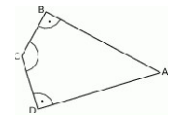
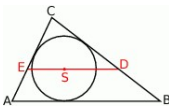
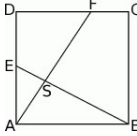
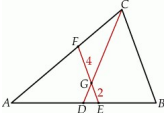
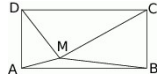
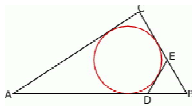
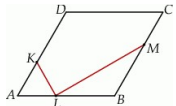
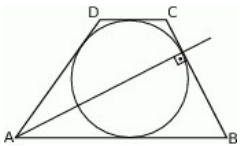
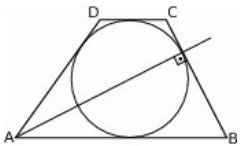
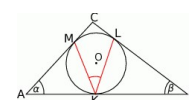
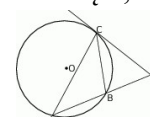
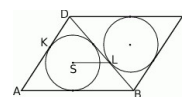
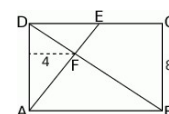


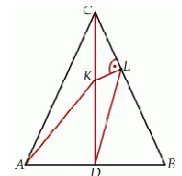
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD i BC przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
- 
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

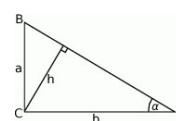
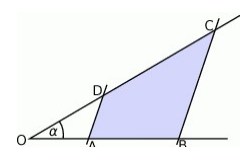
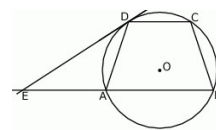
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość a a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



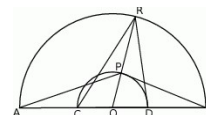
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi u_A, u_B, u_C , w ten sposób, że do okręgu u_A należą punkty A, E, F , do u_B – punkty B, D, F , a do u_C – punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

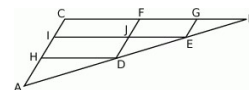
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

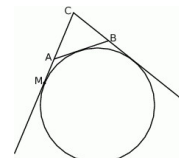


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

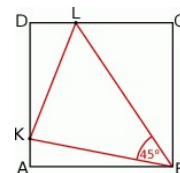
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

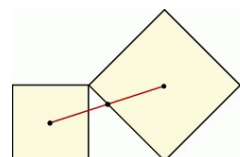
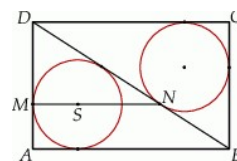
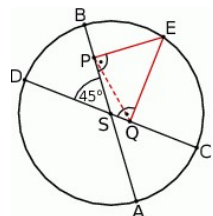
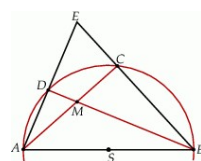
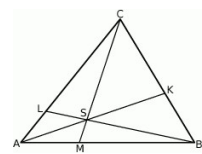


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

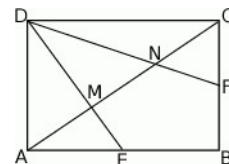


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

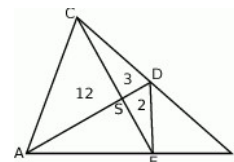
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

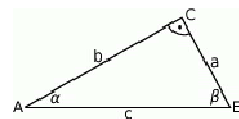
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



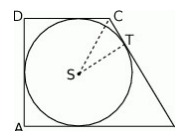
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

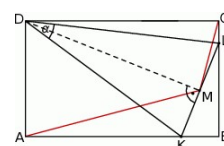
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



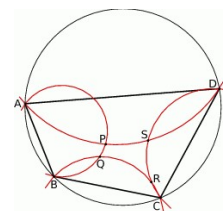
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawy AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

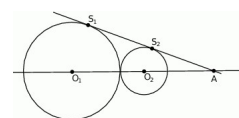
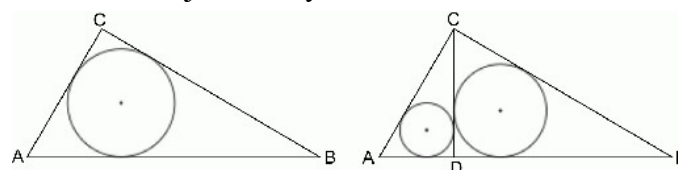
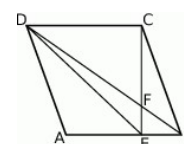
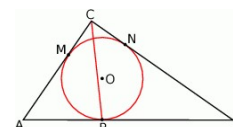
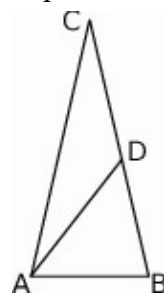
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

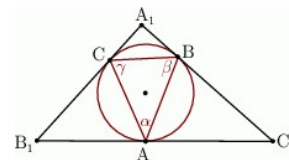


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



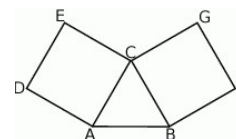
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

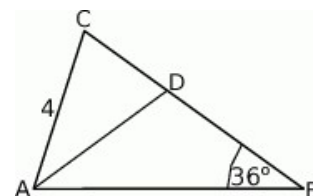


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

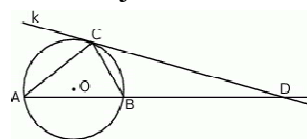
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

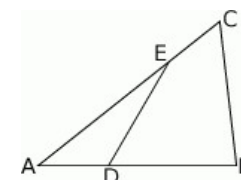
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

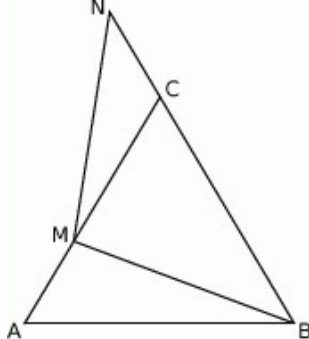
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

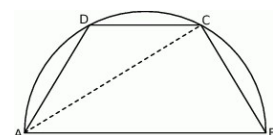
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.



