieje, to w punkcie x_0 funkcja f ma ekstremum lokalne.
- D. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze R , to $f'(x_0) > 0$ dla każdej liczby $x \in R$.

16. Funkcja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$, gdzie $x \in R$:

- A. ma ekstremum lokalne w punkcie 0
- B. jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3)$
- C. jest malejąca w przedziale $(0, +\infty)$
- D. przyjmuje największą wartość.

17. Funkcja $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 4}$, gdzie $x \in R - \{-4, 4\}$:

- A. jest różniczkowalna w punkcie 0
- B. ma dwa maksima lokalne
- C. jest malejąca w zbiorze $(0, 4) \cup (4, 8)$
- D. jest rosnąca w przedziale $(-4, 4)$.

18. Funkcja $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, gdzie $x \in R$:

- A. ma tylko jedno miejsce zerowe
- B. jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1)$
- C. nie jest różniczkowalna w punkcie 0
- D. w każdym punkcie przedziału $(-1, 1)$ ma minimum lokalne.

19. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$, gdzie $x \in R$.

- A. Równanie $f'(x) = 1$ ma dwa rozwiązania całkowite.
- B. Istnieją dwie styczne do wykresu funkcji f nachylone do osi OX pod kątem 45° .
- C. Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(-2, 2)$ opisuje równanie $y = -x$.
- D. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(-2, 2)$ przechodzi przez punkt $(1, 6)$.

20. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x + 2$, gdzie $x \in R$.

- A. Funkcja f jest malejąca w zbiorze R wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
- B. Funkcja f jest malejąca w zbiorze R wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
- C. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze R wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-3, 3)$.
- D. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze R wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-3, 3)$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

2.129. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 , jeśli:

a) $f(x) = \frac{|x|^3 - 5x^2}{|x|^2}, x_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{|x|^3 - 5x}{|x|}, x_0 = 0$

Jeśli granica istnieje, to ją wyznacz.

2.130. Zbadaj, czy istnieją poniższe granice. Jeśli istnieją, to je wyznacz.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6}{x^3 - 4x^2 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x + 8}{x^2 + 4x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 4x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2x+9} - 1}{x + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$

2.131. Wyznacz granice jednostronne:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 + 3x - 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{-x^2 - 2x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{7}{x^2 + 4x + 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 10x + 24}{x^2 - 8x + 16}$

2.132. Wyznacz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2(1-2x)(x+3)(1-3x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 4x + 5}{3(1-2x)(x-1)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + x + 1}{(1-2x^2)(1+2x^2)}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5x}{(4x-1)^2}$

2.133. Temperaturę T wrzenia wody (w $^{\circ}\text{C}$) w zależności od wysokości h (w metrach) nad poziomem morza (n.p.m.) opisuje w przybliżeniu funkcja

$$T(h) = 103,79 - 0,1895\sqrt{h+400}, \text{ gdzie } h \in \langle 0, 2000 \rangle$$

Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że pomiędzy 800 m n.p.m. a 900 m n.p.m. jest taki punkt, w którym woda wrze w temperaturze 97°C .

2.134. Mały kulisty kamień wyrzuciono pionowo do góry. Odległość $s(t)$ kamienia od ziemi (w metrach) po t sekundach od wyrzucenia (do upadku na ziemię) opisuje funkcja

$$s(t) = 1,5 + 34,3t - 4,9t^2$$

- Z jakiej wysokości nad ziemią wyrzuciono kamień?
- Na jakiej wysokości był kamień po 3 sekundach od wyrzucenia?
- Jaka była średnia prędkość kamienia między 2 a 3 sekundą od wyrzucenia?
- Jaka była prędkość chwilowa w 3 i w 4 sekundzie po wyrzuceniu kamienia?
- Na jaką maksymalną wysokość wzniósł się kamień?
- Po ilu sekundach od wyrzucenia kamień spadł na ziemię? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 sekundy.

2.135. Spuszczenie wody z basenu zajmuje 80 minut. Ilość wody w basenie (w litrach) po t minutach od rozpoczęcia spuszczenia wody opisuje funkcja

$$V(t) = 250 \cdot (80 - t)^2, \text{ gdzie } t \in \langle 0, 80 \rangle$$

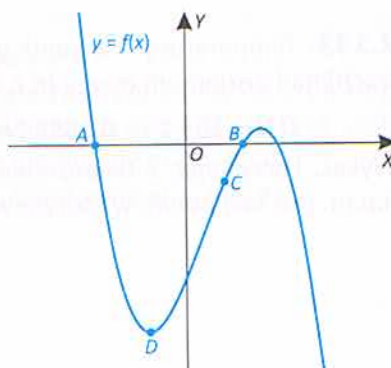
- Ile metrów sześciennych wody mieści się w napełnionym basenie?
- Ile metrów sześciennych wody pozostanie w basenie po 20 minutach od rozpoczęcia spuszczenia wody?
- Ile – średnio – litrów wody na minutę wypłynie z basenu w czasie 20 początkowych minut od rozpoczęcia spuszczenia wody?
- Jaka będzie prędkość wypływania wody z basenu (w litrach na minutę) w 20 minucie od rozpoczęcia spuszczenia wody?

2.136. O funkcji ciągłej f wiadomo, że jeśli $x \in (7, 10)$, to $f'(x) > 0$. Styczna w punkcie $A(10, 8)$ należącym do wykresu funkcji f ma współczynnik kierunkowy równy zero. Ponadto funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 10, 15 \rangle$. Spośród poniższych zdań wybierz zdania prawdziwe. Uzasadnij swój wybór.

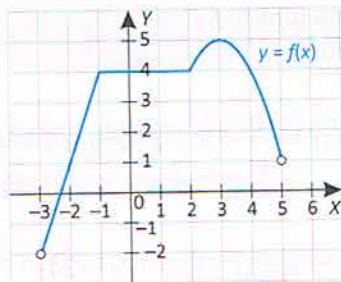
- W punkcie 10 funkcja f ma minimum lokalne.
- W punkcie 10 funkcja f ma maksimum lokalne.
- W punkcie 10 funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
- Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 8$.
- Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 10$.
- Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 10x$.

2.137. Rysunek obok przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 72$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Punkty A, B, C, D należą do wykresu funkcji f . Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, dodatkowo, że:

- punkty A, B należą też do osi OX
- styczna do wykresu funkcji f w punkcie C jest opisana równaniem $y = 24x - 68$
- styczna do wykresu funkcji f w punkcie D jest równoległa do osi OX .



2.138. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f , której dziedziną jest przedział $(-3, 5)$. Wykres ten składa się z dwóch odcinków i fragmentu paraboli.



- a) Podaj zbiór, w którym funkcja f jest różniczkowalna.
b) Oblicz: $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$.

2.139. Wykaż, że najmniejszy kąt, pod jakim może być nachylona do osi OX styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest równy 45° .

2.140. Dla jakich wartości parametru k ($k \in \mathbb{R}$) funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2kx^2 + 3, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{-1}{kx}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$$

jest:

- a) ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$
b) różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$?

2.141. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

- a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .
b) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .
c) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A , w którym wykres funkcji f przecina oś OY .
d) Punkt B należy do wykresu funkcji f . Styczna do wykresu w tym punkcie jest równoległa do stycznej w punkcie A . Wyznacz współrzędne punktu B oraz równanie stycznej do wykresu funkcji f w tym punkcie.

2.142. Maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 7$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest malejąca, to przedział $(-5, 3)$.

- a) Oblicz współczynniki a , b .
b) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .

2.143. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x + 1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

- a) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .
- b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

2.144. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{10}{x} + 3 + 2,5x$, gdzie $x \in \langle -5, 0 \rangle \cup (0, 5 \rangle$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

2.145. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^3 + \frac{243}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2.146. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3$, gdzie $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$.

2.147. Mały zakład może produkować dziennie x wieszaków, gdzie $x \in \langle 20, 200 \rangle$. Na dzienne koszty działalności zakładu składają się następujące elementy:

- 4 zł to koszt związany z wyprodukowaniem każdego wieszaka;
- $\frac{22\,500}{x}$ to koszty bieżące działalności zakładu, serwis urządzeń produkcyjnych;
- 600 zł to wynagrodzenie pracowników.

- a) Zapisz wzór funkcji $y = K(x)$, gdzie $K(x)$ oznacza dzienny koszt działalności zakładu przy wyprodukowaniu x wieszaków.
- b) Oblicz, ile wieszaków dziennie powinien wyprodukować ten zakład, aby jego dzienny koszt działalności był najmniejszy.

2.148. Kierowca samochodu osobowego z silnikiem benzynowym ma do przejechania autostradą odcinek mający długość 490 km. Rozważa dwa warianty:

- 1) jazda z prędkością, przy której średnie spalanie jest najniższe,
- 2) jazda z maksymalną dopuszczalną prędkością (140 km/h).

Wiadomo, że średnie spalanie $f(x)$ w tym samochodzie (w litrach na 100 km) w zależności od średniej prędkości x , opisuje funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 + 23\,450}{4x + 530} - 28,5 \quad \text{gdzie } x \in \langle 5, 140 \rangle,$$

a cena jednego litra benzyny jest równa 5,50 zł. Oblicz:

- a) ile czasu zajmie przejazd samochodu w wariacie 1) i w wariacie 2)
- b) o ile złotych tańszy będzie przejazd w wariacie 1) (uwzględniamy wyłącznie koszt benzyny).

3.8. Wyznacz liczbę m , dla której wektory $\vec{u} = [m^2 - 1, -m]$ oraz $\vec{v} = [-1, m]$ są:

- a) równe b) przeciwne c) równoległe.

3.9. Dane są wektory: $\vec{u} = [2, -4]$, $\vec{v} = [-3, 4]$, $\vec{z} = [10, -2]$. Oblicz współrzędne i długość wektora:

- a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{z} - \vec{u}$ c) $3\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z}$

3.10. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB , jeśli:

- a) $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$, b) $A(-3, 1)$, $B(3, 5)$
c) $A(4, -1)$, $B(-10, 9)$ d) $A(\sqrt{2}, -3)$, $B(\sqrt{2}, 7)$

3.11. Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu P , jeśli:

- a) $A(-3, 0)$, $P(-1, 2)$ b) $A(6, 2)$, $P(3, 0)$
c) $A(0, -2)$, $P(-2, 1)$ d) $A(-3, -3)$, $P(4, 5)$

3.12. Wyznacz współrzędne punktów podziału odcinka AB :

- a) na dwa odcinki równej długości, jeśli $A(-3, 4)$, $B(2, -7)$
b) na cztery odcinki równej długości, jeśli $A(-5, -7)$, $B(3, 5)$
c) na trzy odcinki równej długości, jeśli $A(2, -3)$, $B(-10, 3)$
d) na sześć odcinków równej długości, jeśli $A(-1, 3)$, $B(5, 15)$.

3.13. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $ABCD$ i punkt P przecięcia się przekątnych. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku, jeśli:

- a) $A(-3, 5)$, $B(-2, -1)$, $P(3, 1)$ b) $B(4, -2)$, $C(2, 7)$, $P(-1, 2)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

3.14. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne czwartego wierzchołka oraz współrzędne punktu P przecięcia przekątnych, jeśli:

- a) $A(4, 1)$, $B(2, 6)$, $C(-8, 3)$ b) $A(-5, -2)$, $B(3, 1)$, $D(-2, 5)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

3.15. Oblicz współrzędne punktu S przecięcia środkowych w trójkącie ABC , jeśli:

- a) $A(0, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 6)$ b) $A(-4, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 2)$
c) $A(-2, 7)$, $B(1, 2)$, $C(4, 0)$ d) $A(-4, -6)$, $B(2, -11)$, $C(5, 5)$.

Kąt między niezerowymi wektorami

3.16. Oblicz sinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

- a) $\vec{u} = [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$, $\vec{v} = [2, 0]$ b) $\vec{u} = [-3, 4]$, $\vec{v} = [0, 5]$
c) $\vec{u} = [7, -1]$, $\vec{v} = [-2, 2]$ d) $\vec{u} = [12, -5]$, $\vec{v} = [6, 8]$

3.17. Oblicz cosinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

- a) $\vec{u} = [2\sqrt{2}, 1]$, $\vec{v} = [0, -5]$ b) $\vec{u} = [-\sqrt{5}, 2]$, $\vec{v} = [\sqrt{5}, 0]$
c) $\vec{u} = [-4, 8]$, $\vec{v} = [1, 2]$ d) $\vec{u} = [\sqrt{6}, 3\sqrt{2}]$, $\vec{v} = [2\sqrt{2}, 4]$

3.18. Wyznacz miarę kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

- a) $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [4, -2]$ b) $\vec{u} = [-3, 3]$, $\vec{v} = [2, 0]$
c) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, 1]$, $\vec{v} = [1, 0]$ d) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, -1]$, $\vec{v} = [2\sqrt{3}, -2]$

3.19. Oblicz długości boków oraz miary kątów trójkąta ABC , jeśli:

- a) $A(-7, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-2, 4)$
b) $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$, $C(-4, 4\sqrt{3})$
c) $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$, $C(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$
d) $A(0, 3)$, $B(3\sqrt{3}, 6)$, $C(-3\sqrt{3}, 6)$

3.20. Dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Wskaż pary wektorów równoległych oraz pary wektorów prostopadłych, jeśli:

- a) $\vec{u} = [2, 5]$, $\vec{v} = [\sqrt{28}, 5\sqrt{7}]$
b) $\vec{u} = [2\sqrt{3}, -9]$, $\vec{v} = [9, \sqrt{12}]$
c) $\vec{u} = [3a, -2a]$, $\vec{v} = \left[\frac{a}{4}, -\frac{a}{6}\right]$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$
d) $\vec{u} = \left[2a, \frac{a}{5}\right]$, $\vec{v} = \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

3.21. Wykaż, że przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe. Następnie oblicz pole czworokąta, jeśli:

- a) $A(-4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, 5)$, $D(-6, 3)$
b) $A(-8, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(4, 6)$, $D(-3, 5)$
c) $A(-8, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(0, 11)$, $D(-9, 8)$
d) $A(-7, -7)$, $B(7, -7)$, $C(4, 4)$, $D(-4, 4)$

3.22. Wyznacz wszystkie wartości parametru a ($a \in \mathbb{R}$), dla których wektory $\vec{u} = [a, -2]$ i $\vec{v} = [-4 - a, a]$ są równoległe.

3.23. Wyznacz wszystkie wartości parametru a ($a \in \mathbb{R}$), dla których wektory $\vec{u} = [a - 2, 3]$ i $\vec{v} = [a - 2, a^2 + 2a + 4]$ są równoległe.

3.24. Dane są wektory $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [3, -6]$, $\vec{p} = \left[a, -\frac{1}{2} \right]$. Wyznacz wartość parametru a , jeśli wiadomo, że wektory $\vec{r} = (a + 1) \cdot \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{p}$ są prostopadłe.

3.25. Dane są wektory $\vec{u} = [3, -1]$, $\vec{v} = [-2, 5]$, $\vec{p} = [1, -2]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{p}$ i $\vec{r} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v}$ są prostopadłe, to $12b + 5a = 0$.

Równanie kierunkowe prostej

3.26. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B , jeśli:

a) $A(2, -3), B(6, 7)$

b) $A(-4, 1), B(2, 7)$

c) $\left(-\frac{3}{4}, -1 \right), B\left(-\frac{1}{4}, 8 \right)$

d) $A\left(\frac{1}{8}, 1\frac{1}{2} \right), B\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right)$

3.27. Prosta l przechodzi przez punkt A , a jej współczynnik kierunkowy jest równy m . Wyznacz równanie kierunkowe prostej l , jeśli:

a) $m = -3, A(5, 6)$

b) $m = 2, A(-10, 12)$

c) $m = \frac{1}{3}, A(-1, -9)$

d) $m = -\frac{3}{4}, A(24, -36)$

3.28. Napisz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty A i B , jeśli:

a) $A(-10, 58), B(2, 22)$

b) $A(-8, -95), B(4, 25)$

c) $A(-10, 7), B(5, -3)$

d) $A(-6, -2), B(24, 4)$

3.29. Prosta przechodzi przez punkty A i B . Podaj (z dokładnością do jednego stopnia) miarę kąta nachylenia prostej do osi OX , jeśli:

a) $A(-4, 2), B(1, 8)$

b) $A(5, 6), B(9, -4)$

c) $A(12, -3), B(6, 15)$

d) $A(2, -3), B(-1, -19)$

3.30. Dane jest równanie prostej k . Podaj miarę kąta nachylenia tej prostej do osi OX , jeśli:

a) $k: y = x - 1$

b) $k: y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$

c) $k: y = 1 - \sqrt{3}x$

d) $k: y = -x + 2$

e) $k: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}$

f) $k: y = -\frac{3-2\sqrt{3}x}{6}$

3.31. Wyznacz równanie kierunkowe prostej k przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α , jeśli:

a) $P(0, 0), \alpha = 135^\circ$

b) $P(0, 6), \alpha = 30^\circ$

c) $P(4, 0), \alpha = 120^\circ$

d) $P(3, -4), \alpha = 45^\circ$

e) $P(-2\sqrt{3}, 5), \alpha = 60^\circ$

f) $P(\sqrt{6}, \sqrt{8}), \alpha = 150^\circ$

3.32. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt A , która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k , jeśli:

a) $k: y = 3x + 1, A(16, -1)$

b) $k: y = 0,5x + 3, A(6, -8)$

3.33. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A(-4, 3), B(4, -5)$ i $C(8, 1)$. Wyznacz:

a) długość środkowej AS b) równanie kierunkowe prostej zawierającej środkową AS c) współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC .

3.34. W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A(-6, -2)$, środek $E(0, -1)$ boku AB i wektor $\vec{BC} = [-8, 4]$. Wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC .

3.35. W trójkącie ABC punkt $K(-5, 1)$ jest środkiem boku AC , zaś punkt L – środkiem boku BC . Wiedząc, że $\vec{AK} = [1, 6]$ oraz $\vec{KL} = [8, 4]$, wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC .

3.36. W trójkącie ABC dane są: $A(-3, -3), \vec{AB} = [7, 0]$ oraz środek ciężkości

$$S\left(3\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right). \text{ Oblicz miarę kąta rozwartego } \angle ABC \text{ tego trójkąta.}$$

3.37. Dwa wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC znajdują się na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, zaś trzecim wierzchołkiem trójkąta jest wierzchołek paraboli. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że kąt rozwarty tego trójkąta ma miarę 120° .

Równanie ogólne prostej

3.38. Przedstaw równanie prostej k w postaci ogólnej:

a) $k: \frac{x}{3} = \frac{12-x}{3}$

b) $k: y = \frac{-x+5}{4}$

c) $k: y + \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

3.39. Wyznacz równanie ogólne prostej k , do której należą punkty A i B , jeśli:

a) $A(0, 8), B(2, 4)$

b) $A(3, -4), B(11, -4)$

c) $A(-3, 2), B(4, 9)$

d) $A(-2, 6), B(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

3.40. Wyznacz równanie ogólne prostej k przechodzącej przez dwa punkty P i Q (skorzystaj bezpośrednio z równania ogólnego prostej), jeśli:

a) $P(0, -4), Q(3, 1)$

b) $P(\sqrt{5}, -3), Q(\sqrt{5}, 8)$

c) $P(2, 2), Q(-1, 0)$

d) $P(3, 1), Q(-1, -7)$

3.41. Wyznacz równanie ogólne i kierunkowe (o ile istnieje) prostej k prostopadłej do wektora $\vec{u}$ i przechodzącej przez punkt P , jeśli:

a) $\vec{u} = [-1, 2], P(3, 4)$

b) $\vec{u} = [6, -1], P(2, 5)$

c) $\vec{u} = [5, 0], P(-7, 8)$

d) $\vec{u} = [0, -3], P(12, -9)$

3.42. Wyznacz wartość parametru p , dla której proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie, jeśli: $k: x + y + 1 = 0, l: x + p = 0, m: 3x - y - 9 = 0$.

3.43. Wyznacz wartość parametru m , dla której proste: k – prostopadła do wektora $u = [2, -3]$ i przechodząca przez punkt $P(-1, 6)$ oraz $p: x + y - 5 = 0$ i $n: -x + (m + 2)^2 y - 7 = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

3.44. Dla jakiej wartości parametru m proste $k: mx + (m + 4)y - 5 = 0$ oraz $l: (m + 1)x - my - 10 = 0$ przecinają się na osi odciętych?

3.45. Dla jakiej wartości parametru m proste $k: x - my + m + 4 = 0$ oraz $l: 2mx + y - m - 1 = 0$ przecinają się na osi rzędnych?

3.46. Podaj miarę kąta, jaki tworzy z osią OX prosta dana równaniem ogólnym:

a) $x + y - 7 = 0$

b) $\sqrt{3}x - y + 90 = 0$

c) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$

d) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$

e) $x - \sqrt{3} = 0$

f) $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

3.47. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz prostą k prostopadłą do wektora $\vec{u} = [3, -1]$ i przechodzącą przez punkt $P(4, 2)$.

3.48. W prostokącie $ABCD$ dane są: wierzchołek $C(2, 4)$ i wektor $\vec{AB} = [4, 4]$. Wyznacz równanie ogólne prostej zawierającej przekątną AC tego prostokąta, jeśli wiadomo, że wierzchołek A należy do prostej $k: x - y - 4 = 0$.

3.49. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są: wierzchołek $C(-6, 2)$ oraz wektory $\vec{CD} = [-6, 4]$ i $\vec{AB} = [-4, -6]$, gdzie CD jest wysokością trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C . Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta.

Kąt między prostymi

3.50. Dane są równania ogólne prostych k i l . Czy proste k i l są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k: 2x - 3y + 6 = 0$ $l: -x + 1\frac{1}{2}y - 2 = 0$

b) $k: 3x - 4 = 0$ $l: 2y + 5 = 0$

c) $k: 7x + 21y - 3 = 0$ $l: x - 3y - 1 = 0$

d) $k: 2x + 7 = 0$ $l: 3x - 5 = 0$

3.51. Napisz równanie ogólne prostej l równoległej do prostej:

a) $k: 3x - 2y + \sqrt{3} = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 1)$

b) $k: 4x + 9y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, 5)$

c) $k: 2x - 11 = 0$ i przecinającej oś OX w punkcie $P(-4, 0)$

d) $k: y - 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(7, \sqrt{2})$

3.52. Dane są równania ogólne prostych k i l . Czy proste k i l są do siebie prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k: 5x + 3y - 2 = 0$ $l: -15x + 25y + 10 = 0$

b) $k: 5x + 7 = 0$ $l: 3y - 2 = 0$

c) $k: 4x - 20y + 30 = 0$ $l: 15x - 3y - 2 = 0$

d) $k: -\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$ $l: 1,5x - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{5} = 0$

3.53. Napisz równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej:

a) $k: 5x - y + 3 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 2)$

- b) $k: y + 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$
 c) $k: 10x - 7 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(3, 8)$
 d) $k: -3x + 2y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, -2)$

3.54. Oblicz brakujące współczynniki w równaniu ogólnym prostej l , wiedząc, że:

- a) prosta $l: Ax - 2y + C = 0$ jest równoległa do prostej $k: 5x + 14y - 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(7, 0)$
 b) prosta $l: x + By + C = 0$ jest równoległa do prostej $k: -3x + 4y - 5 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(1, -3)$
 c) prosta $l: 3x + By + C = 0$ jest prostopadła do prostej $k: -20x + 15y - 7 = 0$ i przechodzi przez początek układu współrzędnych
 d) prosta $l: Ax + y + C = 0$ jest prostopadła do prostej $k: 2x + 4y - 13 = 0$ i przechodzi przez punkt $P\left(\frac{1}{2}, 7\right)$.

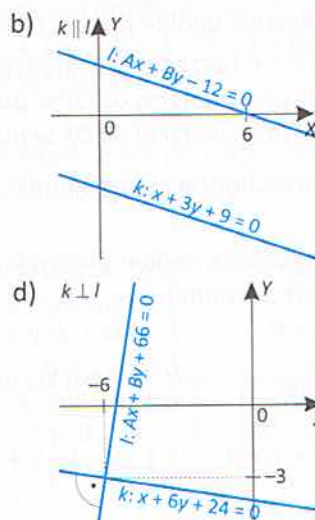
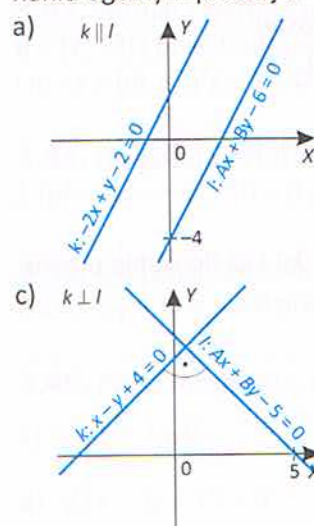
3.55. Wyznacz liczbę m , dla której proste k oraz l są równoległe, jeśli:

- a) $k: (m-1)x + (m+1)y - 5m = 0$ $l: 3x - 2y + 4 = 0$
 b) $k: 3mx + 4y - 8 = 0$ $l: (m+3)x + 2y - 9 = 0$

3.56. Wyznacz liczbę a , dla której proste k i l są prostopadłe, jeśli:

- a) $k: -x + (2a-1)y - 10 = 0$ $l: (a+7)x + 2y + 8 = 0$
 b) $k: -ax + (3-a)y + 6 = 0$ $l: (a+1)x + y + 2 = 0$

3.57. Na podstawie danych z rysunku poniżej wyznacz współczynniki A, B w równaniu ogólnym prostej l :



3.58. Wyznacz równanie ogólne symetralnej odcinka AB , jeśli:

- a) $A(-4, 5), B(6, 1)$ b) $A(0, 7), B(0, -3)$
c) $A(-1, -2), B(3, 2)$ d) $A(-1, 8), B(-5, 8)$

3.59. Dane są punkty $A(1, 0)$ oraz $B(5, 2)$. Na prostej k równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $P(4, 4)$ wyznacz współrzędne punktu C , który jest równo odległy od punktów A i B . Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

3.60. Punkty $A(1, -1), B(3, 5)$ i $C(-7, 11)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

3.61. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach: $A(1, 7), B(-5, 1), C(7, -5)$, od środka ciężkości tego trójkąta.

3.62. Wyznacz współrzędne punktu Q symetrycznego do punktu $P(-1, -4)$ względem prostej $k: 5x + 4y - 20 = 0$.

3.63. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $k: 5x - 2y - 11 = 0$

i $l: x + 2y + 5 = 0$. Punkt $S\left(0, \frac{1}{2}\right)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku.

Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się dwa pozostałe boki tego czworokąta.

3.64. Punkty $A(-2, -1)$ oraz $D(2, 2)$ są wierzchołkami rombu, którego przekątna AC jest zawarta w prostej o równaniu $x - 3y - 1 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

3.65. Jedna z przekątnych kwadratu $ABCD$ zawiera się w prostej $k: 2x - y = 0$. Wiedząc, że $A(1, -3)$, wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego kwadratu.

3.66. W trójkącie ABC dane są: $A(2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = [7, 3]$ oraz $\overrightarrow{BC} = [-6, 1]$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C .

3.67. Dwie wysokości trójkąta ABC zawierają się w prostych $k: 5x - 3y + 5 = 0$ oraz $l: x + y - 1 = 0$. Wiedząc ponadto, że $A(-2, 1)$, wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta.

3.68. Punkty $A(-4, 4), B(4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $M(3, 4)$ jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta (ortocentrum). Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

3.69. Punkty $A(2, -3)$ i $B(5, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Bok BC zawiera się w prostej $k: x + 2y - 7 = 0$, zaś środkowa AM zawiera się w prostej $m: 5x - y - 13 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C .

3.70. Punkty $A(0, -5)$ oraz $D(-3, -1)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego osią symetrii jest prosta o równaniu $x + 2y = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

3.71. Wyznacz miarę kąta ostrego, jaki tworzą dwie proste k i l o równaniach:

a) $k: x - 8 = 0$ oraz $l: x - y - 200 = 0$

b) $k: y = x - 10$ oraz $l: y = (2 - \sqrt{3})x + 15$

3.72. Wyznacz miarę kąta rozwartego, jaki tworzą dwie proste k i l o równaniach:

a) $k: y = 3x + 5$ oraz $l: y = -2x + 4$

b) $k: \sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$ oraz $l: \sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$

3.73. Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, które tworzą z prostą $k: 2x - y + 5 = 0$ kąt o mierze 45° .

3.74. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2, 4)$, które tworzą z prostą $k: -3x + 2y + 1 = 0$ kąt o mierze 45° .

3.75. Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, które tworzą z prostą $k: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$ kąt o mierze 60° .

3.76. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(1, -1)$, które tworzą z prostą $k: x - y + 1 = 0$ kąt o mierze 30° .

***3.77.** Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB zawiera się w prostej $k: 3x - 7y + 35 = 0$, zaś ramię BC zawiera się w prostej $l: 5x - 2y - 19 = 0$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się bok AC tego trójkąta, jeśli wiadomo, że punkt $P(-2, 0)$ należy do boku AC .

- a) Które boki trapezu są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.
b) Oblicz długość wysokości tego trapezu.

3.87. Na osi OX wyznacz punkt P , który jest równoodległy od prostych $k: x - y + 3 = 0$ oraz $m: 7x + y - 1 = 0$.

3.88. Na osi OY wyznacz punkt P , który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$.

3.89. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(1, -1)$ i takiej, że odległość punktu $Q(8, -2)$ od tej prostej wynosi 5.

3.90. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(-6, 15)$ i takiej, że odległość punktu $Q(4, -5)$ od tej prostej wynosi 10.

3.91. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się proste $k: 4x + 2y + 1 = 0$ i $m: 11x - 2y + 7 = 0$.

3.92. Wyznacz równanie prostej, zawierającej dwusieczną tego kąta, utworzonego przez proste $k: x + 3y - 1 = 0$ oraz $m: 6x - 2y + 1 = 0$, do obszaru którego należy punkt $P(3, 1)$.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

3.93. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 3)$.

3.94. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: $3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta.

3.95. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki: $A(2, 4)$, $B(6, 3)$, $C(4, -1)$. Oblicz:

- pole tego równoległoboku
- współrzędne wierzchołka D
- miarę kąta α utworzonego przez wektory $\vec{AK}$ i $\vec{AL}$, gdzie K – środek boku BC , L – środek boku CD .

3.96. Prosta $k: 3x - y - 3 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 - 2x + 3$ w punktach A i B .

- Oblicz współrzędne punktów A i B .
- Oblicz pole trójkąta ABW , gdzie W jest wierzchołkiem paraboli.
- Oblicz odległość punktu W od prostej k .

3.97. Na płaszczyźnie dane są punkty: $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, 6)$, $D(0, 8)$. Przez punkt D poprowadzono prostą k prostopadłą do prostej AB . Wyznacz na prostej k taki punkt E , aby pola trójkątów ABC i ABE były równe.

3.98. Punkty $A(6, 2)$ i $C(-4, -4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C zawiera się w prostej k : $x - y = 0$. Oblicz:

- a) współrzędne wierzchołka B b) pole trójkąta ABC .

3.99. Na osi OY wyznacz taki punkt C , aby pole trójkąta ABC , gdzie $A(-2, -4)$, $B(8, -1)$, było równe 32.

3.100. Na osi OX wyznacz taki punkt B , aby pole trójkąta ABC , gdzie $A(2, -3)$, $C(6, 3)$, było równe 12.

3.101. Na prostej k o równaniu $x - 3y - 3 = 0$ wyznacz punkt B tak, aby pole trójkąta ABC , gdzie $A(-4, 1)$, $C(4, 8)$ było równe 35.

3.102. W rombie $ABCD$, którego pole jest równe 10, dane są przeciwległe wierzchołki $A(1, 1)$ i $C(3, 5)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

3.103. W trójkącie prostokątnym ABC ($|\angle ABC| = 90^\circ$) dwa wierzchołki mają współrzędne $A(4, -5)$ i $C(-8, 5)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B , wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 61.

Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

3.104. Napisz postać kanoniczną równania okręgu o środku $S(x_s, y_s)$ i promieniu r , jeśli:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $S(0, 0)$, $r = 4$ | b) $S(0, 4)$, $r = \sqrt{2}$ |
| c) $S(-1, 0)$, $r = 1$ | d) $S(-1, 2)$, $r = \sqrt{3}$ |
| e) $S(4, -3)$, $r = \frac{1}{2}$ | f) $S(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $r = 8$ |

3.105. Poniższe równania opisują okrąg o środku w punkcie $S(x_s, y_s)$ i promieniu r ($r > 0$). Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień, jeśli:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 = 1$ | b) $(x - 1)^2 + y^2 = 2,25$ |
| c) $(1 + x)^2 + (2 - y)^2 = 25$ | d) $(-x - 3)^2 + (-1 - y)^2 = 81$ |

3.106. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10x + 24 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 33 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$

e) $x^2 + y^2 - x - 0,5y - \frac{59}{16} = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y - 6 = 0$

3.107. Dane jest równanie okręgu w postaci zredukowanej: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

gdzie $a^2 + b^2 > 4c$. Wykaż, że środek tego okręgu ma współrzędne $S\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$,

a długość promienia tego okręgu można obliczyć ze wzoru: $r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.

3.108. Korzystając z własności omówionej w zadaniu 3.107., wyznacz współrzędne środka i długość promienia okręgu:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3x + y - 1,5 = 0$

3.109. Sprawdź, które z poniższych równań opisują okrąg.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 25 = 0$

3.110. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 - ax + 2by - 0,75a^2 + 2ab = 0$ opisuje okrąg dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a i b . Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu.

3.111. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A , o środku w punkcie S , jeśli:

a) $A(3, 4), S(0, 0)$

b) $A(4, 2), S(2, 1)$

c) $A(3, 10), S(-3, 2)$

d) $A(4, 7), S(-2, 1)$

3.112. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C , jeśli:

a) $A(-1, 0), B(7, 0), C(0, 1)$

b) $A(1, 3), B(5, 1), C(4, 4)$

c) $A(1, 5), B(8, -2), C(9, 1)$

d) $A(-14, -1), B(3, 16), C(11, 4)$

3.113. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek znajduje się na prostej k , jeśli:

a) $k: y = -2x - 2; A(5, 10), B(3, 12)$

b) $k: y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}; A(6, 4), B(-1, 3)$

c) $k: y = 2x + 4; A(3, 0), B(4, 1)$

d) $k: y = x - 5; A(7, 4), B(-5, -12)$

3.114. Dany jest okrąg $o: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w symetrii środkowej względem punktu:

- a) $O(0, 0)$ b) $A(-4, 6)$ c) $B(5, 1)$ d) $C(3, -2)$

3.115. Dany jest okrąg $o: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 7$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w symetrii osiowej względem prostej k , jeśli:

- a) $k: x-4=0$ b) $k: y+2=0$ c) $k: y=x-2$ d) $k: 2x+y-1=0$

3.116. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu $o: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ względem prostej $k: x - 3y - 4 = 0$, a następnie oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów i początek układu współrzędnych.

3.117. Napisz równanie ogólne wspólnej osi symetrii okręgów

$o_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

3.118. Dany jest okrąg $o: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$, jeśli:

- a) $\vec{u} = [-3, 0]$ b) $\vec{u} = [0, 2]$ c) $\vec{u} = [1, -3]$ d) $\vec{u} = [-4, 5]$

3.119. Dane jest przekształcenie P płaszczyzny określone wzorem:

$P((x, y)) = (-x, y + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu $o: x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ w tym przekształceniu.
c) Wyznacz równania osi symetrii figury, która jest sumą okręgu o i jego obrazu w przekształceniu P .

3.120. Przekształcenie P określone jest wzorem $P((x, y)) = (y + 2, -x + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu $o: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P .
c) Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: środek S danego okręgu, środek S' – obrazu okręgu w przekształceniu P oraz punkt $A(2, 0)$.

3.121. Napisz równanie okręgu o_2 o promieniu $r = 4$, współśrodkowego z okręgiem $o_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Oblicz pole P pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_1 i o_2 .

3.122. Prosta $k: x - y + 1 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 + 2x + 3$ w punktach A i B . Napisz równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{5}$, którego cięciwą jest odcinek AB .

3.123. Podaj nierówność opisującą koło o środku $S(x_s, y_s)$ i promieniu r ($r > 0$), jeśli:

- a) $S(1, -3), r = \sqrt{2}$ b) $S(-4, \sqrt{2}), r = \frac{1}{2}$ c) $S(2, -5), r = 6$

3.124. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane nierówności:

- a) $x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}$ b) $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$
 c) $x^2 + (y+3)^2 \leq 4$ d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 \leq 0$

3.125. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:

$$A = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0\}$$

$$B = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0\},$$

a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B, A - B, B - A, A \cap B$.

3.126. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:

$$A = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 \leq 0\}$$

$$B = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 \leq 0\},$$

a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B, A - B, B - A, A \cap B$.

3.127. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) proste $k: 2x - 5y - m - 6 = 0$ i $p: x + y - m + 3 = 0$ przecinają się w punkcie, który należy do okręgu o środku $S(2, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$?

3.128. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) proste $k: x + y - m - 1 = 0$ i $p: 2x + y - 2m = 0$ przecinają się w punkcie, który należy do koła o środku $S(0, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{10}$?

Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu

3.129. Określ wzajemne położenie prostej l i okręgu o , jeśli:

- a) $o: (x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$ $l: y = \frac{3}{4}x + 3$
 b) $o: (x+5)^2 + y^2 = 1$ $l: y = 1$
 c) $o: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 33 = 0$ $l: y = x - 5$
 d) $o: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$ $l: y = x$

3.130. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją) prostej l i okręgu o .

- a) $o: x^2 + y^2 = 9$ $l: y = \frac{1}{3}x - 1$
 b) $o: x^2 + y^2 = 41$ $l: x - y = 1$
 c) $o: x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ $l: x + y = -8$
 d) $o: x^2 + y^2 + 8x + 4y + 19 = 0$ $l: \frac{1}{2}x + y + 2 = 0$

3.131. Prosta o równaniu $x - 2y + 2 = 0$ przecina okrąg $o: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ w punktach A i B .

- a) Wyznacz równanie ogólne symetralnej m cięciwy AB .
 b) Wyznacz współrzędne takiego punktu $M \in m$, dla którego trójkąt ABM jest prostokątny.

3.132. Dany jest okrąg $o: x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej k , która jest styczna do tego okręgu w punkcie:

- a) $A(9, 1)$ b) $B(4, -4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(7, 5)$

3.133. Napisz równanie kierunkowe stycznych do danego okręgu o i równoległych do prostej k , jeśli:

- a) $o: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ $k: y = 2x$
 b) $o: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ $k: y = x$
 c) $o: x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ $k: y = -3x$
 d) $o: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ $k: y = -x$

3.134. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i prostopadłych do prostej k , jeśli:

- a) $o: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ $k: y = x$
 b) $o: (x - 5)^2 + y^2 = 9$ $k: y = -x$
 c) $o: x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ $k: y = -0,5x$
 d) $o: x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ $k: y = -0,75x$

3.135. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α , jeśli:

- a) $x^2 + y^2 = 1$; $\alpha = 60^\circ$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $\alpha = 120^\circ$
 c) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; $\alpha = 150^\circ$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; $\alpha = 135^\circ$

3.136. Napisz równania ogólne stycznych do danego okręgu o i przechodzących przez punkt A , jeśli:

- a) $o: x^2 + y^2 = 4$, $A(6, -2)$ b) $o: x^2 + y^2 = 9$, $A(-5, 3)$
 c) $o: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, $A(-4, 3)$ d) $o: x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$, $A(-2, 2)$
 e) $o: x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$, $A(-7, 9)$ f) $o: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$, $A(5, -1)$

3.137. Sieczna $k: x + y - 1 = 0$ przecięła okrąg $o: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ w punktach A i B . Następnie w punktach A i B poprowadzono styczne do danego okręgu. Wykaż, że styczne te tworzą kąt prosty.

3.138. Sieczna $k: x - y + 1 = 0$ przecina okrąg $o: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ w punktach A i B . Przez punkty A i B poprowadzono styczne do okręgu, które przecinają się w punkcie C . Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

3.139. Oblicz tangens kąta ostrego, jaki tworzą styczne do okręgu $o: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, przechodzące przez punkt $P(2, -1)$.

3.140. Zbadaj liczbę punktów wspólnych okręgu o z prostą l , w zależności od wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), jeśli:

- a) $o: (x+2)^2 + (y+4)^2 = 2$; $l: y = -x + m$ b) $o: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$; $l: y = x + m$
 c) $o: (x-1)^2 + (y-1)^2 = m$; $l: x + y - 1 = 0$ d) $o: x^2 + y^2 = 25$; $l: 4x + 3y - m = 0$

***3.141.** Dane są zbiory: $A = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x + y - 2 \leq 0\}$,
 $B = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m^2 - 1 = 0\}$. Wyznacz te wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których zbiór $A \cap B$ jest jednopunktowy.

***3.142.** Dane są zbiory: $A = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y \geq x - 2\}$,
 $B = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 + 2x - 2ky + k^2 - 1 = 0\}$. Wyznacz te wartości parametru $k \in \mathbb{R}$, dla których zbiór $A \cap B$ jest jednopunktowy.

3.143. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A i stycznego do obu osi układu współrzędnych, jeśli:

- a) $A(2, 0)$ b) $A(0, 3)$ c) $A(2, 1)$ d) $A(1, 2)$

3.144. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(3, -2)$ i stycznego do prostej $k: 3x - 4y - 12 = 0$.

3.145. Wyznacz współrzędne środka okręgu stycznego do prostej $k: \sqrt{3}x - y - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ i jednocześnie stycznego do dodatnich półosi układu współrzędnych.

3.146. Okrąg przechodzi przez punkt $A(4, 1)$, zaś jego środek należy do prostej $k: x - y = 0$. Wiedząc, że okrąg ten jest styczny do prostej $l: y - 5 = 0$, wyznacz jego równanie.

3.147. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, który jest styczny do osi OY i jednocześnie styczny do prostej $k: 3x + 4y - 6 = 0$.

3.148. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(1, 2)$ i stycznego jednocześnie do prostych $k: 2x + y = 0$ i $m: 2x + y - 20 = 0$.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

3.149. Określ wzajemne położenie okręgów danych równaniami:

a) $o_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$; $o_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

b) $o_1: x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$; $o_2: x^2 + (y+2)^2 = 4$

c) $o_1: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$; $o_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$

d) $o_1: (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$; $o_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$

e) $o_1: x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$; $o_2: x^2 + (y-3)^2 = 4$

f) $o_1: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$; $o_2: (x+4)^2 + (y+2)^2 = 5$

3.150. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (o ile istnieją).

W każdym przypadku wykonaj rysunek.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 \end{cases}$$

3.151. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:

$o_1: (x-m)^2 + (y-2m)^2 = 1$ oraz $o_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ są wzajemnie zewnętrzne?

3.152. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:

$o_1: (x-m)^2 + (y+1)^2 = 8$ oraz $o_2: (x+1)^2 + (y-m)^2 = 2$ są zewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności A .

3.153. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:

$o_1: (x-m)^2 + (y+2)^2 = 20$ oraz $o_2: (x+1)^2 + (y-2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności A .

3.154. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:

$o_1: (x+1)^2 + (y-m)^2 = 4$ oraz $o_2: (x+m)^2 + (y-2)^2 = 1$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

3.155 Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:
 $o_1: (x+5)^2 + (y+m)^2 = 16$ oraz $o_2: (x-2m)^2 + (y+m)^2 = 9$ przecinają się w dwóch punktach?

3.156. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) okręgi opisane równaniami:
 $o_1: (x-m)^2 + (y+1)^2 = 1$ oraz $o_2: (x+2)^2 + (y-m+3)^2 = 25$ są rozłączne wewnętrznie?

3.157. Wykaż, że obrazem okręgu $o: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = (1 + 3x, -3y - 2)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.158. Wykaż, że obrazem okręgu $o: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = \left(\frac{1}{2}y + 1, 2 - \frac{1}{2}x\right)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.159 Wyznacz równanie prostej k , względem której okręgi
 $o_1: x^2 + y^2 + 4x + 8y + 19 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$ są wzajemnie symetryczne.

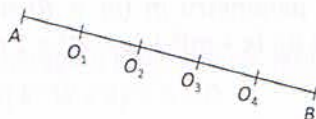
3.160. Wyznacz równanie okręgu o najmniejszym promieniu, stycznego zewnętrznie do okręgu $o: (x+3)^2 + y^2 = 25$ i jednocześnie stycznego do prostej $k: 4x + 3y - 38 = 0$.

***3.161.** Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów zewnętrznie stycznych do okręgu $o: x^2 + y^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej $k: y + 2 = 0$.

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

3.162. Dany jest odcinek AB . Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 dzielą ten odcinek na pięć równych części (patrz rysunek poniżej). Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

- a) $J_{O_1}^{-4}(A) = B$ b) $J_{O_2}^{\frac{2}{3}}(B) = A$
 c) $J_{O_3}^{\frac{3}{2}}(A) = B$ d) $J_{O_4}^{-0,25}(B) = A$



3.163. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty S oraz X . Następnie wyznacz obraz punktu X w jednokładności o środku w punkcie S i skali k , jeśli:

a) $k = 2$

b) $k = -1$

c) $k = -\frac{1}{3}$

d) $k = \frac{m}{n}$, gdzie m i n oznaczają długości dwóch odcinków oraz $m > n > 0$.

3.164. Na płaszczyźnie zaznacz dowolne dwa różne punkty X oraz X_1 . Następnie wyznacz środek S jednokładności J , wiedząc, że $X_1 = J_S^k(X)$, gdzie:

a) $k = -3$

b) $k = -0,75$

c) $k = -0,5$

d) $k = 2$

3.165. Narysuj dwa okręgi $o_1(A_1; 1,5 \text{ cm})$ i $o_2(A_2; 3 \text{ cm})$ tak, aby $|A_1A_2| = 6 \text{ cm}$. Znajdź środek S takiej jednokładności, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2 (pamiętaj, że istnieją dwa rozwiązania). Wyznacz odległość punktu S od środków okręgów.

3.166. Wyznacz współrzędne punktu A_1 , który jest obrazem punktu A w jednokładności J o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali k , jeśli:

a) $A(-2, 4), k = 0,5$

b) $A(-9, 12), k = -\frac{1}{3}$

c) $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{15}\right), k = 15$

d) $A(\sqrt{2}, 16\sqrt{2}), k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.167. Wyznacz współrzędne punktu B_1 , który jest obrazem punktu B w jednokładności J o środku w punkcie $S(-4, 5)$ i skali k , jeśli:

a) $B(-10, -8), k = \frac{2}{3}$

b) $B(5, 7), k = -2$

c) $B(1, 20), k = 6$

d) $B(-4, 9), k = -\frac{1}{2}$

3.168. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k . Wyznacz współrzędne środka E odcinka A_1B_1 , jeśli:

a) $A(-20, 6), B(10, 4), k = 3$

b) $A(13, -1), B(5, 7), k = -2$

c) $A(-8, -27), B(-12, -13), k = 0,1$

d) $A(27, 108), B(-2, -3), k = -0,2$

3.169. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności J o środku w punkcie $S(-2, -1)$ i skali k . Wyznacz współrzędne końców odcinka A_1B_1 , jeśli:

a) $A(10, -6), B(-1, 4), k = -5$

b) $A(0, 6), B(-4, 0), k = 3$

c) $A(-8, 4), B(0, 0), k = 0,5$

d) $A(3, 8), B(-5, 13), k = -0,3$

3.170. Dane są punkty $A(3, 2)$ i $A_1(-3, 5)$. Wiadomo, że $A_1 = J_5^k(A)$. Wyznacz współrzędne środka S tej jednokładności, jeśli skala k jest równa:

- a) -2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{1}{4}$

3.171. Punkty A i A_1 są jednokładne, przy czym środkiem jednokładności jest punkt $O(0, 0)$. Oblicz skalę k tej jednokładności, jeśli:

- a) $A(-3, 1), A_1(6, -2)$ b) $A(5, 5), A_1(-1, -1)$
c) $A(-2, 0), A_1(5, 0)$ d) $A(0, 3), A_1(0, -3)$

3.172. Sprawdź, czy odcinki AB i CD są jednokładne, jeśli:

- a) $A(2, -3), B(5, 6), C(0, -1), D(1, 2)$ b) $A(-2, -1), B(4, 2), C(2, 1), D(10, 5)$

W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznacz środek S i skalę jednokładności, w której obrazem odcinka AB jest odcinek CD .

3.173. Dany jest trójkąt ABC , w którym $A(-5, -5), B(2, -3), C(-4, -1)$. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności J o środku $S(2, 0)$ i skali k , gdzie $k < 0$. Wiedząc, że środkowa trójkąta $A_1B_1C_1$ poprowadzona na bok B_1C_1 ma długość 10, oblicz:

- a) skalę tej jednokładności
b) współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$
c) pole trójkąta $A_1B_1C_1$.

3.174. Dana jest prosta m o równaniu $y = 2x - 3$ oraz punkt $O(0, 0)$. Wyznacz równanie prostej, która jest obrazem prostej m w jednokładności J_O^k , jeśli:

- a) $k = -3$ b) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{3}$ d) $k = -\frac{1}{2}$

***3.175.** Prosta k przechodząca przez punkt $P(2, 6)$ ogranicza wraz z dodatnimi półosią układu współrzędnych trójkąt o polu 25.

- a) Wyznacz równanie prostej k .
b) Wyznacz równanie prostej m , która jest obrazem prostej k w jednokładności o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali $s = 1\frac{1}{2}$.
c) Oblicz pole trapezu ograniczonego przez proste k i m oraz osie układu współrzędnych.

3.176. Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J , która okrąg $o_1: x^2 + y^2 + 10x - 10y + 41 = 0$ przekształca na okrąg $o_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

3.177 Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J , która okrąg $o_1: x^2 + y^2 + 12x + 2y + 36 = 0$ przekształca na okrąg $o_2: x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$.

3.178. Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k . Wyznacz wzór funkcji g , jeśli:

a) $f(x) = -2x^2, k = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2, k = 3$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x}, k = -1$

d) $f(x) = \frac{x}{x+1}, k = \frac{1}{2}$

Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

3.179. Wyznacz współrzędne takiego punktu A , że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest równoległa do prostej k , jeśli:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1, k: 5x - y - 2 = 0$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}, k: x - 5y + 5 = 0$

c) $f(x) = -\frac{3}{x^4}, k: 12x - y - 8 = 0$ d) $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}, k: 4x - 3y - 21 = 0$

3.180. Wyznacz współrzędne takiego punktu A , że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest prostopadła do prostej k , jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2, k: x - 5y - 10 = 0$ b) $f(x) = \frac{3-x}{1-x}, k: 2x + y - 5 = 0$

c) $f(x) = \frac{-2}{x^5}, k: x + 10y = 0$ d) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{4x + 2}, k: 2x + 3y - 3 = 0$

3.181. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$, poprowadzona w

punkcie P o odciętej 2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.

