

ZADANIA

103. Liczba a jest całkowita. Uzasadnij, że co najmniej jedna z liczb $a^3 - a$ lub $a^3 + a$ jest podzielna przez 10.
105. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej x liczba:
- a) $6x^2 - 9x + 12$ jest podzielna przez 3,
 - b) $x^2 + x$ jest podzielna przez 2.
117. Dzieląc pewną liczbę przez 17, otrzymujemy iloraz i resztę 16. Dzieląc tę samą liczbę przez 18, otrzymujemy iloraz równy poprzedniej reszcie i resztę równą poprzedniemu ilorazowi. Znajdź tę liczbę.
127. Znajdź resztę z dzielenia liczby 2^{105} przez 3.
139. Uzasadnij, że liczba

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1996}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1995 \cdot 1996,$$

- a) jest liczbą całkowitą, b) dzieli się przez 1997.

ZADANIE DOMOWE

124. Dzieląc pewną liczbę naturalną przez 3, 4, 5, 6, 7 otrzymujemy tę samą resztę równą 2.
- a) Wyznacz najmniejszą liczbę o podanej własności większą niż 10.
 - b) Wyznacz najmniejszą liczbę o podanej własności, która jest ponadto podzielna przez 11.
106. Uzasadnij, że kwadrat liczby postaci $2n + 1$, gdzie n jest liczbą naturalną, zmniejszony o 1 jest podzielny przez 8.
128. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 3^{1999} przez 4.
144. Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33 głowy lub 21 głów lub 17 głów lub 1 głowę. Smokowi odrasta odpowiednio: 48, 0, 14 i 349 głów jednocześnie. Zostanie on zabity, jeśli wszystkie głowy zostaną ścięte. Czy rycerz może zabić smoka?