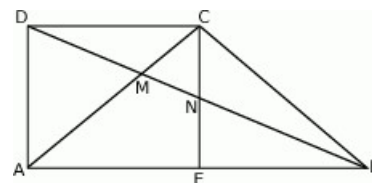
213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

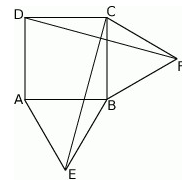
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

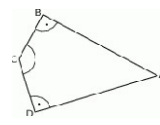
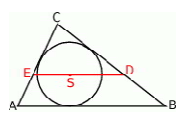
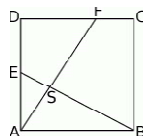
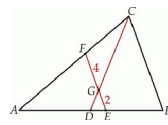
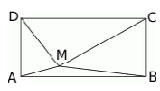


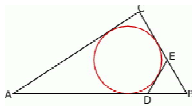
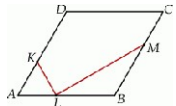
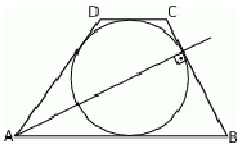
218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



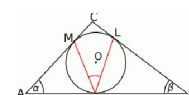
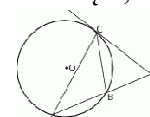
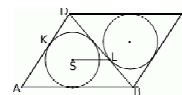
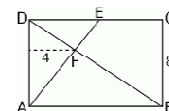
219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

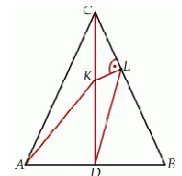
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy 4:3, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

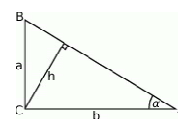
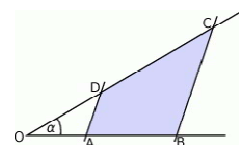
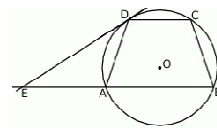
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



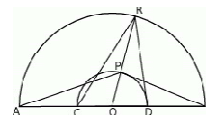
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B – punkty B, D, F , a do ω_C – punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt Q leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

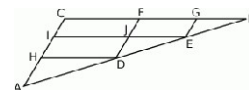
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

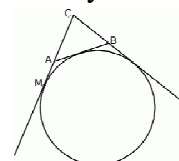


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

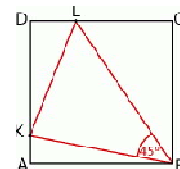
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

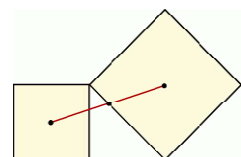
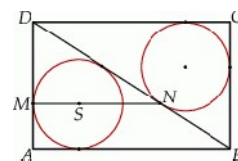
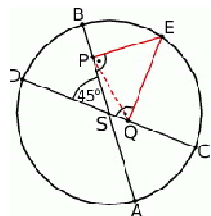
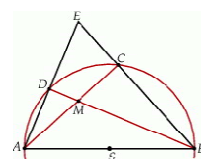
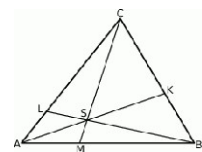


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

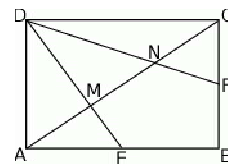


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

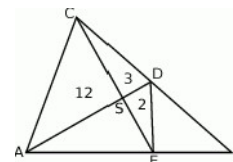
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

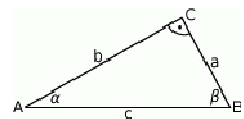
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



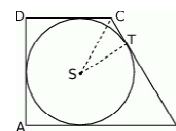
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

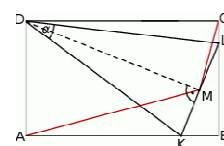
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

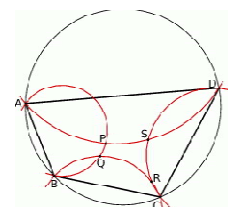
160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL . Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.



162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

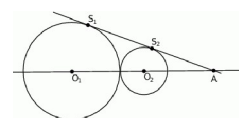
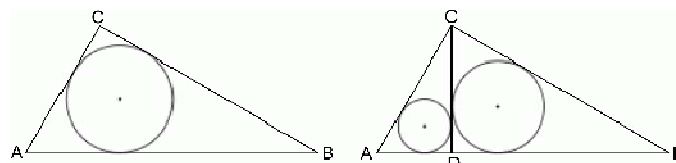
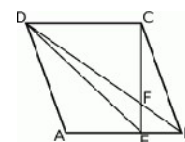
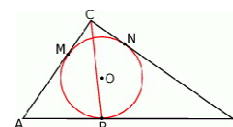
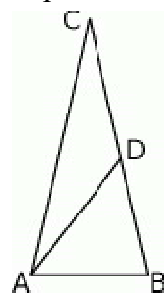
163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .



164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.

165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

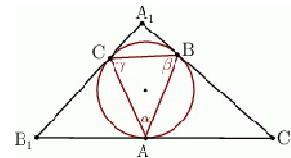


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



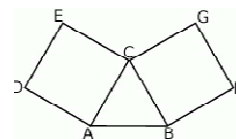
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

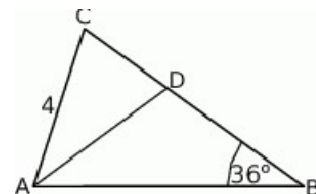


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

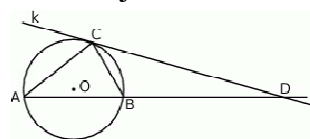
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

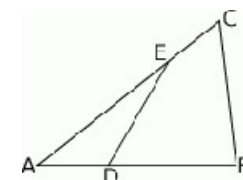
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

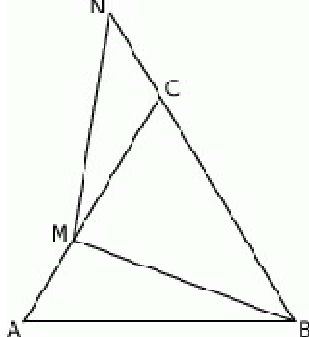
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

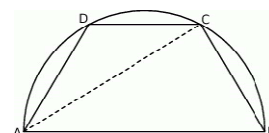
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

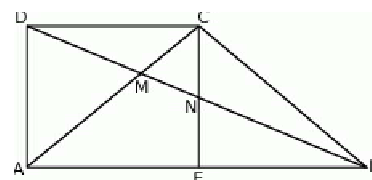


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

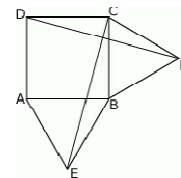
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



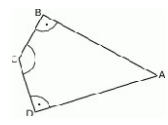
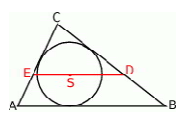
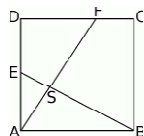
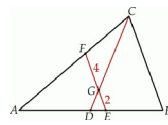
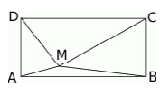
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.