3.182. Wykaż, że styczna do hiperboli o równaniu $y = \frac{2x-1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, poprowadzona w punkcie P o odciętej -2 , ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $20\frac{1}{6}$.

3.183. Oblicz pole trójkąta ograniczonego dodatnimi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$.

3.184. Oblicz pole trójkąta ograniczonego ujemnymi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$, która jest równoległa do prostej o równaniu $4x + y - 11 = 0$.

3.185. Do paraboli o równaniu $y = x^2$ poprowadzono styczną w punkcie o odciętej ujemnej, która wraz z osiami układu współrzędnych ograniczyła trójkąt o polu równym 16. Wyznacz równanie tej stycznej.

3.186. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = -x^3$ należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe 54?

3.187. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$, należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe $1\frac{1}{8}$?

3.188. Na paraboli o równaniu $y = -x^2 + 2x$ wyznacz taki punkt P , aby styczna do tej paraboli poprowadzona w punkcie P ograniczała, wraz z prostymi o równaniach: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, trapez o najmniejszym polu.

3.189. Wyznacz wymiary prostokąta o maksymalnym polu powierzchni, którego dwa wierzchołki należą do osi OX , a dwa pozostałe, o rzędnych dodatnich, należą do paraboli o równaniu $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$.

3.190. Prosta $k: y = ax + b$, gdzie $a > 0$, przechodząca przez punkt $P(-1, 2)$, odcina na osiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

3.191. Na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$ wyznacz taki punkt P , którego odległość od punktu $A(4, 1)$ jest najmniejsza.

3.192. Na gałęzi hiperboli o równaniu $y = \frac{8}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, wyznacz taki punkt P , którego odległość od punktu $A(2, -2)$ jest najmniejsza.

3.193. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi OY , których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = -\sqrt{x}$, zaś drugi koniec na wykresie funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$. Wykaż, że najkrótszy z tych odcinków ma długość $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

3.194. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x \neq 0$, obrano punkty $A(2, 3)$ i $B(6, 1)$. Wyznacz na tej hiperboli taki punkt C o ujemnej odciętej, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Trójkąt ABC jest równoboczny, w którym $A(-4, 5)$. Punkt $D(-7, 1)$ jest środkiem boku BC . Zatem obwód trójkąta ABC jest równy:

- A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$.

2. Wektory $\vec{u} = [3 + a, a]$ i $\vec{v} = [b + 1, b]$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $a = 0$ i $b = 0$ B. $a + 3 = b$ C. $a = 3b$ D. $3b + a = 0$.

3. Pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A(-5, -2)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 8)$, $D(-6, 3)$, jest równe:

- A. 54 B. 53 C. D. 51.

4. W trójkącie ABC dane są: $\vec{AB} = [1, 3]$ i $\vec{CA} = [-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Wówczas:

- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 135^\circ$.

5. Odległość punktu $K(-3, 2)$ od prostej $k: y = \frac{4}{3}x - 10\frac{2}{3}$ jest:

- A. liczbą niewymierną B. kwadratem liczby naturalnej
C. liczbą podzielną przez 3 D. iloczynem dwóch liczb pierwszych.

6. Wektor $\vec{u} = [-2, 7]$ jest prostopadły do prostej k . Punkt $A(3, 8)$ należy do prostej k . Zatem:

- A. $k: 2x - 7y + 50 = 0$ B. $k: 2x + 7y - 62 = 0$
C. $k: 7x + 2y - 37 = 0$ D. $k: 7x - 2y - 5 = 0$.

7. Okręgi o równaniach $\sigma_1: x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ i $\sigma_2: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$:

- A. są styczne zewnętrznie B. przecinają się
C. są rozłączne zewnętrznie D. są rozłączne wewnętrznie.

8. Obrazem punktu $P(4, -8)$ w jednokładności o środku $S(-3, -2)$ jest punkt

$P_1\left(-5\frac{1}{3}, 0\right)$. Zatem skala tej jednokładności jest równa:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{2}{3}$.

9. Styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 8$ poprowadzona w punkcie o odciętej -2 jest równoległa do prostej o równaniu:

- A. $3x + 3y + 19 = 0$ B. $2x - 2y + 15 = 0$ C. $x + 2y = 0$ D. $2y - x + 7 = 0$.

10. Kąt ostry utworzony przez proste o równaniach

$k: 3x - 7y - 875 = 0$ i $l: 5x + 7y - 350 = 0$ ma miarę α taką, że:

- A. $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ B. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ C. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ D. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ może mieć równanie:

- A. $x = 5$ B. $2x + y - 5 = 0$ C. $y = -5$ D. $2x + y = \sqrt{5}$.

12. Dwa boki trójkąta ABC zawierają się w prostych: $k: 4x - 3y = 0$ i $l: 5x - 12y = 0$. Dwusieczna kąta trójkąta przy wierzchołku $A(0, 0)$ może mieć równanie:

- A. $y = x$ B. $y = \frac{5}{6}x$ C. $y = \frac{3}{4}x$ D. $y = \frac{7}{9}x$.

13. Symetralna odcinka PR , gdzie $P(4, 7)$ i $R(-2, 10)$, zawiera się w prostej, której współczynnik kątowy jest równy:

- A. $-0,5$ B. $0,5$ C. 2 D. -2 .

14. Punkt K jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , gdzie $A(1, -9)$, $B(7, 6)$, $C(-2, 12)$. Zatem wektor $\overrightarrow{CK}$ ma współrzędne:

- A. $[4, -9]$ B. $[-9, 4]$ C. $[4, 9]$ D. $[-4, -9]$.

15. Najdłuższy bok AB trójkąta ABC ma długość $\sqrt{218}$ oraz $\overrightarrow{CB} = [10, -10]$ i $\overrightarrow{CA} = [-3, -3]$. Wobec tego pole koła opisanego na trójkącie ABC wynosi:

- A. $54,5\pi$ B. 109π C. $\frac{218\pi}{3}$ D. 54π .

16. Promień okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2ax - 4by + 2ab + 3b^2 = 0$, gdzie $a \neq b$, ma długość:

- A. $a + b$ B. $a - b$ C. $|a + b|$ D. $|b - a|$.

17. Obrazem prostej $k: 2x - y - 3 = 0$ w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $k = -0,75$ jest prosta o równaniu:

- A. $8x - 4y + 9 = 0$ B. $y = 2x - 0,75$ C. $y = 2x + \frac{3}{4}$ D. $8x - 4y - 9 = 0$.

18. Dany jest punkt $E(0, 2)$ i prosta $p: y = -4$. Wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu E jest równa odległości od prostej p , należą do paraboli o równaniu:

- A. $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ B. $y = \frac{2}{15}x^2 - 1$ C. $y = \frac{1}{12}x^2 - 1$ D. $y = \frac{1}{8}x^2 - 1$.

19. Odległość między punktami $A(1 - m, 2)$, $B(3, m + 1)$ jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$.

20. Obrazem okręgu $o: (x - 2)^2 + y^2 = 3$, w przekształceniu P określonym wzorem $P(x, y) = (2x - 1, 4 - 2y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest okrąg o środku S i promieniu r . Zatem:

- A. $S(3, 4), r = 12$ B. $S(2, 0), r = 2\sqrt{3}$ C. $S(3, 4), r = \sqrt{6}$ D. $S(3, 4), r = 2\sqrt{3}$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

3.195. W trójkącie ABC dwie wysokości zawierają się w prostych $k: x + y - 4 = 0$ oraz $l: 2x - y = 0$. Wyznacz równania ogólnie prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta, wiedząc, że $A(0, 2)$.

3.196. Punkt $A(-4, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC , którego dwie środkowe zawierają się w prostych o równaniach: $x = 0$ oraz $x + y - 2 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

3.197. Punkty $A(2, 3)$ i $B(4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

3.198. W okrąg o środku $S(6, 4)$ wpisano trójkąt równoboczny ABC , którego jednym z wierzchołków jest punkt $A(2, 6)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

3.199. W trójkącie ABC współrzędne wierzchołków wynoszą: $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$.

- Oblicz pole trójkąta ABC .
- Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na bok BC .
- Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

3.200. W rombie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $S(2, -1)$. Dwa kolejne wierzchołki rombu mają współrzędne $A(m, -3)$ oraz $B(m + 6, m - 5)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz:

- współrzędne wierzchołków rombu
- pole rombu
- cosinus kąta rozwartego rombu
- równanie okręgu wpisanego w romb $ABCD$.

3.201. Dane są punkty $A(3, 0)$ i $B(-3, 0)$. Wyznacz równanie linii utworzonej przez te wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu A jest 2 razy większa od odległości od punktu B . Jaką figurę geometryczną opisuje ta linia?

3.202. Wykres funkcji $y = |x - 2|$ przecina okrąg $o: x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach A i B .

- Oblicz współrzędne punktów A i B .
- Wykaż, że trójkąt ABS , gdzie S jest środkiem danego okręgu, jest prostokątny.
- Oblicz pole figury $F = F_1 \cap F_2$, jeśli $F_1 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0\}$, $F_2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y \leq |x - 2|\}$.

3.203. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których prosta o równaniu $y = (m - 1)x + m + 2$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku $S(1, 2)$ i promieniu $r = 1$.

3.204. Pod jakim kątem widać okrąg $o: x^2 + y^2 - 8y + 11 = 0$ z punktu $P(1, 1)$?

3.205. Styczne do okręgu $o: x^2 + (y + 2)^2 = 3,2$ poprowadzone przez punkt $A(-2, 1)$ przecinają oś rzędnych w punktach B i C .

- Wyznacz równania tych stycznych.
- Oblicz, z dokładnością do 1° , miarę kąta ostrego, jaki wyznaczają te styczne.
- Oblicz współrzędne punktów B i C .
- Oblicz pole trójkąta ABC .

3.206. W zbiorze wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i stycznych jednocześnie do prostej $k: 3x - 4y - 50 = 0$ istnieje okrąg o najmniejszym promieniu. Wyznacz jego równanie.

3.207. Wyznacz współrzędne punktu P równoodległego od punktów $A(-9, 2)$ i $B(3, 8)$ oraz od prostej $k: 2x - y - 4 = 0$.

3.208. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(3, 1)$, który odcina na prostej

$k: x - 7y + 29 = 0$ cięciwę o długości $5\sqrt{2}$.

***3.209.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(0, -1)$, który jest jednocześnie styczny do prostych $k: y = 0$ oraz $l: 4x - 3y + 22 = 0$.

***3.210.** Napisz równanie okręgu o promieniu $2\sqrt{17}$, który odcina na osi OX cięciwę o długości 16, wiedząc, że do tego okręgu należy punkt $A(-3, 4)$.

3.211. Dane są odcinki AB oraz CD , gdzie $A(3, 1)$, $B(1, 3)$, $C(6, 3)$, $D(3, 6)$. Wyznacz taką jednokładność J_S^k , aby $J_S^k(AB) = CD$.

3.212. Prosta k o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a \in (0, 1)$, przechodząca przez punkt $P(-3, 2)$ przecina dodatnią półoś osi OY w punkcie A i ujemną półoś osi OX w punkcie B . Pole trójkąta OAB , gdzie $O(0, 0)$ jest równe 12,5.

- Wyznacz równanie kierunkowe prostej k .
- Prosta m , która jest obrazem prostej k w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $k = 6$, przecina oś OY w punkcie D , zaś oś OX w punkcie C . Oblicz pole trapezu $ADCB$.

3.213. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2-x}{x+4}$ poprowadzono w punkcie A styczną, która jest prostopadła do prostej $l: 6x - y + 4 = 0$. Wyznacz współrzędne punktu A.

3.214. Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$ poprowadzono w punkcie A styczną, która jest równoległa do prostej $k: 2x + y + 7 = 0$. Napisz równanie kierunkowe prostej l , która jest prostopadła do tej stycznej i przechodzi przez punkt A.

3.215. Na paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{4}x^2$ wyznacz taki punkt P , którego odległość od punktu $A(12, 0)$ jest najmniejsza.

3.216. Na gałęzi hiperboli o równaniu $y = \frac{2}{x}$, gdzie $x \in (-\infty, 0)$, wyznacz taki punkt P , którego odległość od punktu $A(1, -1)$ jest najmniejsza.

3.217. Na wykresie funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{2}x^3$ wyznacz taki punkt P o odciętej dodatniej, którego odległość od punktu $A\left(4, -1\frac{1}{2}\right)$ jest najmniejsza.

3.218. Wśród prostokątów, których dwa wierzchołki należą do paraboli o równaniu $y = (x+3)^2$, zaś dwa pozostałe na prostej $k: y = 4$, znajduje się taki, którego pole jest największe. Oblicz współrzędne wierzchołków tego prostokąta i jego pole.

***3.219.** Do paraboli o równaniu $y = -x^2 - 9$ poprowadzono styczne k i l , które przecinają się w punkcie $A(4, 0)$. Wyznacz:

- równania stycznych k i l
- pole trójkąta ABC , gdzie punkty B i C są punktami styczności prostych k i l i paraboli.

***3.220.** Styczna do wykresu funkcji $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przechodząca przez początek układu współrzędnych ma z parabolą o równaniu $y = 3x^2 + 12x - 12$ dwa punkty wspólne A i B . Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania

4.1. Na ile sposobów możemy utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli mamy do dyspozycji cztery dziewczynki: Agatkę, Beatkę, Celinę i Dorotkę oraz trzech chłopców: Edwina, Franka i Grzeška.

Wypisz wszystkie możliwe pary w tabeli.

4.2. Poniższa tabela przedstawia wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe utworzone w taki sposób, że cyfra dziesiątek jest cyfrą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a cyfra jedności – ze zbioru $\{6, 7, 8, 9\}$. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

c. dz. \ c. j.	6	7	8	9
1	16	17	18	19
2	26	27	28	29
3	36	37	38	39
4	46	47	48	49

4.3. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 2, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

4.4. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest równa 1, 2 lub 3; cyfra dziesiątek jest liczbą podzielną przez 5, a cyfra jedności jest większa od 6? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

4.5. Z cyfr ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, przy czym cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile spośród utworzonych liczb ma cyfrę dziesiątek mniejszą od cyfry jedności?

4.6. Z cyfr ze zbioru $B = \{6, 7, 8, 9\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, w których cyfry nie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 4?

4.7. Z cyfr ze zbioru $X = \{0, 1, 2, 3\}$ tworzymy wszystkie liczby trzycyfrowe, przy czym cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają utworzone liczby trzycyfrowe. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 3?

4.8. Pan Marek ma 3 marynarki, 4 krawaty i 5 koszul. Ile różnych zestawów (koszula, marynarka, krawat) może założyć do pracy?

4.9. Ile jest różnych punktów o współrzędnych całkowitych (x, y) , takich, że $x \in (4, 20)$, $y \in (0, 100)$?

4.10. Restauracja „Międzynarodowa” serwuje 12 dań kuchni polskiej, 10 dań kuchni węgierskiej i 8 dań kuchni czeskiej. Na ile sposobów można w tej restauracji wybrać dwa różne dania, z których:

- a) jedno należy do kuchni polskiej, a drugie nie należy do kuchni polskiej
- b) co najmniej jedno należy do kuchni polskiej?

4.11. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczba a jest elementem zbioru X i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru Z lub liczba a jest elementem zbioru Y i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru X ?

4.12. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczby a, b należą do zbioru X oraz:

- a) liczba a jest mniejsza od 3 lub liczba b jest większa od 7;
- b) liczba a jest większa od b lub liczba b jest większa od liczby a ;
- c) liczba a jest nie mniejsza niż 4 i jednocześnie liczba b jest podzielna przez 3 lub przez 5;
- d) liczba a jest liczbą pierwszą lub liczba b jest nie większa niż 6?

4.13. Pewna dama ma 14 różnych torebek, oraz 16 różnych par pantofelków w różnych kolorach – według tabeli umieszczonej poniżej.

	Kolor czarny	Kolor brązowy	Kolor czerwony	Kolor beżowy
Torebki	5	4	2	3
Pantofelki	6	3	2	5

Na ile sposobów owa dama może skompletować parę torebka – pantofelki:

- a) w jednym kolorze
- b) w dwóch różnych kolorach – w brązie i w beżu?

4.14. Grupa pięciolatek z przedszkola z okazji Dnia Matki zaprosiła swoje mamy na przedstawienie, w których wystąpią jako skrzaty, mające czapki w trzech kolorach: czerwonym, niebieskim i zielonym. Liczbę osób mających czapkę w danym kolorze przedstawia tabela poniżej.

	Czapka czerwona	Czapka niebieska	Czapka zielona
Dziewczynki	7	4	2
Chłopcy	3	6	3

Ile jest możliwości wyboru pary – dziewczynka, chłopiec, w której:

- a) obie osoby mają czapkę w takim samym kolorze
- b) co najmniej jedna osoba ma czerwoną czapkę?

Wariacje

4.15. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

4.16. Ile różnych pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C?

4.17. Oblicz, ile jest różnych czterocyfrowych:

- a) liczb
 - b) kodów PIN,
- w których cyfry mogą się powtarzać.

4.18. Na ile sposobów można wrzucić 5 kul ponumerowanych do 6 różnych szuflad, jeżeli

- a) kule wrzucamy dowolnie
- b) każda kula ma trafić do innej szuflady?

4.19. Na ile sposobów sekretarka może wrzucić do trzech różnych szuflad 4 listy zaadresowane do różnych osób?

4.20. Numer karty płatniczej MasterCard składa się z 16 cyfr. Pierwszą cyfrą jest 5, drugą – jedna z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Zakładamy, że pozostałe cyfry mogą być dowolne. Ile jest numerów kart płatniczych MasterCard?

4.21. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra 3 występuje tylko raz?

4.22. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których:

- a) co najmniej jedna cyfra jest parzysta
- b) co najmniej jedna cyfra jest nieparzysta?

4.23. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których zapisie występuje:

- a) cyfra 1 i cyfra 7 b) cyfra 1 lub cyfra 7?

4.24. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 0 występuje:

- a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

4.25. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 1 występuje:

- a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

4.26. Każdej z pięciu osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:

- a) każda z tych osób mogła urodzić się w dowolnym dniu tygodnia
b) każda z tych osób urodziła się w innym dniu tygodnia?

4.27. Każdemu spośród czterech uczniów przyporządkowujemy ocenę roczną z matematyki. Ile jest możliwych wyników tego przyporządkowania, jeżeli:

- a) każdy z uczniów będzie miał inną ocenę
b) każdy z uczniów może uzyskać dowolną ocenę?

4.28. Na peronie czekają na pociąg cztery osoby. Podjeżdża skład złożony z siedmiu wagonów. Na ile sposobów czekające osoby mogą wsiąść do pociągu, jeśli:

- a) każda z nich ma wsiąść do innego wagonu
b) każda z nich wybiera wagon dowolnie?

4.29. Ile sześcioliterowych napisów można utworzyć, posługując się literami należącymi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, jeśli:

- a) litery mogą się powtarzać
b) litery nie mogą się powtarzać?

4.30. Pewna firma chce drukować ulotki, w których jedna strona ma mieć dwukolorowe tło (górna połowa ma mieć inny kolor niż dolna połowa). Ile jest wzorów takich ulotek, jeśli firma ma do dyspozycji 7 kolorów?

4.31. Przedsiębiorca chce produkować chorągiewki składające się z trzech poziomych pasów równej szerokości, każdy w innym kolorze. Ile rodzajów takich chorągiewek może produkować, jeśli ma do dyspozycji 8 kolorów?

4.32. Ile jest różnych czterocyfrowych:

- a) liczb b) kodów PIN,
w których cyfry nie mogą się powtarzać?

4.33. Ile różnych liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

4.34. Ile różnych liczb pięciocyfrowych parzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

4.35. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru {4, 5, 6, 7, 8, 9} i jednocześnie większych od 666?

4.36. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} i jednocześnie mniejszych od 444?

4.37. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} i jednocześnie mniejszych od 780?

4.38. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:

- a) nieparzystych b) parzystych?

4.39. Ile jest telefonicznych numerów, które składają się z 8 cyfr takich, że:

- a) pierwszą cyfrą jest 4, a pozostałe cyfry są różne od 4 i różne między sobą
b) dwie początkowe cyfry są równe 5, a ostatnią cyfrą jest 1
c) pierwsza cyfra jest parzysta różna od zera, a pozostałe cyfry są liczbami nieparzystymi
d) cyfra 7 występuje tylko raz, początkowa cyfra jest pierwsza i wszystkie cyfry są różne?

4.40. Ile jest telefonicznych numerów komórkowych, składających się z dziewięciu cyfr takich, że:

- a) pierwszą cyfrą jest 5 lub 6, trzecią cyfrą jest 0, a pozostałe cyfry nie są ani piątką, ani szóstką, ani zerem
b) każda cyfra jest inna i na pierwszym miejscu nie występuje 0
c) każda kolejna cyfra tego numeru jest liczbą o 1 mniejszą od poprzedniej
d) pierwsza, trzecia, piąta, siódma i dziewiąta cyfra jest taka sama i jest liczbą nieparzystą, zaś pozostałe cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

4.41. Ile różnych liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 można utworzyć z cyfr:

- a) 1, 2, 4, 5, 7, 8 b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

4.42. Ile różnych liczb dwucyfrowych:

- a) parzystych b) podzielnych przez 4

można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

4.43. Ile różnych liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 można utworzyć z cyfr $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

4.44. Ile jest różnych liczb dwucyfrowych:

- a) podzielnych przez 2 lub przez 3
- b) podzielnych przez 4 lub 7
- c) większych od 40 lub podzielnych przez 8
- d) podzielnych przez 2 lub 5 i niepodzielnych przez 6?

4.45. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez:

- a) 25
- b) 4?

4.46. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie

- a) podzielnych przez 25
- b) większych od 5238?

4.47. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie

- a) podzielnych przez 4
- b) większych od 60 000?

Permutacje

4.48. Oblicz:

- a) $4! - 2! \cdot 3!$
- b) $5! - 2! \cdot 4!$
- c) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$
- d) $\frac{12!}{10! \cdot 4!}$
- e) $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$
- f) $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$

4.49. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, wiedząc, że $n \in \mathbf{N}$:

- a) $(n+2)(n+1)n!$
- b) $(2n+1)(2n)!$
- c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$
- d) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$
- e) $\frac{(n+3)!(3n)!}{(3n+1)!(n+2)!}$
- f) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}, n > 2$

4.50. Na ile sposobów można ustawić 3 osoby w szeregu?

4.51. W biegu finałowym uczestniczy 8 sprinterów. Na ile sposobów mogą oni zająć kolejne miejsca, jeśli założymy, że wszyscy ukończą bieg?

4.52. W zespole tanecznym jest 7 dziewcząt i 7 chłopców. Każda dziewczynka ma tańczyć z chłopcem. Ile jest różnych możliwości utworzenia 7 par tanecznych?

4.53. Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 4 chłopców i 3 dziewcząt, tak aby osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

4.54. Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 5 chłopców i 5 dziewcząt, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

4.55. W liceum uczą się po 4 klasy pierwsze, drugie i trzecie. Na ile sposobów można położyć na biurku jeden na drugim dzienniki lekcyjne tych klas, jeśli:

- a) na samym spodzie mają leżeć wszystkie dzienniki klas pierwszych
- b) na samej górze leżą dzienniki klas „A”, niżej dzienniki klas „B”, jeszcze niżej dzienniki klas „C” i najniżej dzienniki klas „D”?

4.56. Mamy 5 książek, w tym książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce, jedna obok drugiej. Na ile sposobów można ustawić je tak, aby:

- a) książki A i B nie stały obok siebie
- b) pomiędzy książkami A i B stały dwie inne książki?

4.57. Sześć osób, które oznaczmy literami A, B, C, D, E, F, ma zająć sześć sąsiednich miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą one usiąść, tak aby:

- a) osoby D, E siedziały obok siebie w podanym porządku
- b) osoby A, B, C, D siedziały obok siebie w podanym porządku
- c) osoby A, B, C siedziały obok siebie w dowolnym porządku
- d) między osobami A i B siedziały dwie osoby?

4.58. Na ile sposobów można ustawić w szereg 8 osób tak, aby:

- a) osoby A, B, C zajmowały odpowiednio pierwsze, drugie i trzecie miejsce w tym szeregu
- b) osoby A i B stały obok siebie oraz pomiędzy tą parą osób a osobą C stały dwie inne osoby
- c) osoby A i B nie stały obok siebie
- d) osoba A stała pierwsza w szeregu, a w dalszej części szeregu osoba B stała bliżej A niż osoba C?

4.59. Przy okrągłym stole ustawiono 6 jednakowych krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 6 osób, tak aby:

- a) osoby A i B siedziały obok siebie
- b) osoby A i B usiadły naprzeciwko siebie
- c) między osobami A i B siedziała tylko osoba C
- d) osoby A i B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C i D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeżeli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów.

4.60. Przy okrągłym stole ustawiono 12 krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 12 osób, tak aby:

- osoby A, B usiadły obok siebie
- osoby A, B usiadły naprzeciwko siebie
- między osobami A, B siedziały tylko dwie osoby
- osoby A, B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C, D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeśli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów.

Kombinacje

4.61. Oblicz:

a) $\binom{10}{3}$

b) $\binom{8}{4}$

c) $\binom{7}{3} - \binom{5}{2}$

d) $\binom{8}{2} - \binom{6}{4}$

e) $\frac{\binom{12}{3}}{\binom{14}{5}}$

f) $\frac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$

4.62. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci, wiedząc, że $n \in \mathbb{N}$:

a) $\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}}$

b) $\frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}}$

4.63. Wyznacz n , wiedząc, że $n \in \mathbb{N}_+$:

a) $n + \binom{n}{2} = 15$

b) $\binom{n}{n-1} + \binom{2n}{2n-2} = 18$

4.64. Wypisz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{a, b, c, d\}$ i porównaj liczbę tych podzbiorów z liczbą $\binom{4}{2}$.

4.65. Oblicz, ile jest trójelementowych podzbiorów zbioru sześcieelementowego.

4.66. Pewien niepusty zbiór ma 211, co najwyżej dwuelementowych, podzbiorów. Ile elementów ma ten zbiór?

4.67. Oblicz, na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację z grupy 7 osób.

4.68. Na płaszczyźnie zaznaczono n ($n > 2$) punktów, z których dowolne trzy nie były współliniowe. Punkty te wyznaczyły 36 prostych. Oblicz n .

4.69. Na egzaminie było n tematów ($n \geq 2$), z których student losował dwa. Oblicz n , wiedząc, że student miał 190 możliwości wylosowania zestawu tematów.

4.70. W turnieju szachowym każdy z zawodników rozegrał z każdym dwie partie. Ilu było zawodników, jeśli rozegrano w sumie 42 partie?

4.71. W turnieju szachowym startowało 10 zawodników. W pierwszej fazie każdy z zawodników rozegrał po dwie partie z każdym z pozostałych, po czym pewna liczba zawodników musiała wyjechać na zgrupowanie kadry i w drugiej fazie każdy z pozostałych rozegrał z każdym po jednej partii. Ilu uczestników wyjechało na zgrupowanie kadry, jeśli w obu fazach turnieju rozegrano łącznie 111 partii?

4.72. Z grupy 3 kobiet i 4 mężczyzn wybieramy trzy osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób:

- a) były same kobiety
- b) byli sami mężczyźni
- c) były dwie kobiety i jeden mężczyzna?

4.73. W pudełku znajdują się cztery ponumerowane kule: 2 białe i 2 czarne. Na ile sposobów można wybrać 2 kule, wśród których co najwyżej jedna będzie czarna?

a) Wypisz wszystkie możliwości.

b) Dlaczego liczby sposobów w punkcie a) nie można obliczyć w następujący spo-

sób: wybieramy jedną kulę białą na $\binom{2}{1}$ sposoby i drugą kulę jakąkolwiek z po-

zostałych kul na $\binom{3}{1}$ sposoby, czyli razem mamy $2 \cdot 3 = 6$ sposobów?

4.74. W klasie jest 15 dziewcząt i 16 chłopców. Spośród uczniów tej klasy trzeba wybrać czteroosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić, tak aby w delegacji znalazły się:

- a) tylko dwie dziewczynki
- b) co najmniej dwie dziewczynki
- c) co najwyżej dwie dziewczynki?

4.75. W grupie 20 osób jest 12 kobiet. Ile jest sposobów wybrania pięcioosobowej delegacji z tej grupy, tak aby:

- a) znalazły się tam co najwyżej dwie kobiety
- b) znalazła się tam co najmniej jedna kobieta
- c) znalazły się tam co najmniej dwie i nie więcej niż cztery kobiety?

4.76. W klasie jest 8 chłopców i 9 dziewcząt. Wybieramy cztery osoby. Ile jest możliwych sposobów wyboru tych czterech osób, tak by wśród nich:

- a) byli sami chłopcy
- b) połowę stanowiły dziewczęta
- c) były trzy dziewczynki i jeden chłopiec
- d) był co najmniej jeden chłopiec?

4.77. W urnie jest 7 kul białych, 2 czarne i 1 zielona. Ile jest możliwych sposobów wyboru dwóch kul z tej urny, tak by:

- a) kule były różnych kolorów
- b) obie kule były białe
- c) kule były tego samego koloru
- d) przynajmniej jedna z kul była biała?

4.78. W urnie jest 5 kul białych, 4 czarne i 6 zielonych. Losujemy trzy kule. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli:

- a) każda z wylosowanych kul musi być innego koloru
- b) wszystkie trzy kule mają być tego samego koloru
- c) wśród trzech kul dwie muszą być tego samego koloru?

4.79. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród tych czterech kart mają być:

- a) dwie damy i dwa asy
- b) trzy karty młodsze od dziewiątki i jeden król
- c) trzy figury (figury to: as, dama, król i walet) i jedna karta nie będąca figurą?

4.80. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród nich mają być:

- a) trzy kiery
- b) co najwyżej trzy kiery
- c) dwa kiery, jeden pik i jeden trefl?

4.81. Każdemu z czterech graczy należy przydzielić 13 kart z talii 52-kartowej. Na ile sposobów można to zrobić, tak aby gracze A i B otrzymali po dwa asy, a gracze C i D po dwie damy?

4.82. Grupę 12 drużyn sportowych, wśród których są drużyny A, B, C, dzielimy na trzy równe podgrupy w taki sposób, że każda z drużyn A, B, C znajduje się w innej podgrupie. Ile jest sposobów takiego podziału?

Kombinatoryka – zadania różne

4.83. W liceum odbywają się zajęcia SKS z siatkówki i koszykówki. W pewnej grupie chłopców tej szkoły dwunastu chodzi na koszykówkę, piętnastu na siatkówkę, a tylko pięciu na obydwa zajęcia SKS. Ilu co najmniej chłopców liczy ta grupa?

4.84. W liceum 25 dziewcząt z klas drugich uczęszcza na zajęcia SKS: siatkówki lub piłki ręcznej. Wiadomo, że siatkówkę trenuje 16 dziewcząt. Ile dziewcząt trenuje obydwie dyscypliny, jeśli wiadomo, że liczba dziewcząt trenujących tylko piłkę ręczną jest równa liczbie dziewcząt trenujących tylko siatkówkę i jest ona najmniejsza z możliwych?

4.85. W grupie 27 osób przeprowadzono ankietę, z której wynikało, że 20 osób zna język niemiecki, a 15 – język francuski. Ile co najwyżej osób zna tylko jeden z tych języków?

4.86. W pewnej grupie 60% wszystkich osób zna język hiszpański, a 50% – język rosyjski. Ile procent osób co najmniej i ile procent osób co najwyżej zna obydwa języki?

4.87. Wykaż, że w 25-osobowej klasie są co najmniej trzy osoby, które urodziły się w tym samym miesiącu.

4.88. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych, w których zapisie wykorzystano wszystkie cyfry ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$:

- a) dowolnych b) podzielnych przez 5?

4.89. Ile jest różnych liczb siedmiocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i jednocześnie:

- a) parzystych b) podzielnych przez 4?

4.90. Ile różnych wyrazów, mających sens lub nie, można ułożyć, przedstawiając litery wyrazu:

- a) SPANIEL b) TEMAT c) AGAWA d) POTOP?

4.91. Ile różnych wyrazów, mających sens lub nie, można ułożyć, przedstawiając litery wyrazu

- a) TOTALIZATOR b) ABRAKADABRA?

4.92. Podczas rozwiązywania zadań z kombinatoryki w pewnej klasie jeden z uczniów, doskonały z biologii, ze zdziwieniem stwierdził, że liczba wyrazów (mających sens lub nie) otrzymanych z przedstawienia liter wyrazu PRAWDOPODOBIENSTWO jest porównywalna z liczbą tzw. synaps neuronów (czyli styków pomiędzy neuronami) w korze mózgowej człowieka. Ile synaps ma kora mózgowa człowieka?

4.93. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfra 5 występuje:

- a) 2 razy b) nie więcej, niż dwa razy?

4.94. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 4 występuje trzy razy, cyfra 5 – dwa razy, a cyfra 0 ani razu?

4.95. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie 0 występuje 5 razy, a pozostałe cyfry są nieparzyste?

4.96. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie 0 występuje co najwyżej raz, a cyfra jedności jest większa od 6?

4.97. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 2 występuje trzy razy, cyfrą dziesiątek jest 7, a pozostałe cyfry są różne i inne niż wymienione cyfry?

4.98. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kaloszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- a) nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych
b) rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych
c) nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe
d) rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

4.99. W przedziale wagonu kolejowego jest osiem numerowanych miejsc (w dwóch rzędach naprzeciwko siebie). Do przedziału weszły cztery osoby. Na ile sposobów mogą one zająć miejsca w tym przedziale, tak aby:

- a) w każdym rzędzie siedziały po dwie osoby naprzeciwko osób siedzących w drugim rzędzie

- 4.110.** Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie występuje cyfra 6 i cyfry tworzą ciąg malejący?

- 4.111.** Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg niemalejący?
- *4.112.** Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg nierosnący?
- 4.113.** Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg:
a) rosnący *b) niemalejący?
- *4.114.** Ile różnych napisów trzyliterowych złożonych z różnych liter można otrzymać z 24 liter alfabetu, zakładając, że litery w każdym napisie należą do grupy składającej się z pięciu stojących obok siebie w alfabecie liter?
- *4.115.** Rozważmy równanie $x + y + z = 10$. Jego rozwiązaniami są uporządkowane trójki liczb. Ile jest takich rozwiązań, które składają się z trzech liczb naturalnych?
- *4.116.** Ile jest rozwiązań równania $x + y + z = 10$, które składają się z trzech liczb naturalnych dodatnich?

Doświadczenie losowe

- 4.117.** Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:
- a) rzut kostką sześcienną, której trzy ściany pomalowane są na czerwono, jedna na białą, jedna na żółto i jedna na niebiesko
 - b) rzut dwiema kostkami sześciennymi (z oczkami odpowiednio od 1 do 6)
 - c) rzut kostką sześcienną i monetą
 - d) rzut trzema monetami.
- 4.118.** Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:
- a) losowanie jednej kuli z urny, w której są 3 kule białe, 2 czerwone i 1 niebieska (kule w tym samym kolorze są rozróżnialne)
 - b) losowanie jednocześnie dwóch kul z pojemnika, w którym są 2 kule białe i 3 czerwone
 - c) losowanie jednocześnie trzech osób z grupy złożonej z pięciu osób: A, B, C, D, E
 - d) losowanie grupy pięciu osób z grupy złożonej z sześciu osób A, B, C, D, E, F.

4.119. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:

- a) losowanie kolejno dwóch elementów: pierwszego ze zbioru $\{a, b, c\}$, drugiego ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$
- b) losowanie kolejno ze zwracaniem trzech liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E\}$
- c) losowanie kolejno bez zwracania trzech liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$
- d) losowanie kolejno czterech cyfr ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3\}$.

4.120. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową, w której cyfrą setek, dziesiątek i jedności są odpowiednio wylosowane kolejno cyfry. Opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i określ liczbę tych zdarzeń elementarnych w przypadku, gdy:

- a) losowanie odbywa się ze zwracaniem
- b) losowanie odbywa się bez zwracania.

4.121. Bartek i Hubert grają w pewną grę. Każdy w swojej kolejce wykonuje rzut trzema monetami o różnych nominałach: 10 gr, 20 gr, 50 gr i zapisuje na kartce poszczególne nominały lub wpisuje dla danej monety wartość 0, jeśli wypadł orzeł. Wypisz wszystkie możliwe wyniki takiego rzutu. Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia?

4.122. Piotrek z talii kart wybrał same figury, tzn. po cztery asy, króle, damy, walety. Następnie przetasował wybrane karty i wylosował kolejno trzy spośród nich: pierwszą otrzymała jego siostra Teresa, drugą – brat Janusz, a trzecią zachował dla siebie. Zapisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych i podaj liczbę tych zdarzeń elementarnych.

4.123. Basia ma w dwóch pudełkach kartki z zapisanymi cyframi, po jednej na każdej kartce: w pierwszym pudełku są 4 kartki z cyframi 1, 2, 3, 4, w drugim – dwie kartki z cyframi 5 i 6. Basia chce wybrać losowo jedną cyfrę w następujący sposób. Wykona rzut monetą: jeśli wypadnie reszka, to Basia wylosuje kartkę z pierwszego pudełka; jeśli wypadnie orzeł, to dziewczynka wybierze losowo kartkę z drugiego pudełka. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne danego doświadczenia losowego.

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.124. Niech A, B będą dowolnymi zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω . Zapisz za pomocą A, B, A' lub B' następujące zdarzenia:

- a) zaszło co najmniej jedno ze zdarzeń A, B
- b) zaszło tylko jedno ze zdarzeń A, B

- c) zaszły oba zdarzenia A i B
 d) zaszło zdarzenie A i nie zaszło zdarzenie B
 e) nie zaszło zdarzenie A ani zdarzenie B
 f) nie zaszło zdarzenie A lub zaszło zdarzenie B .

4.125. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej karty z talii 52 kart.

Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowana karta jest pikiem, B – wylosowana karta jest koloru czerwonego,
 C – wylosowana karta jest asem. Opisz słowami zdarzenia: $A \cap C$, $B \cap C$, $A - C$, B' ,
 $B' - A$, $A' \cap C$.

4.126. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej liczby ze zbioru $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest liczbą pierwszą, B – wylosowana liczba jest większa od 12, C – wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A , B , C , $A - B$, $A' \cup C$, $C \cap B'$, $A' \cup B'$.

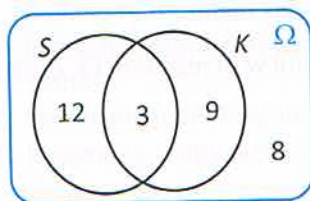
4.127. Rzucamy jeden raz monetą i jeden raz sześcienną kostką do gry, która na poszczególnych ściankach ma liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:

- A – wypadł orzeł lub reszka i liczba 5
 B – wypadła reszka i liczba oczek będąca liczbą pierwszą
 C – wypadła liczba będąca dzielnikiem liczby 12
 D – wypadł orzeł lub wypadła liczba 1.

4.128. Klasa IIIa liczy 32 uczniów, z których 15 trenuje siatkówkę, 12 trenuje koszykówkę, a tylko 8 osób nie trenuje żadnej z wymienionych dyscyplin. Liczba osób trenujących jednocześnie siatkówkę i koszykówkę jest najmniejsza z możliwych. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy. Niech S oznacza zdarzenie: wybrana osoba trenuje siatkówkę, zaś K – zdarzenie, że wybrana osoba trenuje koszykówkę. Opisz zdarzenie $S - K$ i podaj, ile zdarzeń elementarnych sprzyja temu zdarzeniu.

Zadanie to można rozwiązać w następujący sposób. Tworzymy diagram przedstawiający przestrzeń Ω z wyróżnionymi zdarzeniami S i K oraz podajemy moc poszczególnych zdarzeń na diagramie. W tym celu ustalamy moc zdarzenia $S \cap K$ (która jest najmniejsza z możliwych):

$$\overline{S \cup K} = 32 - 8 = 24, \text{ stąd } \overline{S \cap K} = 15 + 12 - 24 = 3$$



Otrzymujemy:

$S - K$ zdarzenie, że losowo wybrana osoba trenuje siatkówkę i jednocześnie nie trenuje koszykówki

$$\overline{S - K} = 12$$

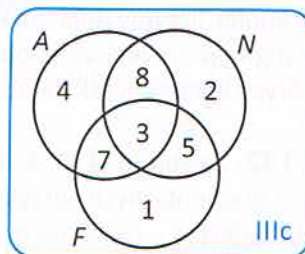
Na podstawie powyższego diagramu opisz słownie zdarzenia:

- a) $(K - S) \cup (S - K)$ b) $K' \cap S'$

i podaj moc każdego z tych zdarzeń.

4.129. Poniższy diagram przedstawia, ile osób jest w klasie IIIc oraz ile spośród nich uczy się poszczególnych języków obcych: języka angielskiego (A), języka niemieckiego (N) i języka francuskiego (F). Wiadomo, że każda osoba z tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego. Z klasy IIIc wybrano losowo jedną osobę. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu, że wybrana osoba:

- a) uczy się jednocześnie wszystkich wymienionych języków
b) uczy się języka niemieckiego lub francuskiego
c) nie uczy się języka niemieckiego
d) uczy się co najmniej dwóch języków
e) uczy się języka angielskiego i nie uczy się języka francuskiego
f) nie uczy się języka niemieckiego lub nie uczy się języka francuskiego?



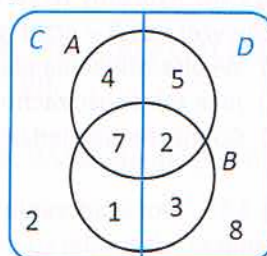
Zapisz te zdarzenia za pomocą zdarzeń A , F , N .

4.130. W klasie IIIId jest 18 dziewcząt i 14 chłopców, z których 22 osoby uczęszczają na koło chemiczne lub koło biologiczne jak na diagramie poniżej. Z tej klasy wybrano losowo jedną osobę. Niech zdarzenia A , B , C , D oznaczają odpowiednio zdarzenia:

- A – wybrana osoba chodzi na koło chemiczne
 B – wybrana osoba chodzi na koło biologiczne
 C – wybrana osoba jest chłopcem
 D – wybrana osoba jest dziewczyną.

Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniom:

- a) $A \cup C$ b) $D \cap (A \cup B)$ c) $C \cap B'$
d) $A' \cup B'$ e) $A' \cap B' \cap D$ f) $A \cap (C \cup D)?$



Opisz słownie powyższe zdarzenia.

4.131. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie dwiema sześciennymi kostkami do gry: czarną i zieloną. Ile jest takich wyników doświadczenia, dla których suma oczek na obu kostkach jest podzielna przez 3?

Zadanie to możemy rozwiązać, wykorzystując poniższą tabelkę. W pierwszym wierszu tej tabelki wpisujemy liczby oczek, jakie mogą wypaść na zielonej kostce, a w pierwszej kolumnie od lewej – liczby oczek, które mogą wypaść na czarnej kostce. W pozostałych polach wpisujemy sumy oczek odpowiadające poszczególnym wynikom doświadczenia.

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Na koniec liczymy pola, na których występują liczby podzielne przez 3: jest ich 12. Postępując analogicznie, oblicz, ile jest możliwych wyników tego doświadczenia, dla których iloczyn oczek na obu kostkach jest nie większy niż 12.

4.132. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą, jeśli:

- a) losujemy ze zwracaniem b) losujemy bez zwracania.

4.133. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 2 i przez 3, jeśli:

- a) losujemy bez zwracania b) losujemy ze zwracaniem.

4.134. Rzucamy trzykrotnie monetą. Oznaczmy zdarzenia: A – reszka wypadła co najwyżej raz, B – orzeł wypadł co najmniej raz, C – reszka wypadła dwa razy.

- a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A, B, C, A', B', C' .
 b) Jaka zależność zachodzi między zdarzeniami A i B , C i B , $A \cup C$ i B oraz B' i A ?
 c) Co można powiedzieć o zdarzeniach: $B \cup C'$, $B' \cap C$?

4.135. Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie monetą. Niech A oznacza zdarzenie: co najmniej raz wypadł orzeł, zaś B – reszka wypadła co najwyżej 3 razy.

- a) Opisz zdarzenia przeciwne do zdarzeń A i B . Podaj liczebność zbiorów A' i B' .
 b) Czy prawdziwe są równości: $(A \cup B)' = A' \cup B'$ oraz $(A \cap B)' = A' \cap B'$? Odpowiedź uzasadnij.

4.136. Z grupy dwóch kobiet i czterech mężczyzn losujemy trzyosobową delegację.

- a) Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia?
 b) Wyznacz liczbę elementów sprzyjających zdarzeniu A – w wybranej delegacji znajduje się co najmniej dwóch mężczyzn.
 c) Wyznacz liczbę elementów sprzyjających zdarzeniu B – w wybranej delegacji znajduje się co najmniej jedna kobieta.
 d) Wypisz elementy sprzyjające zdarzeniu $A' \cap B$.

4.137. Z talii 52 kart losujemy 7 kart. Niech A oznacza zdarzenie – wylosowaliśmy 4 asy, B – wylosowaliśmy 2 damy, C – wylosowaliśmy co najwyżej 3 trefle. Wyznacz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu:

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) C d) $A \cap C'$

Określenie prawdopodobieństwa

4.138. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A \cup B) = 0,5$

i $P(A) = P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(B)$, $P(B - A)$.

4.139. Dane są dwa zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A') = 0,69$ i $P(B') = 0,3$. Czy zdarzenia A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

4.140. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0,12$ i $P(B') = 0,7$ oraz $P(A \cup B) = 0,4$. Oblicz: $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A' \cap B)$.

4.141. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0,83$ i $P(B') = 0,88$ oraz $P(A \cap B) = 0,04$. Oblicz: $P(A \cup B)$, $P((A \cup B) - A)$, $P(A \cap B')$.

4.142. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0,91$ i $P(A \cap B) = 0,01$ oraz $P(A \cup B) = 0,21$. Oblicz: $P(B)$, $P(B - (A \cap B))$, $P((A \cup B) - (A \cap B))$.

4.143. O pewnym zdarzeniu $A \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A') \geq 0,9$. Wykaż, że dla dowolnego zdarzenia $B \subset \Omega$ zachodzi nierówność $P(A \cap B) < 0,2$.

4.144. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A') \geq \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ oraz

$P(A \cap B) \geq \frac{1}{8}$. Wykaż, że:

a) $P(A - B) < \frac{1}{4}$

b) $P(A \cup B) \leq \frac{7}{12}$

4.145. Kostka sześcienna została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Ścianka z jednym oczkiem wypada dwa razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek.

4.146. W rzucie niesymetryczną, sześcienną kostką ścianka z dwoma oczkami i ścianka z sześcioma oczkami wypada trzy razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Rzucamy jeden raz tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia ścianki:

- a) z jednym oczkiem
- b) z sześcioma oczkami
- c) z parzystą liczbą oczek.

4.147. W pudełku znajdują się kartki z różnymi numerami. Prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie większym niż 10 jest równe $\frac{3}{4}$, a prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie mniejszym niż 10 jest równe $\frac{3}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem 10.

4.148. Biatlonista w jednej serii strzela pięć razy do celu. Prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej trzy razy, jest równe $\frac{4}{5}$, a prawdopodobieństwo, że trafi co najwyżej trzy razy, wynosi $\frac{7}{15}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że biatlonista w jednej serii trafi do celu trzy razy?

Prawdopodobieństwo klasyczne

4.149. Rzucamy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) wypadła parzysta liczba oczek lub mniejsza niż 3
- b) wypadła nieparzysta liczba oczek i jednocześnie nie będąca dzielnikiem liczby 6.

4.150. Rzucamy symetryczną dziesięciościenną kostką do gry, z cyframi na ściankach od 0 do 9. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana cyfra jest:

- a) liczbą pierwszą i nie jest liczbą nieparzystą
- b) wylosowana cyfra jest podzielna przez 3 lub jest większa od 7.

4.151. Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 64 jednakowe sześcianiki, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który będzie miał:

- a) trzy ściany pomalowane
- b) jedną lub dwie ściany pomalowane.

4.152. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty, która jest:

- a) treflem lub pikiem
- b) asem i nie jest treflem
- c) królem lub kierem
- d) kartą młodszą od siódemki (szóstka lub piątka lub czwórka lub trójka lub dwójka).

4.153. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 5
- b) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5
- c) wylosowana liczba jest podzielna przez 10 lub przez 15
- d) wylosowana liczba jest podzielna przez 15 i nie jest podzielna przez 20.

4.154. Ze zbioru liczb trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) liczby podzielnej przez 2 lub przez 3
- b) liczby podzielnej przez 5 i niepodzielnej przez 3
- c) liczby, której reszta z dzielenia przez 4 jest równa 3
- d) liczby, której reszta z dzielenia przez 5 jest równa 2 lub 4.

4.155. Rzucamy kolejno trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) orzeł wypadnie co najwyżej raz
- b) reszka wypadnie co najmniej raz
- c) za drugim razem wypadnie orzeł, a za trzecim reszka.

4.156. Rzucamy dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wyrzuconych oczek jest:

- a) mniejsza od 10
- b) parzysta
- c) podzielna przez 3
- d) dzielnikiem liczby 24.

4.157. Rzucamy dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest:

- a) większy od 4 i mniejszy od 12
- b) podzielny przez 4 lub przez 6
- c) podzielny przez 5 i nie jest podzielny przez 10
- d) nie mniejszy od sumy wyrzuconych oczek.

4.158. Ze zbioru cyfr $\{5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) utworzona liczba jest większa od 65
- b) utworzona liczba jest podzielna przez 4
- c) suma cyfr tej liczby jest liczbą pierwszą
- d) cyfra dziesiątek różni się od cyfry jedności o 1.

4.159. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy bez zwracania kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

- a) utworzona liczba jest parzysta
- b) utworzona liczba jest niepodzielna przez 3
- c) co najmniej jedna z cyfr tej liczby jest pierwsza
- d) różnica cyfr tej liczby jest podzielna przez 2.

4.160. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) utworzona liczba jest podzielna przez 11
- b) utworzona liczba jest nieparzysta
- c) iloczyn cyfr tej liczby jest większy od 50
- d) co najmniej jedna cyfra tej liczby jest parzysta.

