

Zadanie 1

Liczby rzeczywiste $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$ spełniają równości $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ oraz $x_1 x_2 = y_1 y_2$. Udowodnić, że $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$.

Zadanie 2

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Dla jakiego x wartość funkcji

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$
 jest najmniejsza?

Zadanie 3

Liczby rzeczywiste a, b i c spełniają nierówność $(a + b + c)c < 0$, przy czym $a \neq 0$. Wykazać, że $b^2 > 4ac$.

Zadanie 4

Niech $T(x) = x^2 + 4x + 2$. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $T(T(T(x))) = 0$.

Zadanie 5

Wyznaczyć wszystkie pary (b, c) liczb rzeczywistych, dla których trójmian kwadratowy $x^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki i są nimi b i c .

Zadanie 6

Wykorzystując funkcję kwadratową $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2$, udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$.

Zadanie 7

Liczby m , oraz $\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}$ są całkowite. Udowodnić, że liczba $\frac{m^2}{n}$ również jest całkowita.

Zadanie 8

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ spełnia dla każdego $x \in [-1, 1]$ nierówność $|f(x)| \leq 1$. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $|a| + |b| + |c|$.

Zadanie 9

Rozważmy trójmiany kwadratowe $f(x) = x^2 + b_1x + c_1$ i $g(x) = x^2 + b_2x + c_2$ których współczynniki są rzeczywiste i spełniają warunek

$$(c_2 - c_1)^2 + (b_1 - b_2)(b_1c_2 - c_1b_2) < 0.$$

Dowieść, że trójmiany f i g mają obydwa pierwiastki rzeczywiste, a każdy z nich ma jeden pierwiastek leżący na osi liczbowej pomiędzy pierwiastkami drugiego.