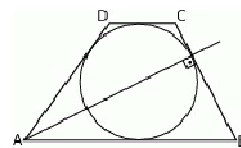
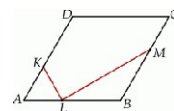
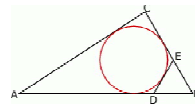


219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

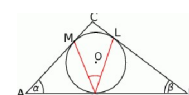
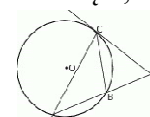
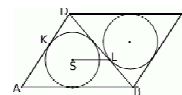
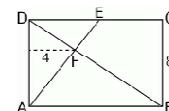
220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie średnice kątów A i D przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie średnice kątów ADB i BDC . Dwie średnice te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie średnice kąta BAC przecinają bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

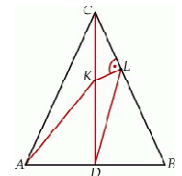
19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia BC . Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

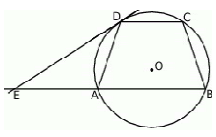
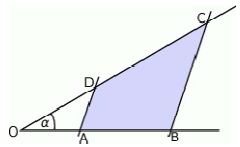
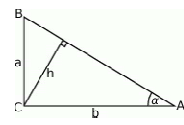


40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.

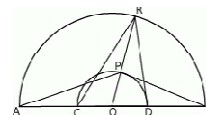


85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
- 
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi u_A, u_B, u_C , w ten sposób, że do okręgu u_A należą punkty A, E, F , do u_B punkty B, D, F , a do u_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
- 
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- 
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki

boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

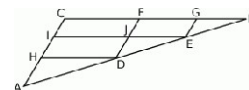
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

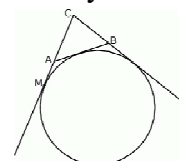


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

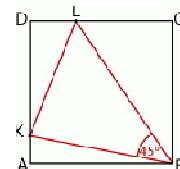
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

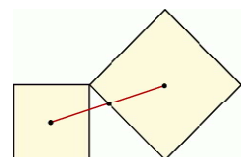
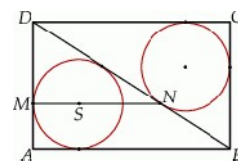
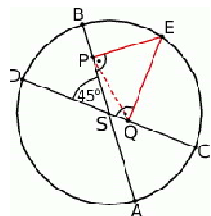
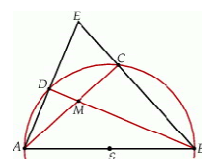
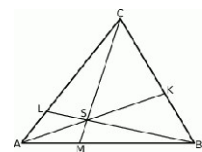


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

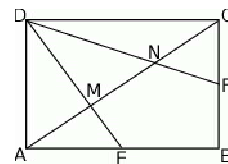


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

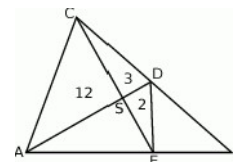
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

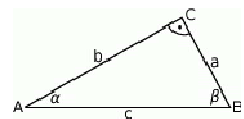
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



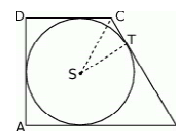
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

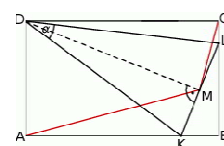
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



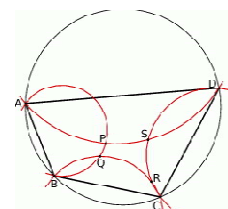
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

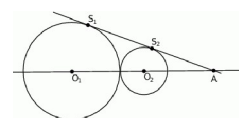
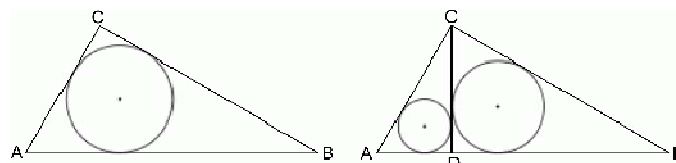
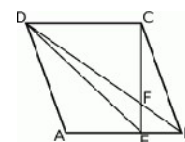
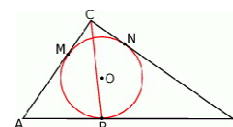
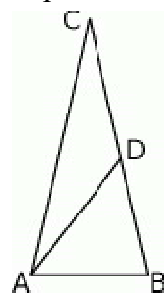
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

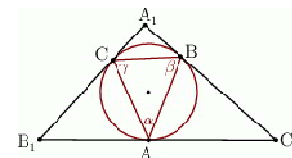


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



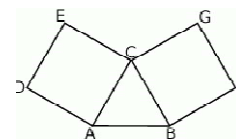
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

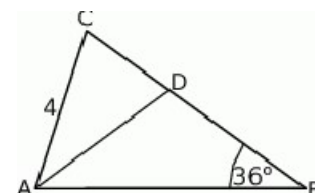


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

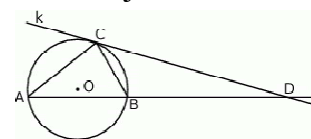
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

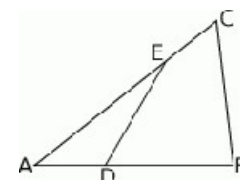
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