4.161. Ze zbioru liczb dwucyfrowych dodatnich losujemy kolejno dwa razy ze zwracaniem jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) za pierwszym razem wylosujemy liczbę większą niż za drugim razem
- b) suma wylosowanych liczb będzie liczbą mniejszą od 30.

4.162. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno dwie cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że

- a) otrzymana liczba jest większa od 35
- b) otrzymana liczba jest podzielna przez 6.

4.163. Rzucamy dwiema dziesięciościennymi symetrycznymi kostkami, każda z liczbami odpowiednio 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) suma otrzymanych liczb jest podzielna przez 7
- b) iloczyn otrzymanych liczb jest podzielny przez 15.

4.164. Cztery ponumerowane kule umieszczono losowo w czterech ponumerowanych szufladach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) każda kula trafi do innej szuflady
- b) wszystkie kule trafią do jednej szuflady.

4.165. Na parterze bloku mającego (oprócz parteru) 6 pięter wsiadło do windy 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, zdarzenia:

- a) wszystkie osoby wysiądą na jednym piętrze (kolejność wychodzenia z windy na jednym piętrze nie jest istotna)
- b) każda osoba wysiądzie na innym piętrze.

4.166. Rzucamy trzema czworościennymi symetrycznymi kostkami z liczbami 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

4.167. Rzucamy trzema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma otrzymanych oczek jest liczbą podzielną przez 8 i jednocześnie niepodzielną przez 16.

4.168. W szeregu ustawiamy losowo 3 kobiety i 4 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

- a) najpierw stoją kobiety, a potem mężczyźni
- b) żadne dwie osoby tej samej płci nie stoją obok siebie.

4.169. Sześciu przyjaciół, wśród nich Jacek i Placek, wybrało się do kina. Mają bilety z kolejnymi miejscami w jednym rzędzie. Zakładając, że usiądą losowo na tych miejscach, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) Jacek i Placek usiądą na miejscach najbardziej od siebie oddalonych
- b) Jacek i Placek usiądą na dwóch pierwszych miejscach, w podanej kolejności, licząc od lewej strony
- c) między Jackiem i Plackiem usiądzie jeszcze jedna osoba.

4.170. Kasia w jednej szufladzie ma 3 czapki: białą, czarną i zieloną, a w drugiej szufladzie cztery szaliki: biały, czarny i dwa zielone. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając losowo jedną czapkę i jeden szalik, Kasia wybierze czapkę i szalik w jednym kolorze.

4.171. W pudełku znajdują się rozróżnialne kule: 5 kul niebieskich, 4 kule czerwone i jedna zielona. Losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane kule są różnego koloru, jeśli losowanie odbywało się:

- a) bez zwracania pierwszej wylosowanej kuli do pudełka
- b) ze zwracaniem pierwszej wylosowanej kuli do pudełka.

4.172. W klasie IIIc jest 21 dziewcząt i 11 chłopców. Wybieramy kolejno dwie osoby i tworzymy parę przedstawicieli klasy na szkolną uroczystość. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w wybranej parze znajduje się:

- a) jedna dziewczynka i jeden chłopiec
- b) co najmniej jedna dziewczynka.

Czy prawdopodobieństwa te ulegną zmianie, gdy wybierzemy od razu dwie osoby (bez ustalania kolejności)? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

4.173. W pudełku znajdują się 4 losy wygrywające i 6 losów pustych. Losujemy kolejno, bez zwracania, dwa razy po jednym losie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) dwóch losów wygrywających
- b) co najmniej jednego losu wygrywającego.

Czy prawdopodobieństwa te ulegną zmianie, gdy wybierzemy od razu dwa losy (bez ustalania ich kolejności)? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

4.174. Student umie odpowiedzieć na 30 spośród 50 pytań zamieszczonych w zestawie egzaminacyjnym. Losuje kolejno dwa pytania. Jeśli odpowie dobrze na przynajmniej jedno z nich, to zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo, że student zda egzamin.

4.175. Na loterii znajduje się 6 losów wygrywających: jeden z wygraną 30 zł, dwa – po 20 zł i trzy – po 10 zł. Pozostałe 4 losy są puste. Wybieramy losowo dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wygramy kwotę równą 30 zł.

4.176. Partię 50 sztuk towaru poddaje się kontroli w następujący sposób. Losuje się dwie sztuki i sprawdza ich jakość. Jeśli co najmniej jedna z nich jest wadliwa, to odrzuca się całą partię. W przeciwnym przypadku partia zostaje przyjęta. Co jest bardziej prawdopodobne: odrzucenie partii zawierającej 4% sztuk wadliwych, czy przyjęcie partii zawierającej 70% sztuk wadliwych? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

4.177. Partię 60 sztuk towaru poddaje się kontroli przez wylosowanie trzech sztuk i sprawdzenie ich jakości. Partię towaru odrzuca się, jeśli co najmniej jedna wylosowana sztuka jest wadliwa. W przeciwnym przypadku partia towaru zostaje przyjęta. Co jest bardziej prawdopodobne: odrzucenie partii zawierającej 5% sztuk wadliwych, czy przyjęcie partii zawierającej 65% sztuk wadliwych?

4.178. W pudełku znajdują się rozróżnialne kule: 3 kule białe, 4 czarne i 5 niebieskich. Wybieramy losowo trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane kule będą:

- a) każda w innym kolorze
- b) w jednym kolorze.

4.179. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki, dziewiątki) losujemy 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) wszystkie wylosowane karty są tego samego koloru (pik, kier, karo albo trefl)
- b) wśród wylosowanych kart znajdują się co najmniej 3 asy
- *c) otrzymaliśmy jedną trójkę (figur lub dziesiątek lub dziewiątek) i jedną parę (figur lub dziesiątek lub dziewiątek)
- *d) dwie różne pary (np. dama, dama, dziesiątka, dziesiątka, król).

4.180. W klasie IIIa jest o 4 chłopców więcej niż dziewcząt. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej klasy jest dziewczynką, jest równe $\frac{7}{16}$. Oblicz, ile osób jest w klasie IIIa.

4.181. W pudełku z maskotkami były misie i pieski, przy czym misiów było trzy razy więcej niż piesków. Wybieramy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej maskotce. Prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym razem misia i za drugim razem pieska jest równe $\frac{15}{76}$. Oblicz, ile piesków i ile misiów było na początku w pudełku.

4.182. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, $n \geq 2$, losujemy kolejno dwa razy jedną liczbę ze zwracaniem. Prawdopodobieństwo otrzymania za pierwszym razem liczby większej niż za drugim razem jest równe $\frac{7}{16}$. Oblicz n .

4.183. Ze zbioru wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wybieramy losowo dwa wierzchołki. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrane wierzchołki wyznaczają przekątną tego wielokąta, jest równe 0,8. Ile wierzchołków ma wielokąt?

4.184. W klasie IIIb, liczącej mniej niż 30 osób, jest 15 dziewcząt i pewna liczba chłopców. Wybieramy dwie osoby z tej klasy. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wybranych osób jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec, jest równe 0,5. Ilu chłopców jest w tej klasie?

4.185. W pudełku jest pewna liczba kul białych i jedna kula czarna. Losujemy jedną kulę, zatrzymujemy ją, a następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Ile powinno być kul białych w pudełku, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było równe $\frac{2}{3}$?

4.186. W koszu jest pewna liczba piłek do siatkówki i mniejsza liczba piłek do koszykówki – razem 9 piłek. Ile jest w koszu piłek do siatkówki, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch piłek prawdopodobieństwo wylosowania piłek do tej samej dyscypliny sportowej jest takie samo jak prawdopodobieństwo wylosowania do dwóch różnych dyscyplin?

4.187. W sklepie w kartonie znajduje się 20 żarówek, w tym pewna liczba żarówek wadliwych. Wybieramy losowo dwie żarówki. Ile co najwyżej dobrych żarówek znajduje się w tym kartonie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania jednej żarówki dobrej i jednej wadliwej jest większe od 0,1?

4.188. W pudełku znajduje się 8 losów pustych i pewna liczba losów wygrywających. Wybieramy losowo dwa losy. Prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego jest większe od $\frac{17}{45}$. Ile było losów wygrywających w pudełku przed losowaniem?

Doświadczenia losowe wieloetapowe

4.189. W rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{2}{5}$, a reszki – $\frac{3}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w trzykrotnym rzucie tą monetą.

4.190. Na sześcienniej, symetrycznej kostce do gry cztery ściany są pomalowane na białą, a dwie na czerwono. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wykonując trzy rzuty tą kostką, otrzymamy ścianę czerwoną:

a) tylko jeden raz

b) co najwyżej raz.

4.191. Symetryczna, sześcienna kostka do gry ma cyfrę 1 na jednej ścianie, cyfrę 2 na dwóch ścianach i cyfrę 3 na trzech ścianach. Wykonujemy dwukrotny rzut tą kostką i z cyfr, które otrzymaliśmy, tworzymy liczbę dwucyfrową. Narysuj drzewo dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) otrzymana liczba dwucyfrowa jest pierwsza

b) cyfra dziesiątek otrzymanej liczby jest większa od cyfry jedności.

4.192. Mamy sześcienną kostkę, w której na jednej ścianie znajduje się cyfra 1, na dwóch ściankach znajduje się cyfra 2, a na trzech pozostałych ściankach – cyfra 3. Rzucamy trzykrotnie tą kostką i tworzymy liczbę trzycyfrową z otrzymanych cyfr. Oblicz prawdopodobieństwo, że powstała liczba jest utworzona z jednakowych cyfr.

4.193. Michał trenuje koszykówkę. Średnio trafia do kosza z linii rzutów wolnych 8 razy na 10 rzutów. Sędzia podyktował trzy rzuty wolne w wykonaniu Michała. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że Michał trafi do kosza co najmniej dwa razy.

4.194. Strzelec trafia do tarczy z prawdopodobieństwem 0,7. Ma 4 naboje. Postanowił strzelać do pierwszego trafienia lub do wyczerpania nabojów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że strzelec trafi do tarczy.

4.195. Na strzelnicy w wesołym miasteczku można wygrać wielkiego pluszowego misia w następujący sposób. Kupujemy 1 próbę polegającą na rzucie strzałką do kręcącej się tarczy, na której znajdują się takiej samej wielkości 4 pola czerwone, 8 pól żółtych i 12 pól czarnych. Jeśli strzałka trafi w pole czerwone, to wygrywamy misia; jeśli w pole czarne, to przegrywamy; a jeśli w pole żółte, to powtarzamy rzut. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupując 1 próbę, wygramy misia w co najwyżej dwóch rzutach.

4.196. Ktoś wkłada losowo 12 biletów do kina (na numerowane od 1 do 12 miejsca w jednym rzędzie) do 12 kopert, wśród których jest tyle samo kopert czerwonych co niebieskich (koperty tego samego koloru traktujemy jako nierozróżnialne). Ile jest możliwości:

- a) zupełnie dowolnego włożenia biletów do kopert
- b) takiego włożenia biletów, aby bilety na miejsca oznaczone numerami parzystymi znalazły się w czerwonych kopertach
- c) takiego włożenia biletów, aby na pewno bilety na miejsca 1, 2, 3 i 4 znalazły się w niebieskich kopertach?

4.197. Paweł zaczął trenować strzelanie z łuku. Średnio trafia do tarczy 6 razy na 10 prób. Na koniec treningu chciał jeszcze raz trafić do tarczy, więc postanowił strzelać tyle razy, aż trafi. Oblicz, przy ilu co najmniej próbach prawdopodobieństwo zdarzenia, że Paweł trafi do tarczy, jest większe od 0,96?

4.198. Rzucamy siedem razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) co najmniej raz wypadła reszka
- b) reszka wypadła co najwyżej jeden raz.

4.199. Rzucamy czterokrotnie ośmiościenną kostką do gry z liczbami odpowiednio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 na poszczególnych ścianach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) co najmniej raz wypadła liczba podzielna przez 3
- b) liczba pierwsza wypadła dokładnie dwa razy.

4.200. Rzucamy pięciokrotnie czworościenną, symetryczną kostką z liczbami odpowiednio 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ścianach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) liczba parzysta wypadła co najwyżej raz
- b) liczba 1 wypadła trzy razy.

Prawdopodobieństwo warunkowe

4.201. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że:

a) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$

b) $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$

c) $P(B|A) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$

d) $P(A \cap B') = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

4.202. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \Omega$, $P(A) = 0,8$ i $P(B) = 0,6$, to $P(A|B) \geq \frac{2}{3}$.

4.203. Strzelec A trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7, strzelec B – z prawdopodobieństwem 0,6, a strzelec C – z prawdopodobieństwem 0,5. Strzelcy A, B, C oddali po jednym strzale do celu. Okazało się, że dwa pociski trafiły w cel. Co jest bardziej prawdopodobne:

- strzelec C trafił w cel, czy też
- strzelec C nie trafił w cel?

4.204. Rzucamy raz dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest liczbą parzystą, jeśli wiadomo, że na kostkach wypada różna liczba oczek.

4.205. Rzucamy raz dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest większa od 8, jeśli wiadomo, że przynajmniej na jednej kostce wypadło pięć oczek.

4.206. Rzucamy trzy razy czworościenną, symetryczną kostką do gry. Na ściankach tej kostki wypisane są liczby od 1 do 4. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wyrzucanych liczb będzie równa 7, jeśli na jednej kostce wypadła 1.

4.207. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ losujemy kolejno, bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że druga z wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jeśli wiadomo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest:

- a) nieparzysta b) parzysta.

4.208. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ losujemy kolejno, bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest:

- liczbą pierwszą
- liczbą podzielną przez 3.

4.209. Rzucamy trzy razy sześcienną, symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie co najmniej raz pięć oczek, jeśli wiadomo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek?

4.210. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie będą asami, jeśli wiadomo, że żadna z nich nie jest damą.

4.211. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich są dwa króle, jeśli wiadomo, że jest wśród nich co najmniej jeden as.

4.212. Na trasie samochodu znajdują się trzy skrzyżowania z sygnalizacją świetlną. Na pierwszym skrzyżowaniu samochód trafia na zielone światło z prawdopodobieństwem 0,4. Jeśli samochód trafi na skrzyżowaniu na światło zielone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu będzie miał też światło zielone, wzrasta o 0,15 w stosunku do analogicznego prawdopodobieństwa na poprzednim skrzyżowaniu. Jeśli samochód trafi na światło czerwone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu trafi na światło zielone, jest równe 0,4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że samochód:

- przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymywania
- zatrzyma się po raz pierwszy na trzecim skrzyżowaniu
- zatrzyma się tylko raz na drugim skrzyżowaniu?

4.213. Do restauracji dostarczono z hurtowni pudło zawierające 30 paczek herbaty w trzech rodzajach, pochodzące z dwóch krajów. Liczbę paczek herbaty każdego typu przedstawia tabela poniżej.

rodzaj herbaty \ pochodzenie	Cejlon	Chiny
czarna	12	8
owocowa	4	3
zielona	1	2

Z pudła wyjęto losowo jedną paczkę herbaty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- wyjęto paczkę herbaty owocowej, jeśli wiadomo, że paczka ta została wyprodukowana na Cejlonie

- b) wyjęto paczkę herbaty wyprodukowanej w Chinach, jeśli wiadomo, że wyjęto paczkę herbaty czarnej
- c) wyjęto paczkę herbaty zielonej.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

4.214. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej firmy wyroby wadliwe stanowią odpowiednio 4% i 2%. Pierwsza z tych firm dostarcza do hurtowni trzy razy więcej towaru niż druga. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo zakupiona w tej hurtowni jedna sztuka towaru okaże się dobra.

4.215. Do pewnego magazynu pudełka dostarczają dwie fabryki, przy czym 70% dostaw pochodzi z pierwszej fabryki, a pozostałe – z drugiej. Wśród pudełek dostarczonych przez pierwszą fabrykę pudełka wadliwe stanowią 1% każdej dostawy, a wśród pudełek dostarczonych przez drugą fabrykę 3% każdej dostawy. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrane pudełko z tego magazynu będzie wadliwe.

4.216. Fabryka wyprodukowała ten sam model samochodu w trzech kolorach: białym, czerwonym i niebieskim. Stosunek liczby wyprodukowanych samochodów odpowiednio w tych kolorach był równy $20 : 25 : 15$. Prawdopodobieństwo, że samochód będzie miał usterki powłoki lakierniczej jest równe: dla samochodu białego 0,01, dla samochodu czerwonego 0,03 i dla samochodu niebieskiego 0,02. Spośród wyprodukowanych samochodów wybrano losowo jeden. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten samochód będzie miał usterki powłoki lakierniczej.

4.217. Sklep sprzedaje żarówki wyprodukowane w firmach O i P, przy czym w każdej z tych firm żarówki wadliwe stanowią odpowiednio 1% i 4% produkcji. Wyznacz stosunek liczby żarówek wyprodukowanych przez firmę O do liczby żarówek wyprodukowanych przez firmę P, sprzedawanych w tym sklepie tak, aby prawdopodobieństwo kupienia żarówki wadliwej (przy losowym jej zakupie) było nie większe niż 0,02.

4.218. W pierwszej urnie są 4 białe kule i 2 czarne, a w drugiej 2 białe i 8 czarnych. Rzucamy sześcienną, symetryczną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym wypadku – jedną kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

4.219. Do urny zawierającej 4 kule wrzucono jedną kulę białą, a następnie z tej urny wylosowano jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano kulę białą, jeśli wszystkie przypuszczenia o początkowym składzie kul (według kolorów) są jednakowo prawdopodobne.

4.220. W pierwszej urnie jest 6 kul: 2 białe, 2 czerwone, 1 zielona i 1 niebieska, a w drugiej urnie jest 8 kul: 3 białe i 5 czarnych. Wybieramy losowo jedną kulę z pierwszej urny i nie oglądając jej, wkładamy do urny drugiej. Następnie z drugiej urny losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała.

4.221. Z urny zawierającej 6 kul białych i 4 czarne losujemy jedną kulę i, nie oglądając jej, wkładamy do drugiej urny, w której początkowo było 7 kul czarnych i 4 białe. Następnie z drugiej urny losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że będą one różnego koloru.

4.222. W każdym z trzech pojemników znajduje się po 10 opakowań pewnego produktu, przy czym w pierwszym pojemniku jest jedno opakowanie uszkodzone, w drugim są dwa takie opakowania, a w trzecim – trzy. Mamy wylosować dwa opakowania. Możemy to zrobić na dwa sposoby:

- 1) wszystkie opakowania zsypujemy do jednego pudełka i z niego losujemy jednocześnie dwa opakowania;
- 2) najpierw losujemy pudełko, a następnie losujemy dwa opakowania z tego pudełka.

Przy którym sposobie losowania prawdopodobieństwo wylosowania dwóch opakowań uszkodzonych jest większe?

4.223. Dane są dwa zbiory $A = \{1, 2, 3, \dots, 2015, 2016\}$ i $B = \{1, 2, 3, \dots, 503, 504\}$. Rzucamy sześcienną, symetryczną kostką do gry. Jeśli wypadną mniej niż trzy oczka, losujemy liczbę c ze zbioru A , w przeciwnym wypadku losujemy liczbę c ze zbioru B . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba $c^2 + 1$ będzie podzielna przez 10.

4.224. Zestaw tematów egzaminacyjnych składa się z 25 tematów z analizy, 35 tematów z geometrii i n tematów z rachunku prawdopodobieństwa. Z zestawu usunięto losowo jeden temat, a następnie z pozostałych wybrano w sposób losowy jeden temat. Oblicz n , jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania tematu z rachunku prawdopodobieństwa jest równe $\frac{7}{27}$.

4.225. Test wykrywający pewną chorobę jest efektywny w 99% dla osób chorych (tzn. jeśli badany jest chory, test w 99% potwierdza chorobę) i w 98% dla osób zdrowych (tzn. jeśli badany jest zdrowy, test w 98% wyklucza chorobę). W pewnym regionie średnio 150 na 10 000 osób cierpi na tę chorobę.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo, że test wykonany na losowo wybranej osobie z tego regionu wykaże u niej chorobę.
 b) U losowo badanej osoby z tego regionu test wykazał chorobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzeczywistości ta osoba cierpi na tę chorobę.

4.226. W pewnej firmie dwie maszyny produkują takie same detale używane do produkcji komputerów. Liczby wszystkich wyprodukowanych detali przez te maszyny mają się do siebie jak 3 : 5. Pierwsza z maszyn produkuje 0,1% detali wadliwych, a druga 0,06%. Z pojemnika, w którym były wszystkie detale wyprodukowane przez obie maszyny, wybrano jeden, który okazał się wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez pierwszą maszynę.

4.227. Dwa zakłady, należące do tej samej firmy, dostarczają do sklepu żarówki energooszczędne. Pierwszy zakład dostarcza cztery razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów średnio 4 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 8 na 1000 ma wady (tzn. psują się w okresie gwarancji). Klient kupił żarówkę, na której był tylko znak firmy, a nie zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Oblicz prawdopodobieństwo, że została wyprodukowana w pierwszej fabryce.

Niezależność zdarzeń

4.228. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, $P(B') = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A)$.

4.229. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A' \cup B') = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(A)$.

4.230. Zdarzenia A , B , C są niezależne. Oblicz $P(C)$, wiedząc dodatkowo, że $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{27}$ i $P(A) = 2P(B) = 4P(C)$.

4.231. Dane są trzy zdarzenia A , B , C parami niezależne i takie, dla których $P(A \cap B \cap C) = 0$ oraz $2P(A) = 3P(B) = 3P(C)$. Oblicz:

- a) największą wartość jaką może przyjmować prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A , B i C ;
 b) prawdopodobieństwo zdarzenia A , dla którego prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A , B i C przyjmuje największą wartość.

4.232. Wykaż, że jeśli $P(B|A) = P(B|A')$, gdzie $P(A) > 0$ i $P(A') > 0$, to zdarzenia A i B są niezależne.

4.233. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: A – na pierwszej kostce wypadła parzysta liczba oczek, B – na drugiej kostce wypadły trzy oczka. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.234. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: A – w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek, B – w drugim rzucie wypadły dwa lub trzy oczka. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.235. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: A – iloczyn liczby oczek na obu kostkach jest większy od 20, B – na obu kostkach wypadła parzysta liczba oczek. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.236. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Określamy zdarzenia:

a) A – wylosowana karta jest figurą (tzn. asem, królem, damą lub waletem)

B – wylosowana karta jest koloru czerwonego;

b) A – wylosowana karta jest starsza od piątki

B – wylosowana karta jest damą lub kartą młodszą od siódemki.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.237. Ściany pewnego czworościanu foremnego pomalowano w następujący sposób: jedną na niebiesko, drugą na żółto, trzecią na czerwono, a czwartą w pasy, w trzech wymienionych wcześniej kolorach. Rzucamy czworościanem i patrzymy na ściankę, na którą upadł. Oznaczamy zdarzenia:

A – na ściance, na którą upadł czworościan był kolor niebieski

B – na ściance, na którą upadł czworościan był kolor żółty

C – na ściance, na którą upadł czworościan był kolor czerwony.

Zbadaj niezależność par zdarzeń A i B , B i C , A i C . Czy zdarzenia A , B , C są niezależne?

4.238. Wykonano dwa rzuty czworościanem foremnym opisanym w zadaniu 4.237.

Oznaczamy zdarzenia:

A – w pierwszym rzucie czworościan upadł na ściankę, na której był kolor niebieski

B – w obu rzutach czworościan upadł na ścianki, na których był tylko kolor niebieski lub tylko żółty.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.239. Hurtownia otrzymuje dostawy towaru niezależnie z trzech zakładów Z_1 , Z_2 , Z_3 z prawdopodobieństwem odpowiednio równym 0,6, 0,3 i 0,1. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) hurtownia otrzymała dostawę tylko z jednego zakładu

b) hurtownia otrzymała dostawę z co najmniej jednego zakładu.

4.240. Obwód elektryczny składa się z trzech elementów pracujących niezależnie. Prawdopodobieństwa awarii elementów tego obwodu są odpowiednio równe 0,1, 0,2 i 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo, że nastąpi awaria obwodu, jeśli:

- a) elementy połączone są szeregowo
- b) elementy połączone są równolegle.

4.241. W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 4 czarne, w drugiej urnie są 2 kule białe i 8 czarnych, w trzeciej urnie – 5 kul białych i 5 kul czarnych. Losujemy z każdej urny po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

- a) trzy kule białe
- b) dwie kule białe.

***4.242.** Strzelec oddaje n niezależnych strzałów do celu, przy czym prawdopodobieństwo nietrafienia w cel w k -tym strzale jest równe $\frac{1}{(k+1)^2}$, gdzie $k = 1, 2, \dots, n$.

Wykaż, że prawdopodobieństwo trafienia we wszystkich n strzałach jest równe $\frac{n+2}{2(n+1)}$.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Ile jest różnych liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5?

- A. 20
- B. 18
- C. 16
- D. 14

2. Pewna firma cateringowa ma w ofercie danego dnia 3 różne zupy, 2 drugie dania i 2 desery. Na ile sposobów można wybrać jeden zestaw obiadowy, składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

- A. na 7 sposobów
- B. na 8 sposobów
- C. na 10 sposobów
- D. na 12 sposobów

3. Ile jest różnych rozmieszczeń 3 różnych kul w dwóch różnych szufladach?

- A. 9
- B. 8
- C. 6
- D. 5

4. Z miasta A do miasta B prowadzą 3 różne drogi. Na ile sposobów można pokonać samochodem trasę A–B–A, aby nie jechać z B do A tą samą drogą, co z A do B?

- A. na 3 sposoby
- B. na 4 sposoby
- C. na 5 sposobów
- D. na 6 sposobów

5. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

- A. $10 \cdot 9 \cdot 8$
- B. $9 \cdot 8 \cdot 7$
- C. $9 \cdot 9 \cdot 8$
- D. $8 \cdot 8 \cdot 7$

6. Na ile sposobów można 4 dziewczynki i 4 chłopców ustawić jednocześnie w pary dziewczynka–chłopiec?

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 24

7. Na przyjęciu spotkało się 6 osób, przy czym każda przywitała się z każdą inną osobą. Liczba wszystkich powitań była równa:

- A. 9 B. 12 C. 15 D. 18.

8. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra 1 i jedna cyfra 0?

- A. 8 B. 16 C. 24 D. 32

9. Ile różnych czterolitrowych kodów można utworzyć, przestawiając litery słowa I N K A – tak, żeby samogłoski nie stały obok siebie?

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 16

10. Ile punktów o współrzędnych całkowitych należy do prostokąta $ABCD$ znajdującego się w układzie współrzędnych, gdzie $A(-1, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 1)$, $D(-1, 1)$?

- A. 28 B. 24 C. 21 D. 18

11. Ile liczb naturalnych dodatnich spełnia nierówność $n \cdot (n - 1) < 30$?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

12. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie symetryczną, sześcienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie: „wypadła liczba oczek mniejsza niż 4”, zaś B – zdarzenie: „wypadła liczba oczek nie większa niż 4”. Wówczas:

- A. $A = B$ B. $A \cup B = \Omega$ C. $A' \cap B = \emptyset$ D. $A \cap B = A$.

13. Ze zbioru $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ wybieramy losowo kolejno 2 razy jedną cyfrę bez zwracania, a następnie z powstałych cyfr tworzymy liczbę dwucyfrową. Liczba zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego sprzyjających zdarzeniu A – „utworzona liczba jest parzysta i jednocześnie większa od 60” – jest równa:

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9.

14. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie: „wylosowana liczba jest pierwsza”. Wówczas:

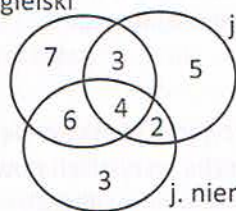
- A. $A' = \{2, 3, 5, 7\}$ B. $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$
C. $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ D. $A' = \{0, 4, 6, 8, 9\}$.

15. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – w pierwszym rzucie otrzymaliśmy liczbę oczek mniejszą niż w drugim rzucie?

- A. 12 B. 15 C. 18 D. 21

16. W pewnej firmie przeprowadzono ankietę wśród pracowników zapytaniem o ich znajomość języków obcych. Diagram obok przedstawia wyniki tej ankiety. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z grupy badanych zna co najmniej dwa języki obce, jest równe:

j. angielski



j. rosyjski

j. niemiecki

- A. $\frac{11}{15}$ B. $\frac{14}{25}$ C. $\frac{11}{25}$ D. $\frac{1}{2}$

17. Do sklepu dostarczono w kartonie mieszankę wedlowską, w której były zmieszane trzy rodzaje cukierków: „Bajeczne”, „Pierroty” i „Nyguski” w stosunku wagowym odpowiednio 3 : 2 : 3. Zakładamy, że wszystkie cukierki mają taką samą wagę. Wybieramy losowo jeden cukierek z tego kartonu. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrany cukierek nie jest „Bajeczny”, jest równe:

- A. 0,6 B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. 0,25.

18. W siedmiokącie prowadzimy wszystkie proste łączące dwa dowolne wierzchołki tego wielokąta, następnie wybieramy losowo jedną z tych prostych. Prawdopodobieństwo, że wylosowana prosta zawiera przekątną siedmiokąta, jest równe:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{7}$

19. Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 14, 15\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 5 jest równe:

- A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{16}$

20. W pewnej klasie chłopców jest o 50% więcej, niż dziewcząt. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy. Prawdopodobieństwo, że wybraną osobą jest chłopiec, wynosi:

- A. 0,5 B. 0,6 C. $\frac{2}{3}$ D. 0,75.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

4.243. W pewnej grupie osób wszyscy czytają klasykę, z czego 14 osób uwielbia lirykę, a 20 osób chętnie czyta prozę. Oblicz, ile osób liczy ta grupa, jeżeli 9 spośród nich czyta zarówno lirykę, jak i prozę?

4.244. Ile liczb jest w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$, które są:

- podzielne przez 5 lub przez 7
- podzielne przez 3 lub przez 5 lub przez 7
- podzielne przez 4 lub przez 10 lub przez 7.

4.245. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B \cap A')$, $P(A \cup B) = 0,75$ i $P(A \cap B) = 0,25$. Oblicz $P(B)$, $P(A - B)$.

4.246. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeśli $P(A) = \frac{1}{4}$ i $P(B) = \frac{1}{3}$, to $\frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{7}{12}$ oraz $P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$.

4.247. Kostka sześcienna do gry została wykonana z jednorodnego materiału, ale na niektórych ściankach liczby oczek są takie same. Wiadomo, że w jednokrotnym rzucie tą kostką prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek nie większej niż 3 wynosi $\frac{5}{6}$, a prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek nie mniejszej niż 3 jest równe $\frac{1}{2}$.

- Na ilu ściankach tej kostki są trzy oczka?
- Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w jednokrotnym rzucie tą kostką liczby oczek większej niż 3.

4.248. W klasach trzecich szkoły podstawowej zorganizowano koło taneczne, na które uczęszczają dzieci według tabeli zamieszczonej poniżej.

Klasa	IIIa	IIIb	IIIc
Dziewczęta	5	6	9
Chłopcy	10	3	7

Na ile sposobów można utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli dzieci w tej parze

- mają chodzić do tej samej klasy
- mają chodzić do klasy IIIa lub do klasy IIIb?

4.249. Mamy dwie urny: w pierwszej jest 8 kul – 5 białych i 3 czerwone, w drugiej też jest 8 kul – 3 białe i 5 czerwonych. Z każdej urny losujemy po jednej kuli.

- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul w różnych kolorach.
- Jak zmieniłoby się prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach w przypadku losowania kul (bez zwracania) z jednej urny, w której jest 8 kul białych i 8 kul czerwonych? Odpowiedź uzasadnij.

4.250. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Następnie od nie mniejszej liczby wyrzuconych oczek na jednej kostce odejmujemy liczbę oczek wyrzuconych na drugiej kostce. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymana różnica jest:

- a) liczbą podzielną przez 3
- b) dzielnikiem liczby 6.

4.251. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

- a) w pierwszym rzucie uzyskaliśmy liczbę oczek większą niż w drugim rzucie
- b) co najwyżej raz wypadła „szóstka”
- c) liczba parzysta oczek nie wypadła w żadnym rzucie
- d) co najmniej w jednym rzucie wypadła liczba oczek nie mniejsza niż 5.

4.252. Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb oczek otrzymanych na poszczególnych kostkach jest podzielna przez 3.

4.253. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie:

- a) występuje jedna cyfra 0, jedna cyfra 1 i dwie cyfry 2
- b) nie występuje żadna z cyfr: 1, 2, 3, 4?

4.254. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie

- a) występują dwie ósemki i dwie liczby nieparzyste
- b) występują 2 cyfry parzyste oraz 2 cyfry nieparzyste?

4.255. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 5?

4.256. Tworzymy liczbę dwucyfrową w następujący sposób: ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy cyfrę dziesiątek, zaś ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzona liczba jest:

- a) mniejsza od 53
- b) podzielna przez 4 lub przez 3.

4.257. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, losujemy dwa razy jedną cyfrę bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz n , jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia: „obie cyfry otrzymanej liczby są parzyste” jest równe $\frac{5}{21}$.

4.258. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, \dots, 9, 10\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i od pierwszej wylosowanej liczby odejmujemy drugą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania różnicy większej od 2.

- 4.259.** Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, $n \in \mathbf{N}_+$, $n \geq 2$, losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane liczby różnią się o 1, jest równe 0,1. Oblicz n .
- 4.260.** Loteria składa się z 40 losów: pięciu losów umożliwiających wygranę po 20 zł, dziesięciu losów umożliwiających wygranę po 10 zł i dwudziestu pięciu losów pustych. Kupujemy dwa losy. Ile mamy możliwości wygrania 20 zł?
- 4.261.** Uczestników turnieju szachowego podzielono na dwie rozłączne podgrupy A i B. Stosunek liczby graczy w grupie A do liczby graczy w grupie B wynosił 3 : 4. W grupie A każdy rozegrał z każdym jedną partię, a w grupie B każdy z każdym rozegrał trzy partie. Łącznie w obu grupach rozegrano 21 partii. Ilu było uczestników turnieju?
- 4.262.** Ile różnych wyrazów (mających sens lub nie) można ułożyć, przedstawiając litery wyrazu MATEMATYKA?
- 4.263.** Spośród wszystkich wierzchołków sześciokąta foremnego o boku długości 1 losujemy dwa wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo, że są one końcami odcinka mającego długość $\sqrt{3}$.
- 4.264.** Spośród wszystkich wierzchołków sześciianu losujemy trzy wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania punktów będących wierzchołkami trójkąta równobocznego.
- 4.265.** Z talii 52 kart wybieramy w sposób losowy 3 karty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
- a) wylosowano jedną damę i jednego króla
 - b) wylosowano co najmniej jednego asa
 - c) wylosowano karty w tym samym kolorze (pik, kier, karo lub trefl)
 - d) co najwyżej jedna z wylosowanych kart jest pikiem.
- 4.266.** Na loterii znajdują się 2 losy z wygraną 100 zł, 3 losy z wygraną 50 zł oraz 25 losów pustych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupując trzy losy wygramy co najmniej 100 zł.
- 4.267.** W pewnej klasie 40% wszystkich uczniów stanowią dziewczynki. Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej klasy. Ilu jest wszystkich uczniów w klasie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania najpierw dziewczynki, a potem chłopca jest równe $\frac{36}{145}$?

4.268. W worku znajdują się piłeczki pingpongowe: 4 białe, 5 pomarańczowych i jedna zielona. Staś wyjmuje losowo jedną piłeczkę i – nie zwracając jej – losuje jeszcze jedną piłeczkę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) wylosowane piłeczki są różnych kolorów
- b) druga wylosowana piłeczka jest pomarańczowa.

4.269. Pewien roztargniony napisał 10 listów, zaadresował 10 kopert, a potem włożył listy do kopert i wysłał. Ile jest możliwości:

- a) zupełnie losowego włożenia przez niego listów do kopert
- b) takiego włożenia listów, aby co najmniej pierwsze dwa, które włożył do kopert, dotarły do właściwego adresata?

4.270. W klasie jest 20 uczniów. Na ile sposobów ci uczniowie mogą zająć miejsca w 10 ławkach dwuosobowych?

4.271. W sali stoi piętnaście ponumerowanych ławek. Na ile sposobów można posadzić 15 dziewcząt i 15 chłopców tak, aby:

- a) w każdej ławce po lewej stronie chłopca siedziała dziewczyna
- b) w każdej ławce siedziała dziewczyna i siedział chłopak?

4.272. Mamy 5 książek, wśród których są książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce w jednym szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) książki A i B będą stały obok siebie na końcu tego rzędu (po lewej lub prawej stronie w dowolnej kolejności)
- b) pomiędzy książkami A i B będzie stała jedna książka.

4.273. Przy okrągłym stole posadzono losowo 4 osoby, wśród nich są osoby A i B. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

- a) osoby A i B siedzą obok siebie
- b) osoby A i B siedzą naprzeciwko siebie.

4.274. Mamy 9 różnokolorowych szuflad i 5 ponumerowanych kul, które losowo umieszczamy w szufladach. Ile jest możliwych rozmieszczeń tych kul, jeśli:

- a) każda kula może znaleźć się w dowolnej szufladzie
- b) wszystkie kule mają się znaleźć w dwóch szufladach?

4.275. Do windy na parterze ośmiopiętrowego wieżowca wsiadło 4 pasażerów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że pasażerowie wysiądą z windy

- a) każdy na innym piętrze
- b) na dwóch różnych piętrach.

4.276. Sześciu pasażerów wsiada do pustego tramwaju złożonego z trzech wagonów, przy czym każdy z nich wybiera wagon losowo. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że przynajmniej jeden wagon zostanie pusty.

4.277. Rzucamy n razy symetryczną monetą, $n \geq 1$. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy co najmniej jednego orła, jest równe $\frac{31}{32}$. Oblicz n .

4.278. Rzucamy trzy razy czworościenną, symetryczną kostką do gry. Na ściankach tej kostki wypisane są liczby od 1 do 4. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconych liczb będzie sześcianem liczby naturalnej, jeśli wiadomo, że co najmniej raz wypadła liczba 4.

4.279. W urnie są trzy czarne kule i jedna biała. Losujemy jedną kulę. Jeśli wylosujemy kulę czarną – wkładamy ją z powrotem do urny. Jeśli wylosujemy kulę białą – wkładamy ją z powrotem do urny i dokładamy jeszcze jedną kulę białą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wykonując trzy takie losowania, otrzymamy:

- a) trzy razy kulę białą
- b) trzy razy kulę czarną
- c) dwa razy kulę białą i raz kulę czarną.

4.280. Kamil bawi się z kolegą w następującą grę. Każdy z chłopców rzuca kolejno dwoma kółkami ringo do celu. Jeśli w pierwszej próbie dwa kółka trafiły do celu, to kolejka jest zakończona. W przeciwnym przypadku dany chłopak ma drugą próbę. Zbiera te kółka, które nie trafiły do celu, i powtarza nimi rzuty. Potem otrzymuje tyle punktów, ile kółek trafiło w całej kolejce do celu. Wiedząc, że Kamil jednym kółkiem trafia do celu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w jednej kolejce Kamil uzyska 2 punkty.

4.281. Z grupy złożonej z 8 dziewcząt i 10 chłopców losujemy trzy osoby, a następnie z tych trzech osób losujemy jedną, która będzie reprezentantem tej grupy w radzie szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo, że grupę będzie reprezentować dziewczyna.

*** 4.282.** Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne, $P(A - B) = \frac{1}{8}$ i $P(B - A) = \frac{3}{8}$. Wy-

każ, że $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ lub $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$.

4.283. W każdej z trzech urn znajduje się 10 kul: w pierwszej 2 białe i 8 czarnych, w drugiej – 3 białe i 7 czarnych, w trzeciej – 4 białe i 6 czarnych. Z każdej urny losujemy po jednej kuli i nie oglądając jej, wkładamy do czwartej urny. Następnie z tej urny losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała.

4.284. Dwóch strzelców oddało po jednym strzale do tego samego celu. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwszy z nich trafił, jeśli wiadomo, że cel został trafiony tylko jeden raz. Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia w cel jest równe dla pierwszego strzelca 0,85, a dla drugiego 0,95.

5. Elementy statystyki opisowej

Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

5.1. Odpowiedz na następujące pytania:

- Czym zajmuje się statystyka opisowa?
- W jaki sposób przeprowadza się obserwację statystyczną?
- Co nazywamy próbą?
- Jakie cechy statystyczne nazywamy cechami mierzalnymi, a jakie niemierzalnymi? Podaj przykłady cech mierzalnych oraz cech niemierzalnych.

5.2. Komendant policji przeanalizował wypadki drogowe spowodowane przez kierowców samochodów osobowych na terenie miasta w 2010 r., pod kątem przyczyn tych wypadków. Wyniki pracy komendanta przedstawia poniższa tabela.

Przyczyna wypadku	Liczebność
Przejazd przez skrzyżowanie na czerwonym świetle	81
Jazda z nadmierną prędkością	144
Wymuszenie pierwszeństwa	90
Jazda pod wpływem alkoholu	135

Przedstaw zebrane dane w postaci diagramu kolumnowego i diagramu częstości względnych.

5.3. Wychowawca klasy 3a przeprowadził w listopadzie badanie liczby spóźnień na lekcję matematyki, która była pierwszą godziną lekcyjną w tygodniowym rozkładzie zajęć tej klasy. Wyniki badań opracował w tabeli liczebności.

Liczba spóźnień	Liczebność
0	11
1	3
2	2
3	4
4	5

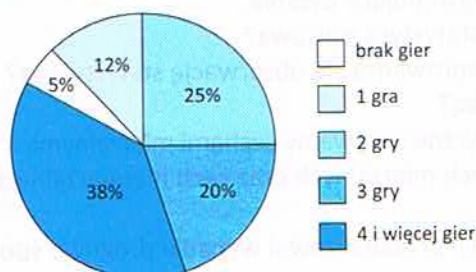
Sporządź diagram słupkowy oraz diagram kołowy procentowy spóźnień na lekcję matematyki.

5.4. W pewnej klasie badano, ile czasu dziennie uczniowie poświęcają na odrabianie prac domowych, i uzyskano następujące dane (w godzinach) od losowo wybranych 20 uczniów:

0,5 1 3 3 2,5 0,5 1,5 2 3 4 0,5 1 1 1 1,5 2,5 4 3 2 1.

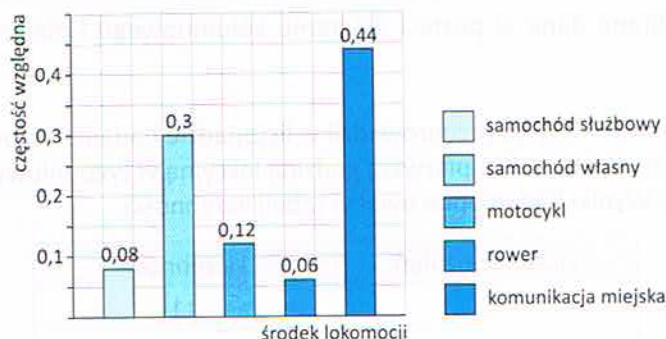
- Przedstaw zebrane dane w tabeli liczebności oraz na diagramie kolumnowym.
- Oblicz, jaki procent uczniów przeznaczają na odrabianie prac domowych mniej niż 2 godziny.

5.5. Pewna firma badająca rynek gier komputerowych zapytała losowo wybranych 200 uczniów o liczbę posiadanych przez nich gier komputerowych. Otrzymane wyniki przedstawia poniższy diagram.



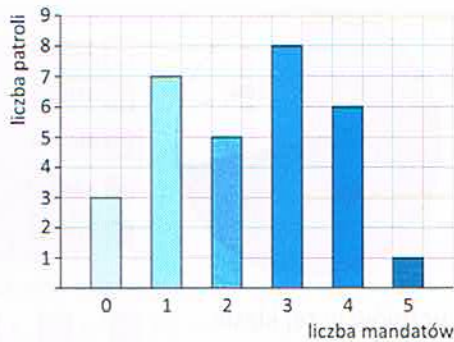
- Ilu spośród badanych uczniów:
 - ma co najmniej 3 gry komputerowe
 - ma co najwyżej 2 gry?
- Przedstaw powyższe dane na diagramie słupkowym.

5.6. W pewnej firmie zbadano, jakimi środkami lokomocji dostają się do pracy jej pracownicy. Wyniki przedstawiono na diagramie częstości względnych (rysunek poniżej).



- Oblicz, jaki procent pracowników firmy dostaje się do pracy innymi środkami transportu niż komunikacja miejska.
- Ile osób przyjeżdża do pracy samochodem służbowym, jeśli wiadomo, że w firmie pracuje 50 osób?
- Ile osób przyjeżdża do pracy na motocyklu lub rowerze?
- Sporządź diagram kołowy zebranych wyników.

5.7. Poniższy wykres przedstawia wyniki badań nad liczbą kierowców ukaranych w ciągu godziny mandatami przez pewną liczbę patroli policji drogowej w Warszawie.



- Jaką liczbę patroli poddano temu badaniu?
- Ilu kierowców zostało ukaranych mandatami?
- Oblicz, ile mandatów średnio przypada na jeden patrol policji.
- Przedstaw zebrane dane w tabeli częstości względnych.

Średnia z próby

5.8. Wyznacz liczbę x , jeśli wiadomo, że średnia arytmetyczna liczb 2, 3, 3, 5, 4, 2, x , 6, 9, 1 jest równa 4.

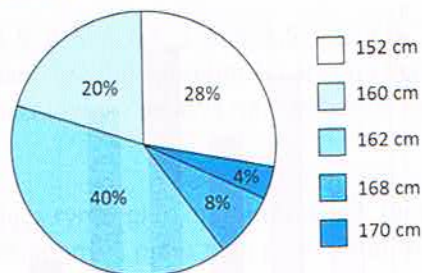
5.9. Średnia arytmetyczna wieku drużyny piłkarskiej jest równa 24 lata. Gdyby uwzględnić wiek trenera, to średnia arytmetyczna wieku wszystkich dwunastu osób wyniosłaby 26 lat. Ile lat ma trener?

5.10. Przeprowadzono sondę telefoniczną, zadając pytanie: „Ile godzin dziennie ogląda Pan (Pani) telewizję?”. Otrzymano następujące wyniki:

1 0,5 2,5 1 3,5 4 6 2 1,5 3 0,5 2 1 1 0 0,5 2 3 4 4,5 5 2 3 1 4 2 3 1 4 0,5.

- Przedstaw zebrane dane na diagramie kolumnowym.
- Jaki jest średni czas oglądania telewizji w ciągu dnia?
- Jaki procent badanych osób ogląda telewizję w czasie przekraczającym średni czas? Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.
- Ile osób spośród badanych przeznaczają dziennie na oglądanie telewizji więcej czasu, niż wynosi podwojony średni czas?

5.11. Na diagramie kołowym procentowym przedstawiono wyniki pomiaru wzrostu uczniów klasy pierwszej pewnego liceum.



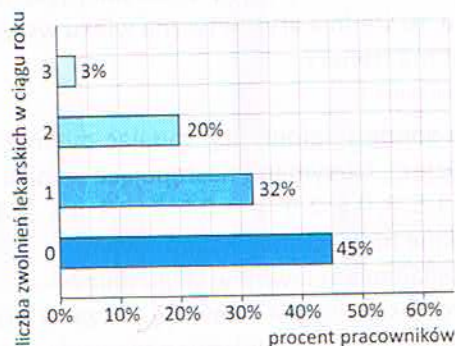
- Oblicz średni wzrost uczniów w tej klasie.
- Przedstaw zebrane dane na diagramie częstości względnych.
- Wiedząc, że w tej klasie zmierzono wzrost 25 uczniom, sporządź tabelę liczebności.
- Ilu uczniów ma wzrost powyżej średniej?

5.12. W bibliotece szkolnej badano, ile książek wypożyczają uczniowie klasy 1b pewnego technikum, w ciągu miesiąca. Uzyskane wyniki przedstawia poniższa tabela.

Liczba wypożyczonych książek	0	1	2	3	4	7	8
Liczba uczniów	4	8	4	8	3	2	1

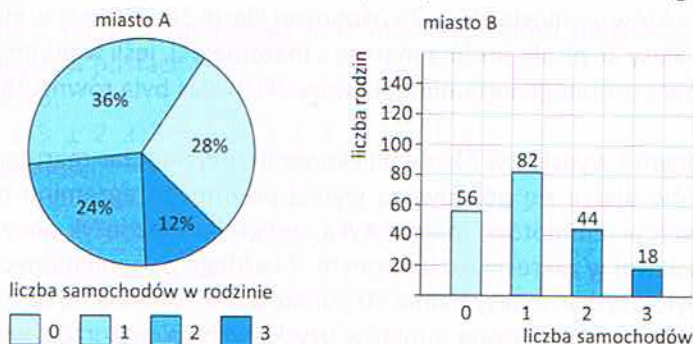
- Oblicz średnią liczbę wypożyczonych książek w danym miesiącu dla klasy 1b. Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.
- Oblicz, jaki procent uczniów tej klasy wypożycza więcej książek, niż wynosi średnia dla klasy.

5.13. W pewnej firmie badano, ile zwolnień lekarskich biorą w ciągu roku jej pracownicy. Wyniki są przedstawione na poniższym diagramie.



- Jaka jest średnia liczba zwolnień w ciągu roku przypadająca na jednego pracownika tej firmy?
- W firmie pracuje 200 osób. Ile osób było na zwolnieniu lekarskim więcej niż jeden raz w roku?
- O ile procent więcej jest tych pracowników, którzy korzystali ze zwolnień lekarskich, niż tych, którzy nie byli na zwolnieniu?

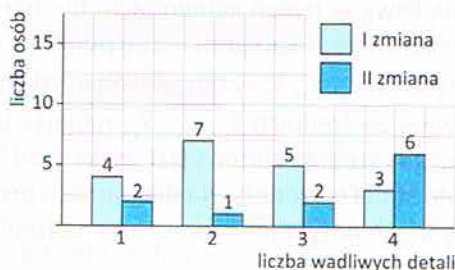
5.14. W dwóch miastach A i B badano liczbę samochodów w rodzinie na losowo wybranych równolicznych próbach. Oto wyniki przedstawione na diagramach:



- Ile rodzin w mieście A nie ma samochodu?
- Oblicz średnią liczbę samochodów w rodzinie w każdym z miast.
- Jaki procent rodzin w mieście B ma 2 samochody?
- Oblicz średnią liczbę samochodów w rodzinie dla obu miast.

5.15. W pewnej firmie pracują dwie zmiany pracowników. Stosunek liczby pracowników I zmiany do liczby pracowników II zmiany wynosi 3 : 2. Wszystkich pracowników w firmie jest 50. Na każdej zmianie część pracowników nie wyprodukowała ani jednego wadliwego detalu i żaden z pracowników nie wyprodukował ich więcej niż cztery.