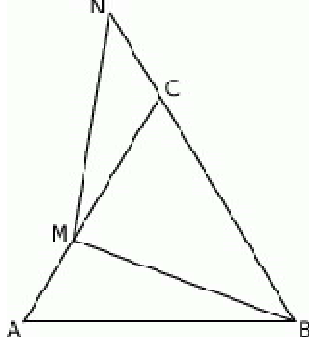
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

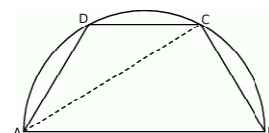
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

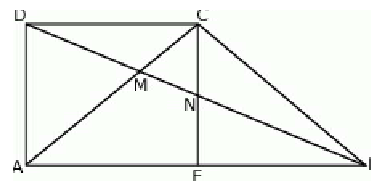


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

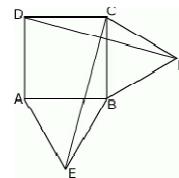
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



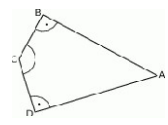
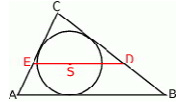
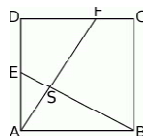
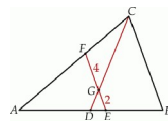
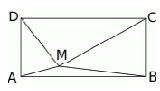
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

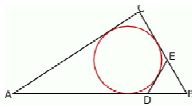
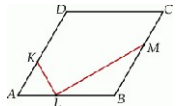
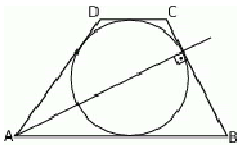
218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



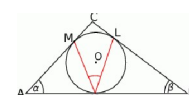
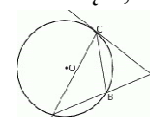
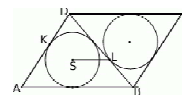
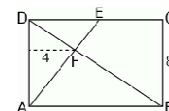
219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

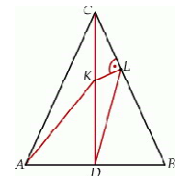
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD i BC przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$; oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BA i CA przecinają bok BC trójkąta w punktach D i E i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12$ cm i wysokości $h = 18$ cm. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

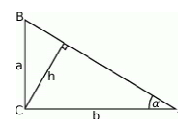
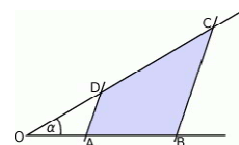
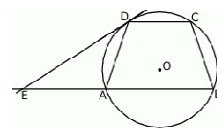
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedna z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwusieczna kąta B trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie S , a dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie T . Dwusieczne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



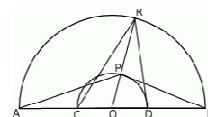
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

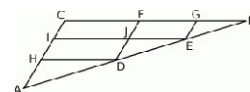
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

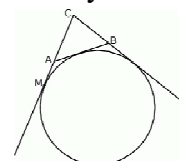


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

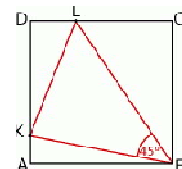
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

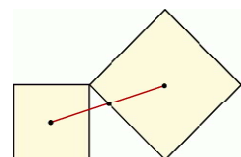
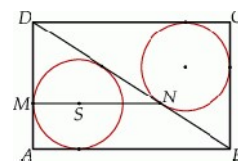
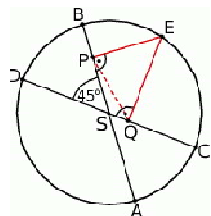
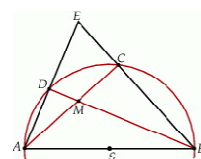
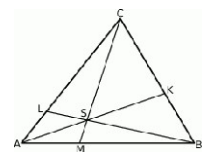


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

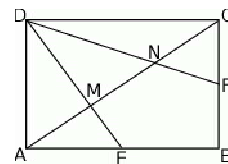


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

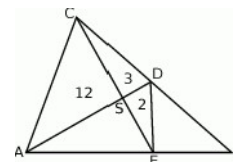
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

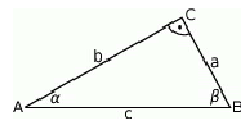
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



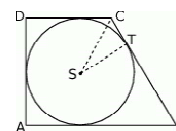
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

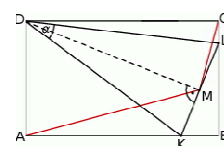
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



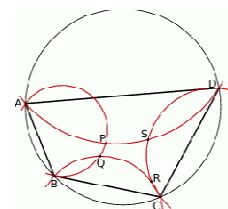
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

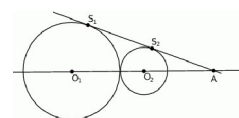
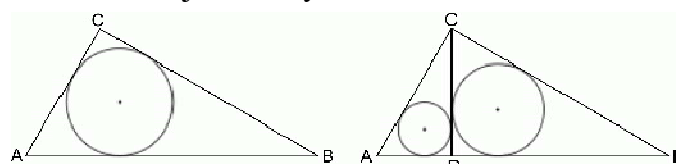
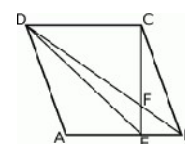
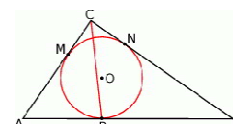
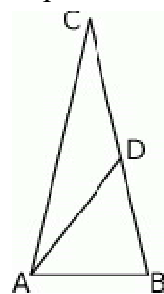
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

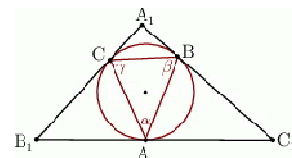


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



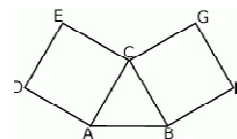
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

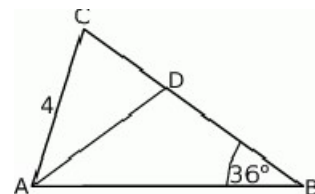


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

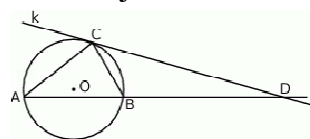
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