Na poniższym diagramie przedstawiono liczbę wadliwych detali, wyprodukowanych przez pracowników tych zmian.



- Która zmiana ma mniejszą średnią wadliwie wyprodukowanych detali przez jednego pracownika?
- Oblicz średnią wadliwie wyprodukowanych detali przez jednego pracownika.
- Ilu pracowników firmy nie wyprodukowało ani jednego wadliwego detalu? Jaki to procent wszystkich pracowników?

5.16. We wszystkich klasach trzecich pewnego liceum przeprowadzono próbną maturę z matematyki w zakresie podstawowym. W 32 osobowej klasie 3a średnia liczba zdobytych punktów wyniosła 25; w 25 osobowej klasie 3b – 30; zaś w klasie 3c – 32. Ilu uczniów z klasy 3c pisało próbną maturę z matematyki, jeśli wiadomo, że średnia liczba punktów z próbnego egzaminu dla wszystkich klas była równa 28,575?

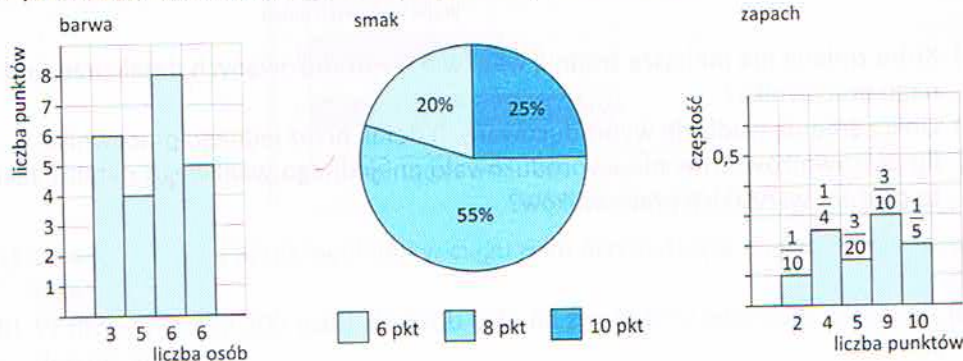
5.17. Na jednym z wydziałów Akademii Ekonomicznej podczas rekrutacji na pierwszy rok studiów bierze się pod uwagę wyniki pisemnego egzaminu maturalnego z następujących przedmiotów: matematyka, geografia oraz język obcy nowożytny, które uczeń zdawał w zakresie rozszerzonym. Z każdego z wymienionych przedmiotów można było uzyskać maksymalnie 50 punktów. Postanowiono, że o przyjęciu na studia decyduje średnia ważona punktów uzyskanych na maturze z wymienionych przedmiotów. Ustalono wagi dla poszczególnych przedmiotów: matematyka – 0,65; geografia – 0,2; język obcy nowożytny – 0,15.

Dwoje znajomych, Ela i Jacek, ubiega się o przyjęcie do Akademii Ekonomicznej na ten wydział. Uzyskali następujące wyniki:

	Matematyka	Geografia	Język obcy nowożytny
Ela	38 pkt	24 pkt	48 pkt
Jacek	26 pkt	40 pkt	50 pkt

Która z tych osób ma większą szansę dostać się na wymarzone studia?

5.18. Właściciel kawiarni, zanim na stałe wprowadzi nową kawę dla klientów, przeprowadza badanie na grupie 20 osób losowo wybranych spośród bywalców lokalu. Wybrane osoby oceniają kawę w trzech kategoriach: b – barwy, s – smaku, z – zapachu, przyznając w każdej z trzech kategorii liczbę punktów od 1 do 10. Właściciel oblicza średnie arytmetyczne: $\bar{x}_b$, $\bar{x}_s$, $\bar{x}_z$ w ten sposób uzyskanych punktów. Następnie oblicza średnią ważoną ze średnich $\bar{x}_b$, $\bar{x}_s$, $\bar{x}_z$, nadając im odpowiednie wagi: 2,5; 4; 3,5. W przypadku, gdy średnia ważona jest większa od 70, podejmuje decyzję o wprowadzeniu kawy do stałej sprzedaży. Na diagramach przedstawione są wyniki w poszczególnych kategoriach dotyczące kawy „Nuta nadziei”.



Oceń, czy kawa „Nuta nadziei” zostanie wprowadzona do stałej sprzedaży.

Mediana z próby i moda z próby

5.19. Wyznacz modę (dominantę) oraz medianę zbioru danych statystycznych przedstawionych w postaci:

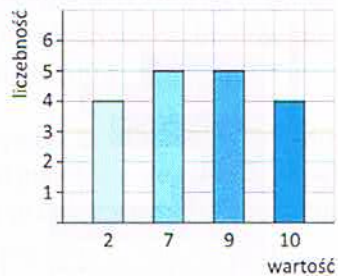
a) zestawu liczb:

3 1 1 2 3 5 1 2 3 3 5 5 4 2 1 3 2 2 3 1 4 5

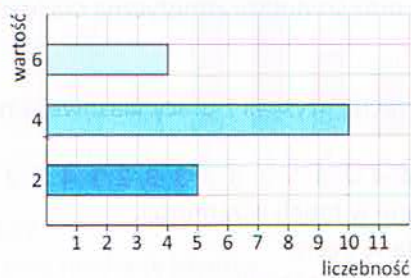
b) tabeli liczebności:

Wartość	3	12	5	9
Liczebność	7	2	4	6

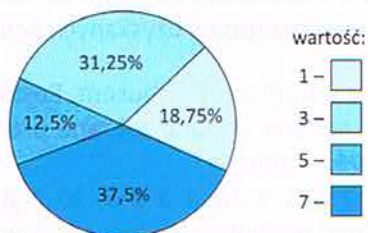
c) diagramu kolumnowego:



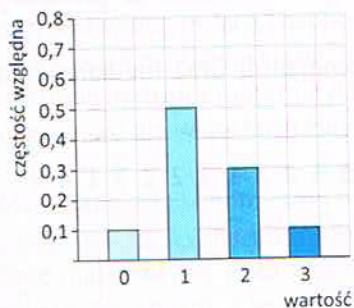
d) diagramu słupkowego:



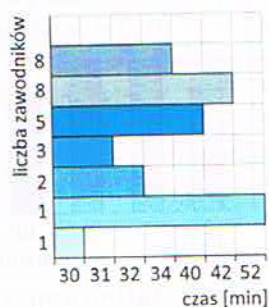
e) diagramu kołowego procentowego:



f) diagramu częstości względnych:



5.20. W biegu przełajowym zmierzono czas 28 pierwszym osobom, które przekroczyły metę. Wyniki przedstawiono w postaci diagramu słupkowego.



Wyznacz modę, medianę oraz średnią arytmetyczną czasu uzyskanego przez zawodników.

5.21. Uczniowie klasy trzeciej uzyskali z pracy klasowej z matematyki następujące oceny:

3 1 2 4 4 2 3 3 2 1 4 2 3 5 2 3 3 3 2 1 4 5 2 3 4 2 3 4 1 3 3.

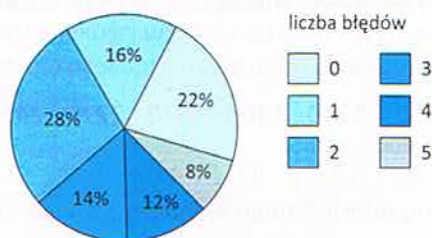
- Przedstaw zebrane dane w tabeli liczebności.
- Wyznacz modę i medianę ocen.
- Oblicz średnią ocen z pracy klasowej.
- Jaki procent uczniów otrzymało oceny pozytywne?
- Jaki procent uczniów otrzymało oceny co najmniej dostateczne?
- Sporządź diagram kołowy procentowy uzyskanych ocen.

5.22. Pan Kowalski dojeżdża do pracy autobusem. Postanowił zbadać czas oczekiwania na autobus. Poniżej podane są dane zebrane przez pana Kowalskiego (czas oczekiwania w minutach) w kwietniu:

10 5 10 5 10 7 10 5 2 8 5 3 10 4 3 5 7 10 5 8 10 5.

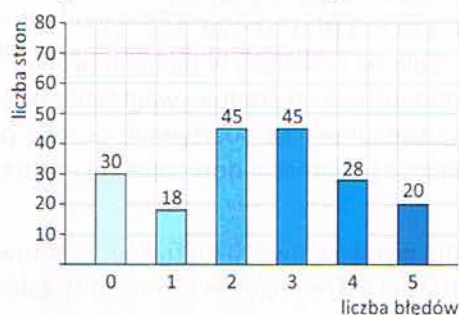
- Sporządź diagram częstości względnych czasu oczekiwania.
- Wyznacz modę i medianę czasu oczekiwania.
- Oblicz średni czas oczekiwania na autobus.
- Oblicz, jaki procent stanowiły dni, w których czas oczekiwania na autobus był większy od średniej.

5.23. Pięćdziesiąt osób zdawało testowy egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nich błędów jest przedstawiona na diagramie kołowym procentowym.



- Aby zdać egzamin, można było popełnić co najwyżej dwa błędy. Ile osób zdało egzamin?
- Oblicz średnią liczbę błędów.
- Jaki procent zdających popełniło więcej błędów, niż wynosi średnia?
- Wyznacz modę i medianę błędów.

5.24. Maszynistka przepisywała książkę. Na żadnej stronie nie popełniła więcej niż pięć błędów. Po przepisaniu policzono, ile błędów popełniła na poszczególnych stronach. Otrzymane wyniki są przedstawione na diagramie kolumnowym.



- Ile stron liczyła książka?
- Podaj modę błędów oraz medianę błędów.
- Oblicz, ile średnio błędów popełniła maszynistka na jednej stronie.
- Oblicz, jaki procent stanowiły strony, na których liczba błędów była mniejsza od połowy średniej.

Wariancja i odchylenie standardowe

5.25. Poniższa tabela przedstawia miesięczne wynagrodzenie pracowników pewnej firmy.

Wynagrodzenie miesięczne [zł]	850	1240	1300	1820	2210	2430	3840	4250	5400
Liczba pracowników	3	2	1	4	3	2	3	2	1

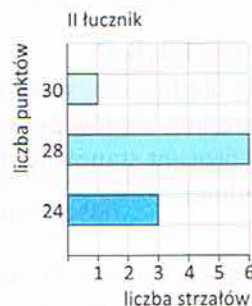
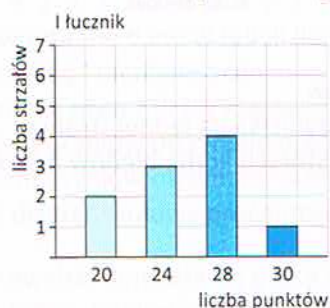
- Wskaż modę i medianę miesięcznego wynagrodzenia w tej firmie.
- Oblicz średnią płacę miesięczną w tej firmie. Wynik podaj z dokładnością do jednego grosza.
- Jaki procent zatrudnionych w tej firmie ma płacę mniejszą, niż wynosi średnia miesięczna? Wynik zaokrąglij do jedności.
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej płacy miesięcznej. Wynik podaj z dokładnością do pełnych złotych.

5.26. Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę $120 \text{ g} \pm 1,8 \text{ g}$. Organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z pewnej partii i otrzymała następujące wyniki w gramach:

118 119 121 120,5 119,5 119 120 122 123 117.

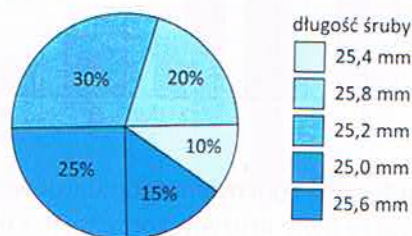
- Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady w badanej próbie.
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej wagi tabliczki czekolady.
- Oceń, czy organizacja konsumencka pozytywnie oceniła producenta czekolady, czy zwróciła się do niego z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.

5.27. W celu porównania wyników dwóch łuczników zanotowano liczbę zdobytych przez nich punktów w dziesięciu treningowych seriach strzałów.



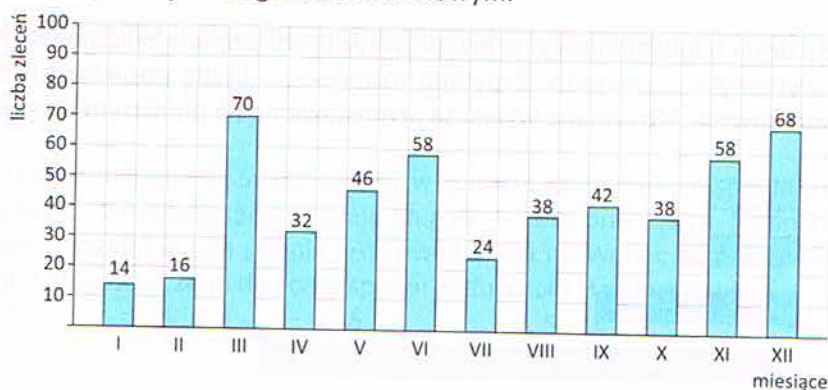
- Wyznacz medianę punktów w dziesięciu seriach strzałów dla każdego łucznika.
- Oblicz średnią liczbę punktów zdobytą przez każdego łucznika.
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej liczby punktów dla każdego łucznika. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Oceń, który z zawodników ma bardziej stabilną formę.

5.28. Kontrola jakości w firmie produkującej śruby bada ich jakość według następujących zasad: pobiera z danej partii losowo 20 śrub i odrzuca partię, jeśli odchylenie standardowe od średniej długości śruby jest większe niż 0,4 mm. Żądana długość śruby to 25,5 mm. Kontrola jakości wybrała 20 śrub z wyprodukowanej partii. Poniższy diagram kołowy ilustruje procentowy udział śrub o odpowiedniej długości wśród losowo wybranych do badania.



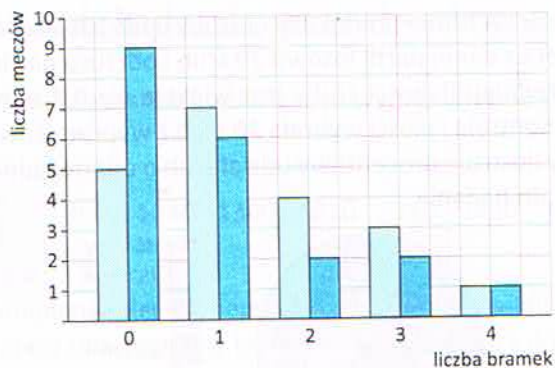
- Oblicz średnią długość śruby w wylosowanej do badania próbie.
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej długości śruby.
- Oceń, czy kontrola jakości wypadła pomyślnie.

5.29. Firma transportowa „Z nami szybko i bezpiecznie”, która zajmuje się przewożeniem towarów, zbadała liczbę zleceń w poszczególnych miesiącach 2009 r. Dane są zilustrowane poniżej na diagramie kolumnowym.



- Oblicz medianę liczby zleceń.
- Oblicz średnią miesięczną liczbę zleceń. W których miesiącach liczba zleceń przekroczyła średnią?
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej miesięcznej liczby zleceń.
- W których miesiącach liczba zleceń była mniejsza niż $\bar{x} - \sigma$?

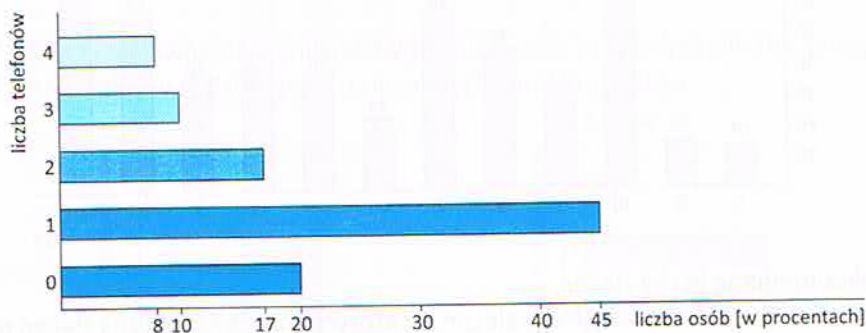
5.30. Porównywano skuteczność dwóch drużyn piłkarskich. W tym celu zbadano liczbę zdobytych bramek każdej z drużyn w 20 spotkaniach. Wyniki przedstawia poniższy diagram.



Oblicz dla każdej z drużyn średnią i odchylenie standardowe liczby zdobytych w meczu bramek. Scharakteryzuj te dwie drużyny, korzystając z obliczonych wielkości.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Pewna firma telekomunikacyjna przeprowadziła ankietę telefoniczną wśród 300 losowo wybranych abonentów. Zapytano rozmówcę o liczbę posiadanych telefonów komórkowych. Otrzymane wyniki są przedstawione na poniższym diagramie.



Ile osób spośród badanych ma co najwyżej dwa telefony komórkowe?

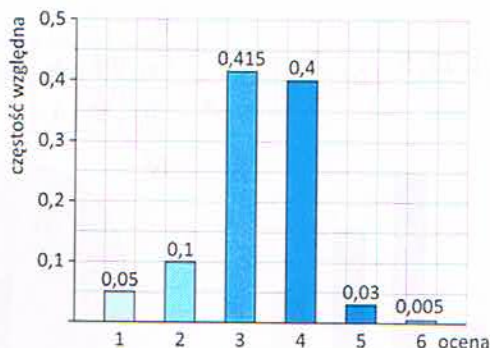
A. 82

B. 65

C. 246

D. 186.

2. Poniższy diagram ilustruje wyniki z matematyki na półroczu, uzyskane przez uczniów pewnej szkoły średniej.



Średnia ocen uczniów tej szkoły jest równa:

- A. 3,275 B. 3,315 C. 3,405 D. 3,425.

3. Przeprowadzono sondę uliczną, zadając pytanie: „Ile godzin w tygodniu przeznaczają Pan (Pani) na zajęcia sportowe?” Wyniki tego badania ilustruje poniższa tabela.

Liczba godzin	0	1	4	6	9	10	12
Liczba osób	5	12	6	15	4	10	2

Wobec tego moda liczby godzin przeznaczonych tygodniowo na zajęcia sportowe wynosi:

- A. 6 B. 15 C. 9 D. 12.

4. W sklepie znajduje się 50 par spodni, wśród których jest 12 par spodni o długości 1,2 m każda. Pozostałe spodnie mają długość 1,24 m oraz 1,3 m. Średnia długość wszystkich spodni w tym sklepie jest równa 1,264 m. Wobec tego stosunek liczby spodni o długości 1,24 m do liczby spodni o długości 1,3 m jest równy:

- A. 4 : 7 B. 3 : 5 C. 5 : 7 D. 5 : 14.

5. Mediana wszystkich rozwiązań równania
$$\frac{(x^2-1) \cdot (2x^3+18x) \cdot (x^2-5x+6)}{3x^2+6x+3} = 0$$
 jest równa:

- A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$.

6. Średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest równa 1,2, zaś wariancja tych liczb wynosi 0,16. Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Suma tych liczb jest równa 0,6.
 B. Liczby te są równe 1,3 oraz 1,1.
 C. Wartość bezwzględna różnicy tych liczb wynosi 1.
 D. Jedna liczba jest dwa razy większa od drugiej.

7. Niech M_1 , M_2 , M_3 oraz M_4 oznaczać mediany danych statystycznych przedstawionych odpowiednio w punktach: I, II, III i IV.

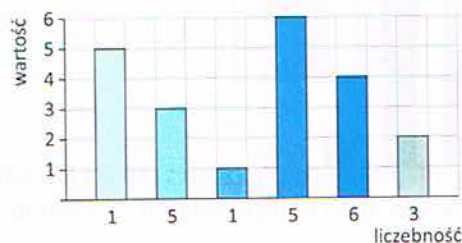
I.

1, 5, 7, 3, 3, 5, 1, 1, 6, 1, 12, 5

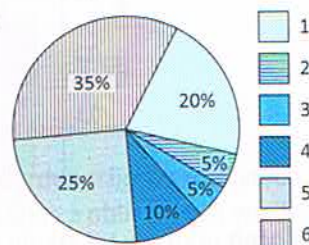
II.

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	3	4	5	6	7	8

III.



IV.



Wskaż zdanie falszywe.

A. $\frac{M_3 + M_4}{2} = 4\frac{1}{2}$

B. $M_2 > M_4$

C. $M_1 = M_3$

D. $M_2 + M_3 = 9$.

8. Właściciel zakładu krawieckiego, przed wprowadzeniem nowego modelu sukienki, przeprowadza wśród wybranych klientek sondaż, badając gusta kobiet w trzech kategoriach: F – fason (z wagą 6), M – rodzaj materiału (z wagą 3) oraz K – kolor (z wagą 1). Każda zapytana klientka, przyznaje każdej z wymienionych kategorii ocenę. Ocenę końcową modelu sukienki, właściciel oblicza jako średnią ważoną średnich ocen w poszczególnych kategoriach.

W wyniku tego badania okazało się, że $\bar{x}_M = 5,6$, $\bar{x}_K = 9,5$ oraz średnia ważona ocen w poszczególnych kategoriach ma wartość 6,23. Zatem średnia ocena w kategorii F jest równa:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 18.

9. Poddano kontroli dzienną dostawę soku jabłkowego pakowanego do 0,25-litrowych kartoników i dostarczanego przez producenta do sklepu osiedlowego. Umowa pomiędzy sprzedawcą i producentem zakłada, że zawartość soku w kartoniku zawiera się w przedziale $\langle \bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma \rangle$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią zawartością soku w kartoniku, a σ – odchyleniem standardowym.

Wyniki kontroli przedstawia poniższa tabela.

Zawartość soku w kartoniku [l]	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27
Liczba kartoników	2	5	8	22	7	6

Okazało się, że średnia zawartość soku w kartoniku jest równa 0,249 l, zaś wariancja ma wartość 0,000153 l.

Jaki procent dostawy nie spełnia warunków umowy?

A. 56%

B. 40%

C. 16%

D. 26%.

10. Skoczek narciarski wykonał 5 skoków o długości: 130 m, 120 m, 100 m, 126 m oraz 124 m. Odchylenie standardowe w tej serii skoków jest liczbą z przedziału:

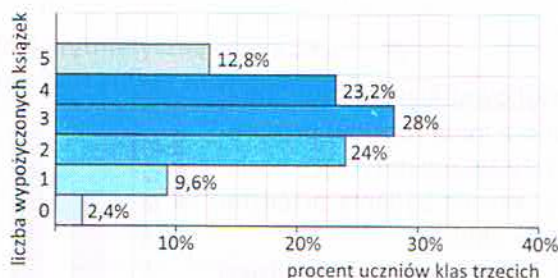
- A. $\left(8\frac{1}{2}, 9\right)$ B. $\left(9, 9\frac{1}{2}\right)$ C. $\left(9\frac{1}{2}, 10\right)$ D. $\left(10\frac{1}{2}, 11\right)$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

5.31. W zestawie danych: 4, 7, 5, 8, x , 7, 3, 5, 9, 2 liczba x jest jedyną dominantą. Mediana wynosi 6. Wyznacz liczbę x , a następnie oblicz średnią arytmetyczną tych liczb, wariancję oraz odchylenie standardowe od średniej.

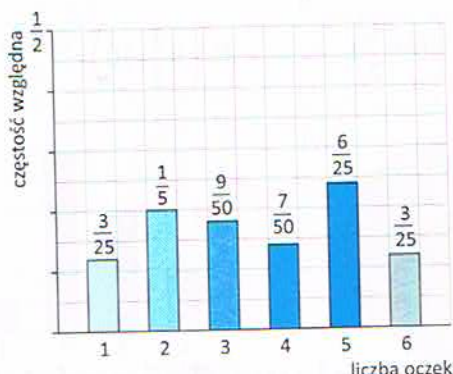
- 5.32. a) Wyznacz liczby naturalne x oraz y , jeśli wiadomo, że średnia arytmetyczna zestawu liczb 3, x , 4, 3, y , 2, 5, 4, 4, 3 wynosi 3,6, a jedyną dominantą jest liczba 3.
b) Wyznacz liczby naturalne x oraz y , jeśli wiadomo, że średnia arytmetyczna zestawu liczb x , y , 3, 5, 1, 7, 8, 12, 15, 10 jest równa 7,1, mediana $M_e = 7,5$ i $x < M_e$.

5.33. Bibliotekarka w pewnym liceum sprawdziła, ile książek w I semestrze wypożyczyli uczniowie klas trzecich z biblioteki szkolnej. Wyniki przedstawiła na diagramie słupkowym.



- a) Oblicz średnią liczbę wypożyczonych książek przypadającą na jednego trzecioklasistę.
b) Oblicz, ilu jest trzecioklasistów w tym liceum, jeśli wiadomo, że 80 uczniów wypożyczyło w I semestrze więcej książek, niż wynosi średnia przypadająca na jednego ucznia.

5.34. Janek rzucił 50 razy kostką do gry i za każdym razem zapisał wynik rzutu. Następnie sporządził diagram częstości względnych tego doświadczenia, który podany jest poniżej.



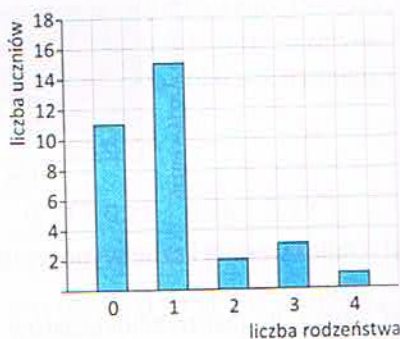
- Podaj modę i medianę liczby wyrzuconych oczek.
- Oblicz średnią liczbę oczek w jednym rzucie.
- Oblicz wariancję i odchylenie standardowe od średniej liczby oczek w jednym rzucie.

5.35. W prywatnej specjalistycznej przychodni lekarskiej pracuje o 4 lekarzy więcej niż pozostałych pracowników. Średnia pensja lekarzy zatrudnionych w tej przychodni wynosi 3850 zł, zaś średnia pensja pozostałych pracowników jest o 1900 zł niższa. Średnia płaca wszystkich pracowników tej przychodni jest równa 3090 zł. Oblicz, ilu lekarzy pracuje w tej przychodni.

5.36. Maciek i Grzegorz analizowali wyniki swoich prac klasowych z matematyki. Każdy z chłopców ma po pięć ocen. Maciek uzyskał następujące wyniki: 4, 4, 2, 5, 5. Okazało się, że średnia ocen Grzegorza jest o 1 mniejsza niż średnia ocen Maćka. Wiedząc, że wariancja ocen każdego z chłopców była taka sama i wynosiła 1,2, uzupełnij oceny Grzegorza z prac klasowych z matematyki, jeśli wiadomo, że wśród pięciu ocen są: 2, 3, 3.

5.37. Wśród 32-osobowej klasy 3a (w której każdy uczeń pochodzi z innej rodziny) przeprowadzono badania statystyczne dotyczące posiadanego rodzeństwa. Wyniki badania przedstawione są na diagramie obok.

- Oblicz medianę i podaj modę liczby dzieci w badanej rodzinie.
- Oblicz średnią liczbę dzieci w badanej rodzinie.
- Oblicz odchylenie standardowe od średniej liczby dzieci w badanej rodzinie. Wynik podaj z dokładnością do całości.



5.38. Nauczyciel przedstawił uczniom następujący system klasyfikacji rocznej z matematyki: Ocena roczna jest wystawiana jako zaokrąglona do liczby całkowitej średnia ważona oceny za pierwszy semestr z wagą 0,4 i oceny za drugi semestr z wagą 0,6. Oceny semestralne wystawia nauczyciel jako średnie ważone (zaokrąglone do całości) następujących liczb: k – średniej z prac klasowych z wagą 0,65, u – średniej z odpowiedzi ustnych z wagą 0,25, d – średniej z prac domowych z wagą 0,1 (każdą z tych średnich zaokrągla do jednego miejsca po przecinku).

Oblicz, jaką ocenę roczną otrzyma uczeń, który uzyskał następujące oceny:

	I semestr	II semestr
Prace klasowe	3, 4, 2, 3	4, 3, 4, 3
Odpowiedzi ustne	4, 5, 2	3, 4, 3
Prace domowe	4, 1	4, 5

*** 5.39.** Suma trzech liczb x , y oraz z wynosi 6, a ich wariancja jest równa 21. Oblicz sumę kwadratów tych liczb.

5.40. Zestaw trzech liczb a , b i c ma średnią arytmetyczną $\bar{x}_1$ i odchylenie standardowe od średniej równe σ_1 . Zestaw trzech liczb $a + 8$, $b + 8$ i $c + 8$ ma średnią arytmetyczną $\bar{x}_2$ i odchylenie standardowe σ_2 . Wyznacz związek pomiędzy średnimi arytmetycznymi i odchyleniami standardowymi obu zestawów danych.

*** 5.41.** Wiadomo, że wariancję zestawu danych $x_1, x_2, \dots, x_n$ możemy obliczyć ze wzoru:

$$(1) \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

lub ze wzoru:

$$(2) \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Udowodnij, że wzory (1) i (2) są równoważne.

6. Geometria przestrzenna

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

6.1. Dane są proste k, l, m . Ustal, jak mogą być położone względem siebie proste k i m , jeśli:

- proste k i l są skośne oraz $l \parallel m$
- proste k, l, m nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale prosta l ma jeden punkt wspólny z prostą k i jeden punkt wspólny z prostą m .

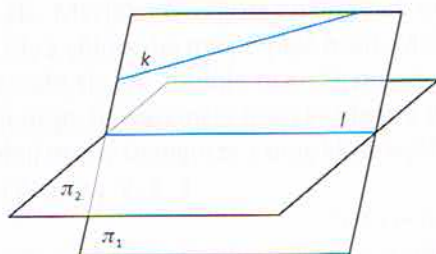
6.2. Niech π oznacza płaszczyznę, natomiast k, l niech będą prostymi w przestrzeni. Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie:

- jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel \pi$, to $k \parallel l$
- jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel l$, to $k \parallel \pi$?

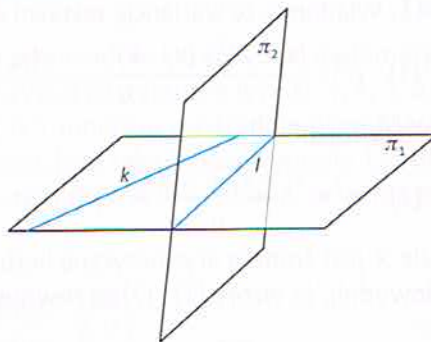
Odpowiedź uzasadnij.

6.3. Na rysunku poniżej prosta l jest krawędzią przecięcia płaszczyzn π_1 oraz π_2 . Wskaż punkt, w którym prosta k zawarta w płaszczyźnie π_1 i nierównoległa do krawędzi l przebija płaszczyznę π_2 . Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)



6.4. Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C poza tą płaszczyzną. Punkt P należy do odcinka AC , a punkt Q – do odcinka BC . Wykaż, że

- jeśli $|AP| = |PC|$ oraz $|BQ| = |QC|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π
- jeśli $|AP| \cdot |CQ| = |PC| \cdot |BQ|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π .

6.5. Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$. Punkty P, Q, R są odpowiednio środkami odcinków AD, BD, CD . Wykaż że

- trójkąt PQR jest równoramienny
- płaszczyzna (PQR) jest równoległa do płaszczyzny (ABC) .

6.6. W sześcianie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ punkt P jest środkiem krawędzi $B_1 C_1$, a punkt Q – środkiem krawędzi BB_1 . Wykaż, że czworokąt $AQPD_1$ jest trapezem równoramiennym.

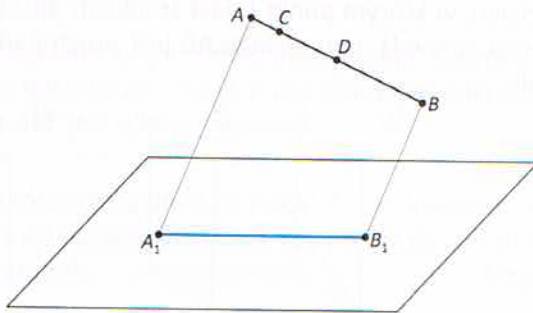
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

6.7. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem odcinka jest punkt. Jak jest położony ten odcinek względem prostej wyznaczającej kierunek rzutowania?

6.8. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem pięciokąta jest odcinek. Jak jest położona prosta wyznaczająca kierunek tego rzutowania, względem płaszczyzny, w której zawarty jest pięciokąt?

6.9. W rzucie równoległym na płaszczyznę π obrazem danego koła jest koło do niego przystające. Jak są położone względem siebie rzutnia i płaszczyzna zawierająca dane koło?

6.10. Na rysunku poniżej dany jest odcinek AB oraz $A_1 B_1$, będący rzutem równoległym odcinka AB na płaszczyznę π w kierunku prostej AA_1 . Punkty C, D należą do odcinka AB oraz $|CD| = 2|AC|$ i $|AD| = |DB|$. Wyznacz rzuty równoległe punktów C, D na płaszczyznę π . W jakim stosunku punkty C_1, D_1 dzielą odcinek $A_1 B_1$?



6.11. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli podstawę AB na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku $1 : 3$. Odcinek CE jest środkową tego trójkąta. Narysuj rzut równoległy tego trójkąta w przypadku, gdy bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do rzutni i nie jest równoległa do prostej wyznaczającej kierunek rzutowania. Zaznacz rzut wysokości CD oraz rzut środkowej CE . W jakim stosunku punkty D_1 i E_1 dzielą bok $A_1 B_1$ trójkąta $A_1 B_1 C_1$?

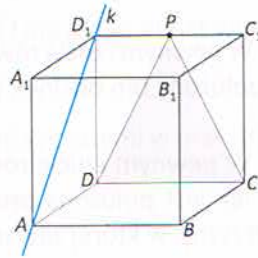
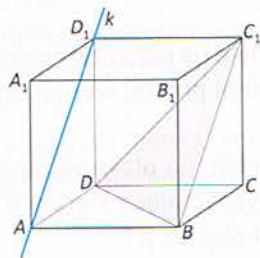
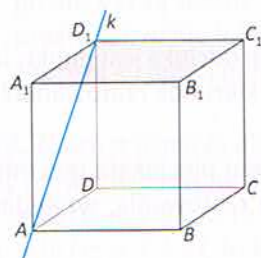
6.12. Naszkicuj rzut równoległy sześciokąta foremnego w przypadku, gdy dwa boki sześciokąta są równoległe do rzutni, ale sześciokąt zawiera się w płaszczyźnie nie-równoległej do rzutni i nierównoległej do kierunku rzutowania. Następnie poprowadź przekątne w danym sześciokącie i przekątne w rzucie. Co zauważyłeś?

6.13. Dany jest sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Niech płaszczyzna $(ABCD)$ będzie rzutnią, a prosta AD_1 – kierunkiem rzutu równoległego na płaszczyznę $(ABCD)$. Naszkicuj obraz w tym rzucie:

a) kwadratu $A_1 B_1 C_1 D_1$

b) trójkąta DBC_1

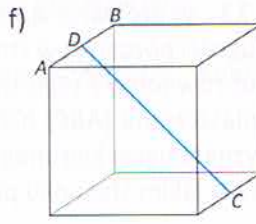
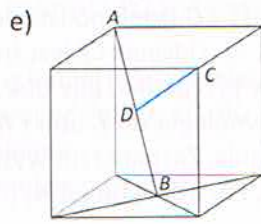
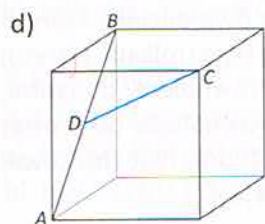
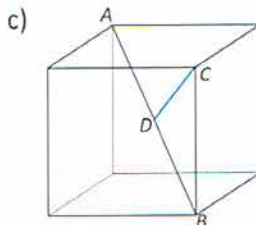
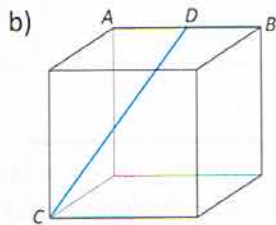
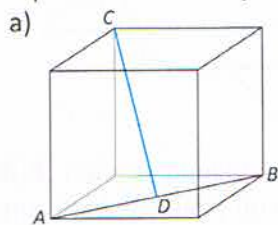
c) trójkąta DCP , gdzie P oznacza środek odcinka $D_1 C_1$.



Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę

6.14. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym AC jest przeciwprostokątną. Odcinek BS jest prostopadły do płaszczyzny, w której zawarty jest trójkąt ABC . Niech punkt D należy do odcinka CS . Wykaż, że trójkąt ABD jest prostokątny.

6.15. Dany jest sześcian, w którym punkt D jest środkiem odcinka AB . Na podstawie danych na rysunku sprawdź, czy odcinek AB jest prostopadły do odcinka CD . Odpowiedź uzasadnij.



6.16. W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O . Punkt S nie należy do płaszczyzny $(ABCD)$. Wiadomo, że $|AS| = |SC|$ oraz $|SD| = |SB|$. Czy odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny $ABCD$? Odpowiedź uzasadnij.

6.17. W trójkącie prostokątnym ABC punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Punkt S nie należy do płaszczyzny (ABC) . Wiadomo, że $|AS| = |SB| = |SC|$. Wykaż, że odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) .

6.18. Odcinek AB zawarty w płaszczyźnie π ma długość 120 cm. Odległość punktu C leżącego poza płaszczyzną π od punktu A jest taka sama jak od punktu B i wynosi 61 cm. Rzut prostokątny punktu C na płaszczyznę π należy do odcinka AB . Oblicz odległość punktu C od płaszczyzny π .

6.19. Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C , który leży w odległości 9 cm od płaszczyzny π oraz w odległości $\sqrt{106}$ cm od punktu A i 15 cm od punktu B . Wiedząc, że punkt C' jest rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π oraz $\angle AC'B = 90^\circ$, oblicz długość odcinka AB .

6.20. Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π jest punkt A' . Do prostej k zawartej w płaszczyźnie π i przechodzącej przez punkt A' należą punkty B, C , przy czym punkt B leży między punktami A' i C . Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 9$ cm oraz $|AC| = 17$ cm, oblicz odległość punktu A od płaszczyzny π .

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

6.21. Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Odcinek CD jest prostopadły do odcinka AC i do odcinka BC . Punkt E jest środkiem odcinka AB . Wykaż, że jeśli $ED \perp AB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

6.22. W trójkącie różnobocznym ABC punkt E jest środkiem odcinka BC . Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) . Czy prosta DE jest prostopadła do prostej BC ? Odpowiedź uzasadnij.

6.23. Dany jest kwadrat $ABCD$. Odcinek DE jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty ABE oraz BCE są prostokątne.

6.24. W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB jest jednocześnie wysokością poprowadzoną na boki AD i BC . Proste DB i AC przecinają się w punkcie O . Odcinek EO jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty BCE i ADE są prostokątne.

6.25. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AC| = 15$ cm, $|BC| = 20$ cm. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) i ma długość 22,5 cm. Oblicz wysokość trójkąta ABD poprowadzoną na bok AB .

6.26. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona na przeciwprostokątną AB dzieli ją na odcinki długości: $|AD| = 9$ cm i $|DB| = 4$ cm. Odcinek EC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) . Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest o 26 cm² mniejsze od pola trójkąta ABE , oblicz odległość punktu E od płaszczyzny (ABC) .

6.27. W trójkącie ABC boki mają długość: $|AB| = 60$ cm, $|AC| = |BC| = 50$ cm. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) . Odległość punktu D od prostej BC jest równa 52 cm. Oblicz odległość punktu D od płaszczyzny (ABC) .

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

6.28. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A . Punkt B należy do prostej l , która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π oraz $|AB| = 8$ cm. Oblicz odległość punktu B od prostej k , jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:
a) 30° b) 45° c) 60° .

6.29. Płaszczyzny π_1 i π_2 są prostopadłe, a krawędzią ich przecięcia jest prosta m . Punkt A należy do płaszczyzny π_1 i leży w odległości 8 cm od prostej m . Punkt B należy do płaszczyzny π_2 i leży w odległości 6 cm od prostej m . Wiedząc, że rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 jest ten sam punkt co rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π_1 , oblicz:

- a) tangens kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_2
- b) cosinus kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_1 .

6.30. Na płaszczyźnie π dany jest odcinek AB . Odcinek BC jest prostopadły do płaszczyzny π . Punkt D jest środkiem odcinka BC . Oblicz sinus kąta nachylenia prostej AC do płaszczyzny π , wiedząc, że tangens nachylenia prostej AD do płaszczyzny π wynosi $\frac{2}{3}$.

6.31. Dane są dwa przystające równoległoboki $ABCD$ i $DCEF$ o wspólnym boku DC . Miara kąta ostrego obu równoległoboków jest równa: $|\angle CDA| = |\angle EDC| = 30^\circ$. Płaszczyzny zawierające te równoległoboki tworzą kąt dwuścienny o mierze 60° . Wiedząc, że $|AD| = |DF| = 2$ dm, oblicz odległość między prostymi AB i EF .

6.32. Dane są dwa przystające romby $ABCD$ i $DCEF$ o wspólnym boku DC długości 4 cm. Miara kątów ostrych tych rombów jest równa: $|\angle ADC| = |\angle DCE| = 45^\circ$. Płaszczyzny zawierające te romby tworzą kąt dwuścienny o mierze 120° . Oblicz odległość między prostymi AB i EF .

6.33. Trzy punkty A, B, C leżące na płaszczyźnie π wyznaczają trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = 5$ oraz $|AB| = 6$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π , a jego długość jest równa 8. Oblicz:

- tangens kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π
- tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .

6.34. Trójkąt prostokątny ABC zawiera się w płaszczyźnie π , przy czym $|\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|AC| = 20$, $|AB| = 12$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 12. Oblicz:

- sinus kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π
- sinus kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .

6.35. Trójkąt prostokątny ABC zawiera się w płaszczyźnie π , przy czym $|AB| = 10$, $|BC| = 6$ oraz $|\angle ACB| = 90^\circ$. Odcinek CD jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 8. Oblicz:

- miarę kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π
- cosinus kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π
- tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .

Graniastopy

6.36. Wykaż, że długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

- Wyznacz cosinus kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz a w przypadku, gdy przekątna sześcianu ma długość 3 cm.

6.37. Wykaż, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a, b, c jest równa $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu i miarę kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy w przypadku, gdy krawędzie podstawy mają długość: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, zaś krawędź boczna ma długość $c = 5$ cm.

6.38. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $3 : 4 : 12$, a długość przekątnej prostopadłościanu jest równa 26 cm. Oblicz długości przekątnych trzech nieprzystających ścian.

6.39. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz:

- a) tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
- b) sinus kąta między przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy, wychodzącymi z tego samego wierzchołka
- c) cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

6.40. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $\sqrt{8}$, a krawędź podstawy ma długość 2. Oblicz:

- a) cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
- b) sinus kąta między przekątną jednej ściany bocznej a krawędzią podstawy zawartą w sąsiedniej ścianie bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka
- c) miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

6.41. Stosunek długości przekątnej ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego do długości krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

6.42. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego bok ma długość $5\sqrt{3}$ cm. Wiedząc, że graniastosłup ma wysokość 8 cm, a dłuższa przekątna graniastosłupa ma 17 cm, oblicz:

- a) miarę kąta ostrego rombu
- b) długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

6.43. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb. Graniastosłup ma wysokość 12 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 45^\circ$, a krótsza pod kątem $\beta = 60^\circ$. Oblicz długość krawędzi podstawy.

6.44. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego długość krawędzi podstawy jest równa 3 cm, a krawędzi bocznej – 8 cm.

6.45. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego podstawy mają długość a i b , a ramię ma długość c . Wysokość tego graniastosłupa jest równa H . Wykaż, że długość przekątnej d tego graniastosłupa opisuje wzór:

$$d^2 = H^2 + ab + c^2.$$

6.46. Liczba naturalna parzysta n oznacza liczbę wierzchołków pewnego graniastosłupa.

- a) Wyznacz liczbę s ścian i liczbę k krawędzi tego graniastosłupa w zależności od n .
- b) Oblicz liczbę ścian i liczbę krawędzi graniastosłupa w przypadku, gdy $n = 10$.

6.48. W pewnym graniastosłupie liczba krawędzi jest dwa i pół raza większa od liczby ścian. Jakie wielokąty są podstawami tego graniastosłupa?

* **6.50.** W graniastosłupie prostym trójkątnym każdy wierzchołek jednej podstawy połączono odcinkiem z punktem przecięcia przekątnych ściany bocznej przeciwległej temu wierzchołkowi. Wykaż, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

6.51. Oblicz, ile ścian oraz ile krawędzi ma ostrosłup, którego liczba wierzchołków jest równa:

6.52. W pewnym ostrosłupie liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi. Oblicz, ile wierzchołków ma ten ostrosłup.

6.53. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 20 cm, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60° . Oblicz:

- a) długość krawędzi bocznej
b) wysokość ostrosłupa
c) wysokość ściany bocznej.

6.54. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa $4\sqrt{2}$ cm, a krawędzi bocznej – 5 cm. Oblicz:

- wysokość tego ostrosłupa
- wysokość ściany bocznej, poprowadzoną na krawędź podstawy
- odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

6.55. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz:

- a) miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
b) odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od ściany bocznej.

6.56. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są do siebie prostopadłe. Wyznacz tangens kąta α nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy i podaj przybliżoną miarę tego kąta (z dokładnością do 1°).

6.57. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{6}$. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy 120° . Oblicz:

- a) odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej
- b) wysokość ostrosłupa.

6.58. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12 dm, a krawędź boczna 8 dm. Oblicz:

- a) wysokość tego ostrosłupa
- b) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

6.59. Dany jest czworościan foremny o wysokości H i krawędzi długości a .

- a) Wykaż, że $3H^2 = 2a^2$
- b) Wiedząc dodatkowo, że wysokość jest o 1 krótsza od krawędzi, oblicz a . Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{N}$.

6.60. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości 30 cm kąt dwuścienny przy podstawie ma 60° . Oblicz:

- a) wysokość ściany bocznej
- b) długość krawędzi podstawy.

6.61. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

6.62. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy, jeśli:

- a) wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od krawędzi podstawy
- b) wysokość ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy.

6.63. Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa $5\sqrt{3}$ cm, a kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma 60° . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

6.64. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość ściany bocznej jest równa $10\sqrt{3}$ cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma 60° . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

6.65. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm, a krawędzie boczne mają po 13 cm długości. Oblicz:

- a) wysokość ostrosłupa
- b) wysokości h_1 i h_2 dwóch różnych ścian bocznych ostrosłupa.

6.66. Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości: $|AC| = 6$ cm i $|BC| = 8$ cm. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 12 cm. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej CS do płaszczyzny podstawy.

6.67. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden z kątów jest równy 120° , a najdłuższy bok ma długość $\sqrt{243}$ cm. Wiedząc, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość równą 15 cm, wyznacz wysokość tego ostrosłupa.

6.68. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa boki mają długość 17 cm, a trzeci bok 16 cm. Wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

6.69. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt, którego boki mają długość: 21 cm, 17 cm, 10 cm. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa $5\frac{2}{3}$ cm, oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

6.70. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny. Krótsza podstawa i ramię tego trapezu są tej samej długości. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 61 cm, a wysokość ostrosłupa to 60 cm. Wiedząc, że środek okręgu opisanego na trapezie jest środkiem dłuższej podstawy trapezu, oblicz pole tego trapezu.

6.71. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC , w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 9$ cm, $|BC| = 16$ cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C . Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm, oblicz:

- a) długość boków trójkąta ABS
- b) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABS) do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

6.72. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a spodek wysokości znajduje się w jednym z wierzchołków tego kwadratu. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy, oblicz:

- a) miarę kąta nachylenia ścian bocznych, które nie zawierają wysokości ostrosłupa, do płaszczyzny podstawy
- b) cosinus kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej ostrosłupa do krawędzi podstawy.

6.73. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku długości 20 cm i kącie ostrym miary 60° . Punkt przecięcia się przekątnych jest spodkiem wysokości ostrosłupa, która jest równa $5\sqrt{6}$ cm. Oblicz:

- a) wysokość ściany bocznej, poprowadzonej na krawędź podstawy
- b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

6.74. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 6 dm i 8 dm. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

6.75. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długość 6 cm i 3 cm, a ramiona 4 cm i 5 cm. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem ostrym miary α . Wyznacz sinus kąta α , jeśli wysokość ostrosłupa jest równa 6 cm.

Siatka wielościanu.

Pole powierzchni wielościanu

6.76. Narysuj:

- a) cztery różne siatki sześcianu
- b) dwie różne siatki prostopadłościanu, którego żadna ściana nie jest kwadratem.

6.77. Narysuj siatkę graniastostupa:

- a) prawidłowego czworokątnego
- b) prawidłowego trójkątnego
- c) prawidłowego sześciokątnego
- d) prostego, którego podstawą jest równoległobok.

6.78. Narysuj siatkę ostrosłupa:

- a) prawidłowego czworokątnego
- b) prawidłowego trójkątnego
- c) prawidłowego sześciokątnego
- d) prostego, którego podstawą jest prostokąt.

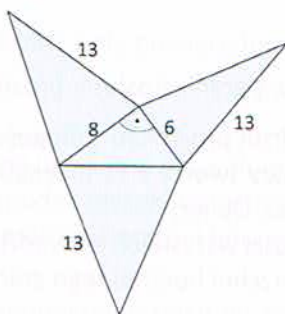
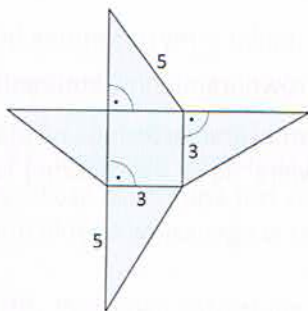
6.79. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny

- a) o przyprostokątnych pozostających w stosunku 2 : 3, a spodek wysokości jest wierzchołkiem tego trójkąta przy kącie prostym
- b) równoramienny, a spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.

6.80. Na podstawie informacji umieszczonych poniżej na siatce ostrosłupa wyznacz wysokość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawą jest:

a) kwadrat

b) trójkąt prostokątny



6.81. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, jeśli:

a) przekątna ściany bocznej ma długość 2 dm

b) przekątna sześcianu ma długość $8\sqrt{3}$ cm.

6.82. Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, jeśli:

a) wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm

b) krawędź podstawy stanowi 75% krawędzi bocznej.

6.83. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ściany bocznej ma długość 30 cm oraz

a) kąt między tą przekątną i przekątną prostopadłościanu, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, ma 30°

b) kąt między tą przekątną i przekątną sąsiedniej ściany bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, ma 60° .

6.84. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi $50(3 + 2\sqrt{3})$ cm².

Przekątna jednej ze ścian bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° , a przekątna sąsiedniej ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

6.85. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego stanowi 50% pola powierzchni całkowitej. Wyznacz tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

6.86. W graniastosłupie prostym podstawa jest rombem, którego przekątne mają długość 30 cm i 16 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

6.87. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 2 dm i 4 dm, którego kąt ostry jest równy 60° . Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

6.88. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego kąt ostry ma 60° . Rzut prostokątny długości $\sqrt{3}$ dm przekątnej graniastosłupa na płaszczyznę podstawy tworzy z tą przekątną kąt 30° i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Oblicz:

- a) sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa
- b) pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

6.89. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $136\sqrt{3}$ cm², a pole podstawy jest równe $64\sqrt{3}$ cm². Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

6.90. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej ma 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6.91. Oblicz długość krawędzi podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego, wiedząc, że krawędź boczna ma długość 5, a pole powierzchni całkowitej jest równe 16.

6.92. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego wysokość jest równa H .

6.93. Wysokość ściany bocznej prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa h , a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy r . Wykaż, że pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3} \cdot (r + h) \cdot r$.

6.94. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego ramię ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 8 cm, oblicz:

- a) długość krawędzi bocznych
- b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

6.95. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 1 dm, a spodkiem wysokości ostrosłupa jest jeden z wierzchołków tego kwadratu. Dwie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz:

- a) długość krawędzi bocznych ostrosłupa
- b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6.96. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 30 cm i 40 cm. Spodek wysokości ostrosłupa jest wierzchołkiem kąta prostego tego trójkąta. Ściana boczna o największym polu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = 1 \frac{1}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6.97. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego przekątne mają długość 6 dm i 8 dm. Wysokość ostrosłupa jest równa 10 cm, a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w ten romb. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

6.98. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości a . Jedna ze ścian bocznych, będąca również trójkątem równobocznym, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

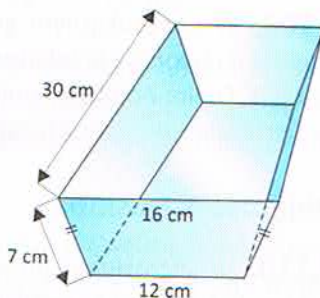
Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

Objętość graniastoslupa

6.99. Akwarium do hodowli rybek ma następujące wymiary: długość 80 cm, szerokość 40 cm i wysokość 0,5 m. Oblicz, ile co najwyżej litrów wody należy wlać do tego akwarium, aby poziom lustra wody znajdował się w odległości nie mniejszej niż 1 dm od górnej krawędzi akwarium.

6.100. Blaszana forma do pieczenia ciasta ma kształt graniastoslupa prostego. Uwzględniając wymiary podane na rysunku obok, oblicz:

- ile cm^2 blachy potrzeba na wykonanie tej formy; wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2
- pojemność formy. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 litra.



6.101. Jeżeli każdą krawędź danego sześcianu przedłużymy o 2 cm, to jego objętość powiększy się o 98 cm^3 . Oblicz długość krawędzi danego sześcianu.

6.102. W prostopadłościanie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ podstawa $ABCD$ jest kwadratem. Wysokość $C_1 E$ trójkąta $BC_1 D_1$ dzieli przekątną $D_1 B$ na odcinki długości: $|D_1 E| = 2 \text{ dm}$, $|EB| = 8 \text{ dm}$. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

6.103. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm i jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

6.104. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dłuższa przekątna ma długość $\sqrt{5}$ dm, a krótsza przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastosłupa.

6.105. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego kąt ostry ma miarę 30° . Wszystkie krawędzie graniastosłupa mają jednakową długość. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe 180 cm^2 , oblicz objętość tego graniastosłupa.

6.106. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez, którego podstawy mają długość 3 cm i 24 cm, a ramiona – 10 cm i 17 cm. Ściana boczna o najmniejszym polu jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

6.107. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt ABC , w którym $|\angle BAC| = 30^\circ$, $|\angle ACB| = 105^\circ$. Przekątna ściany bocznej o najmniejszym polu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 2 dm, oblicz jego objętość.

*** 6.108.** W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym najdłuższa przekątna podstawy ma długość d i tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt α . Oblicz objętość graniastosłupa. Wyznacz te wartości α , dla których zadanie ma rozwiązanie.

*** 6.109.** W czworokątnym graniastosłupie prawidłowym przekątna podstawy ma długość d i tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt α . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Wyznacz te wartości α , dla których zadanie ma rozwiązanie.

Objętość ostrosłupa

6.110. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę α , przy czym $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6.111. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest ośmiokąt. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego krawędź boczna ma długość 10 cm, zaś kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy jest równy 30° .

6.112. Oblicz objętość prawidłowego ostrosłupa trójkątnego, mając daną długość r promienia okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa i miarę α kąta płaskiego ściany bocznej przy podstawie, $\alpha \in (30^\circ, 90^\circ)$.

6.113. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$. Kąt

nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 45° . Wyznacz odległość spodka wysokości

a) od krawędzi bocznej

b) od ściany bocznej ostrosłupa.

6.114. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu równym 1 m^2 . Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty odpowiednio równe 30° i 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

6.115. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 6 cm, a długość trzeciego boku wynosi 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość, równą 9 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

6.116. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 39 cm, a długość trzeciego boku wynosi 30 cm. Każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

6.117. Podstawą ostrosłupa jest romb $ABCD$. Wysokość rombu DE poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli bok AB na odcinki takie, że $|AE| = 6$ i $|EB| = 4$. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 170, oblicz:

a) wysokość ostrosłupa

b) objętość tego ostrosłupa.

6.118. Punkty K, L, M są środkami krawędzi AB, BC i BB_1 sześcianu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

a) Jaką część objętości sześcianu stanowi objętość ostrosłupa $KLMB$?

b) Wiedząc dodatkowo, że odległość wierzchołka B od płaszczyzny (KLM) jest równa $\sqrt{3}$, oblicz długość krawędzi sześcianu.

6.119. W ostrosłupie wszystkie ściany są trójkątami. Trzy krawędzie wychodzące z danego wierzchołka są parami prostopadłe i mają długość: 6 dm, 8 dm, 8 dm. Oblicz odległość tego wierzchołka od przeciwległej ściany ostrosłupa. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 dm.

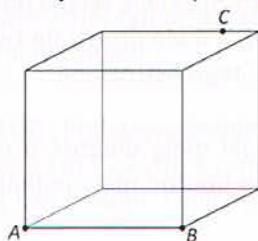
* **6.120.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między dwiema przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 2α , $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$. Odległość wierzchołka podstawy ostrosłupa od przeciwległej krawędzi bocznej jest równa d . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

- * **6.121.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi ma miarę 2α , gdzie $\alpha \in (0^\circ, 30^\circ)$. Odległość wierzchołka podstawy należącego do jednej krawędzi bocznej od sąsiedniej krawędzi bocznej jest równa d . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

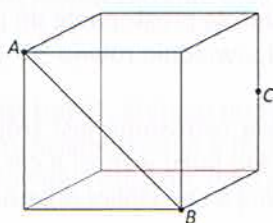
Przekroje wielościanów – konstrukcje

- 6.122.** Na rysunku poniżej odcinek AB i punkt C należą do płaszczyzny π . Wyznacz przekrój sześcianu płaszczyzną (ABC) .

a)

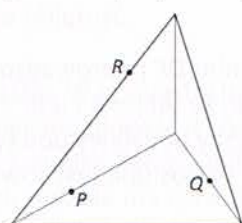


b)

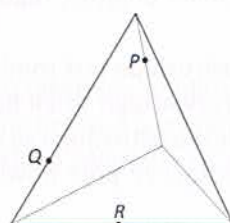


- 6.123.** Na rysunku poniżej punkty P, Q, R należą do płaszczyzny π . Wyznacz przekrój ostrosłupa płaszczyzną (PQR) .

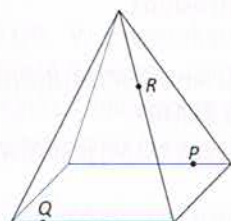
a)



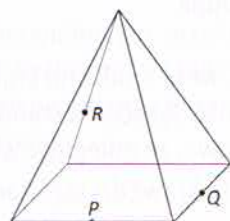
b)



c)

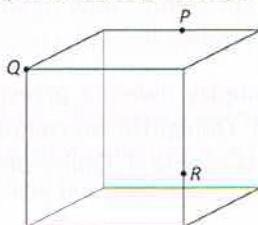


d)

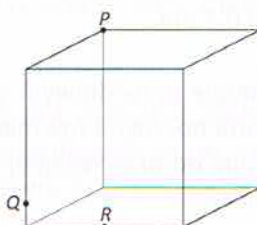


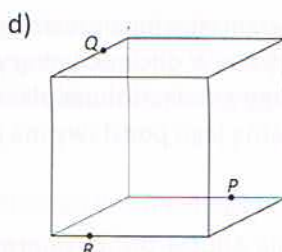
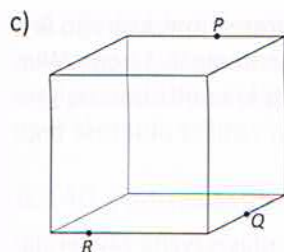
- 6.124.** Na rysunku poniżej punkty P, Q, R należą do płaszczyzny π . Wyznacz przekrój sześcianu płaszczyzną (PQR) .

a)



b)





6.125. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Naszkicuj przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną:

- zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne ostrosłupa
- zawierającą dwie przeciwległe wysokości ścian bocznych
- wyznaczoną przez przekątną podstawy ostrosłupa i środek krawędzi bocznej, niemającej punktów wspólnych z tą przekątną
- wyznaczoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa.

W każdym przypadku wyznacz kąt α , jaki tworzy przekrój daną płaszczyzną z płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

* **6.126.** Wykonaj rysunek ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Następnie poprowadź przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną wyznaczoną przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa. Jakim czworokątem jest otrzymany przekrój?

* **6.127.** Wykonaj rysunek ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Następnie poprowadź przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną wyznaczoną przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Wyznacz konstrukcyjnie punkt, w którym wysokość ostrosłupa przebija otrzymany przekrój.

Przekroje wielościanów – zadania

6.128. Sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A_1, B, C_1 . Oblicz odległość punktu B_1 od otrzymanego przekroju.

6.129. Długości boków prostopadłościanu pozostają w stosunku $3 : 4 : 5$. Przez najdłuższą krawędź i przekątną najmniejszej ściany poprowadzono przekrój, którego pole jest równe 100 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

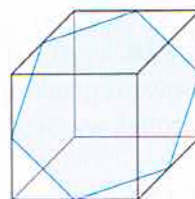
6.130. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego wysokość jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki ramion ma długość 12 cm. Wiedząc, że przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź boczną graniastosłupa i przekątną jego podstawy ma pole równe 130 cm^2 , oblicz objętość tego graniastosłupa.

6.131. W sześcianie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ poprowadzono przekrój płaszczyzną zawierającą przekątną BD i przechodzącą przez punkt C_1 . Wyznacz (w przybliżeniu z dokładnością do 1°) miarę kąta nachylenia tego przekroju do płaszczyzny $(ABCD)$.

6.132. Przez przekątną podstawy sześcianu mającego krawędź o długości a poprowadzono płaszczyznę, która tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Oblicz pole otrzymanego przekroju sześcianu tą płaszczyzną.

***6.133.** Przez przekątną podstawy sześcianu mającego krawędź o długości a poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole otrzymanego przekroju sześcianu.

6.134. Przekrojem sześcianu jest sześciokąt foremny, którego wierzchołkami są środki odpowiednich krawędzi sześcianu (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że pole tego sześciokąta jest równe $6\sqrt{3}$, oblicz długość przekątnej sześcianu.



6.135. Pole podstawy graniastosłupa prostego trójkątnego jest równe P . Przez krawędź podstawy tej bryły poprowadzono płaszczyznę, która przecina przeciwległą krawędź boczną i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.136. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego boki mają długość 10 cm, 10 cm, 16 cm. Przez najdłuższy bok podstawy poprowadzono płaszczyznę, która przecina przeciwległą krawędź boczną i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.137. Wysokość ostrosłupa podzielono na cztery równe części i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy. Pole podstawy tego ostrosłupa jest równe 400 cm^2 . Oblicz pola otrzymanych przekrojów.

6.138. Pole przekroju równoległego do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest o 36% mniejsze od pola powierzchni podstawy. W jakim stosunku przekrój ten dzieli objętość ostrosłupa?

- 6.139.** Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne ma pole równe P . Wiedząc, że wszystkie krawędzie ostrosłupa mają taką samą długość, oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 6.140.** Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość $8\frac{1}{3}$, a jedna z przekątnych ma długość $13\frac{1}{3}$. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem symetrii podstawy. Przekrój tego ostrosłupa wyznaczony przez wysokości przeciwległych ścian bocznych jest trójkątem równobocznym. Wyznacz pole tego przekroju.
- 6.141.** Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i jednocześnie równoległą do jednej z krawędzi bocznych. Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że krawędź podstawy ma długość a , natomiast krawędź boczna ma długość b .
- 6.142.** Krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego ma długość 8 dm, a krawędź podstawy – 4 dm. Przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy poprowadzono płaszczyznę prostopadłą do podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
- 6.143.** Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa H , a krawędź podstawy ma długość a . Wyznacz pole przekroju wyznaczonego przez krótszą przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa.
- 6.144.** Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź podstawy ma długość 20 cm, a ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° .
- 6.145.** Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną prostopadłą do jednej z krawędzi bocznych ostrosłupa i jednocześnie zawierającą przekątną podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem rozwartokątnym, którego kąt rozwarty ma miarę 2α . Wyznacz cosinus kąta β nachylenia płaszczyzny tego przekroju do płaszczyzny podstawy.
- * 6.146.** Wszystkie krawędzie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego mają długość a . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną poprowadzoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i środek wysokości ostrosłupa.
- 6.147.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono przekrój płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i prostopadłą do przeciwległej krawędzi bocznej.

Wiedząc, że kąt między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi ma miarę 2α , gdzie $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$, oblicz:

- cosinus kąta β przy wierzchołku przekroju należącym do krawędzi bocznej
- cosinus kąta γ nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

6.148. Przez krawędź AB podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę, do której należy środek S krawędzi CD . Wiedząc, że otrzymany przekrój tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° , oblicz cosinus kąta ASB .

*** 6.149.** W czworościanie foremnym o krawędzi długości 6 cm poprowadzono przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i środek krawędzi bocznej niemającej punktów wspólnych z tą wysokością. Oblicz odległość płaszczyzny podstawy od punktu, w którym wysokość ostrosłupa przebija płaszczyznę przekroju.

*** 6.150.** Podstawą ostrosłupa prostego $ABCD$ jest trójkąt prostokątny ABC , którego przyprostokątne mają długość: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm. Środki krawędzi AB , BC , CD i AD wyznaczają płaszczyznę przekroju tego ostrosłupa. Oblicz:

- tangens kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy
- pole przekroju ostrosłupa tą płaszczyzną.

Bryły obrotowe.

Pole powierzchni brył obrotowych

Walec

6.151. Stosunek pola przekroju osiowego do pola podstawy walca wynosi $4 : \pi$. Oblicz miarę kąta między przekątnymi przekroju osiowego walca.

6.152. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego jeden bok przystający do wysokości walca ma długość 20, a przekątna tego prostokąta tworzy z drugim bokiem kąt 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

6.153. Pole podstawy walca jest równe P_1 , a pole jego przekroju osiowego – P_2 . Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego walca.

6.154. Boki prostokąta mają długość 4 cm i 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca otrzymanego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół:

- dłuższego boku
- krótszego boku.

6.155. Dany jest prostokąt, którego długości boków pozostają w stosunku 1 : 2. W wyniku obrotu tego prostokąta wokół dwóch różnych jego osi symetrii powstają dwa walce. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych walców.

6.156. Przez dowolny punkt A okręgu górnej podstawy walca poprowadzono przekrój płaszczyzną zawierającą oś walca. W dolnej podstawie walca poprowadzono średnicę BC , prostopadłą do przekroju osiowego. Wiedząc, że promień podstawy walca jest równy r oraz $|\angle BAC| = \alpha$, $\alpha \in (0, 90^\circ)$, oblicz wysokość walca.

* **6.157.** Wysokość walca jest równa 6 cm, a promień podstawy wynosi 5 cm. Poprowadzono odcinek AB o długości 10 cm taki, że punkt A należy do okręgu górnej podstawy, punkt B należy do okręgu dolnej podstawy walca. Wyznacz długość najkrótszego odcinka, którego jeden z końców należy do osi walca, a drugi należy do odcinka AB .

Stożek

6.158. Dany jest promień podstawy r i tworząca l stożka. Oblicz miarę kąta środkowego odpowiadającego wycinkowi kołowemu, który tworzy powierzchnię boczną stożka, jeśli:

- a) $r = 1$ dm, $l = 4$ dm b) $r = 3$ cm, $l = 15$ cm c) $r = 0,5$ m, $l = 75$ cm.

6.159. Wysokość stożka jest równa h , a promień podstawy stożka r . Oblicz miarę kąta środkowego odpowiadającego wycinkowi kołowemu, który tworzy powierzchnię boczną stożka, jeśli:

- a) $h = 4$ cm, $r = 3$ cm
b) $h = 4\sqrt{5}$ cm, $r = 1$ cm
c) $h = 2\sqrt{22}$ cm, $r = 10\sqrt{2}$ cm.

6.160. Promień wycinka kołowego o kącie 120° jest równy 3 m. Wycinek zwinięto i utworzono w ten sposób powierzchnię boczną stożka. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka.

6.161. Kąt rozwarcia stożka ma miarę α . Oblicz miarę łukową kąta środkowego rozwiniętej powierzchni bocznej tego stożka.

6.162. Wyznacz miarę łukową kąta środkowego powierzchni bocznej stożka, jeśli wysokość stożka jest równa h , a promień podstawy wynosi r .

6.163. Tworząca stożka ma długość 20 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, jeśli:

- a) tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem miary 45°
b) wysokość stożka jest równa 16 cm.

6.164. Stosunek wysokości stożka do promienia podstawy wynosi $3 : 4$, a pole powierzchni bocznej stożka jest równe $80\pi \text{ cm}^2$. Oblicz długość tworzącej stożka.

6.165. Stosunek promienia podstawy stożka do wysokości wynosi $3 : 4$. Jaką część pola powierzchni całkowitej jest pole powierzchni bocznej tego stożka?

6.166. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola jego powierzchni całkowitej jest równy $2 : 3$. Wyznacz miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

6.167. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 dm i 8 dm . Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta wokół:

- a) krótszej przyprostokątnej
- b) dłuższej przyprostokątnej
- c) przeciwprostokątnej.

6.168. Średnica okręgu jest równa 29 cm . Przez jeden z jej końców poprowadzono cięciwę długości 20 cm . Cięciwa ta obraca się wokół danej średnicy. Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły.

6.169. Trójkąt równoboczny obraca się raz wokół boku, a drugi raz wokół wysokości. Oblicz stosunek pól powierzchni otrzymanych brył.

6.170. Stożek o promieniu podstawy R przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, która podzieliła wysokość stożka w stosunku $m : n$, licząc od wierzchołka stożka. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.171. Wysokość stożka i promień podstawy mają taką samą długość R . Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która wyznacza na podstawie stożka cięciwę odpowiadającą kątowi środkowemu 90° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.172. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, a promień podstawy stożka jest równy R . Oblicz pole przekroju tego stożka płaszczyzną poprowadzoną przez dwie tworzące, wiedząc, że kąt między tymi tworzącymi jest równy 30° .

6.173. Dany jest stożek o wysokości h i promieniu podstawy r . Oblicz długość krawędzi sześcianu wpisanego w stożek w ten sposób, że dolna podstawa sześcianu zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki górnej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka.

6.174. W stożek wpisano walec w ten sposób, że dolna podstawa walca zawiera się w dolnej podstawie stożka, a okrąg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Wiadomo, że promień podstawy walca jest trzy razy krótszy od promienia podstawy stożka, a pole przekroju osiowego stożka jest równe 18. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

Kula i sfera

6.175. Kulę o promieniu 41 cm przecięto płaszczyzną w odległości 9 cm od środka. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.176. Promień kuli ziemskiej ma (w przybliżeniu) 6300 km. Oblicz długość równoleżnika odpowiadającego szerokości geograficznej:

a) 30° b) 45° .

Wynik podaj z dokładnością do 100 km.

6.177. Pewne miasto leży na 60° szerokości geograficznej północnej. Jaką drogę określa to miasto (na skutek obrotu Ziemi dookoła osi) w ciągu jednej godziny? Zakładamy, że Ziemia wykonuje pełny obrót w ciągu 24 godzin.

6.178. Stosunek pól powierzchni dwóch kul jest równy 9, a różnica ich promieni wynosi 10 cm. Oblicz promienie tych kul.

6.179. Pola powierzchni dwóch kul różnią się o $644\pi \text{ cm}^2$, a promień jednej z tych kul jest dłuższy od promienia drugiej kuli o 7 cm. Oblicz pola powierzchni obu kul.

6.180. Dwie równoległe płaszczyzny przecinają kulę i wyznaczają przekroje o polach 49π i 4π . Odległość między tymi płaszczyznami jest równa 9. Oblicz pole powierzchni kuli.

6.181. Na powierzchni kuli o promieniu 7 cm znajdują się dwa przystające okręgi, które przecinają się w dwóch punktach, a ich płaszczyzny są do siebie prostopadłe. Odległość między wspólnymi punktami jest równa 2 cm. Wyznacz promień tych okręgów.

6.182. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt mający boki o długości 6 cm, 8 cm i 10 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 24 cm. Wyznacz promień kuli opisanej na tym graniastosłupie.

6.183. W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym wysokość jest równa 8 cm, a krawędź podstawy ma długość 12 cm. Wyznacz promień r kuli wpisanej w ostrosłup i promień R kuli opisanej na ostrosłupie.

6.184. Tworząca stożka o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz promień r kuli wpisanej w ten stożek i promień R kuli opisanej na tym stożku.

Objętość brył obrotowych

6.185. Oblicz objętość walca, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $702\pi \text{ cm}^2$, a obwód przekroju osiowego wynosi 80 cm.

6.186. Objętość walca wynosi $\frac{54}{\pi} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca, wiedząc, że po rozwinięciu jest ona kwadratem.

6.187. Przekątna prostokąta ma długość 30 cm, a jego pole jest równe 432 cm^2 . Znajdź objętość bryły otrzymanej przez obrót tego prostokąta dookoła dłuższego boku.

6.188. Przekątne prostokąta o polu 3 dm^2 przecinają się pod kątem 60° . Oblicz objętość walca powstałego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku.

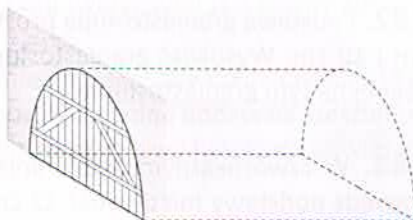
6.189. Wysokość walca jest równa 6 dm. Kąt między przekątnymi przekroju osiowego ma 60° . Oblicz objętość tego walca. Rozważ dwa przypadki.

6.190. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego przekątne mają długość 12 dm i przecinają się pod kątem 30° . Oblicz objętość tego walca. Rozważ dwa przypadki.

6.191. Jeżeli zwiększymy wysokość pewnego walca o 4 cm, to jego objętość zwiększy się o $196\pi \text{ cm}^3$. Oblicz promień podstawy walca.

6.192. Obwód podstawy blaszanej beczki w kształcie walca wynosi 157 cm. Wysokość beczki jest równa 1,1 m. Do beczki wlano 157 litrów wody. Oblicz odległość lustra wody od brzegu beczki. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

6.193. Piwnica ma kształt połowy walca o długości 6 m i średnicy 5 m (zobacz rysunek). Oblicz kubaturę piwnicy oraz jej pole powierzchni całkowitej (sklepienie wraz z podłogą i pionową ścianą na końcu piwnicy). Wyniki zaokrąglaj do całości.



6.194. Boki równoległoboku mają długość 6 cm i 4 cm, a kąt ostry jest równy 60° . Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P_c bryły powstałej w wyniku obrotu równoległoboku wokół dłuższego boku.

6.195. Dany jest romb, którego kąt ostry jest równy 30° . Wykaż, że objętość bryły powstałej z obrotu tego rombu wokół jego boku jest cztery razy mniejsza od objętości bryły powstałej w wyniku obrotu kwadratu o takim samym boku wokół tego boku.

6.196. Oblicz promień podstawy walca, wiedząc, że jeśli wysokość walca zwiększymy o k , to jego objętość wzrośnie o v .

6.197. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość d i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz objętość tego walca.

6.198. Pole powierzchni bocznej walca jest równe P , a objętość wynosi V . Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy.

6.199. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o polu 18 cm^2 . Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P_c tego stożka.

6.200. Oblicz objętość stożka, którego pole powierzchni bocznej wynosi $65\pi \text{ cm}^2$, a wysokość jest równa 12 cm.

6.201. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $96\pi \text{ cm}^2$, a tworząca ma długość 10 cm. Oblicz objętość tego stożka.

6.202. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi $4 : 3$, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół:

- a) krótszej przyprostokątnej
- b) dłuższej przyprostokątnej
- c) przeciwprostokątnej.

6.203. Wysokość stożka podzielono na trzy równe odcinki i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy. Oblicz stosunek objętości powstałych brył.

6.204. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których długości pozostają w stosunku $1 : 3$. Oblicz stosunek objętości brył powstałych w wyniku obrotu tego trójkąta wokół dłuższej i krótszej przyprostokątnej.

6.205. W walec o wysokości H wpisano stożek w ten sposób, że podstawa stożka jest podstawą walca, a wierzchołek stożka jest środkiem drugiej podstawy walca. Pola powierzchni bocznych stożka i walca są równe. Oblicz objętość i miarę α kąta rozwarcia stożka.

6.206. W stożek wpisano walec w ten sposób, że dolna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Kąt rozwarcia stożka jest prosty. Pole powierzchni całkowitej walca jest równe polu powierzchni bocznej stożka. Wykaż, odległość wierzchołka stożka od górnej podstawy walca jest równa połowie długości tworzącej stożka.

6.207. Objętość kuli K_1 jest 27 razy większa od objętości kuli K_2 . Oblicz:

- a) stosunek promieni obu kul
- b) stosunek pól powierzchni tych kul.

6.208. Woda kapie z kranu co dwie sekundy. Zakładając, że kropla wody ma kształt kuli o promieniu 3 mm, oblicz, ile litrów wody wycieknie z kranu w ciągu 1 doby. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 litra.

6.209. Dwie małe kulki o promieniach 2 cm i 3 cm zawarte są w jednej dużej kuli. Odległość między środkami małych kulek wynosi 6 cm. Oblicz promień dużej kuli o możliwie najmniejszej objętości.

6.210. Punkty A i B należą do brzegu kuli o środku S . Kąt zawarty między odcinkami AB i BS ma 45° , a odcinek AB ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni kuli.

6.211. W naczyniu w kształcie walca częściowo wypełnionego wodą wrzucono kulkę, która zanurzyła się całkowicie. Oblicz, o ile centymetrów wzrósł poziom wody w naczyniu, jeśli średnica podstawy naczynia ma 12 cm, a promień kulki jest równy 3 cm.

6.212. Kapsuła lądowika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o takim samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest czterzy razy dłuższa niż promień półkuli. Wiedząc, że objętość kapsuły jest równa $\frac{2\pi}{27} \text{ m}^3$, oblicz największą długość odcinka SP , gdzie S oznacza wierzchołek stożka, a P – punkt należący do sfery danej półkuli.

6.213. Na kuli opisano walec. Ile razy objętość walca jest większa od objętości kuli?

6.214. W kulę wpisano stożek, którego kąt rozwarcia jest prosty. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości kuli.

6.215. Tworząca stożka o objętości V jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz objętość kuli wpisanej w ten stożek.

6.216. Na kuli opisano stożek, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od średnicy kuli. Udowodnij, że pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli oraz że objętość stożka jest dwa razy większa od objętości kuli.

* **6.217.** Długość tworzącej stożka wynosi d , a promień podstawy jest równy R . Oblicz objętość kuli opisanej na tym stożku.

* **6.218.** Stożek o wysokości H wpisano w kulę. Oblicz objętość kuli, wiedząc, że jest ona cztery razy większa od objętości stożka.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

6.219. Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48 cm. Wyznacz wymiary tego graniastosłupa, który ma największą objętość. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

6.220. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 9 litrów, których jedna z krawędzi podstawy jest dwa razy dłuższa od drugiej.

- Napisz wzór funkcji opisującej pole powierzchni całkowitej P takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krótszej krawędzi podstawy.
- Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

6.221. Wśród stożków o tworzącej mającej długość 4 cm, znajduje się ten, którego objętość jest największa. Wyznacz promień r podstawy i wysokość h tego stożka. Podaj jego największą objętość V .

6.222. Rozważ stożki o tworzącej mającej długość p .

- Napisz wzór i zbadaj przebieg zmienności funkcji opisującej objętość stożka w zależności od jego wysokości.
- Wiedząc, że maksymalna objętość stożka jest równa $16\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$, oblicz długość tworzącej tego stożka.

6.223. Szyńska konserwowa pakowana jest do puszek w kształcie walca o pojemności $128\pi \text{ cm}^3$. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć ta puszka, aby na jej wyprodukowanie zużyć jak najmniejszą ilość blachy.

6.224. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi bocznej mającej długość b , poprowadzono płaszczyznę zawierającą krawędź boczną i wysokość ostrosłupa. Wiedząc, że otrzymany przekrój ma największe pole powierzchni, oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

6.225. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. W ten stożek wpisujemy walec w taki sposób, że jedna podstawa walca jest zawarta w podstawie stożka, a okrąg drugiej podstawy walca jest zawarty w powierzchni bocznej stożka. Wyznamy objętość tego walca, który ma największą objętość.

6.226. Dany jest stożek o promieniu podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. W stożek ten wpisujemy prostopadłościany tak, że jedna podstawa zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki drugiej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka. Wiedząc, że stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 3, oblicz wymiary tego prostopadłościanu, którego objętość jest największa.

6.227. W kulę o promieniu R wpisujemy stożki. Wyznamy promień r podstawy i wysokość h tego ze stożków, który ma największą objętość.

6.228. Na kuli o promieniu 6 opisujemy stożki obrotowe. Wyznamy wysokość h i promień podstawy r stożka o najmniejszej objętości. Wykaż, że objętość tego stożka jest równa podwojonej objętości kuli.

6.229. W kulę o promieniu $\frac{\sqrt{10}}{2}$ wpisujemy prostopadłościany o polu podstawy równym 4. Wyznamy wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

6.230. W kulę o promieniu r wpisujemy ostrosłupy prawidłowe trójkątne w ten sposób, że wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli, zaś wierzchołki podstawy należą do powierzchni kuli. Wyznamy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, którego objętość jest największa.

6.231. W kulę o promieniu 3 wpisujemy ostrosłupy prawidłowe czworokątne w ten sposób, że wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli, zaś wierzchołki podstawy należą do powierzchni kuli. Napisz wzór funkcji opisującej objętość $V(x)$ ostrosłupa w zależności od długości krawędzi x jego podstawy. Wyznamy maksymalną objętość ostrosłupa.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Przekątna sześcianu ma długość $\sqrt{6}$ cm. Objętość tego sześcianu jest równa:

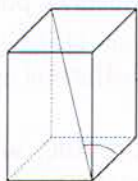
- A. $2\sqrt{2}$ cm³ B. 4 cm³ C. $4\sqrt{2}$ cm³ D. 8 cm³.

2. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 10 cm, a krawędź podstawy – $3\sqrt{2}$ cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

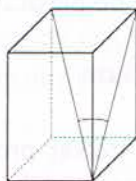
- A. 4 cm B. 6 cm C. $6\sqrt{2}$ cm D. 8 cm.

3. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Kąt między przekątną prostopadłościanu a ścianą boczną jest zaznaczony na rysunku:

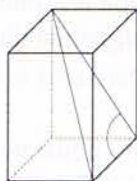
A.



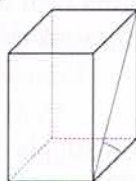
B.



C.



D.



4. Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i wysokość podstawy mają taką samą długość, równą $\sqrt{3}$. Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe:

- A. $5\sqrt{3}$ cm² B. $6\sqrt{3}$ cm² C. $7\sqrt{3}$ cm² D. $8\sqrt{3}$ cm².

5. Dwie różne przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość: 13 cm i 12 cm. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa:

- A. 12 cm B. 10 cm C. 5 cm D. $5\sqrt{3}$ cm.

6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest prosty. Wówczas:

- A. wszystkie krawędzie ostrosłupa mają jednakową długość
B. krawędź boczna ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy
C. krawędź podstawy ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej
D. przekątna podstawy ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej.

7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Niech α oznacza kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Wówczas:

- A. $\alpha \in (30^\circ, 45^\circ)$ B. $\alpha = 45^\circ$ C. $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$ D. $\alpha = 60^\circ$.

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość, równą a . Wówczas wysokość ostrosłupa jest równa:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ D. $\frac{3a}{4}$.

9. Trzy krawędzie ostrosłupa trójkątnego mają wspólny koniec i są do siebie parami prostopadłe i mają odpowiednio długość 3 cm, 4 cm, 5 cm. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

- A. $\frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$ B. $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ C. 60 cm^3 D. 10 cm^3 .

10. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku 12 cm, a spodek wysokości tego ostrosłupa znajduje się w jednym z wierzchołków tej podstawy. Największa ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Zatem wysokość ostrosłupa ma długość:

- A. 6 cm B. 8 cm C. 18 cm D. 16 cm.

11. W ostrosłupie prostym podstawą jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$ oraz $|AC| = 6$ i $|BC| = 8$. Wówczas spodek wysokości tego ostrosłupa znajduje się w odległości:

- A. 5 od punktu C B. 6 od punktu A
C. 8 od punktu B D. $0,5\sqrt{39}$ od punktu C .

12. Pole powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy 5 cm i wysokości 8 cm, jest równe:

- A. 40 cm^2 B. $130\pi \text{ cm}^2$ C. $40\pi \text{ cm}^2$ D. $80\pi \text{ cm}^2$.

13. Pole podstawy walca jest równe $9\pi \text{ dm}^2$, a pole przekroju osiowego wynosi 24 dm^2 . Zatem objętość walca wynosi:

- A. $36\pi \text{ dm}^3$ B. $32\pi \text{ dm}^3$ C. $30\pi \text{ dm}^3$ D. $24\pi \text{ dm}^3$.

14. Wysokości dwóch walców są równe. Wiadomo, że drugi walec ma 4 razy większą objętość od pierwszego walca. Wówczas promień podstawy drugiego walca jest większy od promienia podstawy pierwszego walca:

- A. dwukrotnie B. czterokrotnie
C. ośmiokrotnie D. szesnastokrotnie.

15. Kąt rozwarcia stożka jest równy 30° , a pole przekroju osiowego wynosi 4 dm^2 . Tworząca stożka ma długość:

- A. 2 dm B. 4 dm C. $2\sqrt[4]{3} \text{ dm}$ D. $2\sqrt{3} \text{ dm}$.

16. Stożek o objętości 800π ma wysokość równą 24. Tworząca stożka ma długość:

- A. 10 B. 25 C. 26 D. 30.

17. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy $1\frac{1}{3}$. Niech P_b oznacza pole powierzchni bocznej, zaś P_c – pole powierzchni całkowitej tego stożka. Wówczas:

- A. $P_c = 2P_b$ B. $P_c = 1,5P_b$ C. $P_c = \frac{4}{3}P_b$ D. $P_c = 1,6P_b$.

18. Wysokość stożka jest równa $\sqrt{44}$, a promień podstawy – 10. Zatem kąt środkowy wycinka koła tworzącego powierzchnię boczną stożka ma miarę:

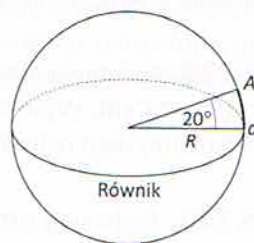
- A. 180° B. 210° C. 240° D. 300° .

19. Jedna kula ma objętość 27 razy większą od drugiej. Wtedy stosunek obwodu wielkiego koła dużej kuli do obwodu wielkiego koła małej kuli wynosi:

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 27.

20. Miasto A leży na równoleżniku 20° szerokości geograficznej północnej. Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu $R = 6300$ km oraz $\pi \approx 3$, to odległość d miasta A od równika (zobacz rysunek obok) jest w przybliżeniu równa:

- A. 1050 km B. 2100 km
C. 3150 km D. 4200 km.



Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

6.232. Jeżeli każdą krawędź sześcianu przedłużymy o 1 dm, to jego objętość zwiększy się 125 razy. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

6.233. Objętość prostopadłościanu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest równa 144 cm^3 , pole podstawy $ABCD$ jest równe 12 cm^2 , a pole przekroju płaszczyzną $ABC_1 D_1$ wynosi $12\sqrt{10} \text{ cm}^2$. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu.

6.234. W graniastostupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wyznacz:

- cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastostupa do ściany bocznej
- sinus kąta między przekątną graniastostupa i krawędzią boczną wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

6.235. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym sinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej jest równy $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Oblicz stosunek wysokości graniastosłupa do długości krawędzi podstawy.

6.236. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $720\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a wysokość ma długość 20 cm. Oblicz pole przekroju graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i przeciwległą krawędź boczną, jeśli ta płaszczyzna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° .

6.237. Podstawą graniastosłupa prostego $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest trapez prostokątny, którego długości podstaw wynoszą: $|AB| = 6 \text{ cm}$, $|DC| = 3 \text{ cm}$, a wysokość trapezu: $|AD| = 4 \text{ cm}$. Wiedząc, że wysokość tego graniastosłupa to 12 cm, oblicz:

- długości dwóch różnych przekątnych graniastosłupa
- cosinus kąta dwuściennego między płaszczyznami $(ABC_1 D_1)$ i $(ABCD)$.

6.238. Oblicz cosinus kąta ostrego dwuściennego wyznaczonego przez dwie sąsiednie ściany czworościanu foremnego.

6.239. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC , w którym: $|AC| = 13 \text{ cm}$, $|BC| = 13 \text{ cm}$ i $|AB| = 24 \text{ cm}$. Wysokość ostrosłupa CS jest równa 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6.240. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok o bokach długości 3 cm i 7 cm, którego jedna z przekątnych ma długość 6 cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest punkt przecięcia przekątnych podstawy. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 4 cm, oblicz długość krawędzi bocznych.

6.241. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość 15 cm. Każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Wiedząc, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 360 cm^2 , oblicz objętość tego ostrosłupa.

6.242. Wyznacz wysokość prawidłowego ostrosłupa trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość a , zaś pole powierzchni bocznej jest dwukrotnie większe od pola podstawy.

6.243. W pewnym ostrosłupie o objętości 2400 cm^3 podstawa jest wielokątem, którego obwód jest równy 100 cm, a pole wynosi 600 cm^2 . Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wyznacz miarę tego kąta.

6.244. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają długość 13 cm, 14 cm, 15 cm. Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość, równą $21\frac{1}{8}$ cm.

6.245. W ostrosłupie prostym o objętości V podstawą jest prostokąt, którego przekątne mają długość d i przecinają się pod kątem α . Oblicz tangens kąta β nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

6.246. Wysokość ostrosłupa jest równa 16 cm, a pole podstawy wynosi 512 cm^2 . W jakiej odległości od podstawy znajduje się przekrój równoległy do płaszczyzny podstawy o polu równym 50 cm^2 ?

6.247. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono przekrój płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i prostopadłą do jednej z krawędzi bocznych. Wiedząc, że krawędzie podstawy i krawędzie boczne mają odpowiednio długość a i $2a$, oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.248. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy α . Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej wynosi d . Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest

równe
$$\frac{2d^2 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + 1}}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

6.249. W czworościanie foremnym poprowadzono przekrój płaszczyzną zawierającą wysokość podstawy i przechodzącą przez środek krawędzi bocznej niemającej punktu wspólnego z tą wysokością podstawy.

a) Wyznacz cosinus najmniejszego kąta tego przekroju.

b) Wiedząc dodatkowo, że pole tego przekroju jest równe $\frac{9\sqrt{11}}{4}$, oblicz długość krawędzi czworościanu.

6.250. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny. Wysokość ostrosłupa jest trzy razy dłuższa od przyprostokątnej trójkąta w podstawie, a spodek wysokości jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta w podstawie. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przeciwprostokątną podstawy i wysokość ostrosłupa jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$.

Wiedząc, że pole tego przekroju jest równe $8\sqrt{3}$, oblicz objętość ostrosłupa.

6.251. Krawędź sześcianu ma długość 20. Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech różnych krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka. Oblicz:

- a) pole otrzymanego przekroju
- b) odległość płaszczyzny przekroju od wierzchołka wspólnego dla tych krawędzi.

6.252. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość, równą 20. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka przy podstawie. Oblicz:

- a) pole otrzymanego przekroju
- b) odległość tej płaszczyzny od punktu wspólnego tych krawędzi.

6.253. Oblicz promień podstawy walca, wiedząc, że objętość walca jest równa $5\pi \text{ dm}^3$, a pole jego powierzchni całkowitej jest równe $13\pi \text{ dm}^2$.

6.254. Pole powierzchni bocznej walca jest równe $10\pi \text{ dm}^2$. Promień podstawy walca jest o 4 dm dłuższy od jego wysokości. Oblicz objętość tego walca.

6.255. Równoległobok o polu 30 cm^2 ma boki długości 6 cm i 10 cm. Wyznacz objętość V i pole powierzchni całkowitej P_c bryły powstałej w wyniku obrotu tego równoległoboku wokół krótszego boku. Wyniki podaj w zaokrągleniu, z dokładnością odpowiednio do $0,1 \text{ cm}^3$ i do $0,1 \text{ cm}^2$.

6.256. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła, którego promień ma 12 cm, a kąt odpowiada kątowi środkowemu 270° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

6.257. Kulę o promieniu r przecięto płaszczyzną odległą od środka kuli o $\frac{1}{2}r$. Przekrój ma pole $27\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni kuli.

6.258. Przez środek wysokości stożka poprowadzono prostą równoległą do tworzącej stożka, która ma długość d . Wykaż, że długość odcinka będącego częścią wspólną tej prostej i stożka jest równa $\frac{3d}{4}$.

6.259. Wykaż, że jeśli kąt rozwarcia stożka ma 120° , to pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca o takiej samej podstawie i wysokości.

- * **6.260.** W kulę o promieniu R wpisano stożek, którego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz pole powierzchni całkowitej P_c i objętość stożka V .
- * **6.261.** Rozpatrujemy wszystkie stożki, których tworząca ma długość 6. Wyznacz objętość tego stożka, którego przekrój osiowy ma największe pole.
- 6.262.** Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej mającej długość $2\sqrt{3}$ cm obraca się dookoła jednej z przyprostokątnych. Jaką długość powinny mieć przyprostokątne, aby objętość otrzymanej bryły była największa?
- 6.263.** Rozpatrujemy wszystkie otwarte pudełka (bez górnej podstawy) o podstawie kwadratowej i objętości 0,5 litra. Wyznacz wymiary tego pudełka, które ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.
- 6.264.** W kulę o promieniu 6 cm wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o największej objętości. Wykaż, że ostrosłup ten jest czworościanem foremnym, którego krawędź ma długość $4\sqrt{6}$ cm.
- 6.265.** Wśród walców wpisanych w kulę o promieniu 5 cm znajduje się taki, którego pole powierzchni bocznej jest największe. Oblicz objętość tego walca.

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

- 1.1. a) 1470 b) 18 c) 54 d) 1110
- 1.2. a) $2^{\frac{17}{6}}$ b) $5^{\frac{13}{4}}$ c) $6^{\frac{17}{5}}$ d) $3^{\frac{19}{6}}$
- 1.3. a) $x = 12, y = 1, 8\frac{1}{3}\%$ b) $x = 0,24, y = 9, 3750\%$
- 1.4. a) n b) m
- 1.5. a) 2,4 b) 1,2 c) 2,25 d) 56,25
- 1.6. a) 2 b) 4 c) $10\frac{1}{2}$ d) 125
- 1.7. a) 0,65 b) 1 c) 12,5 d) 0,05
- 1.8. a) $y > x$ b) $x > y$ c) $x > y$ d) $y > x$
- 1.9. a) $u < z < y < t < x$ b) $y < u < t < x < z$
- 1.10. a) 4 b) $-1\frac{1}{2}$ c) 25 d) -4,5
- 1.11. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}$ d) 1
- 1.14. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) 4
- 1.16. a) $\frac{-4x^3}{(x^2 - 1)^2}$ b) $9x$ c) $\frac{1}{xy}$ d) $5\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$

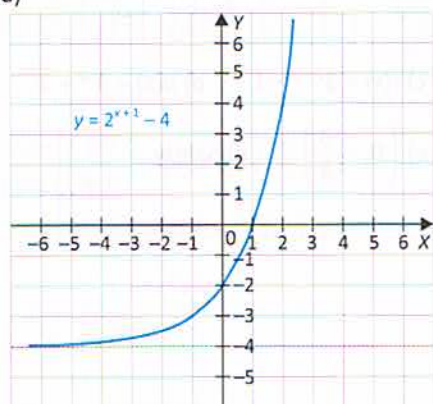
Funkcja wykładnicza i jej własności

- 1.18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f(x) > 2$ dla $x \in (-\infty, -1)$
- 1.19. $f(x) = 16^x, f(x) \geq 1$ dla $x \in \langle 0, +\infty \rangle$
- 1.20. a) $n < p < l < k < m$ b) $n < l < m < p < k$
- 1.21. a) $m < n$ b) $m < n$ c) $m > n$ d) $m > n$
- 1.22. a) dodatnia b) ujemna c) ujemna
d) dodatnia e) ujemna f) ujemna
- 1.24. a) parzysta b) nieparzysta c) ani parzysta, ani nieparzysta d) parzysta
e) parzysta f) nieparzysta
- 1.25. 4; wskazówka: Zauważ, że $(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2$.