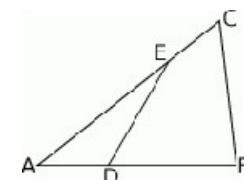
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

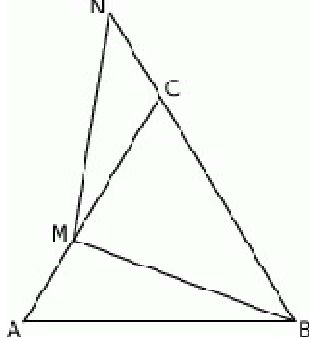
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

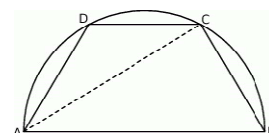
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

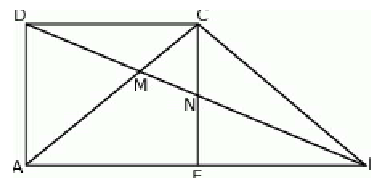


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

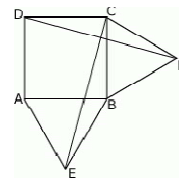
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



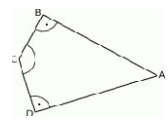
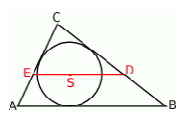
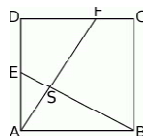
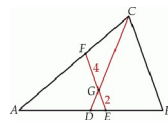
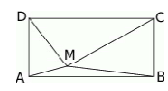
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

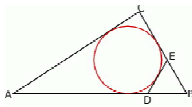
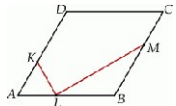
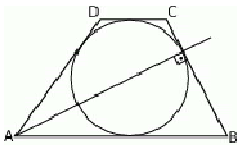
218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



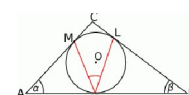
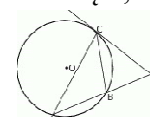
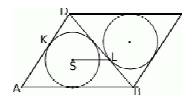
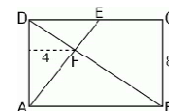
219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC budowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

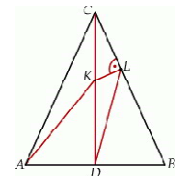
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BA i CA przecinają bok BC trójkąta w punktach D i E i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

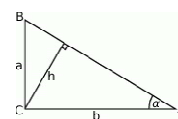
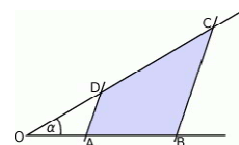
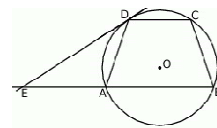
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętny kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętny kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętny przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



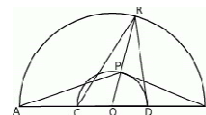
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

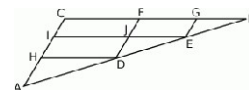
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

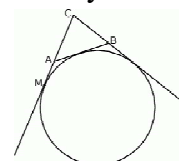


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

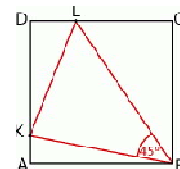
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

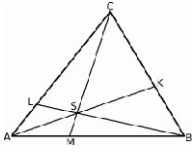
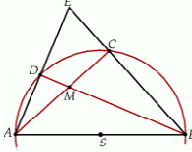
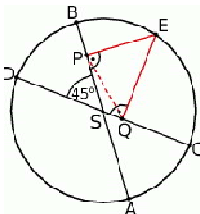
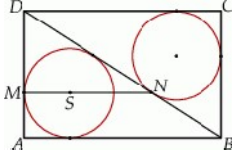
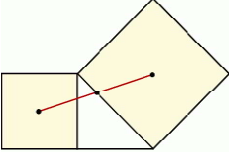
122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .



123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

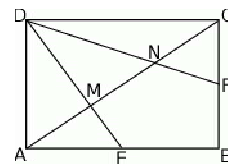
126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
- 
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
- 
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
- 
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
- 
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
- 
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

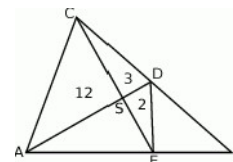
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

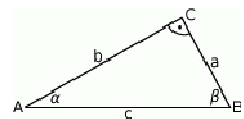
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



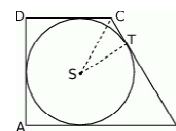
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

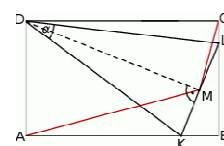
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



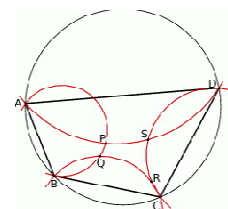
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

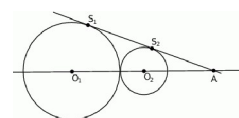
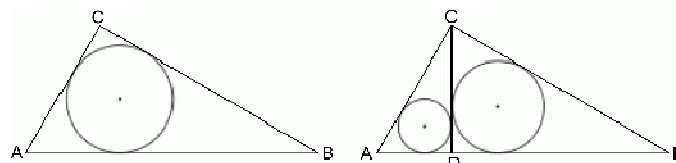
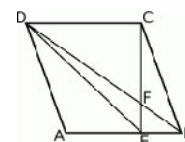
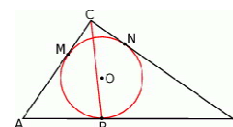
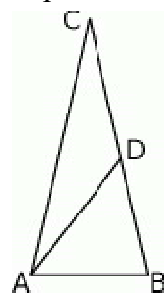
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



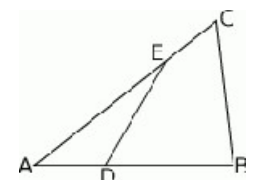
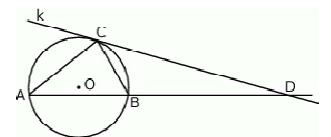
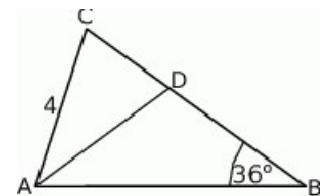
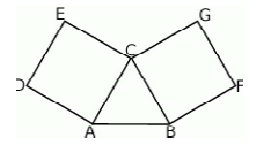
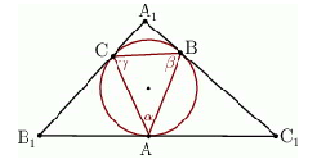
165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

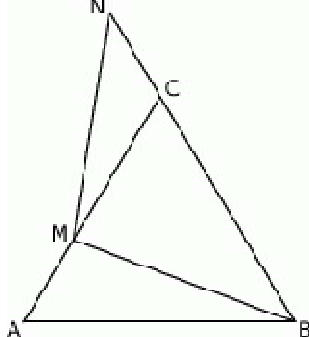
166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów



opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .
188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.
189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.
191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.
192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.
193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.
194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .
195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.
196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).
199. Oblicz długość odcinka CD .
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.
201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.
202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .
203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.