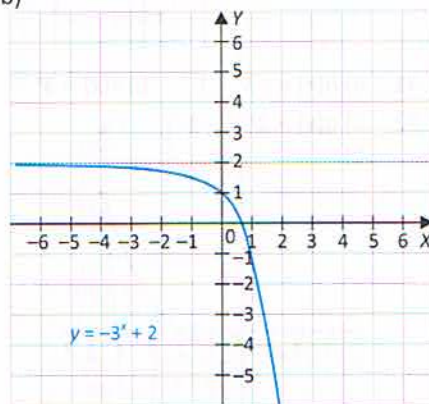
1.26. 5

1.27. a) $\langle 3, +\infty \rangle$ b) $(-\infty, -5)$ c) $\langle 0, +\infty \rangle$ d) $(-\infty, -12)$ 1.28. a) $(0, 2)$ b) $(1, 4)$ c) $\left(-2, -1\frac{3}{4}\right)$ d) $(-5, -3)$ 1.29. a) $\left\langle \frac{1024}{243}, \frac{65\,536}{6561} \right\rangle$ b) $\langle 256, 512 \rangle$ c) $\left\langle \frac{1}{9}, 1 \right\rangle$ d) $\langle 49, 117\,649 \rangle$ **Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych**

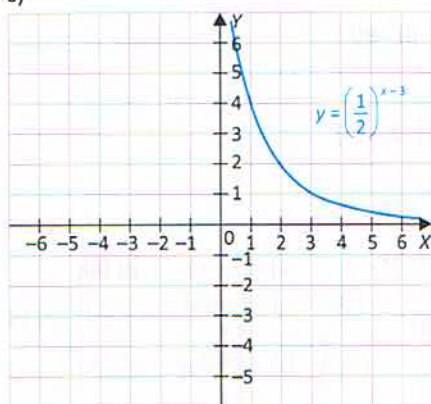
1.30. a)



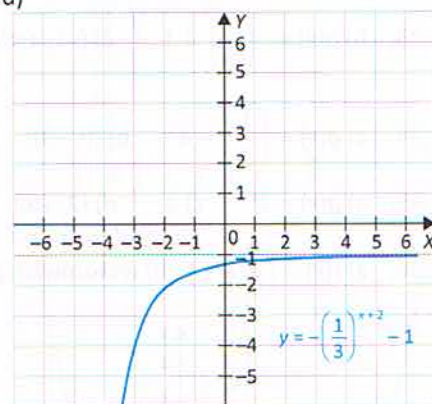
b)



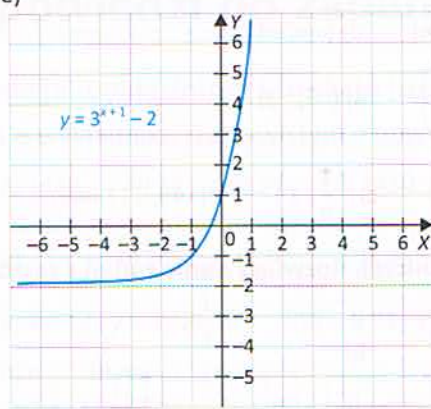
c)



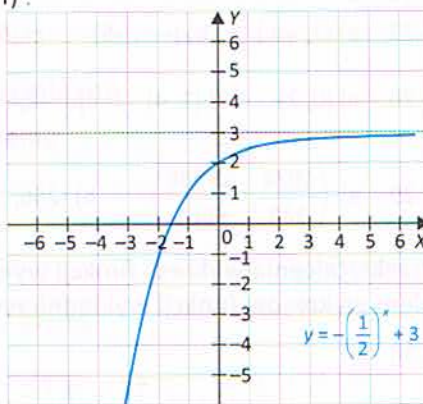
d)



e)



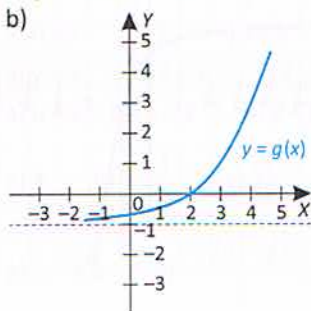
f)



1.31. a) $h(x) = -3^x - 1$ b) $s(x) = 3^{x+2}$ c) $t(x) = 3^{x-2} - 1$ d) $p(x) = 3^{-x} + 2$

1.32. a) $g(x) = 2^{x-2} - 1$

b)



c) $(0, -\frac{3}{4})$ d) należy

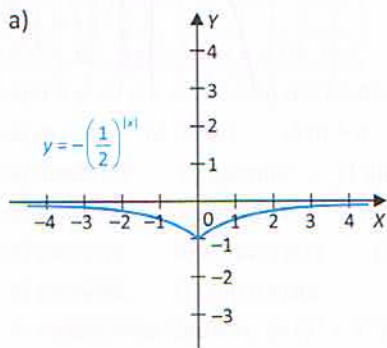
1.33. b) $g(x) = -(\frac{1}{3})^x + 1$ c) $(-1, +\infty)$ d) -80

1.34. a) $g(x) = (\frac{1}{2})^x - 4$ b) $(0, -3)$ d) $(-2, +\infty)$

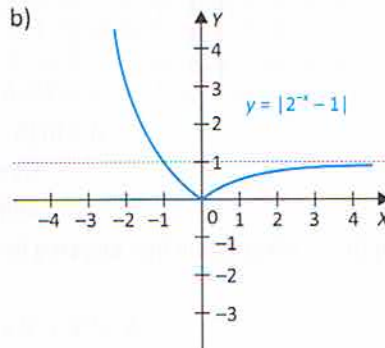
1.35. a) $g(x) = 2^x$ c) 3 d) $(2, +\infty)$

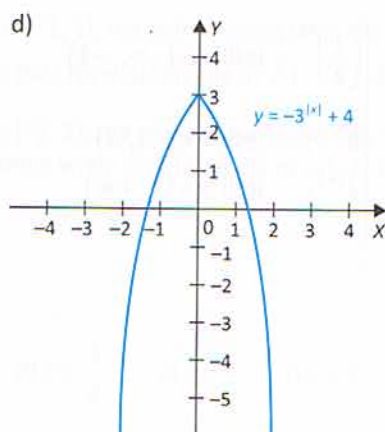
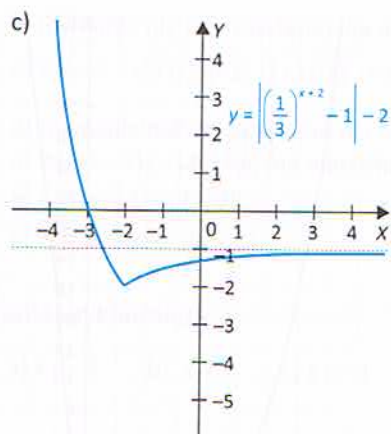
1.36. a) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ b) wskazówka: $g(x) = 2^x - 2$ c) $(1, +\infty)$ d) tak

1.37. a)

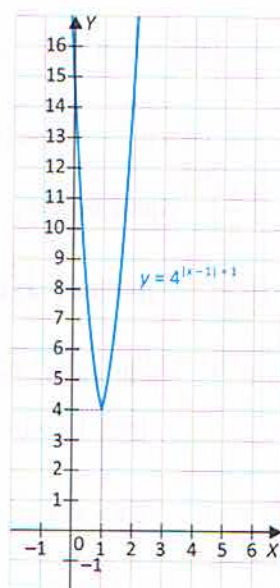


b)

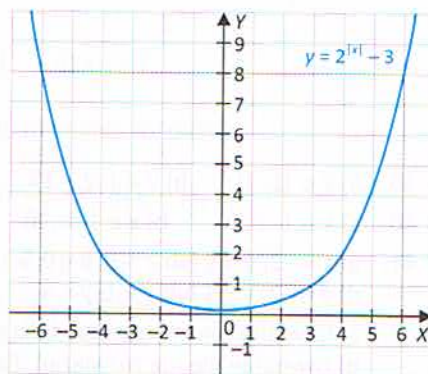




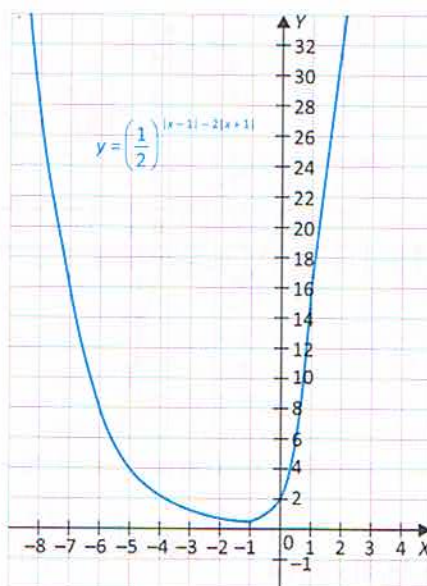
1.38. a) $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} \right)^{x-2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ 4^x, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$



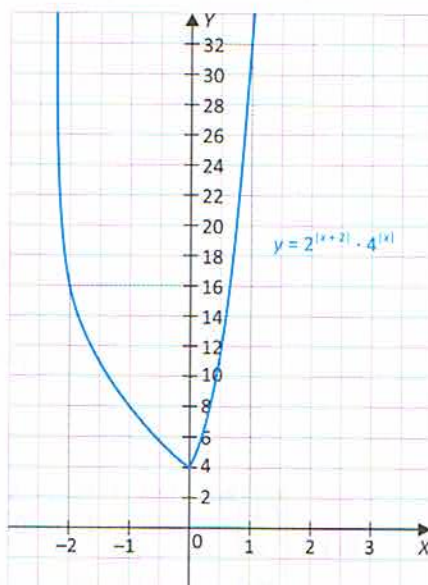
b) $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \right)^{x+3}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 2^{x-3}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty \rangle \end{cases}$



$$c) y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ 8^{x+\frac{1}{3}}, & \text{jeśli } x \in (-1, 1) \\ 2^{x+3}, & \text{jeśli } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$



$$d) y = \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right)^{x+\frac{2}{3}}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}, & \text{jeśli } x \in (-2, 0) \\ 8^{x+\frac{2}{3}}, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$



- 1.39. a) $x \in \{1, 3\}$ b) $x \in \{-2, -1\}$ c) $x \in \{-1, 1\}$ d) $x = 2$
 1.40. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in (-\infty, 3)$ c) $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-1, 1)$
 1.41. a) $x = -2, y = 4$ lub $x = 1, y = 0,5$ b) $x = 1, y = 3$ c) $x = 4, y = 1$ lub $x = 5, y = 3$
 d) $x = -3, y = 1$ lub $x = 1, y = 4$
 1.42. a) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty, -2)$; ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-2, +\infty)$
 b) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty, 4)$; ma jedno rozwiązanie dla $m = 4$; ma dwa rozwiązania dla $m \in (4, +\infty)$

c) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in (-1, 1)$; ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \{-1, 1\} \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; dwa rozwiązania dla $m \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

d) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in (-2, 2)$; ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{-2, 2\}$

1.43. $m \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

1.44. $m \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

Równania wykładnicze

1.45. a) $x = -2$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x = 2$ f) $x = 3$

1.46. a) $x = -3$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{9}$

1.47. a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, 1\right\}$

1.48. a) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$ b) $x \in \{-\sqrt{5}, -1, \sqrt{5}\}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x \in \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

1.49. a) $x \in \{0, 17\}$ b) $x \in \{2, 5\}$ c) $x \in \{1, 4\}$ d) $x \in \{-4, 2\}$

1.50. a) $x \in \{-2, 4\}$ b) $x \in \{-1, 4\}$ c) $x \in \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$ d) $x \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$

1.51. a) $x \in \{-2, -1, 2\}$ b) $x \in \{-1, 1\}$ c) $x \in \{-1, 0, 3\}$ d) $x = 3$

1.52. a) $x \in \left\{-\frac{1}{5}, 3\right\}$ b) $x = 1\frac{2}{3}$ c) $x = 24$ d) $x \in \{-7, 8\}$

1.53. a) $x = 0$ b) $x = -2$ c) $x = -6$ d) $x = -2$ e) $x = 4,5$ f) $x = -\frac{2}{3}$

1.54. a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 1$ d) $x = 1,5$ e) $x = -1,5$ f) $x = \frac{2}{3}$

1.55. a) $x = 1\frac{1}{4}$ b) $x \in \{-3, 1\}$ c) $x \in \{-1, 2\}$ d) $x = -3$

1.56. a) $x \in \{-2, -1\}$ b) $x = 0$ c) $x = -2$ d) równanie sprzeczne

1.57. a) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $x \in \{2, 3\}$ c) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ d) $x \in \{1, 2\}$

1.58. a) równanie sprzeczne b) $x \in \{0, 2\}$ c) $x \in \{-2, 2\}$ d) $x = 2$

1.59. a) $x \in \{-1, 1\}$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \{-2, 2\}$ d) $x \in \{-2, 2\}$

1.60. a) $x = 2$ b) $x \in \{0, 2\}$ c) $x = 3$ d) $x = 5$

1.61. a) $x = 10$ b) $x = 4$ c) $x = 3$ d) równanie sprzeczne

1.62. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -1$

1.63. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Nierówności wykładnicze

1.64. a) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ b) $x \in (-\infty, -2)$ c) $x \in R$ d) $x \in (-\infty, 0)$ e) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$
 f) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{7}\right)$

1.65. a) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle -1, +\infty)$ b) $x \in (-3, 5)$ c) nierówność sprzeczna
 d) nierówność tożsamościowa

1.66. a) $x \in (-\infty, -1)$ b) $x \in (-\infty, 4)$ c) $x \in \left\langle \frac{3}{5}, +\infty \right\rangle$ d) $x \in \langle 8, +\infty)$

1.67. a) $x \in (-\infty, -9)$ b) $x \in \left(-\infty, 1\frac{2}{5}\right)$ c) $x \in (-7, +\infty)$ d) $x \in \langle -1, +\infty)$

1.68. a) $x \in (-\infty, 4) \cup (5, +\infty)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \langle 1, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$
 d) $x \in \langle -2, 1)$

1.69. a) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 d) $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right)$ e) $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 7, +\infty)$ f) $x \in \left(-2, \frac{4}{9}\right)$

1.70. a) $x \in (-\infty, -1)$ b) $x \in (-\infty, 0)$ c) $x \in (-\infty, 1)$ d) $x \in (-3, +\infty)$

1.71. a) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 1)$ c) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right\rangle$
 d) nierówność sprzeczna

1.72. a) $x \in (-\infty, 0) \cup \left\langle \frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$ b) $x \in (1, +\infty)$ c) $x \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle \cup \{0\}$ d) $x \in (-4, -1)$

1.73. a) $x \in \{2\}$ b) $x \in \langle -3, 5)$ c) $x \in \langle 2, +\infty)$ d) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (8, +\infty)$

1.74. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in (0, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ d) $x \in (2, 3)$
 e) $x \in \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$ f) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

1.75. a) $x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$ b) $x \in (3, +\infty)$ c) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ d) $x \in (-\infty, 4)$

1.76. $x \in (-\infty, 3)$

1.77. $x \in \langle 2, +\infty \rangle$

1.78. a) $x \in \{1, 2, 3\}$ b) $x \in \{1, 2\}$ c) $x \in \{1, 2\}$ d) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

1.79. a) $x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right)$ b) $x \in \langle -2, 0 \rangle$ c) $x \in \langle 0, +\infty \rangle$
d) $x \in (-\infty, 1)$

1.80. a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \in (-\infty, -1)$ c) $x \in (-\infty, -1)$ d) $x \in \langle 2, +\infty \rangle$

Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań

1.81. $m = 3; a_n = 9n - 1$

1.82. $x = 2; S_{10} = 470$

1.83. a) $x = 2$ b) $a_n = 3^{4n-7}$

1.84. $m = 1; S_{10} = 1359,960938$

1.85. $m = 1$

1.86. $m \in \left(-\infty, -5\frac{1}{2}\right) \cup \langle -5, +\infty \rangle$

1.87. $m \in (0, +\infty)$

1.88. $m \in (-\infty, -2)$

1.89. $m \in (-\infty, -5) \cup \{4\}$

1.90. $m \in (-\infty, -1) \cup \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$

1.91. $m \in (-\infty, 0) \cup \{2\}$

1.92. $m \in (-\infty, 0)$

1.93. a) $x \in \left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{-4\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

1.94. a) $x \in \mathbb{R} - \left\{a: a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}\right\}$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Logarytm – powtórzenie wiadomości

1.95. a) -4 b) 7 c) 3 d) -1 e) 0 f) -6 g) -3 h) -2

1.96. a) $2\frac{2}{3}$ b) 7,5 c) -1,5 d) -2,25 e) 6,5 f) $-4\frac{1}{3}$ g) 3,5 h) $2\frac{8}{9}$

1.97. a) $1\frac{3}{4}$ b) $-8\frac{1}{6}$ c) $-4\frac{1}{12}$ d) $1\frac{7}{12}$ e) $-\frac{7}{20}$ f) $-2\frac{1}{3}$

1.98. a) 4 b) -2 c) -4 d) 1 e) 2 f) 2 g) -1 h) -15

1.99. a) 3 b) 1 c) 7 d) -4

1.100. a) 2 b) 2500 c) $62\frac{1}{2}$ d) $2\frac{1}{4}$ e) 4 f) 18 g) $\frac{4}{5}$ h) 37,5

1.101. a) $x = -1\frac{1}{2}$ b) $x = 1\frac{3}{4}$ c) $x = -\frac{5}{6}$ d) $x = -5$ e) $x = -1$ f) $x = -\frac{1}{7}$

1.103. $m = n = -3$

1.104. $k = l = 30$

1.106. a) $\frac{3-a}{a}$ b) $2b+4$ c) $\frac{2a-2}{a}$ d) $\frac{4a}{a+1}$

1.107. a) $\frac{2a+b}{3}$ b) $\frac{2a-b}{2}$ c) $\frac{2(1+ab+b)}{3(1+a)}$ d) $\frac{3+2ab}{3a}$

1.108. a) $\frac{a+2b}{1-a}$ b) $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$ c) $\frac{2a+3b}{1-a}$ d) $\frac{2b-4}{2+2a-b}$

Funkcja logarytmiczna i jej własności

1.109. a) 0,5 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.110. a) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ b) tak

1.111. a) $k = 1$ b) $k = -2$ c) $k = 0$ d) $k = -2$ e) $k = 1$ f) $k = -1$
g) $k = 2$ h) $k = -3$

1.112. a) ujemna b) zero c) ujemna d) dodatnia

1.113. a) $a < b$ b) $a < b$ c) $a > b$ d) $a > b$

1.114. a) $x \in \left(\log_{\frac{8}{5}} 4, +\infty\right)$; np. 5; 6 b) $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{\sqrt{5}}} 4\right)$; np. -1; 0

c) $x \in \left(\log_{\frac{36}{3}} \frac{1}{3}, +\infty\right)$; np. 0; 1 d) $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{5}{2}} 8\right)$; np. 2; 1

1.115. a) $D = \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right)$ b) $D = (0, 1)$ c) $D = (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$

d) $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e) $D = \mathbb{R} - \{2\}$ f) $D = (0, +\infty)$

1.116. a) $D = (-1, 0) \cup (0, 2)$ b) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$

c) $D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (3, +\infty)$ d) $D = \left(4\frac{1}{2}, +\infty\right)$

e) $D = (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$ f) $D = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

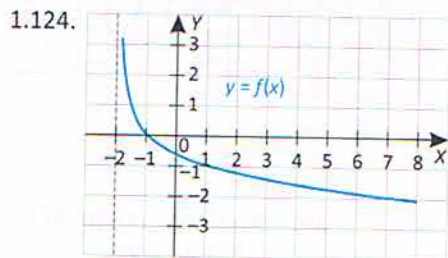
1.117. a) $m \in \left(-\infty, -1\frac{1}{8}\right)$ b) $m \in (-2, 2)$ c) $m \in (0, 1)$ d) $m \in \left(-\infty, -4\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

1.118. a) $m \in (2, +\infty)$ b) $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ c) $m \in (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$
d) $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$

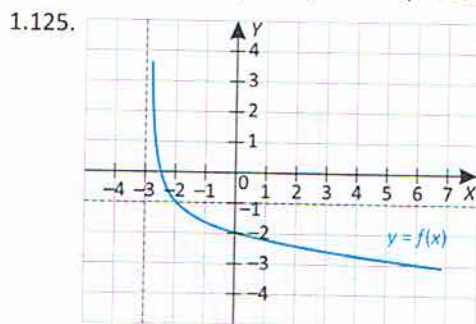
1.120. a) $\log_{\sqrt{5}} 2$ b) $\log_3 7$ c) -4 d) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 5$

- 1.123. a) nie są równe, bo $D_f = (2, +\infty)$, $D_g = (-\infty - 2) \cup (2, +\infty)$ b) są równe c) są równe
d) nie są równe, bo $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g = (0, +\infty)$

Rozwiązanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej

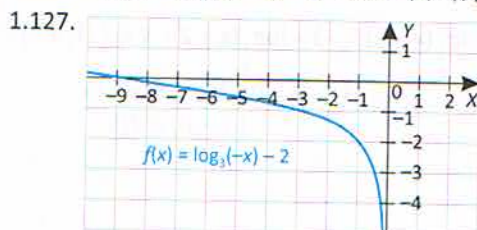


- a) $D = (-2, +\infty)$ b) -3 c) należy

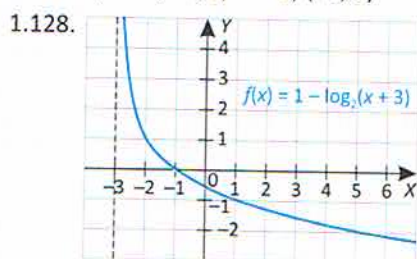


- a) $D = (-3, +\infty)$ b) $(0, -2)$ c) $x \in (-3, 6)$

- 1.126. a) $g(x) = \log_2(x-1) - 3$ b) $x \in \langle 2, 5 \rangle$; $g(x) < -2$, jeśli $x \in (1, 3)$; $g(x) > 0$, jeśli $x \in (9, +\infty)$

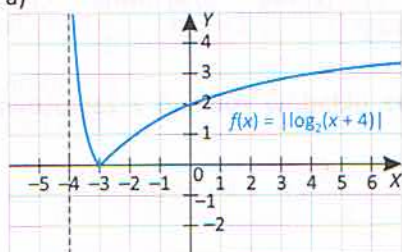


- a) $D = (-\infty, 0)$ b) $(-9, 0)$ c) $x \in (-9, 0)$

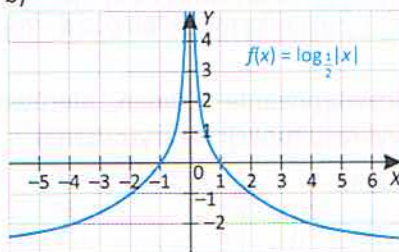


- a) $(-1, 0)$, $(0, \log_2 \frac{2}{3})$ b) $x \in (-3, -2)$ c) należy

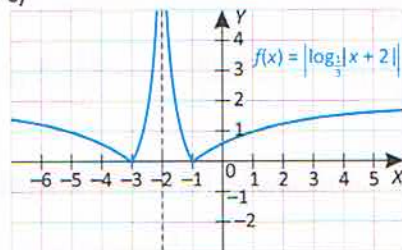
1.129. a)



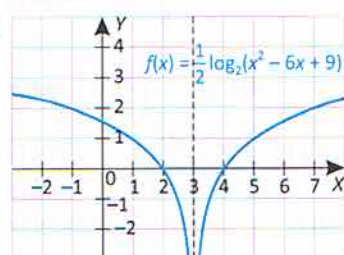
b)



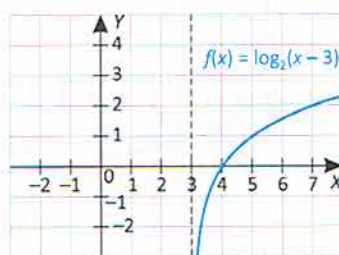
c)



1.130.

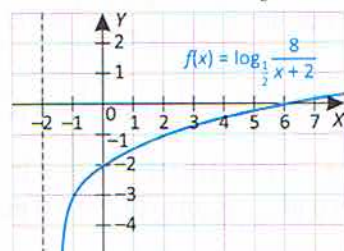


$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}; f(x) = \log_2|x-3|$$

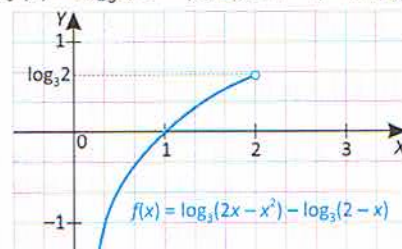


$$D_g = (3, +\infty)$$

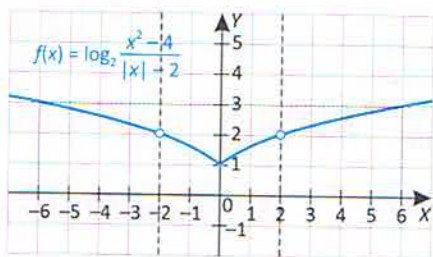
$$1.131. D_f = (-2, +\infty); f(x) = \log_{1/2} \frac{8}{x+2} = \log_{1/2} 8 - \log_{1/2}(x+2) = -3 - \log_{1/2}(x+2); x \in (-2, +\infty)$$



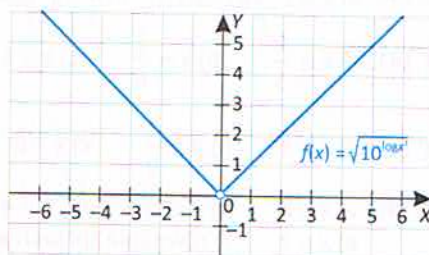
$$1.132. f(x) = \log_3 x, D = (0, 2), ZW = (-\infty, \log_3 2)$$



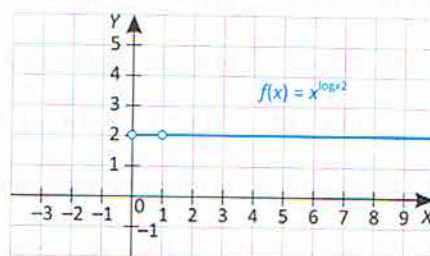
1.133. $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) & \text{dla } x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ \log_2(2-x) & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \cup (2, 0) \end{cases}$, $ZW = (1, 2) \cup (2, +\infty)$



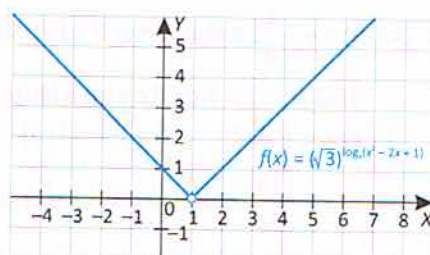
1.134. a) $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$,
 $ZW = (0, +\infty)$



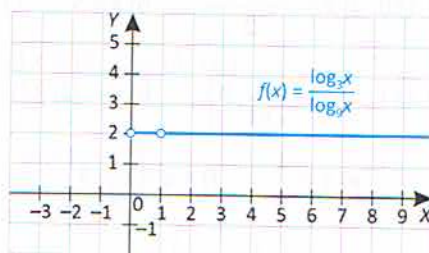
b) $f(x) = 2$, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$,
 $ZW = \{2\}$



c) $f(x) = |x - 1|$, $D = \mathbb{R} - \{1\}$,
 $ZW = (0, +\infty)$



d) $f(x) = 2$, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$,
 $ZW = \{2\}$



- 1.135. a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x \in \{1, 3\}$ d) $x \in \{-1, 1\}$
 1.136. a) $x \in (4, +\infty)$ b) $x \in (0, 9)$ c) $x \in (2, +\infty)$ d) $x \in \langle -5, 5 \rangle - \{0\}$
 1.137. a) $(2, -2)$ b) $(3, 1)$ c) $(-3, 2), (4, 5)$ d) $(10, 3)$

Równania logarytmiczne

- 1.138. a) $x = 1,5$ b) równanie sprzeczne c) $x = 0,25$
 d) $x \in \{-1, 2\}$ e) równanie sprzeczne f) $x \in \{2, 3\}$
- 1.139. a) $x = 9$ b) $x = 98$ c) $x = 16$ d) $x = -\frac{1}{4}$ e) $x = 1$ f) $x = \frac{1}{6}$
- 1.140. a) $x \in \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \{-1, 1\}$ d) $x \in \{-2, 2\}$
- 1.141. a) $x = \frac{1}{5}$ b) $x = \frac{1}{6}$ c) $x = 1$ d) $x = -\frac{3}{4}$
- 1.142. a) $x = 3$ b) $x = \frac{1}{9}$ c) $x = 8$ d) $x = \frac{1}{5}$ e) $x = 2$ f) $x = 100$
- 1.143. a) $x = 8$ b) $x \in \{6 - 4\sqrt{2}, 6 + 4\sqrt{2}\}$ c) równanie sprzeczne d) $x = 3$
 e) $x = 2$ f) równanie sprzeczne
- 1.144. a) $x = 3$ b) równanie sprzeczne c) $x = 4$ d) $x = 2$ e) $x = 2$ f) $x = 0$
- 1.145. a) $x = 3$ b) $x = 16$ c) $x = -0,9$ d) $x = -3\frac{2}{3}$
 e) $x = 64$ f) $x = 1$ g) $x \in \{-4, 4\}$ h) $x \in \{4, 6\}$
- 1.146. a) $x = 5$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 10\right\}$ d) $x = 37$
- 1.147. a) $x \in \{7, 15\}$ b) $x = 8$ c) $x = 6$ d) $x = 4$
- 1.148. a) $x = -\frac{2}{3}$; wskazówka: $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Zapisz równanie w postaci
 $2\log_2|x| - 2 = 2\log_2(x+1)$, a następnie w postaci $\log_2 \frac{|x|}{x+1} = 1$. b) $x = 2\frac{1}{5}$
 c) $x \in \{-4, 2\}$ d) $x \in \{-11, 3\}$
- 1.149. a) $x \in \left\{\frac{13}{21}, 2\right\}$ b) $x \in \{3, 3 + \sqrt{2}\}$ c) $x \in \{-5, 3\}$ d) $x \in \left\{\frac{-1 - \sqrt{161}}{2}, -5, 4, \frac{-1 + \sqrt{161}}{2}\right\}$
- 1.150. a) $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ b) $x = 5$ c) $x = 1$ d) $x = 10$
- 1.151. a) $x \in \left\{\frac{1}{81}, 9\right\}$ b) $x \in \{2, 32\}$ c) $x \in \{\sqrt[3]{2}, 4\}$ d) $x \in \left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 5\right\}$
 e) $x = \frac{1}{4}$ f) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 3\right\}$
- 1.152. a) $x \in \left\{\frac{1}{100}, 100\right\}$ b) $x \in \{100, 1000\}$ c) $x = 100$ d) równanie sprzeczne

$$1.153. \text{ a) } x \in \{\sqrt[5]{5}, 5\} \quad \text{b) } x = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{c) } x \in \left\{\frac{1}{4}, 4\right\} \quad \text{d) } x \in \left\{\frac{1}{9}, 9\right\} \quad \text{e) } x = 25$$

$$\text{f) } x \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{4}, 2\right\}$$

$$1.154. \text{ a) } (2, 18), (18, 2) \quad \text{b) } (100, 10) \quad \text{c) } (2, 2), \left(8, \frac{1}{8}\right) \quad \text{d) } (2, 2)$$

Nierówności logarytmiczne

$$1.155. \text{ a) } x \in (5, +\infty) \quad \text{b) } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad \text{c) } x \in \left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right) \quad \text{d) } x \in \left(9\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{e) } x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \quad \text{f) } x \in \langle 0, 3 \rangle$$

$$1.156. \text{ a) } x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad \text{b) } x \in (-11, -2) \cup (-2, 7) \quad \text{c) } x \in (-\infty, -13) \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

$$\text{d) } x \in (-\infty, 6) \cup \langle 8, +\infty \rangle \quad \text{e) } x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup \left(1, 1\frac{3}{4}\right) \quad \text{f) } x \in \langle -27, -2 \rangle \cup (-2, 23)$$

$$1.157. \text{ a) } x \in (0, 2) \cup (3, 5) \quad \text{b) } x \in (-1, 1) \cup (3, 5) \quad \text{c) } x \in \langle -2, -1 \rangle \cup (-1, 0) \\ \text{d) } x \in (0, 1) \cup (3, 4)$$

$$1.158. \text{ a) } x \in \left(0, 1\frac{3}{5}\right) \quad \text{b) } x \in (1, +\infty) \quad \text{c) } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$1.159. \text{ a) } x \in \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{b) } x \in (2, 4) \quad \text{c) } x \in (2, 4) \cup (16, +\infty) \quad \text{d) } x \in \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$$

$$1.160. \text{ a) } x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (100, 1000) \cup (100\,000, +\infty) \quad \text{b) } x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{c) } x \in (0, 1) \cup (16, +\infty) \quad \text{d) } x \in (0, 1) \cup (9, +\infty)$$

$$1.161. \text{ a) } x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (9, +\infty) \quad \text{b) } x \in \left\langle \frac{1}{4}, 4 \right\rangle \quad \text{c) } x \in \left(\frac{1}{5}, 5\right)$$

$$\text{d) } x \in \left(0, \frac{1}{81}\right) \cup \langle 81, +\infty \rangle$$

$$1.162. \text{ a) } x \in (-3, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \quad \text{b) } x \in (0, +\infty) \quad \text{c) } x \in (3, 4) \cup (6, +\infty)$$

$$\text{d) } x \in (-4, -3) \cup (8, +\infty)$$

$$1.163. \text{ a) } x \in (0, 1) \cup (\sqrt{3}, 9) \quad \text{b) } x \in (3, +\infty) \quad \text{c) } x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$$

$$\text{d) } x \in \left(2^{-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, 2^{\sqrt{2}}\right)$$

$$1.164. \text{ a) } x \in (1, +\infty) \quad \text{b) } x \in \left(-1\frac{1}{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 4)$$

$$c) x \in (-3, -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cup (3, +\infty)$$

$$d) x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$1.165. a) x \in \left(\frac{1}{3}, \sqrt{3} \right) \quad b) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2} \right) \quad c) x \in \left(\frac{1}{8}, 2 \right) \quad d) x \in (\sqrt{10}, 100)$$

$$1.166. a) D = (-5, -4) \cup (-4, -2) \cup (2, 3) \quad b) D = (-2\sqrt{2}, 2) \cup (2, 2\sqrt{2})$$

$$c) D = \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty \right) \quad d) D = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

$$1.167. x \in (1, 4)$$

$$1.168. x \in (0, 100)$$

$$1.169. x \in (0, 27)$$

$$1.170. x \in (-1, 2)$$

Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe

$$1.171. a) x = 0 \quad b) x = 0 \quad c) x \in \{2, 3\} \quad d) x \in \{0, \log 9\}$$

$$1.172. a) x \in \{1, 2\} \quad b) x = 0 \quad c) x = -2 \quad d) x \in \{-1, 1\}$$

$$1.173. a) x \in (1, 4) \quad b) x \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3 \right) \quad c) x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty \right)$$

$$d) x \in (1, 2) \cup (64, +\infty)$$

$$1.174. a) x \in \left(\log_3 \sqrt{2}, \log_3 2\frac{1}{2} \right) \quad b) x \in (0, 1)$$

$$c) x \in (-2 - \sqrt{6}, -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}, -2 + \sqrt{6}) \quad d) x \in (-\infty, -2)$$

$$1.175. a) x \in \left\{ \frac{1}{10}, 10 \right\} \quad b) x = 100 \quad c) x \in \left\{ \frac{1}{9}, 3 \right\} \quad d) x \in \left\{ \frac{1}{5}, 25 \right\}$$

$$1.176. a) (2, 6) \quad b) (2, 4) \quad c) (125, 4), (625, 3) \quad d) (8, 5)$$

Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań

$$1.177. \text{ Układ jest oznaczony jeśli } m \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \cup (2, +\infty)$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{\log_2^2 m - 1} \\ y = \frac{-\log_2 m}{\log_2^2 m - 1} \end{cases}; x < y, \text{ jeśli } m \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$1.178. x = \log_2 5; \text{ różnica ciągu } r = \log 2$$

$$1.179. x = 8, S_{20} = 420$$

1.180. $x = 4, b_n = 2^{2-n}$

1.181. 501 501

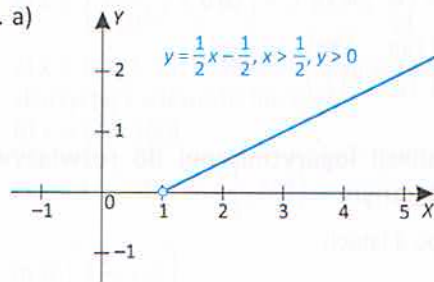
1.182. $\frac{1}{7}$

1.183. $m = 1$

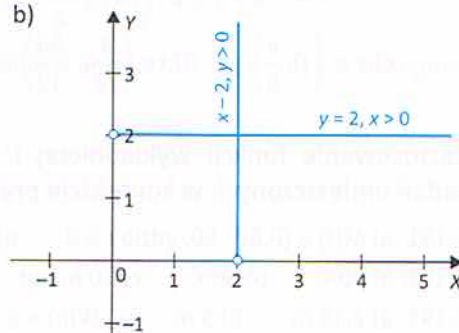
1.184. $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$

1.185. $m \in (0, 8)$

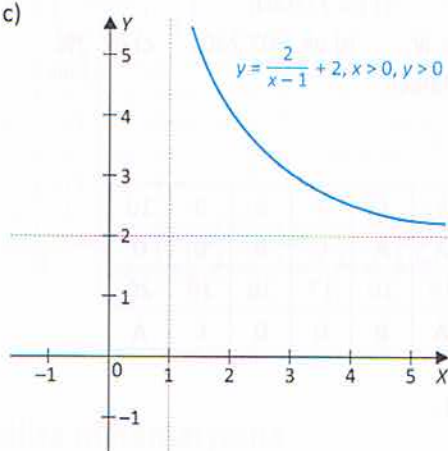
1.186. a)



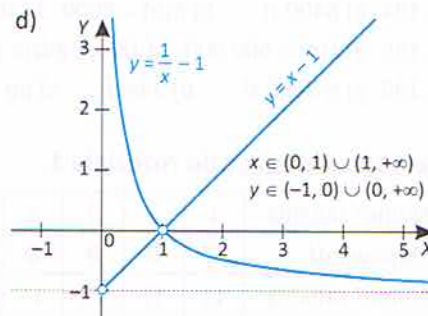
b)



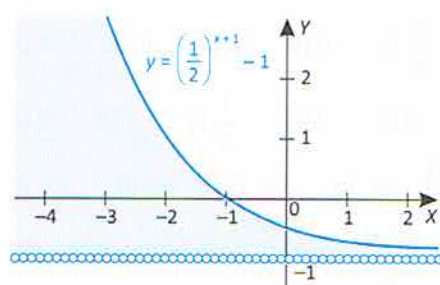
c)



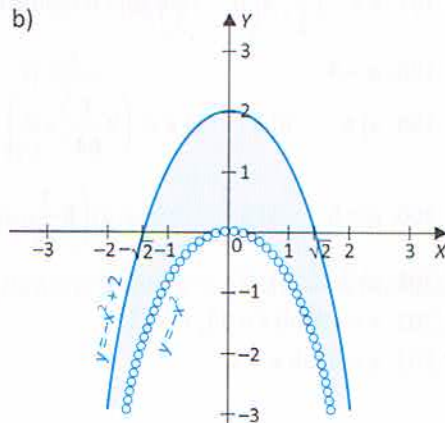
d)



1.187. a)



b)



$$1.188. m \in \left\langle -3\frac{1}{2}, -2 \right\rangle$$

$$1.189. a) x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C} \quad b) x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$c) x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C} \quad d) x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$1.190. a) x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \quad b) x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$c) x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \quad d) x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right)$$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

$$1.191. a) M(t) = (0,8)^t \cdot 50, \text{ gdzie } t \geq 0 \quad b) \text{ po 3 latach}$$

$$1.192. a) 90^\circ\text{C} \quad b) 60^\circ\text{C} \quad c) 10 \text{ minut}$$

$$1.193. a) 2,14 \text{ m} \quad b) 3 \text{ m} \quad c) W(n) = 2 \cdot (1,07)^n, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_+ \quad d) \text{ po 35 latach}$$

$$1.194. a) 8400 \text{ zł} \quad b) K(n) = 8000 \cdot (1,05)^n \quad c) \text{ po 3 latach}$$

$$1.195. a) L(n) = 600\,000 \cdot (1,004)^n, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_+ \quad b) \text{ ok. } 607\,230 \quad c) \text{ ok. } 2\%$$

$$1.196. a) \text{ o } 8000 \text{ zł} \quad b) 3 \text{ lata} \quad c) \text{ po 4 latach}$$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	D	B	D	A	A	C	B	B	D
Numer zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	A	C	A	D	A	B	D	D	C	A

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

$$1.197. k = -3\frac{1}{2}, A\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$$

$$1.198. p = 4$$

$$1.199. a) 5 \quad b) 4 \quad c) x \in \left(2\frac{1}{64}, +\infty\right)$$

$$1.200. p = 5 \quad a) 1\frac{2}{3} \quad b) x \in \left(6\frac{1}{16}, +\infty\right)$$

$$1.201. a) 2 \quad b) -2$$

$$1.202. x = -9 \text{ lub } x = 11; r = 12$$

$$1.203. x = 0 \text{ lub } x = 3$$

1.204. $x = 16\frac{1}{2}$, wówczas $q = -5$ lub $x = \frac{33}{64}$, wówczas $q = 5$

1.205. $x = 4, r = 8$

1.206. a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$ d) $x \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right\}$

1.207. a) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$ b) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

c) $x \in \left(2\frac{1}{10}, 2 + \sqrt{10} \right)$ d) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{C}$

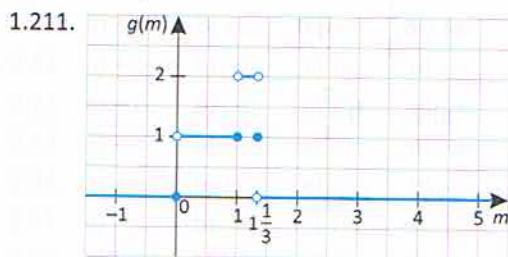
1.208. a) $x \in \{-2, 1, 2\}$; wskazówka: Zapisz równanie w postaci $(2^x - 2)(x^2 - 4) = 0$, następnie skorzystaj z własności iloczynu.

b) $x \in \{30, 100\}$

c) $x = 4$ d) $x \in \left\{ \frac{1}{3}, 243 \right\}$

1.209. $m \in \left(3\frac{1}{2}, +\infty \right)$

1.210. $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{8}, \frac{2}{3} \right)$



2. Analiza matematyczna

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów

2.1 a) 2 b) -4 c) 3 d) 0 e) $\frac{3}{4}$ f) $-\frac{3}{2}$

2.2. a) 2 b) 4 c) $\frac{1}{3}$ d) 8 e) 0 f) 2

2.3. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

2.4. nie jest prawdziwe; np. jeśli $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, gdzie $n > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ nie istnieje

Granica funkcji w punkcie

2.5. a) 0 b) 8 c) -3 d) 3 e) 11 f) 7

2.6. a) 3 b) 2 c) $\frac{1}{8}$ d) 1 e) 7 f) 6

2.7. a) 4 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) $-\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 7

2.8. a) 3 b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{12}$ e) 27 f) $\frac{1}{48}$

2.9. c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{-1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \frac{-1}{2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \frac{1}{2}$

2.10. a) istnieje granica; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ b) nie istnieje granica

c) istnieje granica; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ d) istnieje granica; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$

e) istnieje granica; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$ f) nie istnieje granica

Obliczanie granicy funkcji w punkcie

2.11. a) 7 b) -36 c) 4 d) $2\sqrt{10}$ e) $-\frac{7}{9}$ f) $-\frac{1}{8}$

2.12. a) -4 b) $-\frac{1}{5}$ c) -3 d) $-1\frac{7}{8}$ e) $-6\frac{2}{3}$ f) 0

2.13. a) $-\frac{1}{9}$ b) -16 c) $3\frac{1}{12}$ d) $\frac{9}{8}$ e) 2 f) $\frac{3}{4}$

2.14. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 3 f) 12

2.15. a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{4}$

2.16. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

2.17. a) $a = 64$ b) $a = 36$

2.18. 0

Granice jednostronne funkcji w punkcie

2.19. a) granica w punkcie 1 istnieje i jest równa 0.

b) granica w punkcie -2 nie istnieje

c) granica w punkcie 0 nie istnieje

d) granica w punkcie 3 istnieje i jest równa 2

e) granica w punkcie -2 nie istnieje

f) granica w punkcie 0 istnieje i jest równa 1

2.20. a) 2 b) 0 c) -1 d) 1 e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

2.21. a) 2 b) nie istnieje c) -22 d) 3 e) nie istnieje f) $\frac{1}{3}$

2.22. a) 1 b) nie istnieje c) $\frac{2}{3}$ d) 5

Granica funkcji w nieskończoności

2.23. a) 2 b) -2 c) $\frac{2}{3}$ d) -7 e) 0 f) 3

2.24. a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{3}{5}$

2.25. a) 0 b) $-\frac{4}{5}$ c) 4 d) 2 e) 0 f) $\frac{3}{7}$

2.26. a) -5 b) 0 c) 17 d) -5 e) 22 f) 3

2.27. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 3 f) -3

2.28. a) 0 b) 1 c) -2,5 d) 0 e) -11 f) -10

Granica niewłaściwa funkcji

2.30. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

2.31. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

2.32. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

2.33. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

2.34. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

2.35. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

2.36. a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

2.37. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

2.38. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

2.39. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

Ciągłość funkcji w punkcie

2.40. a) jest ciągła b) jest ciągła c) nie jest ciągła
d) jest ciągła e) jest ciągła f) nie jest ciągła

2.41. a) jest ciągła b) jest ciągła c) nie jest ciągła
d) jest ciągła e) jest ciągła f) jest ciągła

2.42. $a = 6$

2.43. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 2, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases}$; funkcja f jest ciągła w punktach -1, 1, natomiast nie jest ciągła w punkcie 0

$$2.44. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 1, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

funkcja jest ciągła w punkcie 0 i nie jest ciągła w punktach $-1, 1$

$$2.46. \quad 3; -6$$

Ciągłość funkcji w zbiorze

$$2.47. \quad a = 3 \text{ lub } a = \frac{5}{3}$$

$$2.48. \quad a = -1,5; b = 7$$

$$2.49. \quad a = -2, b = -14$$

$$2.50. \quad a = \frac{-15}{11}, b = \frac{53}{11}$$

$$2.51. \quad a = 0, b = 24$$

2.52. *wskazówka:* Rozważ funkcję $g(x) = f(x) - x$, gdzie $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Korzystając z twierdzenia Darboux, wykaż, że funkcja g ma miejsce zerowe.

2.53. tak

2.54. *wskazówka:* Rozważ funkcję $y = h(x)$, gdzie $h(x) = f(x) - g(x)$. Wykaż, że funkcja h ma miejsce zerowe należące do przedziału $(-3, -2)$.

2.55. *wskazówka:* Rozważ równanie $f(x) = -160$ i zapisz je w postaci $f(x) + 160 = 0$. Oznacz $W(x) = f(x) + 160$ a następnie oblicz $W(3)$ i $W(4)$.

2.56. *wskazówka:* Zapisz równanie w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Skorzystaj z twierdzenia Darboux.

2.57. *wskazówka:* Rozważ funkcję g , gdzie $g(x) = f(x) - f(x+1)$, $x \in \langle 2, 6 \rangle$. Następnie oblicz $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ i skorzystaj z twierdzenia Darboux.

$$2.59. \quad \begin{array}{llll} \text{a) } ZW = \left\langle \frac{-1}{9}, \frac{-1}{25} \right\rangle & \text{b) } ZW = \left\langle \frac{1}{15}, \frac{1}{3} \right\rangle & \text{c) } ZW = \langle 1, 2 \rangle & \text{d) } ZW = \left\langle -2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\rangle \end{array}$$

Asymptoty wykresu funkcji

$$2.60. \quad \begin{array}{llll} \text{a) } x = 5 & \text{b) nie ma asymptot pionowych} & \text{c) } x = 2 & \text{d) } x = 0 \\ \text{e) } x = 0, x = 2 & \text{f) } x = -3 \end{array}$$

$$2.61. \quad \begin{array}{llll} \text{a) } x = -3 & \text{b) } x = -4, x = -5 & \text{c) } x = -2 & \text{d) nie ma asymptot pionowych} \\ \text{e) } x = -2, x = \frac{-2}{3} & \text{f) nie ma asymptot pionowych} \end{array}$$

$$2.62. \quad a = 1, b = -6$$

$$2.63. \quad a = -8, b = 16$$

$$2.64. \quad (a = -1 \text{ i } b = -12) \text{ lub } (a = -6 \text{ i } b = 8) \text{ lub } (a = -8 \text{ i } b = 16)$$

$$2.65. \quad \text{nie istnieją}$$

- 2.67. a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = x$ c) $y = 5$ d) nie ma asymptot ukośnych
e) $y = 0$ f) $y = 2x + 7$
- 2.68. a) $y = 3x - 15$ asymptota ukośna prawostronna $y = -3x - 15$ asymptota ukośna lewostronna
b) $y = 4$ asymptota pozioma prawostronna $y = -4$ asymptota pozioma lewostronna
c) $y = -x$ asymptota ukośna prawostronna $y = x - 4$ asymptota ukośna lewostronna
d) $y = x - 2$ asymptota ukośna prawostronna $y = -x$ asymptota ukośna lewostronna
e) $y = x + 3$ asymptota ukośna prawostronna $y = -x - 3$ asymptota ukośna lewostronna
f) $y = 2x - \frac{1}{4}$ asymptota ukośna prawostronna $y = -2x + \frac{1}{4}$ asymptota ukośna lewostronna
- 2.69. a) $y = 3x + 9$ asymptota ukośna lewostronna $y = -1$ asymptota pozioma prawostronna
b) $y = -2x$ asymptota ukośna prawostronna, brak asymptoty ukośnej lewostronnej
c) $y = 0$ asymptota pozioma obustronna
d) $y = -3x - 18$ asymptota ukośna lewostronna, $y = 3x - 18$ asymptota ukośna prawostronna
- 2.70. a) $x = -7$ asymptota pionowa; $y = -2$ asymptota pozioma
b) $x = 2$, $x = -3$ asymptoty pionowe; $y = 0$ asymptota pozioma
c) $x = -1$ asymptota pionowa; $y = x - 2$ asymptota ukośna
d) $x = 1$ asymptota pionowa; $y = 2$ asymptota pozioma
e) $x = 1$, $x = -1$ asymptoty pionowe; $y = 3x - 2$ asymptota ukośna
f) $x = 3$ asymptota pionowa; brak asymptot ukośnych
- 2.71. a) $x = -2$ asymptota pionowa, $y = 1$ asymptota pozioma
b) $x = -1$ asymptota pionowa $y = x - 4$ asymptota ukośna
c) $x = 0$ asymptota pionowa, $y = 0$ asymptota pozioma
d) $y = 2x$ asymptota ukośna
e) $x = 3$ asymptota pionowa $y = 1$ asymptota pozioma lewostronna $y = -1$ asymptota pozioma prawostronna
f) $x = -2$ asymptota pionowa prawostronna, $x = 2$ asymptota pionowa lewostronna, $y = 6x - 6$ asymptota ukośna prawostronna, $y = -6x - 6$ asymptota ukośna lewostronna

Pochodna funkcji w punkcie

- 2.72. a) $f'(3) = -2$ b) $f'(-1) = 3$ c) $f'(-2) = -13$ d) $f'(5) = -10$
e) $f'(4) = \frac{-1}{81}$ f) $f'(-3) = \frac{1}{18}$
- 2.73. a) $f'(5) = 150$ b) $f'(-2) = -17$ c) $f'(1) = \frac{-1}{2}$ d) $f'(-2) = -3$
e) $f'(1) = \frac{1}{2}$ f) $f'(-3) = \frac{-5}{8}$
- 2.74. a) istnieje b) istnieje c) nie istnieje d) istnieje e) nie istnieje
f) istnieje

Funkcja pochodna

2.75. a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = -3$ c) $f'(x) = 6$ d) $f'(x) = -2x$ e) $f'(x) = 10x + 3$

f) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

2.76. a) $f'(x) = x^3 - x^2 + 4x$ b) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 1$

c) $f'(x) = -24x^7 + 20x^3$ d) $f'(x) = 6x^2 - 36x^5$

e) $f'(x) = \sqrt{6} + 7x^6 - x^7$ f) $f'(x) = 10x^9 + 100x^{99} + 1000x^{999}$

2.77. a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$ b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = 8x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1 - \frac{6}{x^2}$ f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.78. a) $f'(x) = 24x^5 - 5x^4 + 8$ b) $f'(x) = 32x^3 + 18x^2 - 24x - 9$

c) $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x + 1$ d) $f'(x) = 14x^6 + 30x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 24x$

e) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ f) $f'(x) = 3x^2 + 2x + \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

2.79. a) $f'(x) = \frac{-3}{(x+5)^2}$ b) $f'(x) = \frac{2}{(3x-1)^2}$ c) $f'(x) = \frac{14}{(-4x+2)^2}$

d) $f'(x) = \frac{18x^2 + 6x + 7}{(6x+1)^2}$ e) $f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$ f) $f'(x) = \frac{-2x^2 - 10}{(x^2-5)^2}$

2.80. a) $f'(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 12x + 2}{(3x^2 + x)^2}$ b) $f'(x) = \frac{9x^2 + 16x - 10}{(x^2 + x + 2)^2}$

c) $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$ d) $f'(x) = \frac{-20x^3 - 15x^2}{(x^4 + x^3 + 1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{x^6 - 2x^3 - 6x^2 + 3}{(x^3 + 1)^2}$ f) $f'(x) = \frac{-4x^5 - 1}{(x^5 - 1)^2}$

2.81. a) $k = 1, m = -1; f'(x) = \begin{cases} 4, & \text{jeśli } x < 1 \\ 2x + 2, & \text{jeśli } x \geq 1 \end{cases}$

b) $k = -2\frac{2}{3}, m = 12; f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}, & \text{jeśli } x < 3 \\ -\frac{12}{x^2}, & \text{jeśli } x \geq 3 \end{cases}$

c) nie istnieje takie $k, m; f'(x) = \begin{cases} 4x + k^2, & \text{jeśli } x < 2 \\ 1, & \text{jeśli } x > 2 \end{cases}$

$$d) k = m = \frac{-1}{4}; f'(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Styczna do wykresu funkcji

- 2.82. a) $y = 6x - 8$ b) $y = 9x + 11$ c) $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{1}{5}$ d) $y = \frac{-1}{6}x$
- 2.83. $y = -5x + 5$; $(4, -15)$
- 2.84. $y = -8$; jeden punkt wspólny
- 2.85. $y = \frac{1}{36}x + 1\frac{4}{9}$, dwa punkty wspólne; $y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2}$, dwa punkty wspólne
- 2.86. $y = \frac{3}{4}x - 4\frac{1}{2}$, jeden punkt wspólny; $y = -3x - 18$; jeden punkt wspólny
- 2.87. a) $A(3, 5)$ b) $y = 3x - 4$

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

- 2.88. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1)$, $(4, +\infty)$, a malejąca w przedziale: $(-1, 4)$
- b) funkcja f jest rosnąca w przedziale: $(3, 5)$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, 3)$, $(5, +\infty)$
- c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(6, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty, 6)$
- d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -4)$, $(1, 4)$, a malejąca w przedziałach: $(-4, 1)$, $(4, +\infty)$
- 2.89. a) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, \frac{1}{4})$, malejąca w przedziale $(\frac{1}{4}, +\infty)$
- b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, \frac{-1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$
- c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(1, 3)$, a malejąca w przedziałach $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$
- d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$, $(2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach: $(-2, -1)$, $(1, 2)$
- 2.90. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -4)$, $(-2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $(-4, -3)$, $(-3, -2)$
- b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, 2)$, $(6, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $(2, 4)$, $(4, 6)$
- c) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(0, 2)$, $(2, 2\frac{2}{5})$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, 0)$, $(2\frac{2}{5}, 3)$, $(3, +\infty)$

d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$, $(2, 2\frac{1}{2})$, a malejąca w przedziałach: $(2\frac{1}{2}, 7)$, $(7, +\infty)$

- 2.91. a) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$
 b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(0, 2)$
- 2.92. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, a malejąca w przedziałach $(-1, 3)$, $(3, +\infty)$
 b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1)$, $(2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $(-1, 0)$, $(0, 2)$
- 2.93. a) $a = -2$, $b = 7$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(\frac{-7}{3}, 1)$ i malejąca w przedziałach: $(-\infty, \frac{-7}{3})$, $(1, +\infty)$

Ekstrema lokalne funkcji

2.94. a) $f_{\max}(-5) = 48\frac{1}{3}$, $f_{\min}(3) = -37$ b) $f_{\min}(4) = 19\frac{2}{3}$, $f_{\max}(6) = 21$

c) brak ekstremów lokalnych d) brak ekstremów lokalnych

2.95. a) $f_{\max}(-3) = 4\frac{2}{5}$, $f_{\min}(-1) = -15\frac{13}{15}$, $f_{\max}(1) = -4\frac{2}{15}$, $f_{\min}(3) = -24\frac{2}{5}$

b) $f_{\min}(0) = 7$

c) $f_{\min}(6) = -520\frac{4}{5}$, $f_{\max}(-2) = 93\frac{3}{5}$

d) brak ekstremów lokalnych

2.96. $f_{\max}(\frac{-\sqrt{5}}{5}) = -2\sqrt{5}$, $f_{\min}(\frac{\sqrt{5}}{5}) = 2\sqrt{5}$

b) $f_{\min}(2) = 12$

c) $f_{\min}(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 5$, $f_{\max}(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 5$

d) $f_{\min}(0) = -2,5$

2.97. a) $f_{\max}(-3) = 0$, $f_{\min}(\frac{-7}{3}) = \frac{-4}{27}$, $f_{\max}(-2) = 0$, $f_{\min}(0) = -4$

b) $f_{\min}(-4) = 0$, $f_{\max}(\frac{-10}{3}) = \frac{4}{27}$, $f_{\min}(-3) = 0$, $f_{\max}(0) = \frac{9}{4}$

2.98. a) $f_{\min}(-8) = 16$, $f_{\max}(0) = 0$, $f_{\min}(8) = 16$

b) $f_{\min}(0) = 0$, $f_{\max}(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$, $f_{\min}(\frac{10}{3}) = \frac{20}{9}$

$$c) f_{\min}(0) = 0, f_{\max}\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}, f_{\min}\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{28}{9}$$

$$d) f_{\min}(-3) = 0, f_{\min}(1) = 0, f_{\max}(3) = \frac{4}{3}$$

$$2.99. f_{\max}(2) = 3$$

$$2.100. f_{\min}(16) = -29$$

$$2.101. a = 5, b = 4, f_{\min}(7) = 9$$

$$2.102. a) a = 6, b = -33 \quad b) f_{\min}(4) = 3$$

$$2.103. a) m \in (0, 6) \quad b) m = -2, \text{ maksimum} \quad c) m \in (-2, 0) \cup (6, 8)$$

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

$$2.104. a) M = 18\frac{2}{3}, m = -17\frac{1}{3} \quad b) M = 12, m = -5 \quad c) M = 7\frac{11}{15}, m = \frac{-19}{30}$$

$$d) M = 2\frac{3}{5}, m = -3\frac{8}{15}$$

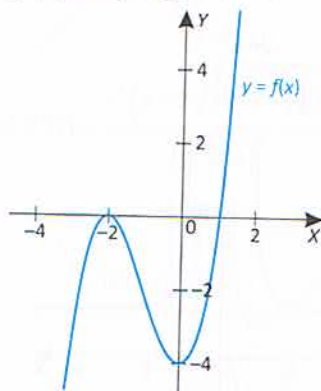
$$2.105. a) M = 9, m = -16\frac{2}{3} \quad b) M - \text{nie istnieje}, m = 4\sqrt{2} - 6$$

$$c) M = 5, m - \text{nie istnieje} \quad d) M - \text{nie istnieje}, m - \text{nie istnieje}$$

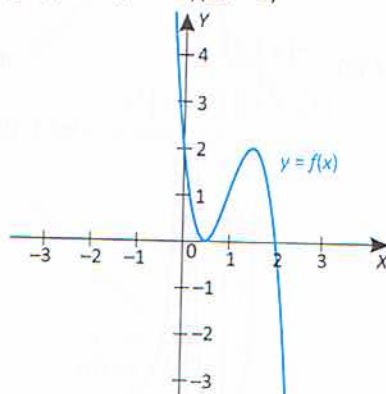
$$2.106. a) ZW = \langle 1, 4 \rangle \quad b) ZW = \left(-6\frac{2}{3}, 12\right) \quad c) ZW = \langle -26, 38 \rangle \quad d) ZW = \left(-8\frac{2}{3}, 8\frac{2}{3}\right)$$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

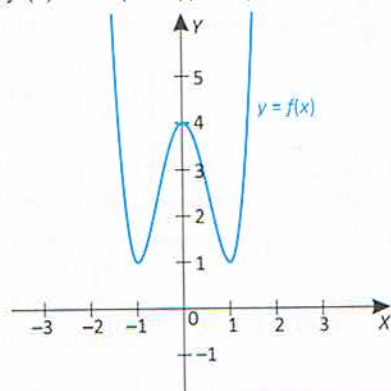
$$2.107. a) f'(x) = 3x(x+2)$$



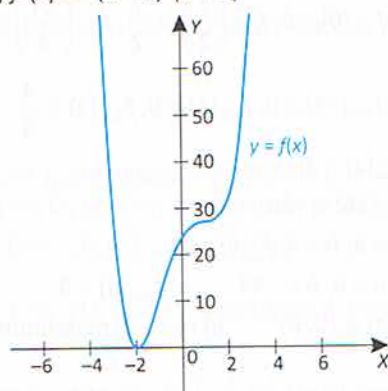
$$b) f'(x) = -3(2x-3)(2x-1)$$



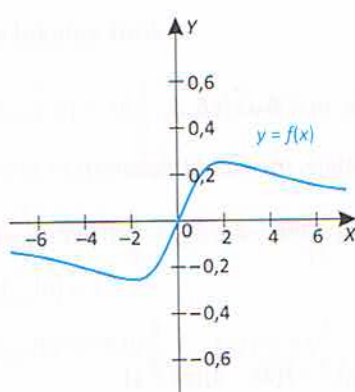
c) $f'(x) = 12x(x-1)(x+1)$



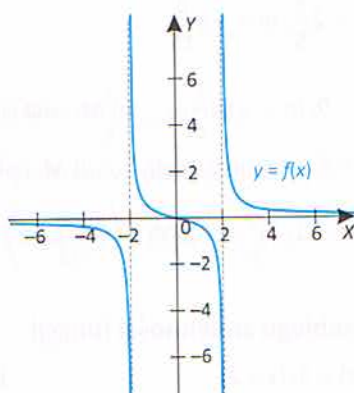
d) $f'(x) = 4(x-1)^2(x+2)$



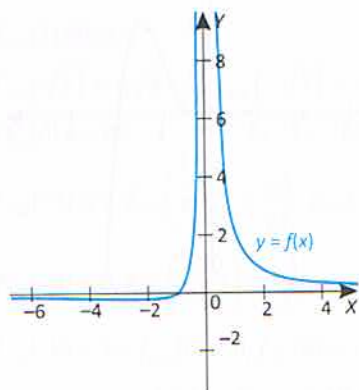
2.108. a) $f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$



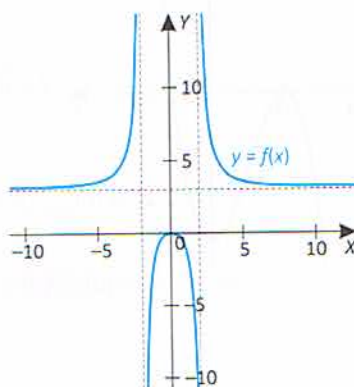
b) $f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$



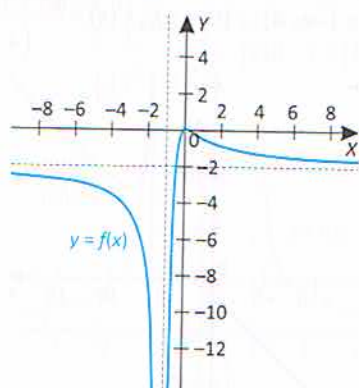
c) $f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3}$



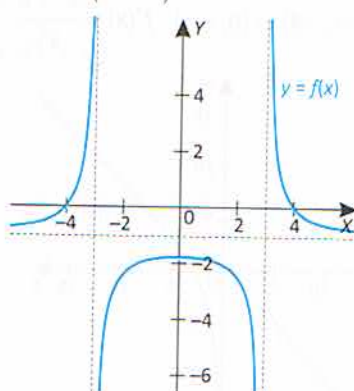
d) $f'(x) = \frac{-24x}{(x^2-4)^2}$



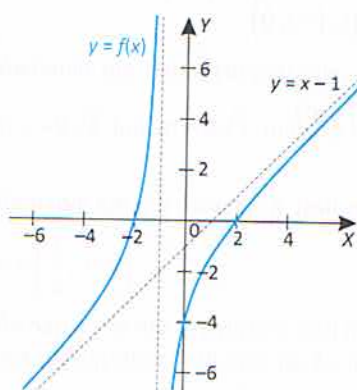
$$e) f'(x) = \frac{-4x}{(x+1)^3}$$



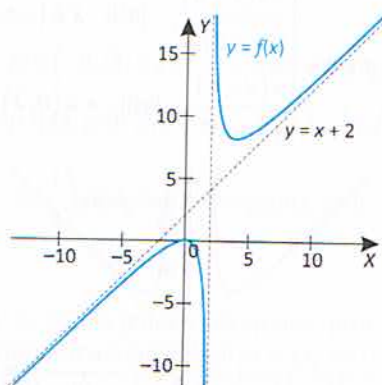
$$f) f'(x) = \frac{-14x}{(9-x^2)^2}$$



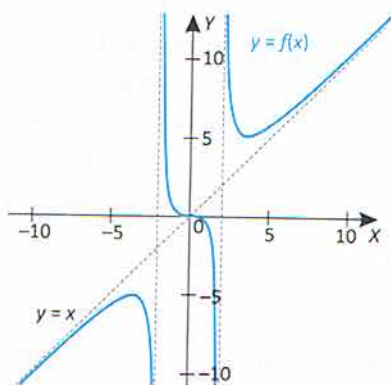
$$2.109. a) f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2}$$



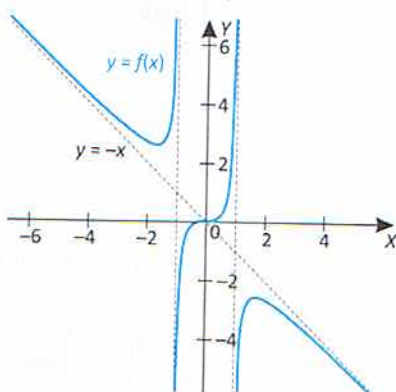
$$b) f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$



$$c) f'(x) = \frac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2}$$

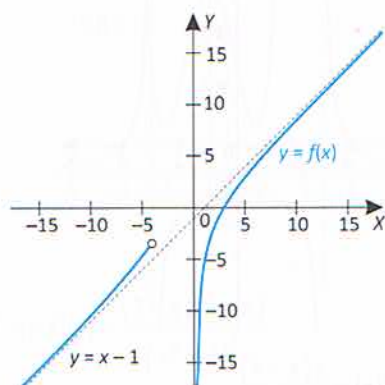


$$d) f'(x) = \frac{-x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1-x^2)^2}$$



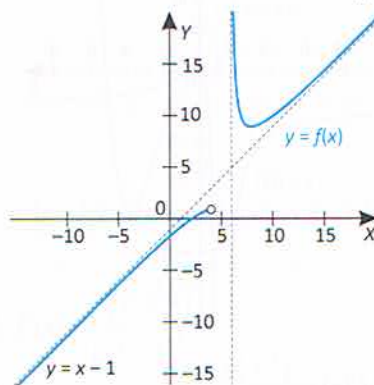
2.110. a) $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x},$

$x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty), f'(x) = \frac{x^2 + 6}{x^2}$

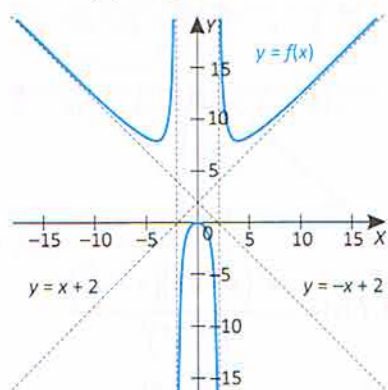


b) $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x-6},$

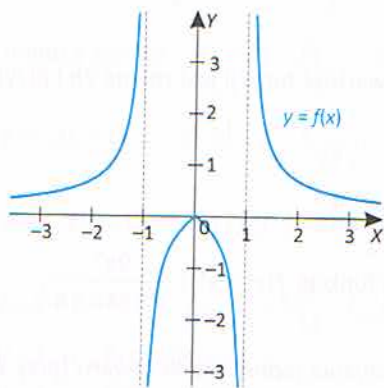
$x \in (-\infty, 4) \cup (6, +\infty), f'(x) = \frac{(x-4)(x-8)}{(x-6)^2}$



2.111. a) $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x(x+4)}{(x+2)^2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \\ \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}, & \text{jeśli } x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$



$$b) f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ -\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, & \text{jeśli } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$



2.112. równanie ma jedno rozwiązanie, jeśli $m \in (-9\sqrt{3}, 9\sqrt{3})$, ma dwa rozwiązania, jeśli

$m = -9\sqrt{3}$ lub $m = 9\sqrt{3}$, ma trzy rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -9\sqrt{3}) \cup (9\sqrt{3}, +\infty)$

2.113. równanie nie ma rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, \frac{1}{2})$, ma dwa rozwiązania, jeśli

$m \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

2.114. równanie nie ma rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, 0)$, ma jedno rozwiązanie, jeśli $m = 0$, ma dwa rozwiązania, jeśli $m \in (0, 2)$, ma cztery rozwiązania, jeśli $m \in (2, +\infty)$.

Zadania optymalizacyjne

2.115. $x = 13\frac{1}{3}$ cm; 37,9 litra

2.116. 40 cm na 40 cm na 20 cm

2.117. 8 cm na 8 cm na 8 cm

2.118. 3 cm na 6 cm na 4 cm

2.119. 12 cm, 24 cm, 18 cm

2.120. 64 cm na 96 cm na 80 cm

2.121. a) tak, $a = 1$ b) nie; wskazówka: $\lim_{a \rightarrow -\infty} (a + a^2 - a^3) = +\infty$

2.122. a) tak; $10 = 5 + 5$ b) nie; wskazówka: $\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + (10-x)^2}{x(10-x)} \right) = -\infty$

2.123. a) $x = \frac{4-\sqrt{2}}{7}$, $y = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ b) $x=0$, $y=1$

wskazówka: Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 + (1-2x)^3$, gdzie $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2.124. o godz. 9⁰⁰

2.125. $y(x) = x + \frac{h^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$; najmniejsza wartość funkcji jest równa $2h$ i przyjmowana jest dla argumentu h

2.126. a) $L(x) = \sqrt{x^2 + \frac{9x^2}{x^2 - 4x + 4}}$, gdzie $x \in (2, +\infty)$

b) dla $x = 2 + \sqrt[3]{18}$; wskazówka: Rozważ funkcję $f(x) = x^2 + \frac{9x^2}{x^2 - 4x + 4}$, gdzie $x \in (2, +\infty)$.

2.127. 15 sztuk; wskazówka: Koszt wyprodukowania jednej sztuki towaru (przy założeniu, że wyprodukowano x sztuk) wyraża funkcja $f(x) = \frac{K(x)}{x}$, gdzie $x \in (5, 40)$. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f .

2.128. 16 drzew

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	B	A	B	C	D	D	A	C	D
Nr zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	D	B	A	A	B	B	A	D	B	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

2.129. a) granica istnieje; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5$ b) granica nie istnieje

2.130. a) -2 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) granica nie istnieje

2.131. a) 0 b) $+\infty$ c) 2 d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

2.132. a) $-\infty$ b) $\frac{-1}{3}$ c) 0 d) $+\infty$

2.133. wskazówka: Funkcja T jest funkcją ciągłą.

2.134. a) 1,5 m b) 60,3 m c) 9,8 m/s

d) prędkość chwilowa w 3 sekundzie: 4,9 m/s (kamień się wznosił); prędkość chwilowa w 4 sekundzie: -4,9 m/s (kamień spadał) e) 61,525 m f) po 7,04 s

2.135. a) 1600 m³ b) 900 m³ c) 35 000 l/min d) 30 000 l/min; wskazówka: Szukana wielkość jest równa $V'(20)$.

- 2.136. zdania prawdziwe: b), d)
- 2.137. $A(-2\sqrt{6}, 0)$, $B(3, 0)$, $C(2, -20)$, $D(-2, -100)$
- 2.138. a) $(-3, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 5)$ b) $f'(-2) = 3$, $f'(1) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(4) = -2$
- 2.139. wskazówka: Udowodnij, że zbiór wartości funkcji pochodnej f' to przedział $(1, +\infty)$.
- 2.140. a) $k = -1$ lub $k = \frac{-1}{2}$ b) $k = \frac{-1}{2}$
- 2.141. a) miejsca zerowe: $-4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ b) $f_{\max}(-3) = 6$, $f_{\min}\left(\frac{1}{3}\right) = -12\frac{14}{27}$
- c) $y = -3x - 12$ d) $B\left(-2\frac{2}{3}, 5\frac{13}{27}\right)$, $y = -3x - 2\frac{14}{27}$
- 2.142. a) $a = 1$, $b = -15$ b) $f_{\max}(-5) = 65\frac{1}{3}$, $f_{\min}(3) = -20$
- 2.143. a) $f_{\min}(-3) = -37\frac{1}{4}$, $f_{\max}(1) = 5\frac{5}{12}$, $f_{\min}(3) = -1\frac{1}{4}$ b) $ZW = \left[-37\frac{1}{4}, +\infty\right)$
- 2.144. $ZW = (-\infty, -7) \cup (13, +\infty)$
- 2.145. $ZW = (-\infty, -108) \cup (108, +\infty)$
- 2.146. $x = 0$ – asymptota pionowa obustronna, $y = \frac{1}{2}x + 3$ – asymptota ukośna prawostronna
- 2.147. a) $K(x) = 4x + \frac{22\,500}{x} + 600$, gdzie $x \in (20, 200)$ b) 75 wieszaków
- 2.148. a) w wariantie 1): 7 godzin, w wariantie 2): 3,5 godzin b) o ok. 121 zł

3. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka

- 3.1. a) $\vec{AB} = [-4, -3]$, $|\vec{AB}| = 5$ b) $\vec{AB} = [-1, 3]$, $|\vec{AB}| = \sqrt{10}$
- c) $\vec{AB} = [5, 12]$, $|\vec{AB}| = 13$ d) $\vec{AB} = [5, -5]$, $|\vec{AB}| = 5\sqrt{2}$
- 3.2. a) $B(2, -4)$ b) $B(-1, 5)$ c) $B\left(3\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ d) $B(2\sqrt{3} + 3, 1)$
- 3.3. a) $A(4, 2)$ b) $A(-3, -2)$ c) $A(3, -6)$ d) $A\left(1\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}\right)$
- 3.4. a) tak b) nie c) nie d) tak
- 3.5. a) tak b) nie c) nie d) nie
- 3.7. a) nie b) nie c) tak d) tak
- 3.8. a) $m = 0$ b) $m = \sqrt{2} \vee m = -\sqrt{2}$ c) $m \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

- 3.9. a) $\vec{u} + \vec{v} = [-1, 0]$; 1 b) $\vec{z} - \vec{u} = [8, 2]$; $2\sqrt{17}$ c) $3\vec{v} = [-9, 12]$; 15
 d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z} = [24, -10]$; 26
- 3.10. a) $(-1, 2)$ b) $(0, 3)$ c) $(-3, 4)$ d) $(\sqrt{2}, 2)$
- 3.11. a) $A_1(1, 4)$ b) $A_1(0, -2)$ c) $A_1(-4, 4)$ d) $A_1(11, 13)$
- 3.12. a) $S\left(-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$ b) $S_1(-3, -4), S_2(-1, -1), S_3(1, 2)$ c) $S_1(-2, -1), S_2(-6, 1)$
 d) $S_1(0, 5), S_2(1, 7), S_3(2, 9), S_4(3, 11), S_5(4, 13)$
- 3.13. a) $C(9, -3), D(8, 3)$ b) $A(-4, -3), D(-6, 6)$
- 3.14. a) $D(-6, -2), P(-2, 2)$ b) $C(6, 8), P\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
- 3.15. a) $S(3, 2)$ b) $S(-2, -1)$ c) $S(1, 3)$ d) $S(1, -4)$

Kąt między niezerowymi wektorami

- 3.16. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ d) $\sin \alpha = \frac{63}{65}$
- 3.17. a) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$
- 3.18. a) $\alpha = 90^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$ c) $\alpha = 150^\circ$ d) $\alpha = 120^\circ$
- 3.19. a) $|AB| = \sqrt{68}, |AC| = |BC| = \sqrt{34}, \alpha = \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ$
 b) $|AB| = 6, |AC| = 6\sqrt{3}, |BC| = 12, \alpha = 90^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$
 c) $|AB| = 3 - \sqrt{3}, |BC| = 2\sqrt{3}, |AC| = 3\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 15^\circ$
 d) $|AB| = |AC| = 6, |BC| = 6\sqrt{3}, \alpha = 120^\circ, \beta = \gamma = 30^\circ$
- 3.20. wektory równoległe: a) i c) wektory prostopadłe: b) i d)
- 3.21. a) 8 b) 30 c) 48 d) 121
- 3.22. $a \in \{-2, 4\}$
- 3.23. $a \in \{-1, 2\}$
- 3.24. $a \in \{-2, -1\}$

Równanie kierunkowe prostej

- 3.26. a) 2,5 b) 1 c) 18 d) -16
- 3.27. a) $y = -3x + 21$ b) $y = 2x + 32$ c) $y = \frac{1}{3}x - 8\frac{2}{3}$ d) $y = -\frac{3}{4}x - 18$
- 3.28. a) $y = -3x + 28$ b) $y = 10x - 15$ c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ d) $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$
- 3.29. a) ok. 50° b) ok. 112° c) ok. 108° d) ok. 79°

3.30. a) 45° b) 60° c) 120° d) 135° e) 150° f) 30°

3.31. a) $k: y = -x$ b) $k: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$ c) $k: y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$
d) $k: y = x - 7$ e) $k: y = \sqrt{3}x + 11$ f) $k: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{2}$

3.32. a) $l: y = -\frac{3}{4}x + 11$ b) $l: y = \frac{4}{3}x - 16$

3.33. a) $5\sqrt{5}$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $\left(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

3.34. $AB: y = \frac{1}{6}x - 1$, $BC: y = -\frac{1}{2}x + 3$, $AC: y = 1\frac{1}{2}x + 7$

3.35. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2$, $BC: y = -\frac{2}{7}x + 5\frac{6}{7}$, $AC: y = 6x + 31$

3.36. 135°

3.37. $(4, 0)$, $\left(\frac{12+4\sqrt{3}}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{12-4\sqrt{3}}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$

Równanie ogólne prostej

3.38. a) $x - 6 = 0$ b) $x + 4y - 5 = 0$ c) $x + 6y - 7 = 0$

3.39. a) $2x + y - 8 = 0$ b) $y + 4 = 0$ c) $x - y + 5 = 0$ d) $3x + y = 0$

3.40. a) $-5x + 3y + 12 = 0$ b) $x - \sqrt{5} = 0$ c) $-2x + 3y - 2 = 0$ d) $-2x + y + 5 = 0$

3.41. a) równanie ogólne: $x - 2y + 5 = 0$; równanie kierunkowe $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

b) równanie ogólne: $6x - y - 7 = 0$; równanie kierunkowe $y = 6x - 7$

c) równanie ogólne: $x + 7 = 0$; równanie kierunkowe nie istnieje

d) równanie ogólne: $y + 9 = 0$; równanie kierunkowe $y = -9$

3.42. $p = -2$

3.43. $m \in \{-3, -1\}$

3.44. $m = 1$

3.45. $m \in \{-2, 2\}$

3.46. a) 135° b) 60° c) 120° d) 30° e) 90° f) 0°

3.47. $16\frac{2}{3}$

3.48. $AC: 7x - y - 10 = 0$

wskazówka: Wyznacz najpierw równanie ogólne prostej zawierającej bok BC tego prostokąta (prostopadła do wektora $\overrightarrow{AB}$ i przechodząca przez C). Następnie oblicz współrzędne punktu B oraz A .

3.49. $AB: 3x - 2y + 48 = 0$, $BC: x + 8y - 10 = 0$, $AC: 7x + 4y + 34 = 0$

wskazówka: Wyznacz współrzędne punktu D , a następnie zauważ, że $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Kąt między prostymi

3.50. a) tak b) nie c) nie d) tak

3.51. a) $l: 3x - 2y + 5 = 0$ b) $l: 4x + 9y - 45 = 0$ c) $x + 4 = 0$ d) $y - \sqrt{2} = 0$

3.52. a) tak b) tak c) nie d) tak

3.53. a) $l: x + 5y - 9 = 0$ b) $l: x + \sqrt{7} = 0$ c) $l: y - 8 = 0$ d) $l: 2x + 3y + 6 = 0$

3.54. a) $A = -\frac{5}{7}, C = 5$ b) $B = -1\frac{1}{3}, C = -5$ c) $B = 4, C = 0$ d) $A = -2, C = -6$

3.55. a) $m = -\frac{1}{5}$ b) $m = 6$

3.56. a) $a = 3$ b) $a = 1 \vee a = -3$

3.57. a) $A = 3, B = -1,5$ b) $A = 2, B = 6$ c) $A = B = 1$ d) $A = 12, B = -2$

3.58. a) $5x - 2y + 1 = 0$ b) $y - 2 = 0$ c) $x + y - 1 = 0$ d) $x + 3 = 0$

3.59. $C(2, 3)$

wskazówka: Punkt C jest punktem wspólnym prostej k i symetralnej odcinka AB .

3.60. $\left(-4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{9}\right)$

wskazówka: Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia się symetralnych boków trójkąta.

3.61. $\sqrt{2}$

3.62. $Q(9, 4)$

3.63. $5x - 2y + 13 = 0, x + 2y - 7 = 0$

3.64. $B(3, -1), C(7, 2)$

3.65. $C(-3, -1)$, pole kwadratu jest równe 10

3.66. $7x + 3y - 36 = 0$

3.67. $3x + 5y + 1 = 0, x - y + 3 = 0, 7x + y - 19 = 0$

3.68. $C(4, 6)$

3.69. $3x + 4y - 15 = 0$

3.70. $B(4, 3), C(-1, 3); 3\sqrt{5}$

3.71. a) 45° b) 30°

3.72. a) 135° b) 120°

3.73. $x - 3y = 0$ oraz $3x + y = 0$

3.74. $x - 5y + 22 = 0$ oraz $5x + y + 6 = 0$

3.75. $\sqrt{3}x + y = 0$ oraz $y = 0$

3.76. $(\sqrt{3} - 2)x + y + 3 - \sqrt{3} = 0$ oraz $(2 + \sqrt{3})x - y - 3 - \sqrt{3} = 0$

3.77. $2x + 5y + 4 = 0$

wskazówka: Wykorzystaj fakt, że kąt ostry utworzony przez proste k i l ma taką samą miarę jak kąt utworzony przez prostą k i prostą zawierającą bok AC .

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

- 3.78. a) 9 b) 4 c) 0 d) $2\frac{1}{5}$
- 3.79. a) $3\sqrt{2}$ b) 8 c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $8\frac{1}{15}$
- 3.81. osiami symetrii figury F są proste k i m
- 3.82. a) $C = 12$ lub $C = 2$ b) $C = -68$ lub $C = 82$ c) $C = 7$
d) $C = 7 - 5\sqrt{7}$ lub $C = 7 + 5\sqrt{7}$
- 3.83. a) $a = 9$ lub $a = 0,5$ b) $a = 4,75$ c) $a = 32\frac{3}{8}$ lub $a = -22\frac{7}{8}$
d) $a = 26$ lub $a = -16,5$
- 3.84. a) $a = 9$ lub $a = -11$ b) $a = -\frac{1}{2}$ lub $a = 2\frac{5}{6}$
c) nie istnieje taka liczba a d) $a = 8$ lub $a = -12$
- 3.85. a) pr. $AB: x + 2 = 0$, pr. $BC: x + 2y - 2 = 0$, pr. $AC: 3x + 4y - 6 = 0$
b) $h_A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $h_B = 0,8$, $h_C = 4$
- 3.86. a) $DA \parallel CB$ b) $h = 1,5\sqrt{10}$
- 3.87. $P_1(8, 0)$ lub $P_2\left(-1\frac{1}{6}, 0\right)$
- 3.88. $P_1\left(0, \frac{6}{7}\right)$ lub $P_2\left(0, 1\frac{1}{3}\right)$
- 3.89. $3x - 4y - 7 = 0$ lub $4x + 3y - 1 = 0$
- 3.90. $x + 6 = 0$ lub $3x + 4y - 42 = 0$
- 3.91. $2x - 14y + 9 = 0$, $42x + 6y + 19 = 0$
- 3.92. $4x - 8y + 3 = 0$

Pole trójkąta. Pole wielokąta

- 3.93. 6
- 3.94. 10
- 3.95. a) 18 b) $D(0, 0)$ c) 45°
- 3.96. a) $A(-6, -21)$, $B(1, 0)$ b) 35 c) $\sqrt{10}$
- 3.97. $E_1\left(1\frac{2}{5}, 5\frac{1}{5}\right)$ lub $E_2\left(3\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$
- 3.98. a) $B(2, 6)$ b) 32
- 3.99. $C_1(0, 3)$ lub $C_2\left(0, -9\frac{4}{5}\right)$

3.100. $B_1(0, 0)$ lub $B_2(8, 0)$

3.101. $B_1(6, 1)$ lub $B_2\left(-26\frac{4}{13}, -9\frac{10}{13}\right)$

3.102. $(0, 4)$, $(4, 2)$

3.103. $B_1(3, 6)$ lub $B_2(-7, -6)$

Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

3.104. a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$ c) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

d) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$ e) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 0,25$ f) $(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 64$

3.105. a) $S(0, 0)$, $r = 1$ b) $S(1, 0)$, $r = 1,5$ c) $S(-1, 2)$, $r = 5$ d) $S(-3, -1)$, $r = 9$

3.106. a) $S(1, 2)$, $r = 3$ b) $S(-5, 0)$, $r = 1$ c) $S(-3, -5)$, $r = 1$ d) $S(-2, -4)$, $r = 2$

e) $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $r = 2$ f) $S(0, \sqrt{3})$, $r = 3$

3.108. a) $S(4, 0)$, $r = 3$ b) $S(0, \sqrt{2})$, $r = 2\sqrt{2}$ c) $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $r = 1$ d) $S\left(1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $r = 2$

3.109. równania a), b), d) opisują okrąg

3.110. $S\left(\frac{a}{2}, -b\right)$, $r = |a - b|$

3.111. a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

c) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$ d) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 72$

3.112. a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$ b) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$

c) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$ d) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 169$

3.113. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$ b) $(x - 3)^2 + y^2 = 25$

c) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ d) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

3.114. a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ b) $(x + 10)^2 + (y - 15)^2 = 16$

c) $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 16$ d) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

3.115. a) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 7$ b) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 7$

c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 7$ d) $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + 2\frac{3}{5}\right)^2 = 7$

3.116. $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$; $P = 8$

3.117. $2x + y = 0$

3.118. a) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ d) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$

3.119. b) $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ c) $x = 0$ oraz $y = 1\frac{1}{2}$

3.120. b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ c) 4,5

3.121. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$; $P = 15\pi$

3.122. $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ lub $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

3.123. a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 2$ b) $(x+4)^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 0,25$ c) $(x-2)^2 + (y+5)^2 \leq 36$

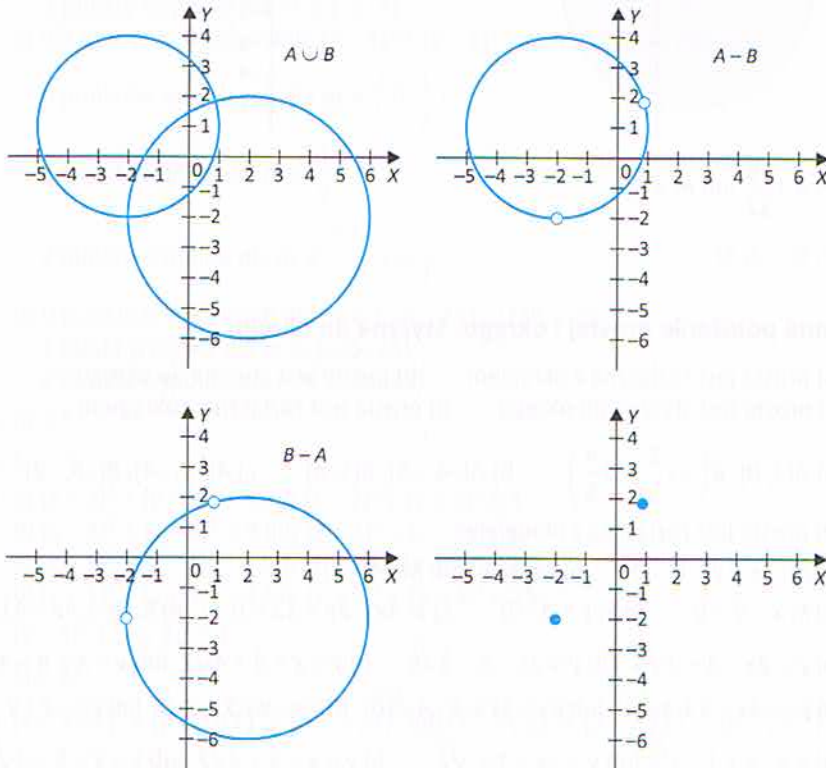
3.124. a) koło o środku w punkcie $S(0, 0)$ i promieniu $r = \frac{3}{2}$

b) koło o środku w punkcie $S(1, 0)$ i promieniu $r = 1$

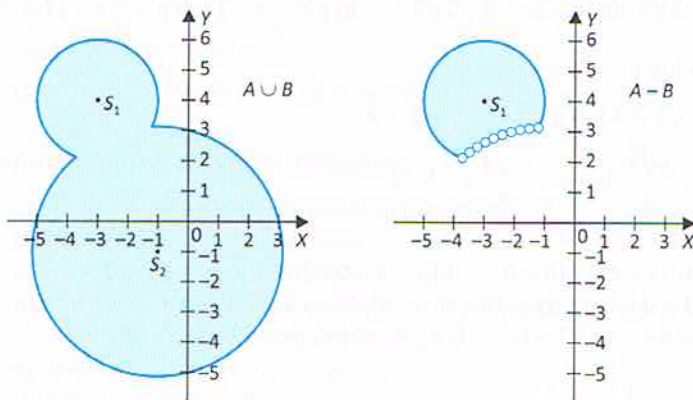
c) koło o środku w punkcie $S(0, -3)$ i promieniu $r = 2$

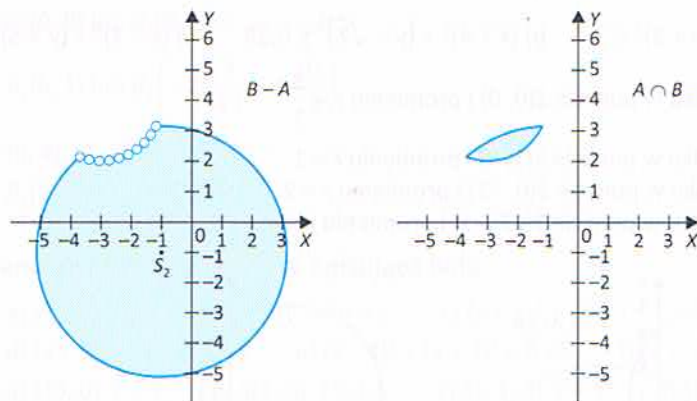
d) koło o środku w punkcie $S(-2, -1)$ i promieniu $r = 4$

3.125.



3.126.





3.127. $m = 3\frac{18}{37}$ lub $m = 5$

3.128. $m \in \langle -2, 4 \rangle$

Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu

- 3.129. a) prosta jest rozłączna z okręgiem b) prosta jest styczna do okręgu
c) prosta jest styczna do okręgu d) prosta jest rozłączna z okręgiem

3.130. a) $A(3, 0)$, $B\left(-2\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$ b) $A(-4, -5)$, $B(5, 4)$ c) $A(-4, -4)$, $B(-6, -2)$

d) prosta jest rozłączna z okręgiem

3.131. a) $m: 2x + y - 6 = 0$ b) $M_1(0, 6)$ lub $M_2(4, -2)$

3.132. a) $k: x - 9 = 0$ b) $k: y + 4 = 0$ c) $k: 4x - 3y + 12 = 0$ d) $k: 3x + 4y - 41 = 0$

3.133. a) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$ b) $y = x + 8 + 4\sqrt{2}$ lub $y = x + 8 - 4\sqrt{2}$
c) $y = -3x + 3 + 4\sqrt{10}$ lub $y = -3x + 3 - 4\sqrt{10}$ d) $y = -x + 7 + 3\sqrt{2}$ lub $y = -x + 7 - 3\sqrt{2}$

3.134. a) $y = -x + 1 - \sqrt{2}$ lub $y = -x + 1 + \sqrt{2}$ b) $y = x - 5 + 3\sqrt{2}$ lub $y = x - 5 - 3\sqrt{2}$
c) $y = 2x - 8 + 3\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 8 - 3\sqrt{5}$ d) $y = \frac{4}{3}x - 1$ lub $y = \frac{4}{3}x - 17\frac{2}{3}$

3.135. a) $y = \sqrt{3}x + 2$ lub $y = \sqrt{3}x - 2$

b) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$ lub $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 4$

c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ lub $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 5\sqrt{3}$

d) $y = -x + 3$ lub $y = -x - 5$

3.136. a) $y + 2 = 0$ lub $3x + 4y - 10 = 0$ b) $y - 3 = 0$ lub $15x + 8y + 51 = 0$

c) $9x + 13y - 3 = 0$ lub $x - 3y + 13 = 0$ d) $2x + y + 2 = 0$ lub $x - 2y + 6 = 0$

e) $x + 7 = 0$ lub $4x + 3y + 1 = 0$ f) $x - 5 = 0$ lub $5x - 12y - 37 = 0$

3.138. $\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 = 4\frac{1}{2}$

3.139. $\operatorname{tg} \alpha = 1 \frac{1}{3}$

3.140. a) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -8) \cup (-4, +\infty)$

1 punkt wspólny dla $m \in \{-8, -4\}$

2 punkty wspólne dla $m \in (-8, -4)$

b) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$

1 punkt wspólny dla $m \in \{-5, 3\}$

2 punkty wspólne dla $m \in (-5, 3)$

c) dla $m \in (-\infty, 0)$ równanie $(x-1)^2 + (y-1)^2 = m$ nie opisuje okręgu

0 punktów wspólnych dla $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

1 punkt wspólny dla $m = \frac{1}{2}$

2 punkty wspólne dla $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -25) \cup (25, +\infty)$

1 punkt wspólny dla $m \in \{-25, 25\}$

2 punkty wspólne dla $m \in (-25, 25)$

3.141. $m = 5$

3.142. $k = -5$

3.143. a) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ lub $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

b) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ lub $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ lub $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

3.144. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$

3.145. $S(2, 2)$

3.146. $(x+2\sqrt{2})^2 + (y+2\sqrt{2})^2 = (5+2\sqrt{2})^2$ lub $(x-2\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = (5-2\sqrt{2})^2$

3.147. $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$ lub $(x-5)^2 + \left(y+8\frac{1}{2}\right)^2 = 25$ lub $(x+5)^2 + \left(y-11\frac{1}{2}\right)^2 = 25$

lub $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 25$

3.148. $(x-5)^2 + y^2 = 20$ lub $(x-1,8)^2 + (y-6,4)^2 = 20$

Wzajemne położenie dwóch okręgów

3.149. a) okręgi mają dwa punkty wspólne (przecinają się)

b) okręgi są styczne zewnętrznie

c) okręgi są wewnętrznie styczne

d) okręgi nie mają punktów wspólnych i koło wyznaczone przez okrąg o_2 zawiera się w kole wyznaczonym przez okrąg o_1

e) okręgi są wzajemnie zewnętrznie

f) okręgi są współśrodkowe

- 3.150. a) $A(2, 3)$ b) $A(0, 3), B(1, 2)$ c) $A(-4, 0), B(-2, 2)$ d) okręgi nie mają punktów wspólnych
- 3.151. $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- 3.152. dla $m \in \{2, -4\}$ okręgi są styczne zewnętrznie; dla $m = 2$ punkt styczności ma współrzędne $A(0, 1)$; dla $m = -4$ punkt styczności ma współrzędne $A(-2, -3)$
- 3.153. dla $m \in \{0, -2\}$ okręgi są wewnętrznie styczne; dla $m = 0$ punkt styczności ma współrzędne $A(-2, 2)$; dla $m = -2$ punkt styczności ma współrzędne $A(0, -6)$
- 3.154. okręgi mają tylko jeden punkt wspólny dla $m \in \left\{1, 2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$
- 3.155. dla $m \in (-6, -3) \cup (-2, 1)$
- 3.156. dla $m \in (-2, 2)$
- 3.157. $o_1: (x+8)^2 + (y+5)^2 = 36$; okręgi o i o_1 przecinają się
- 3.158. $o_1: (x+0,5)^2 + (y-1)^2 = 0,25$; okręgi o i o_1 są rozłączne zewnętrznie
- 3.159. $k: 2x + y - 2 = 0$
- 3.160. $(x-3)^2 + (y-4,5)^2 = 6\frac{1}{4}$
- 3.161. szukanym zbiorem punktów jest figura będąca sumą paraboli o równaniu $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ bez punktu o współrzędnych $(0, -2)$ i części osi OY , do której należą punkty o rzędnej $y < -2$

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

- 3.162. prawdziwe są stwierdzenia a) i b)
- 3.163. d) *wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia Talesa.
- 3.165. *wskazówka*: Oznacz środki jednokładności przez S_1 i S_2 .
Otrzymasz: $|A_1S_1| = 2 \text{ cm}$, $|A_2S_1| = 4 \text{ cm}$, $|A_1S_2| = 6 \text{ cm}$, $|A_2S_2| = 12 \text{ cm}$.
- 3.166. a) $A_1(-1, 2)$ b) $A_1(3, -4)$ c) $A_1(9, -4)$ d) $A_1(-1, -16)$
- 3.167. a) $B_1\left(-8, -3\frac{2}{3}\right)$ b) $B_1(-22, 1)$ c) $B_1(26, 95)$ d) $B_1(-4, 3)$
- 3.168. a) $E(-15, 15)$ b) $E(-18, -6)$ c) $E(-1, -2)$ d) $E\left(-2\frac{1}{2}, -10\frac{1}{2}\right)$
- 3.169. a) $A_1(-62, 24), B_1(-7, -26)$; b) $A_1(4, 20), B_1(-8, 2)$;
c) $A_1\left(-5, 1\frac{1}{2}\right), B_1\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ d) $A_1\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{7}{10}\right), B_1\left(-1\frac{1}{10}, -5\frac{1}{5}\right)$
- 3.170. a) $S(1, 3)$ b) $S\left(-6, 6\frac{1}{2}\right)$ c) $S(-7, 7)$ d) $S\left(-1\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}\right)$
- 3.171. a) $k = -2$ b) $k = -\frac{1}{5}$ c) $k = -2\frac{1}{2}$ d) $k = -1$

3.172. a) $k = \frac{1}{3}$ i $S(-1, 0)$ lub $k = -\frac{1}{3}$ i $S\left(1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

b) $k = 1\frac{1}{3}$ i $S(-14, -7)$ lub $k = -1\frac{1}{3}$ i $S\left(3\frac{1}{7}, 1\frac{4}{7}\right)$

3.173. a) $k = -2$ b) $A_1(16, 10), B_1(2, 6), C_1(14, 2)$ c) $P = 52$

3.174. a) $y = 2x + 9$ b) $y = 2x - 6$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 2x + 1\frac{1}{2}$

3.175. a) $k_1: y = -4\frac{1}{2}x + 15$ lub $k_2: y = -2x + 10$

b) $m_1 = J_{0(0,0)}^3(k_1)$, gdzie $m_1: y = -4\frac{1}{2}x + 22\frac{1}{2}$

oraz $m_2 = J_{0(0,0)}^3(k_2)$, gdzie $m_2: y = -2x + 15$

c) pole trapezu (w obu przypadkach) ma wartość 31,25

3.176. $k = -\frac{1}{3}, S\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ lub $k = \frac{1}{3}, S\left(5\frac{1}{2}, -1\right)$

3.177. $k = -2, S\left(-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ lub $k = 2, S(-20, -8)$

3.178. a) $g(x) = 4x^2$ b) $g(x) = \frac{1}{9}x^2$ c) $g(x) = -\frac{x+2}{x}, x \neq 0$ d) $g(x) = \frac{x}{2x+1}, x \neq \frac{1}{2}$

Zastosowanie analizy matematycznej w zadaniach z geometrii analitycznej

3.179. a) $A(-1, -2)$ b) $A(-9, 2)$ lub $A(1, 0)$ c) $A(1, -3)$ d) $A(-1, -1)$ lub $A(2, 4)$

3.180. a) $A(-1, 0)$ b) $A(-1, 2)$ lub $A(3, 0)$ c) $A(-1, 2)$ lub $A(1, -2)$

d) $A(0, 0)$ lub $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

3.183. $\frac{1}{4}$ lub $20\frac{1}{4}$

3.184. $\frac{1}{8}$ lub $36\frac{1}{8}$

3.185. $y = -8x - 16$

3.186. $(3, -27)$ lub $(-3, 27)$

3.187. $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ lub $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

3.188. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

3.189. wymiary prostokąta: $2\sqrt{3}, 2$

3.190. $k: y = \sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$

3.191. $P(2, 2)$

3.192. $P(4, 2)$

3.194. $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	C	B	D	D	A	C	B	B	C
Numer zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	B	D	C	A	A	D	A	C	D	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

3.195. pr. $AB: x + 2y - 4 = 0$, pr. $AC: x - y + 2 = 0$, pr. $BC: 2x + y - 8 = 0$

3.196. $B(4, -2)$, $C(0, 6)$

3.197. $C_1(0, -3)$, $D_1(-2, 1)$ lub $C_2(8, 1)$, $D_2(6, 5)$

3.198. $(8 - \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$, $(8 + \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$

3.199. a) 4 b) $2\sqrt{2}$ c) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{65}{8}$

3.200. a) $A(0, -3)$, $B(6, -5)$, $C(4, 1)$, $D(-2, 3)$ b) 32 c) $\cos \alpha = -0,6$
d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 6,4$

3.201. okrąg o środku w punkcie $S(-5, 0)$ i promieniu $r = 4$

3.202. a) $A(0, 2)$, $B(4, 2)$ c) 6π

3.203. $m \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

3.204. 90°

3.205. a) $x + 2y = 0$ oraz $29x + 2y + 56 = 0$ b) ok. 66° c) $B(0, 0)$, $C(0, -28)$ d) 28

3.206. $\left(x - 4\frac{1}{2}\right)^2 + (y + 6)^2 = 6\frac{1}{4}$

3.207. $P_1(-3, 5)$ lub $P_2\left(-16\frac{1}{3}, 31\frac{2}{3}\right)$

3.208. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

3.209. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ lub $(x - 7)^2 + (y + 25)^2 = 625$

3.210. $(x - 4\sqrt{2} + 3)^2 + (y + 2)^2 = 68$ lub $(x + 4\sqrt{2} + 3)^2 + (y + 2)^2 = 68$ lub
 $(x + 11)^2 + (y - 2)^2 = 68$ lub $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 68$

3.211. istnieją dwie takie jednostajności: $J_{S_1}^{k_1}$, gdzie $S_1(3, 3)$ i $k_1 = -1\frac{1}{2}$ oraz $J_{S_2}^{k_2}$,
gdzie $S_2(-3, -3)$ i $k_2 = 1\frac{1}{2}$

3.212. a) $y = \frac{4}{9}x + 3\frac{1}{3}$ b) 437,5

3.213. $A(-10, -2)$ lub $A(2, 0)$

3.214. $l: y = \frac{1}{2}x - 2$

3.215. $P(4, -4)$

3.216. $P(-1, -2)$

3.217. $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

3.218. $\left(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 4\right), \left(-3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 4\right), \left(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{3}\right), \left(-3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{3}\right);$

pole prostokąta: $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

3.219. a) $18x + y - 72 = 0$ oraz $2x - y - 8 = 0$ b) $P_{ABC} = 250$

3.220. $x^2 + y^2 = 580$

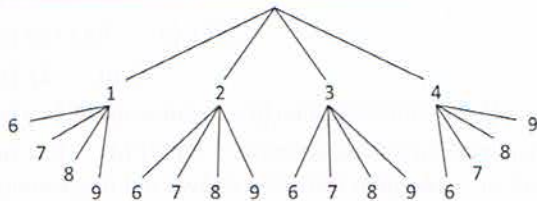
4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania

4.1. Na 12 sposobów

	E	F	G
A	(A, E)	(A, F)	(A, G)
B	(B, E)	(B, F)	(B, G)
C	(C, E)	(C, F)	(C, G)
D	(D, E)	(D, F)	(D, G)

4.2.