205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

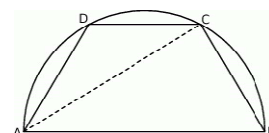
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

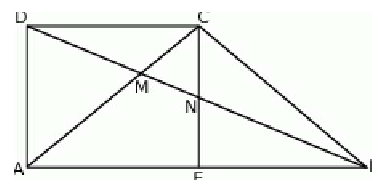


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

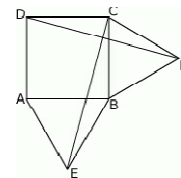
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



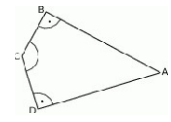
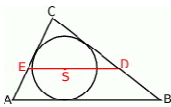
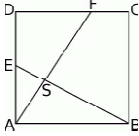
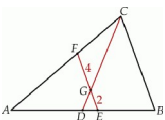
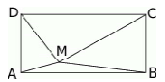
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

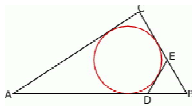
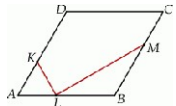
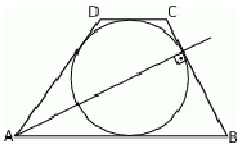
218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



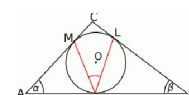
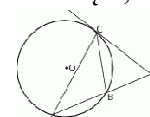
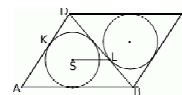
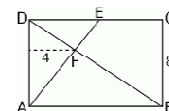
219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

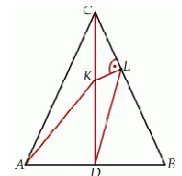
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BA i CA przecinają bok BC trójkąta w punktach D i E i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

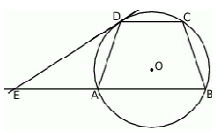
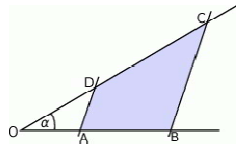
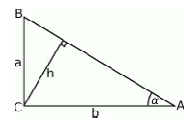
19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.

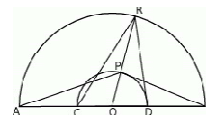


85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
- 
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
- 
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- 
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki

boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

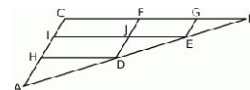
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

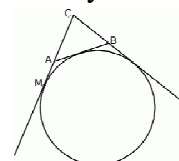


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

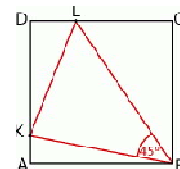
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

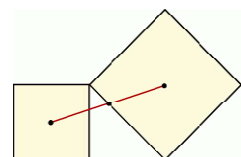
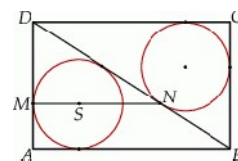
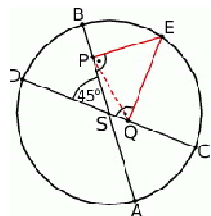
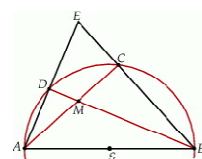
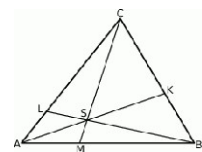


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

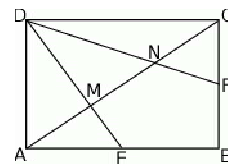


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

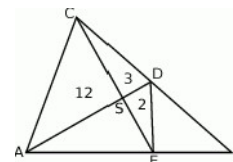
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

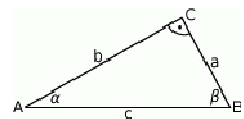
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



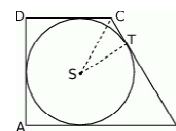
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

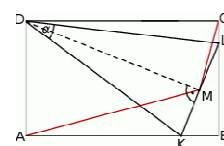
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



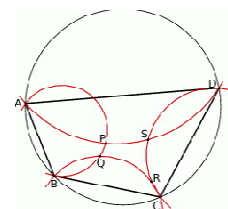
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawy AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

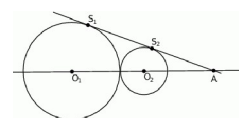
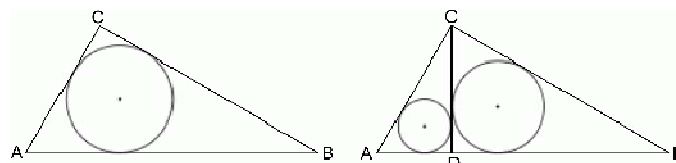
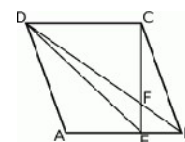
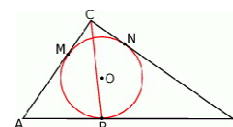
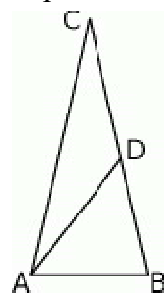
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

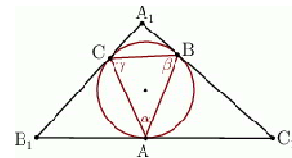


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



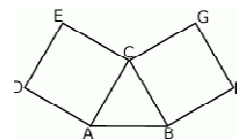
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