4.3. 8 liczb

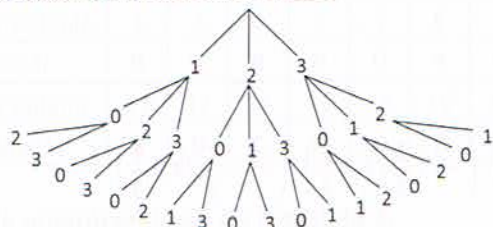
4.4. 18 liczb

4.5. Wszystkich liczb jest 25. Liczb, w których cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności, jest 10.

- 4.6. Trzy liczby są podzielne przez 4.

	6	7	8	9
6	X	67	68	69
7	76	X	78	79
8	86	87	X	89
9	96	97	98	X

- 4.7. Jest 10 liczb podzielnych przez 3.



- 4.8. 60 zestawów
 4.9. 1515 punktów
 4.10. a) 216 b) 282
 4.11. 24 pary
 4.12. a) 44 b) 90 c) 35 d) 76
 4.13. a) 61 b) 29
 4.14. a) 51 możliwości b) 102 możliwości

Wariacje

- 4.15. $9^3 = 729$
 4.16. $3^5 = 243$
 4.17. a) 9000 liczb b) 10 000 kodów
 4.18. a) na 7776 sposobów b) na 720 sposobów
 4.19. na 81 sposobów
 4.20. $5 \cdot 10^{14}$ numerów
 4.21. 225
 4.22. a) 65 liczb b) 70 liczb
 4.23. a) 2 liczby b) 34 liczby
 4.24. a) 891 b) 171
 4.25. a) 873 b) 252
 4.26. a) $7^5 = 16\,807$ b) 2520
 4.27. a) 360 b) 1296
 4.28. a) na 840 sposobów b) na 2401 sposobów
 4.29. a) 531 441 napisów b) 60 480 napisów
 4.30. 42 wzory

- 4.31. 336 rodzajów
 4.32. a) 4536 liczb b) 5040 kodów
 4.33. 480 liczb
 4.34. 6720 liczb
 4.35. 72
 4.36. 105
 4.37. 378
 4.38. a) 320 b) 328
 4.39. a) 181 440 b) 10^5 c) 312 500 d) 604 800
 4.40. a) 1 647 086 b) $9 \cdot 9!$, czyli 3 265 920 c) 2 d) 600
 4.41. a) 18 liczb b) 14 liczb
 4.42. a) 24 liczby b) 12 liczb
 4.43. 9 liczb
 4.44. a) 60 b) 32 c) 63 d) 39
 4.45. a) 22 b) 160
 4.46. a) 154 b) 2388
 4.47. a) 6720 b) 12 096

Permutacje

- 4.48. a) 12 b) 72 c) 15 d) 5,5 e) 4,9 f) 8,1
 4.49. a) $(n+2)!$ b) $(2n+1)!$ c) $n+3$ d) $(2n+2)(2n+1)$ e) $\frac{n+3}{3n+1}$
 f) $(n-1)(n-2)$
 4.50. na 6 sposobów
 4.51. na 40 320 sposobów
 4.52. 5040 możliwości
 4.53. 144
 4.54. 28 800
 4.55. a) 967 680 b) 1296
 4.56. a) 72 b) 24
 4.57. a) na 120 sposobów b) na 6 sposobów c) na 144 sposoby d) na 144 sposoby
 4.58. a) 120 b) 1920; *wskazówka*: Rozważ przypadki, gdy osoby A i B stoją na dwóch pierwszych lub dwóch ostatnich miejscach, na drugim i trzecim miejscu lub na szóstym i siódmym miejscu itd. c) $8! - 14 \cdot 6! = 30\,240$ d) 2520
 4.59. a) na 48 sposobów b) na 24 sposoby c) na 12 sposobów d) na 8 sposobów
 4.60. a) $2 \cdot 10!$ b) $10!$ c) $2 \cdot 10!$ d) $10 \cdot 8!$

Kombinacje

- 4.61. a) 120 b) 70 c) 25 d) 13 e) $\frac{10}{91}$ f) $\frac{13}{6}$

- 4.62. a) $\frac{3}{n+1}$ b) $\frac{n+2}{3}$
- 4.63. a) $n = 5$ b) $n = 3$
- 4.65. 20
- 4.66. 20
- 4.67. 35
- 4.68. $n = 9$
- 4.69. $n = 20$
- 4.70. 7
- 4.71. 3
- 4.72. a) 1 b) 4 c) 12
- 4.73. a) $\{b_1, b_2\}, \{b_1, c_1\}, \{b_1, c_2\}, \{b_2, c_1\}, \{b_2, c_2\}$ b) para $\{b_1, b_2\}$ jest liczona podwójnie
- 4.74. a) na 12 600 sposobów b) na 21 245 sposobów c) na 22 820 sposobów
- 4.75. a) 4592 sposoby b) 15 448 sposobów c) 13 816 sposobów
- 4.76. a) 70 b) 1008 c) 672 d) 2254
- 4.77. a) 23 b) 21 c) 22 d) 42
- 4.78. a) 120 b) 34 c) 301
- 4.79. a) 36 b) 13 104 c) 20 160
- 4.80. a) 11 154 b) 270 010 c) 13 182
- 4.81. na $\binom{4}{2} \binom{44}{11} \binom{33}{11} \binom{4}{2} \binom{22}{11}$ sposobów
- 4.82. 10 080

Kombinatoryka – zadania różne

- 4.83. 22 chłopców
- 4.84. 7
- 4.85. 19
- 4.86. co najmniej 10%, co najwyżej 50%
- 4.88. a) 96 b) 24
- 4.89. a) $6! + 15 \cdot 5!$, czyli 2520 b) $4 \cdot 5! + 8 \cdot (5! - 4!)$, czyli 1248
- 4.90. a) 5040 b) 60 c) 20 d) 30
- 4.91. a) 1 663 200 b) 83 160
- 4.92. ok. 30 bilionów, czyli $30 \cdot 10^{12}$
- 4.93. a) 459 b) 8964
- 4.94. 10 290
- 4.95. 2626
- 4.96. $3 \cdot 9^4 + 3 \cdot 9^3 \cdot 3$, czyli 26 244

- 4.97. $\binom{6}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot \binom{6}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, czyli 54 600
- 4.98. a) na 14! sposobów b) na $2^7 \cdot 7!$ sposobów c) na $7! \cdot 7!$ sposobów
d) na 7! sposobów
- 4.99. a) na 144 sposoby b) na 72 sposoby
- 4.100. a) 1260 b) 1890
- 4.101. a) $\binom{15}{5} \binom{10}{5}$, czyli 672 672 sposoby b) $\frac{\binom{15}{5} \binom{10}{5}}{3!}$, czyli 112 112 sposobów
- 4.102. a) 16 b) 32
- 4.103. a) 49 b) 56 c) 77 d) 23
- 4.104. a) 80 b) 20 c) 145 d) 71
- 4.105. 120; *wskazówka*: Rozważ trzy przypadki. Wśród cyfr liczby piętnastocyfrowej:
1) jest jedna 3 (1 liczba)
2) jest jedna 2 i jedna 1 (28 liczb)
3) są trzy 1 (91 liczb).
- 4.106. 1540; *wskazówka*: Rozważ pięć przypadków. Wśród cyfr liczby dwudziestocyfrowej:
1) jest jedna 4 (1 liczba)
2) są dwie 2 (19 liczb)
3) jest jedna 1 i jedna 3 (38 liczb)
4) są dwie 1 i jedna 2 (513 liczb)
5) są cztery 1 (969 liczb).
- 4.107. $\binom{9}{6}$, czyli 84
- 4.108. $\binom{10}{6}$, czyli 210
- 4.109. $\binom{8}{4}$, czyli 70
- 4.110. $\binom{9}{4}$, czyli 126
- 4.111. 165; *wskazówka*: Rozważ trzy przypadki. W zapisie liczby trzycyfrowej występują:
1) trzy jednakowe cyfry (9 liczb)
2) tylko dwie jednakowe cyfry (72 liczby)
3) trzy różne cyfry (84 liczby).
- 4.112. 219 liczb
- 4.113. a) $\binom{9}{4}$, czyli 126
b) 495; *wskazówka*: Rozważ pięć przypadków. W zapisie liczby czterocyfrowej:
1) jedna cyfra występuje 4 razy (9 liczb)

- 2) jedna cyfra występuje 3 razy i jedna cyfra 1 raz (72 liczby)
 3) dwie cyfry występują po 2 razy (36 liczb)
 4) jedna cyfra występuje 2 razy i dwie cyfry występują po 1 razie (252 liczby)
 5) występują cztery różne cyfry (126 liczb).

4.114. $\binom{5}{3} \cdot 3! + 19 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3!$, czyli 744

4.115. 66 rozwiązań

4.116. 36 rozwiązań

Doświadczenie losowe

4.118. a) $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, n\}$

b) $\Omega = \{\{b_1, c_1\}, \{b_1, c_2\}, \{b_1, c_3\}, \{b_2, c_1\}, \{b_2, c_2\}, \{b_2, c_3\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_2, c_3\}\}$

4.119. b) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3): \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{A, B, C, D, E\}\}$

c) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3): \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{A, B, C, D, E, F\} \wedge \omega_i \neq \omega_j \text{ dla } i \neq j\}$

4.120. a) 343 b) 210

4.121. 8

4.122. 3360

4.123. $\Omega = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (O, 5), (O, 6)\}$

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.124. e) $A' \cap B'$

4.125. $A' \cap C$ – zdarzenie, że wylosowana karta jest asem kier lub asem karo lub asem trefl

4.126. $A' \cup B' = \{10, 11, 12, 14, 15\}$

4.127. $C = \{(O, 1), (R, 1), (O, 2), (R, 2), (O, 3), (R, 3), (O, 6), (R, 6)\}$

4.128. a) 21 b) 8

4.129. a) 3 b) 26 c) 12 d) 12 e) 23, $(A \cap F) \cup (A \cap N) \cup (F \cap N)$

f) 22, $N' \cup F'$

4.130. a) 21 b) 10 c) 6 d) 23 e) 8 f) 18

4.131. 23

4.132. a) 13 b) 8

4.133. a) 26 b) 28

4.134. b) $A \subset B$ (zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B), $C \subset B$, $A \cup C = B$ (zdarzenia $A \cup C$ i B są identyczne), $B' \cap A = \emptyset$ (zdarzenia B' i A się wykluczają) c) $B \cup C'$ – zdarzenie pewne, $B' \cap C$ – zdarzenie niemożliwe

4.135. a) $\overline{A'} = 1$ $\overline{B'} = 6$ b) nie

Niech $\omega = (O, R, R, R, R)$. Wówczas $\omega \in B'$, więc $\omega \in A' \cup B'$. Jednocześnie $\omega \in A$, więc $\omega \in (A \cup B)$, czyli $\omega \notin (A \cup B)'$. Analogicznie $\omega \in (A \cap B)'$ i $\omega \notin A' \cap B'$.

4.136. a) 20 b) $\overline{A} = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{2}{0} = 16$ c) 16

d) $\{k_1, k_2, m_1\}, \{k_1, k_2, m_2\}, \{k_1, k_2, m_3\}, \{k_1, k_2, m_4\}$

$$4.137. \text{ a) } \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1} \quad \text{ b) } \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5} - \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}$$

$$\text{ c) } \binom{39}{7} + \binom{13}{1} \cdot \binom{39}{6} + \binom{13}{2} \cdot \binom{39}{5} + \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{4} \quad \text{ d) } \binom{4}{4} \cdot \binom{12}{3}$$

Określenie prawdopodobieństwa

$$4.138. P(B) = 0,5 \quad P(B - A) = \frac{1}{6}$$

4.139. nie

$$4.140. P(A \cap B) = 0,02 \quad P(A - B) = 0,1 \quad P(A' \cap B) = 0,28$$

$$4.141. P(A \cup B) = 0,25 \quad P((A \cup B) - A) = 0,08 \quad P(A \cap B') = 0,13$$

$$4.142. P(B) = 0,13 \quad P(B - (A \cap B)) = 0,12 \quad P((A \cup B) - (A \cap B)) = 0,2$$

$$4.145. \frac{4}{7}$$

$$4.146. \text{ a) } 0,1 \quad \text{ b) } 0,3 \quad \text{ c) } 0,7$$

$$4.147. \frac{7}{20}$$

$$4.148. \frac{4}{15}$$

Prawdopodobieństwo klasyczne

$$4.149. \text{ a) } \frac{5}{6} \quad \text{ b) } \frac{1}{6}$$

$$4.150. \text{ a) } 0,1 \quad \text{ b) } 0,5$$

$$4.151. \text{ a) } 0,125 \quad \text{ b) } 0,75$$

$$4.152. \text{ a) } \frac{1}{2} \quad \text{ b) } \frac{3}{52} \quad \text{ c) } \frac{4}{13} \quad \text{ d) } \frac{5}{13}$$

$$4.153. \text{ a) } 0,1 \quad \text{ b) } 0,6 \quad \text{ c) } \frac{2}{15} \quad \text{ d) } \frac{1}{18}$$

$$4.154. \text{ a) } \frac{2}{3} \quad \text{ b) } \frac{2}{15} \quad \text{ c) } 0,25 \quad \text{ d) } 0,4$$

$$4.155. \text{ a) } \frac{1}{2} \quad \text{ b) } \frac{7}{8} \quad \text{ c) } \frac{1}{4}$$

$$4.156. \text{ a) } \frac{5}{6} \quad \text{ b) } 0,5 \quad \text{ c) } \frac{1}{3} \quad \text{ d) } \frac{17}{36}$$

$$4.157. \text{ a) } \frac{11}{36} \quad \text{ b) } \frac{23}{36} \quad \text{ c) } \frac{5}{36} \quad \text{ d) } \frac{25}{36}$$

4.158. a) $\frac{11}{16}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{8}$

4.159. a) 0,4 b) 0,6 c) 0,9 d) 0,4

4.160. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{10}{81}$ d) $\frac{56}{81}$

4.161. a) $\frac{89}{180}$ b) $\frac{11}{1620}$

4.162. a) $\frac{29}{36}$ b) $\frac{11}{72}$

4.163. a) $\frac{7}{50}$ b) $\frac{1}{4}$

4.164. a) $\frac{3}{32}$ b) $\frac{1}{64}$

4.165. a) $\frac{1}{1296}$ b) $\frac{5}{54}$

4.166. $\frac{11}{32}$

4.167. $\frac{7}{72}$

4.168. a) $\frac{1}{35}$ b) $\frac{1}{35}$

4.169. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{4}{15}$

4.170. $\frac{1}{3}$

4.171. a) $\frac{29}{45}$ b) $\frac{29}{50}$

4.172. a) $\frac{231}{496}$ b) $\frac{441}{496}$ prawdopodobieństwa będą takie same

4.173. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ prawdopodobieństwa będą takie same

4.174. $\frac{207}{245}$

4.175. $\frac{2}{9}$

4.176. większe jest prawdopodobieństwo przyjęcia partii 70% sztuk wadliwych

4.177. większe jest prawdopodobieństwo odrzucenia partii zawierającej 5% sztuk wadliwych

4.178. a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{3}{44}$

4.179. a) $\frac{1}{1771}$ b) $\frac{65}{3542}$ c) $\frac{30}{1771}$ d) $\frac{360}{1771}$

4.180. 32 osoby

4.181. 15 misiów, 5 piesków

4.182. $n = 8$

4.183. 11 wierzchołków

4.184. 10 chłopców

4.185. 5 kul białych

4.186. 6 piłek do siatkówki

4.187. co najwyżej 18 dobrych żarówek

4.188. co najmniej 3 losy

Zdarzenia wieloetapowe

4.189. $\frac{36}{125}$

4.190. a) $\frac{12}{27}$ b) $\frac{20}{27}$

4.191. a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{11}{36}$

4.192. $\frac{1}{6}$

4.193. 0,896

4.193. 0,896

4.194. 0,9919

4.195. $\frac{2}{9}$

4.196. a) 924 b) 1 c) 28

4.197. przy czterech próbach

4.198. a) $\frac{127}{128}$ b) $\frac{1}{16}$

4.199. a) $\frac{175}{256}$ b) $\frac{3}{8}$

4.200. a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{45}{512}$

Prawdopodobieństwo warunkowe

4.201. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{8}{11}$

4.202. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0,8 + 0,6 - 1 = 0,4$ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$

4.203. bardziej prawdopodobne jest, że strzelec C trafił w cel

4.204. $\frac{2}{5}$

4.205. $\frac{5}{11}$

4.206. $\frac{1}{3}$

4.207. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$

4.208. a) $\frac{11}{32}$ b) $\frac{1}{4}$

4.209. $\frac{1}{2}$

4.210. $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{48}{2}}$, czyli $\frac{1}{188}$

4.211. $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{52}{4} - \binom{48}{4}}$, czyli $\frac{1092}{76145}$

4.212. a) 0,154 b) 0,066 c) 0,072

4.213. a) $\frac{4}{17}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{10}$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

4.214. 0,965

4.215. 0,016

4.216. $\frac{1}{48}$

4.217. równy 2 lub większy od 2

4.218. $\frac{5}{18}$

4.219. 0,6

4.220. $\frac{10}{27}$

4.221. $\frac{169}{330}$

4.222. przy pierwszym sposobie losowania

4.223. $\frac{173}{864}$

4.224. $n = 21$

4.225. a) 0,03455 b) $\frac{297}{691} (\approx 0,43)$

4.226. 0,5

4.227. $\frac{2}{3}$

Niezależność zdarzeń

4.228. $\frac{1}{6}$

4.229. 0,5

4.230. $\frac{1}{6}$

4.231. a) $\frac{49}{64}$ b) $\frac{21}{32}$

4.233. zdarzenia są niezależne

4.234. zdarzenia są niezależne

4.235. zdarzenia nie są niezależne

4.236. a) zdarzenia są niezależne b) zdarzenia nie są niezależne

4.237. zdarzenia są parami niezależne; zdarzenia A, B, C nie są niezależne

4.238. zdarzenia są niezależne

4.239. a) 0,514 b) 0,748

4.240. a) 0,496 b) 0,006

wskazówka: Przy połączeniu szeregowym awaria obwodu nastąpi, jeśli uszkodzeniu ulegnie co najmniej jeden element tego obwodu. Przy połączeniu równoległym awaria obwodu nastąpi, jeśli uszkodzeniu ulegną wszystkie elementy tego obwodu.

4.241. a) 0,06 b) 0,34

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	B	D	C	D	C	D	C	A
Numer zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	B	D	B	C	B	D	C	A	C	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

4.243. 25 osób

4.244. a) 633 liczby b) 1094 liczby c) 806 liczb

4.245. $P(B) = 0,5$ $P(A - B) = 0,25$ 4.247. a) na dwóch ściankach b) $\frac{1}{6}$

4.248. a) 131 b) 143

4.249. a) $\frac{17}{32}$ b) prawdopodobieństwo wylosowania z jednej urny dwóch kul w różnych kolorach jest większe4.250. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ 4.251. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{35}{36}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{9}$ 4.252. $\frac{1}{3}$

4.253. a) 9 b) 1080

4.254. a) 150 b) 3375

4.255. 715; wskazówka: Rozważ pięć przypadków. Wśród cyfr liczby dziesięciocyfrowej:

- 1) jest jedna 5 (1 liczba)
- 2) jest jedna 4 i jedna 1 (18 liczb)
- 3) jest jedna 3 i jedna 2 (18 liczb)
- 4) są dwie 2 i jedna 1 (108 liczb)
- 5) są dwie 1 i jedna 3 (108 liczb)
- 6) są trzy 1 i jedna 2 (336 liczb)
- 7) jest pięć 1 (126 liczb).

4.256. a) $\frac{19}{28}$ b) $\frac{13}{28}$ 4.257. $n = 11$ 4.258. $\frac{14}{45}$ 4.259. $n = 20$

4.260. 170 możliwości

4.261. 7

4.262. 151 200 wyrazów

4.263. 0,4

4.264. $\frac{1}{7}$

$$4.265. \text{ a) } \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{44}{1}}{\binom{52}{3}}, \text{ czyli } \frac{176}{5525} \quad \text{ b) } 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}, \text{ czyli } \frac{1201}{5525} \quad \text{ c) } \frac{22}{425} \quad \text{ d) } \frac{361}{425}$$

4.266. $\frac{8}{203}$

4.267. 30 uczniów

4.268. a) $\frac{29}{45}$ b) $\frac{1}{2}$

4.269. a) 3 628 800 b) 40 320

4.270. na 20! sposobów

4.271. a) $(15!)^2$ b) $2^{15} \cdot (15!)^2$

4.272. a) 0,2 b) 0,3

4.273. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

4.274. a) 59 049 b) $\binom{9}{2} (2^5 - 2)$; *wskazówka*: Najpierw zastanów się, na ile sposobów można wybrać dwie szuflady, w których umieścimy kule.

4.275. a) $\frac{105}{256}$ b) $\frac{49}{512}$ 4.276. $\frac{31}{81}$ 4.277. $n = 5$ 4.278. $\frac{7}{37}$ 4.279. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{27}{64}$ c) $\frac{37}{200}$ 4.280. $\frac{64}{81}$

$$4.281. \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{10}{2} \binom{8}{1}}{\binom{18}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{10}{1} \binom{8}{2}}{\binom{18}{3}} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{18}{3}}, \text{ czyli } \frac{4}{9}$$

$$4.283. 0,3$$

$$4.284. \frac{17}{74}$$

5. Elementy statystyki opisowej

Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych statystycznych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

5.2. diagram kolumnowy



diagram częstości względnych



5.3. diagram słupkowy

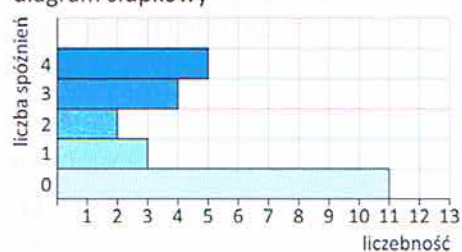
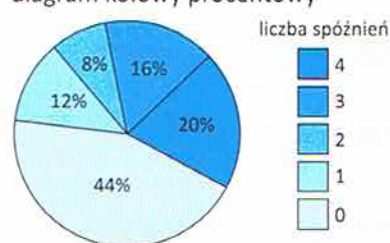


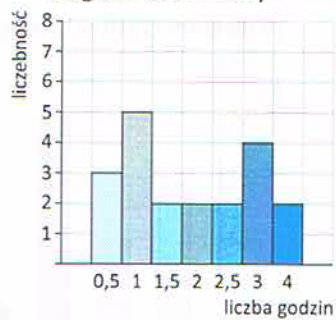
diagram kołowy procentowy



5.4. a) tabela

Liczba godzin	Liczzebność
0,5	3
1	5
1,5	2
2	2
2,5	2
3	4
4	2

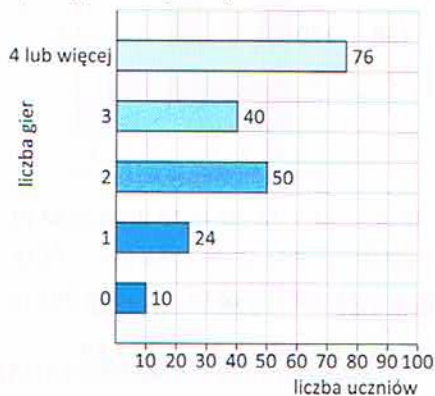
diagram kolumnowy



b) 50%

5.5. a) 116; 84

b) diagram słupkowy

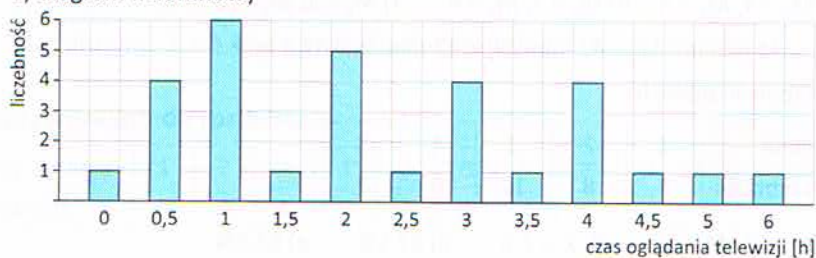


5.6. a) 56% b) 4 c) 9

5.7. a) 30 b) 70 c) $2\frac{1}{3}$ **Średnia z próby**5.8. $x = 5$

5.9. 48 lat

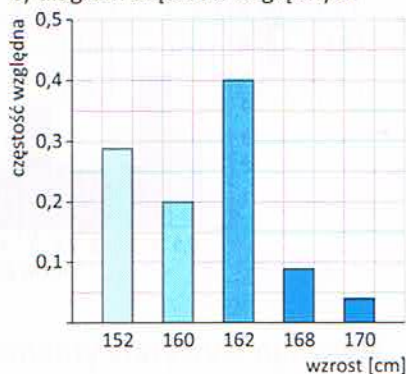
5.10. a) diagram kolumnowy



b) 2,3 godzin c) 43,3% d) 2 osoby

5.11. a) 159,6 cm

b) diagram częstości względnych



c)

Wzrost [cm]	152	160	162	168	170
Liczebność	7	5	10	2	1

d) 18 uczniów

5.12. a) 2,5 b) ok. 47%

5.13. a) 0,81 b) 46 osób c) o $22\frac{2}{9}\%$

5.14. a) 56 b) w mieście A: 1,2; w mieście B: 1,12 c) 22% d) 1,16

5.15. a) zmiana I (średnia na I zmianie: 1,5; zaś na II zmianie: 1,7) b) 1,58

c) 20 pracowników; 40%

5.16. 23

5.17. Ela

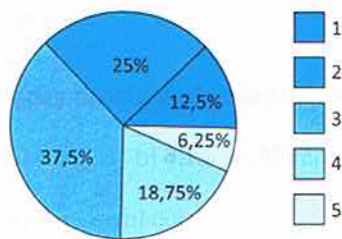
5.18. $\bar{x}_b = 5,8$; $\bar{x}_s = 8,1$; $\bar{x}_z = 6,65$; $\bar{x}_w > 70$, zatem kawa zostanie wprowadzona do sprzedaży**Mediana z próby i moda z próby**5.19. a) $M_o = 3$, $M_e = 3$ b) $M_o = 3$, $M_e = 5$ c) są dwie mody 7 oraz 9, $M_e = 8$ d) $M_o = 4$, $M_e = 4$ e) $M_o = 7$, $M_e = 4$ f) $M_o = 1$, $M_e = 1$ 5.20. $M_o = 34$ min lub $M_o = 42$ min, $M_e = 37$ min, $\bar{x} \approx 37,4$ min

5.21. a) tabela liczebności

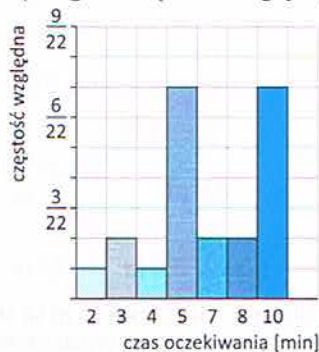
Ocena	1	2	3	4	5
Liczebność	4	8	12	6	2

b) $M_o = 3$, $M_e = 3$ c) $\bar{x} \approx 2,8$ d) 87,5% e) 62,5%

f) diagram kołowy procentowy



5.22. a) diagram częstości względnych

b) $M_o = 5$ lub $M_o = 10$; $M_e = 6$ c) ok. 6,7 min d) 50%5.23. a) 33 b) 2,02 c) 34% d) $M_o = 2$, $M_e = 2$ 5.24. a) 186 stron b) $M_o = 2$ lub $M_o = 3$; $M_e = 2,5$ c) $\bar{x} \approx 2,4$ d) ok. 25,8%**Wariancja i odchylenie standardowe**5.25. a) $M_o = 1820$ zł, $M_e = 2210$ zł b) 2405 zł 71 gr c) 62% d) ok. 1284 zł

5.26. a) 119,9 g b) 1,71 g c) oceniła pozytywnie

5.27. a) dla łuczника I – $M_e = 26$; dla łucznika II – $M_e = 28$ b) dla łucznika I – $\bar{x}_I = 25,4$; dla łucznika II – $\bar{x}_{II} = 27$ c) $\sigma_I \approx 3,4$; $\sigma_{II} \approx 2,1$ 5.28. a) $\bar{x} = 25,35$ mm b) $\sigma \approx 0,3$ mm5.29. a) $M_e = 40$ b) $\bar{x} = 42$; marzec, maj, czerwiec, listopad i grudzieńc) $\sigma \approx 18$ d) w styczniu i lutym5.30. dla I drużyny: $\bar{x} = 1,4$; $\sigma \approx 1,16$; dla drugiej drużyny: $\bar{x} = 1$; $\sigma \approx 1,18$ **Test sprawdzający do rozdziału 5.**

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	A	A	D	B	D	D	C	D	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

- 5.31. $x = 7$; $\bar{x} = 5,7$; $\sigma^2 = 4,61$; $\sigma \approx 2,15$
 5.32. a) $x = 3$ i $y = 5$ lub $x = 5$ i $y = 3$
 5.33. a) 2,984 b) 125
 5.34. a) $M_o = 5$; $M_e = 3,5$ b) $\bar{x} = 3,54$ c) $\sigma^2 = 2,5684$; $\sigma \approx 1,6$
 5.35. 12 lekarzy
 5.36. 5 oraz 2
 5.37. a) $M_e = 2$, $M_o = 2$ b) $\bar{x} = 2$ c) $\sigma \approx 1$
 5.38. ocenę „dobry”
 5.39. 75
 5.40. $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + 8$, $\sigma_1 = \sigma_2$

6. Geometria przestrzenna**Płaszczyzny i proste w przestrzeni**

- 6.1. a) proste k i m są skośne lub proste k i m się przecinają b) proste k i m są skośne
 6.2. a) nie b) tak
 6.4. wskazówka: Wykaż, że $PQ \parallel AB$.
 6.5. wskazówka: Wykorzystaj twierdzenie o linii łączącej środki boków w trójkącie.
 6.6. wskazówka: Udowodnij, że $PQ \parallel BC_1$ oraz $BC_1 \parallel AD_1$. Następnie wykaż, że $|D_1P| = |AQ|$.

Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

- 6.10. $|A_1C_1| : |C_1D_1| : |D_1B_1| = 1 : 2 : 3$
 6.11. $|A_1D_1| : |D_1E_1| : |E_1B_1| = 1 : 1 : 2$

Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę

- 6.14. wskazówka: Wykaż, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (BSC) .
 6.15. a) tak b) nie c) nie d) tak e) nie f) tak
 6.16. tak
 6.17. wskazówka: Wykaż, że $SO \perp AB$ oraz że trójkąty AOS , BOS i COS są przystające.
 6.18. 11 cm
 6.19. 13 cm
 6.20. 8 cm

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

- 6.22. nie
 6.25. 25,5 cm

6.26. 8 cm

6.27. 20 cm

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny8.28. a) 4 cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm6.29. a) $1\frac{1}{3}$ b) 0,8

6.30. 0,8

6.31. 1 dm

6.32. $2\sqrt{6}$ cm

6.33. a) 1,6 b) 2

6.34. a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) 0,66.35. a) 45° b) 0,6 c) $1\frac{2}{3}$ **Graniastosłupy**6.36. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sqrt{3}$ cm6.37. $d = 5\sqrt{2}$ cm; 45° 6.38. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 8\sqrt{10}$ cm, $d_3 = 6\sqrt{17}$ cm6.39. a) 2 b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6.40. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{33}}{6}$ c) 30° 6.41. 30° 6.42. a) 60° b) $\sqrt{139}$ cm6.43. $4\sqrt{3}$ cm6.44. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = \sqrt{91}$ cm6.46. a) $s = \frac{n}{2} + 2$, $k = \frac{3n}{2}$ b) $s = 7$, $k = 15$ 6.47. $w = 14$, $s = 9$, $k = 21$

6.48. dziesięciokąty

Ostrosłupy6.51. a) 6 ścian, 10 krawędzi b) n ścian, $2(n-1)$ krawędzi

6.52. 8

6.53. a) $20\sqrt{2}$ cm b) $10\sqrt{6}$ cm c) $10\sqrt{7}$ cm6.54. a) 3 cm b) $\sqrt{17}$ cm c) 2,4 cm6.55. a) 30° b) $2\frac{1}{4}$ 6.56. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \approx 55^\circ$ 6.57. a) 1 b) $0,5\sqrt{6}$ 6.58. a) 4 dm b) 30° 6.59. b) $a = 3 + \sqrt{6}$ 6.60. a) $20\sqrt{3}$ cm b) 60 cm6.61. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 6.62. a) 30° b) 60°

6.63. 90 cm

6.64. $150\sqrt{3}$ cm²6.65. a) 12 cm b) $h_1 = 4\sqrt{10}$ cm, $h_2 = 3\sqrt{17}$ cm6.66. $\frac{5}{13}$

6.67. 12 cm

6.68. $9\frac{19}{30}$ cm6.69. $\frac{15}{17}$ 6.70. $\frac{363\sqrt{3}}{4}$ cm²6.71. a) $|AB| = \sqrt{337}$, $|AS| = 15$ cm, $|BS| = 20$ cm b) $\frac{\sqrt{337}}{12}$ 7.72. a) 45° b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6.73. a) 15 cm b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6.74. $3\frac{3}{4}$ dm

6.75. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

6.80. a) 4 b) 12

6.81. a) 12 dm^2 b) 384 cm^2

6.82. a) 120 cm^2 b) 192 cm^2

6.83. a) $600(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ b) 2700 cm^2

6.84. $5 \text{ cm}, 5\sqrt{3} \text{ cm}, 5\sqrt{3} \text{ cm}$

6.85. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

6.86. 2520 cm^2

6.87. $8(3 + \sqrt{3}) \text{ dm}^2$

6.88. a) 14 dm b) 5 dm^2

6.89. $5\sqrt{3} \text{ cm}$

6.90. 48 cm^2

6.91. $\sqrt{2}$

6.92. $\frac{3\sqrt{3}}{2} H^2$

6.94. $12(4 + \sqrt{41}) \text{ cm}^2$

6.95. a) $\sqrt{3} \text{ dm}, 2 \text{ dm}, 2 \text{ dm}, \sqrt{5} \text{ dm}$ b) $(3 + \sqrt{3}) \text{ dm}^2$

6.96. 2720 cm^2

6.97. 26 dm^2

6.98. $\frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})a^2}{4}$

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

6.99. 128 litrów

6.100. a) $(780 + 84\sqrt{5}) \text{ cm}^2 (\approx 968 \text{ cm}^2)$ b) $1260\sqrt{5} \text{ cm}^3 (\approx 2817 \text{ cm}^3 \approx 2,8 \text{ l})$

6.101. 3 cm

6.102. $40\sqrt{15} \text{ dm}^3$

6.103. $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$

6.104. $P_b = 6 \text{ dm}^2, V = 1,5\sqrt{3} \text{ dm}^3$

6.105. 108 cm^3

6.106. $P_c = 378 \text{ cm}^2, V = 324 \text{ cm}^3$

6.107. $2(1 + \sqrt{3}) \text{ dm}^3$

6.108. $\frac{3\sqrt{3}}{16} d^3 \sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha} - 1} \quad \left(= \frac{3\sqrt{3}}{16} d^3 \frac{\sqrt{\sin(60^\circ + \alpha)\sin(\alpha - 60^\circ)}}{\cos\alpha} \right); \quad \alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$

6.109. $V = \frac{d^3}{4} \sqrt{\text{tg}^2\alpha - 1} \quad P_c = d^2 \cdot (1 + \sqrt{2\text{tg}^2\alpha - 2}), \alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$

6.110. $V = \frac{a^3}{6} \sqrt{\text{tg}^2\alpha - 1}, P_c = a^2(1 + \text{tg } \alpha)$

6.111. $250\sqrt{2} \text{ cm}^3$

6.112. $r^3 \sqrt{9\text{tg}^2\alpha - 3}$

6.113. a) 1 dm b) $\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ dm}$

6.114. $\frac{1}{3} \text{ m}^3$

6.115. 48 cm^3

6.116. 1800 cm^3

6.117. a) $7,5$ b) 200

6.118. a) $\frac{1}{24}$ b) 3

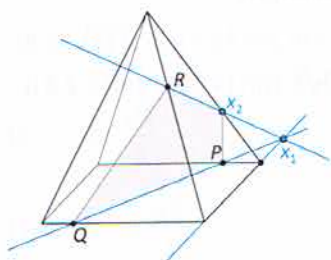
6.119. $\frac{12\sqrt{34}}{17} \text{ dm} (\approx 4,1 \text{ dm})$

6.120. $\frac{d^3}{6\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}$

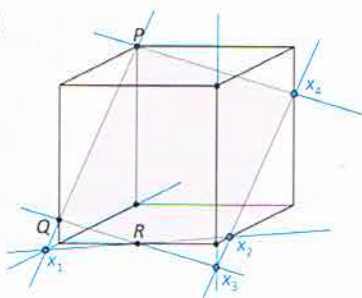
6.121. $\frac{d^3 \sqrt{4\cos^2\alpha - 1}}{12\cos^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}$

Przekroje wielościanów

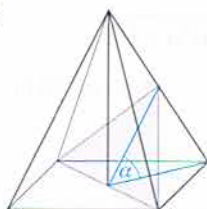
6.123. c)



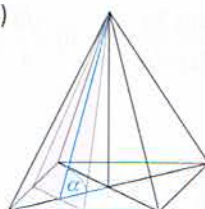
6.124. b)

6.125. a) $\alpha = 90^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$

c)



d)



6.126. Przekrój jest trapezem równoramiennym

6.127. wskazówka: Przekrój jest trójkątem, którego podstawą jest krawędź podstawy ostrosłupa. Poprowadź jego środkową na tę podstawę.

Przekroje wielościanów – zadania

6.128. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

6.129. 376 cm^2

6.130. 600 cm^3

6.131. ok. 55°

6.132. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

6.133. $24(\sqrt{6} - 1)a$; wskazówka: Przekrojem jest trapez równoramienny.

6.134. $2\sqrt{6}$

6.135. $P\sqrt{2}$

6.136. $32\sqrt{3}$

6.137. $P_1 = 25 \text{ cm}^2$ $P_2 = 100 \text{ cm}^2$ $P_3 = 225 \text{ cm}^2$

6.138. $64 : 61$

6.139. $\frac{2}{3}\sqrt{P^3}$

6.140. $16\sqrt{3}$

6.141. $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$

6.142. 3 dm^2

6.143. $\frac{a\sqrt{12H^2 + 3a^2}}{4}$

6.144. $50\sqrt{7} \text{ cm}^2$

6.145. $\cos \beta = \operatorname{ctg} \alpha$

6.146. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$

6.147. a) $\frac{\cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{4\cos^2 \alpha - 1}$

6.148. $\frac{5}{11}$

6.149. $\frac{5\sqrt{6}}{8}$; wskazówka: Rozpatrz dodatkowo przekrój płaszczyzną wyznaczoną przez wysokość podstawy i wysokość ostrosłupa.

6.150. a) $\frac{5}{2}$ b) $6\sqrt{29} \text{ cm}^2$; wskazówka: Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem krawędzi AC. Przekrój ostrosłupa daną płaszczyzną jest równoległobokiem. Wyznacz wysokość tego równoległoboku poprowadzoną na krótszy bok.

Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych**Walec**

6.151. 90°

6.152. $\frac{600 + 400\pi\sqrt{3}}{\pi}$

6.153. $2P_1 + \pi P_2$

6.154. a) $80\pi \text{ cm}^2$ b) $120\pi \text{ cm}^2$

6.155. $5 : 8$

6.156. $r\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = r\frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

6.157. 3 cm ; wskazówka: Poprowadź dwie równoległe do siebie płaszczyzny zawierające odpowiednio odcinek AB i oś walca, następnie oblicz odległość między nimi.

Stożek

6.158. a) 90° b) 72° c) 240°

6.159. a) 216° b) 40° c) 300°

6.160. $h = 2\sqrt{2} \text{ m}$, $r = 1 \text{ m}$

6.161. $2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$

6.162. $\frac{2\pi r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$

6.163. b) $200\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ c) $240\pi \text{ cm}^2$

6.164. 10 cm

6.165. $\frac{5}{8}$

6.166. 60°

6.167. a) $144\pi \text{ cm}^2$ b) $96\pi \text{ cm}^2$ c) $67,2\pi \text{ dm}^2$

6.168. $\frac{8400\pi}{29}$

6.169. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6.170. $\frac{\pi R^2 m^2}{(m+n)^2}$

6.171. $\frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$

6.172. R^2

6.173. $\frac{2hr}{2r + h\sqrt{2}}$

6.174. 8π

Kula i sfera

6.175. $1600\pi \text{ cm}^2$

6.176. a) 34 300 km b) 28 000 km

6.177. ok. 824 km

6.178. 15 cm, 5 cm

6.179. $900\pi \text{ cm}^2$, $256\pi \text{ cm}^2$

6.180. 212π

6.181. 5 cm

6.182. 13 cm

6.183. $r = 3 \text{ cm}$ $R = 8,5 \text{ cm}$

6.184. $r = \frac{d \sin 2\alpha}{2(1 + \cos \alpha)}$ $R = \frac{d}{2 \sin \alpha}$

Objętość brył obrotowych

6.185. $2366\pi \text{ cm}^3$

6.186. 36 cm^2

6.187. $7776\pi \text{ cm}^3$

6.188. $3\sqrt[4]{27}\pi \text{ dm}^3$

6.189. $18\pi \text{ dm}^3$ lub $162\pi \text{ dm}^3$

6.190. $\frac{54}{\pi}\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ dm}^3$ lub $\frac{54}{\pi}\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ dm}^3$

6.191. 7 cm

6.192. 30 cm

6.193. $87 \text{ m}^2, 59 \text{ m}^3$

6.194. $V = 72\pi \text{ cm}^2$ $P_c = 40\sqrt{3}\pi$

6.196. $\sqrt{\frac{V}{\pi \cdot k}}$

6.197. $\frac{\pi}{4}d^3\sin\alpha\cos^2\alpha$

6.198. $\frac{P^3}{16\pi V^2}$

6.199. $V = 18\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$ $P_c = 18\pi(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

6.200. $100\pi \text{ cm}^3$

6.201. $96\pi \text{ cm}^3$

6.202. a) $2000\pi \text{ cm}^3$ b) $1500\pi \text{ cm}^3$ c) $1200\pi \text{ cm}^3$

6.203. $1 : 7 : 19$

6.204. $1 : \sqrt{3}$

6.205. $V = \pi H^3$ $120^\circ = \alpha$

6.207. a) 3 b) 9

6.208. $4,9 \text{ l}$

6.209. $5,5 \text{ cm}$

6.210. $288\pi \text{ cm}^3, 144\pi \text{ cm}^2$

6.211. o 1 cm

6.212. $1\frac{2}{3} \text{ m}$

6.213. 1,5 raza

6.214. $1 : 4$

6.215. $4V \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$

6.217. $\frac{\pi \cdot d^6}{6(d^2 - R^2)\sqrt{d^2 - R^2}}$; wskazówka: Rozważ trzy przypadki: gdy środek kuli należy do wnętrza stożka, jest środkiem podstawy lub leży na zewnątrz stożka.

6.218. $\frac{4}{3}\pi \cdot H^3$ lub $\frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt{5} - 2) \cdot H^3$; zobacz wskazówkę do zadania 6.217

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

6.219. 4 cm, 4 cm, 4 cm, $V = 64 \text{ cm}^3$; wskazówka: $V(x) = -2x^3 + 12x^2$, gdzie $x \in (0, 6)$, x – długość krawędzi podstawy.

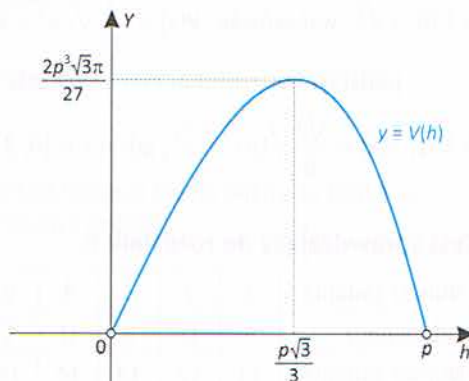
6.220. a) $P(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ b) 1,5 dm, 3 dm, 2 dm

6.221. $r = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$, $V = \frac{128\pi\sqrt{3}}{27} \text{ cm}^3$; wskazówka: $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 16h)$, gdzie $h \in (0, 4)$, h – wysokość stożka, $V(h)$ – objętość stożka w zależności od jego wysokości h .

6.222. a) $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + p^2h)$, gdzie $h \in (0, p)$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(-3h^2 + p^2)$$

b) 6 cm



6.223. wysokość puszki 8 cm, promień podstawy puszki 4 cm; wskazówka: $P(r) = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$,

gdzie $r \in (0, +\infty)$, r – promień podstawy puszki, $P(r)$ – pole powierzchni całkowitej puszki w zależności od r .

6.224. krawędź podstawy ma długość b ; wskazówka: $P(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x^4 + 2b^2x^2}$, $x \in (0, b\sqrt{2})$,

x – długość krawędzi podstawy, $P(x)$ – pole przekroju ostrosłupa w zależności od x .

6.225. $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$; wskazówka: $V(R) = \pi\sqrt{3}(-R^3 + 3R^2)$, gdzie $R \in (0, 3)$, R – promień podstawy walca, $V(R)$ – objętość walca w zależności od R .

6.226. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ cm na $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ cm na $2\frac{2}{3}$ cm; wskazówka: $V(x) = 24x^2 - 2\sqrt{10}x^3$,

gdzie $x \in \left(0, \frac{6\sqrt{10}}{5}\right)$, x – długość krótszej krawędzi podstawy prostopadłościanu,
 $V(x)$ – objętość prostopadłościanu w zależności od x .

6.227. $r = \frac{2\sqrt{2} \cdot R}{3}$, $h = \frac{4R}{3}$; wskazówka: $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 2Rh^2)$, gdzie $h \in (0, 2R)$, $V(h)$ – objętość stożka w zależności od jego wysokości h .

6.228. $r = 6\sqrt{2}$, $h = 24$; wskazówka: $V(h) = \frac{12\pi h^2}{h-12}$, gdzie $h \in (12, +\infty)$, h – wysokość stożka,
 $V(h)$ – objętość stożka w zależności od jego wysokości h .

6.229. $2, 2, \sqrt{2}$; wskazówka: $V(a) = 4\sqrt{\frac{-a^4 + 10a^2 - 16}{a^2}}$, gdzie $a \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, a – długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, $V(a)$ – objętość prostopadłościanu w zależności od a .

6.230. $r\sqrt{2}$; wskazówka: $V(x) = \frac{1}{12}\sqrt{-x^6 + 3r^2x^4}$, gdzie $x \in (0, r\sqrt{3})$, x – długość krawędzi podstawy ostrosłupa, $V(x)$ – objętość ostrosłupa w zależności od x .

6.231. $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{18x^4 - x^6}$, gdzie $x \in (0, 3\sqrt{2})$; $V_{\max}(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	A	D	B	D	C	A	C	B	D	C
Numer zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	A	D	A	A	B	C	D	D	A	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

6.232. 2,5 cm

6.233. 13 cm

6.234. a) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.235. 3 : 4

6.236. $72\sqrt{3}$ cm²

6.237. a) $d_1 = 13$ cm, $d_2 = 14$ cm b) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

6.238. $\frac{1}{3}$

6.239. 372 cm^2

6.240. $5 \text{ cm}, 6 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 6 \text{ cm}$

6.241. $360\sqrt{3} \text{ cm}^3$

6.242. $\frac{a}{2}$

6.243. 45°

6.244. 546 cm^3

6.245. $\operatorname{tg} \beta = \frac{12V}{d^3 \sin \alpha}$

6.246. 11 cm

6.247. $\frac{\sqrt{14}a^2}{8}$

6.249. a) $\frac{5}{6}$ b) 6

6.250. 32

6.251. a) $50\sqrt{3}$ b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

wskazówka: a) Skorzystaj z twierdzenia o linii łączącej środki boków w trójkącie.

b) Oblicz objętość odciętego ostrosłupa na dwa sposoby.

6.252. a) 50 b) $5\sqrt{2}$

6.253. 2 dm lub $\frac{\sqrt{14}-2}{2} \text{ dm}$

6.254. $25\pi \text{ dm}^3$

6.255. $V = 150\pi \text{ cm}^3 \approx 471,2 \text{ cm}^3$ $P_c = 160\pi \text{ cm}^2 \approx 502,7 \text{ cm}^2$

6.256. $189\pi \text{ cm}^2$

6.257. $288\pi \text{ cm}^3, 144\pi \text{ cm}^2$

6.260. $P_c = 4\pi R^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha) = 2\pi R^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)$

$$V = \frac{8\pi}{3} R^3 \cdot \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 2\alpha; \text{ wskazówka: Rozważ trzy przypadki:}$$

gdy środek kuli należy do wnętrza stożka, jest środkiem podstawy lub leży na zewnątrz stożka.

6.261. $18\pi\sqrt{2}$; wskazówka: Pole przekroju osiowego jest równe $\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin \alpha$ i jest największe, gdy $\sin \alpha = 1$.

6.262. 2 cm (wysokość otrzymanego stożka), $2\sqrt{2}$ cm (promień podstawy otrzymanego stożka); wskazówka: $V(h) = \frac{\pi}{3}(12h - h^3)$, gdzie $h \in (0, 2\sqrt{3})$, h – wysokość otrzymanego stożka, $V(h)$ – objętość otrzymanego stożka.

6.263. 10 cm, 10 cm, 5 cm; wskazówka: $P_c(x) = x^2 + \frac{4V}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, x – długość krawędzi podstawy.

6.264. wskazówka: $V(H) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-H^3 + 12H^2)$, gdzie $H \in (0, 12)$, H – wysokość ostrosłupa, $V(H)$ – objętość ostrosłupa w zależności od jego wysokości H . Oblicz długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

6.265. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{2}$ cm³; wskazówka: $P(h) = \pi\sqrt{-H^4 + 100H^2}$, gdzie $H \in (0, 10)$, H – wysokość walca, $P(H)$ – pole powierzchni bocznej walca w zależności od jego wysokości H .