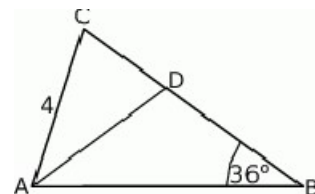


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

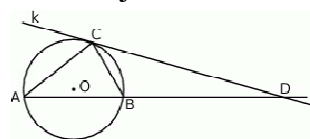
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

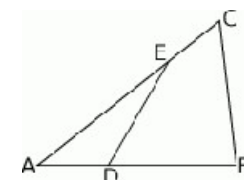
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

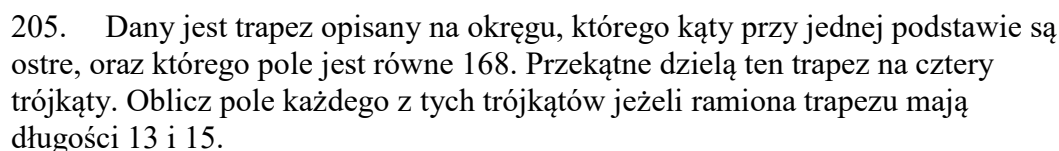
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



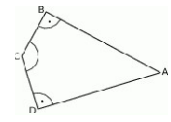
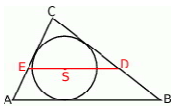
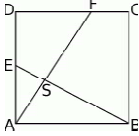
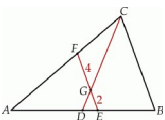
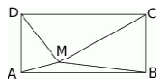
202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

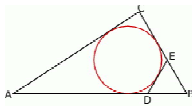
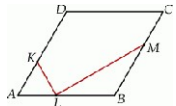
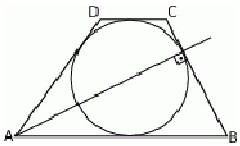
203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.

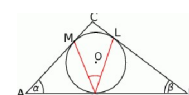
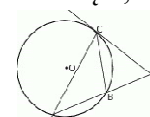
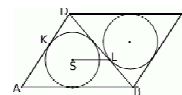
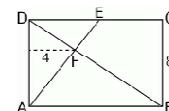


207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

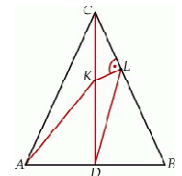
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

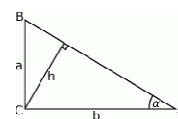
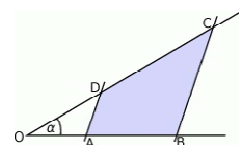
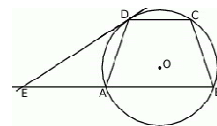
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



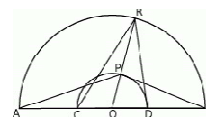
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi u_A, u_B, u_C , w ten sposób, że do okręgu u_A należą punkty A, E, F , do u_B – punkty B, D, F , a do u_C – punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

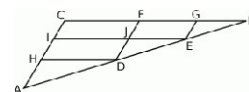
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

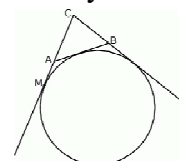


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

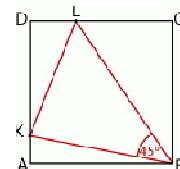
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

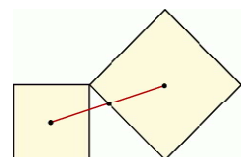
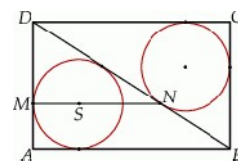
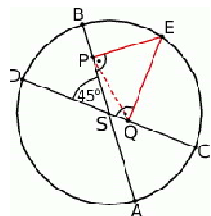
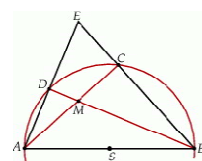
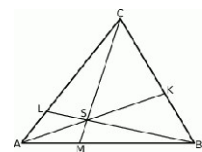


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

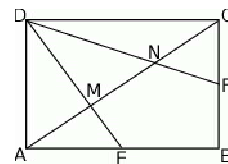


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

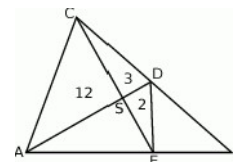
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

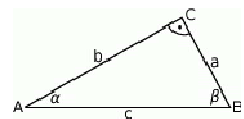
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



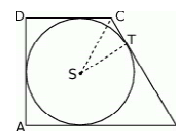
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

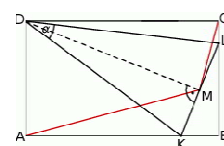
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

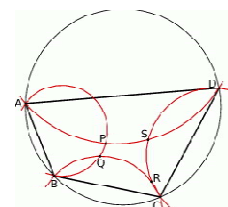
160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL . Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.



162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

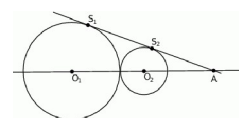
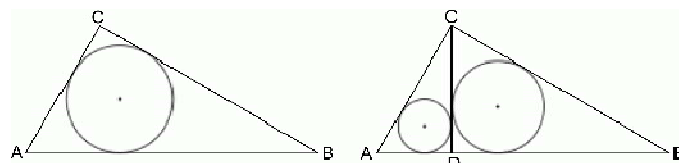
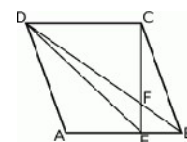
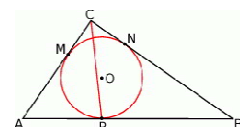
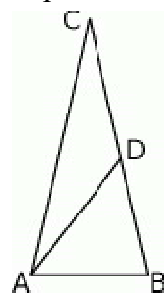
163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .



164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.

165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

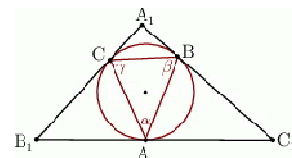


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



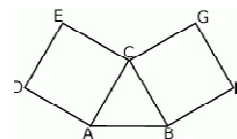
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

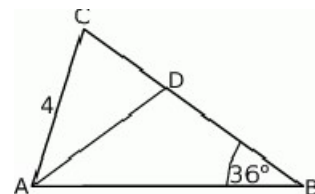


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

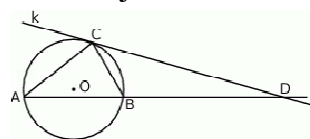
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

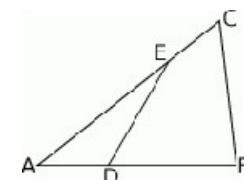
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

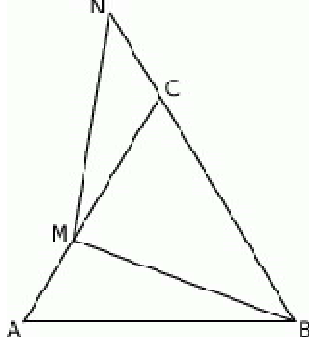
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

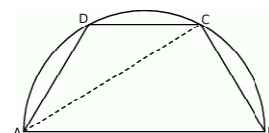
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

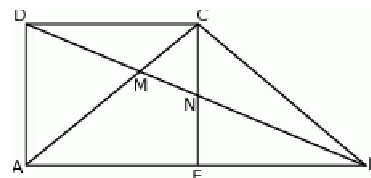


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

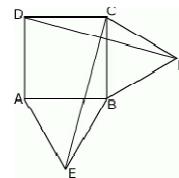
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



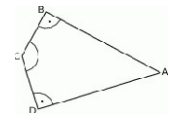
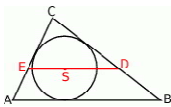
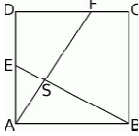
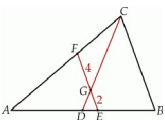
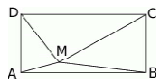
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.

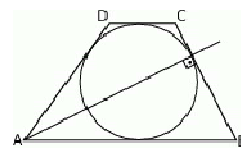
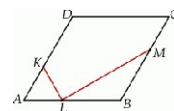
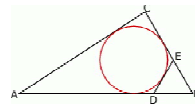


219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC budowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

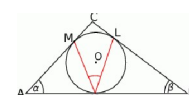
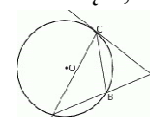
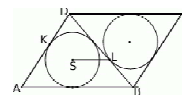
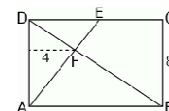
220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy 4:3, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

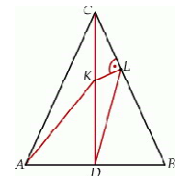
19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$, to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia BC . Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.



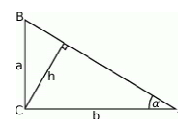
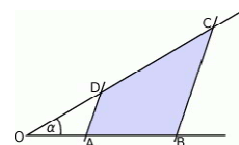
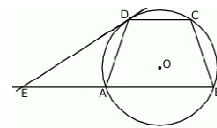
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedna z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość a a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



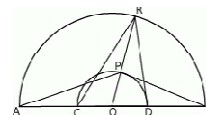
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

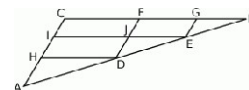
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

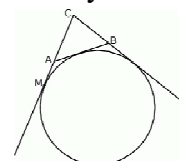


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

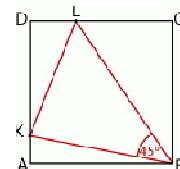
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

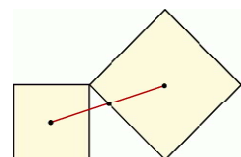
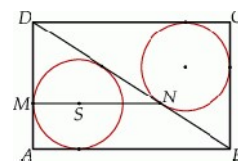
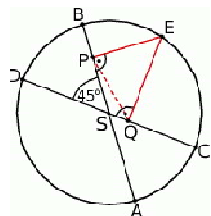
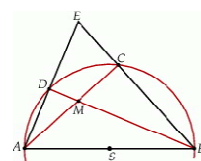
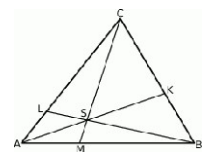


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

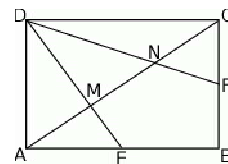


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

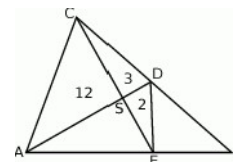
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

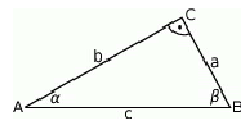
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



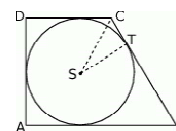
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

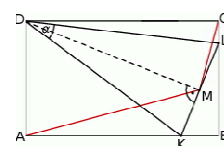
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL .



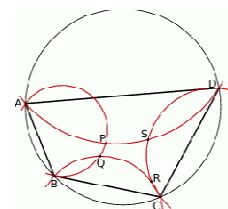
Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.

162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$.

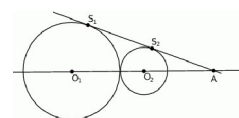
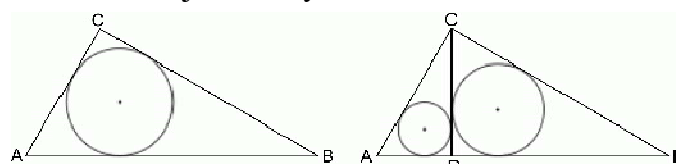
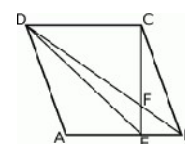
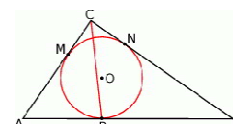
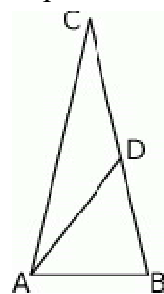
Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .

164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.



165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

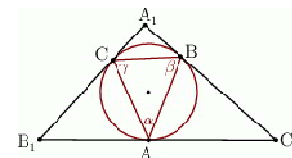


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



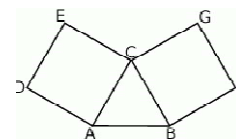
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

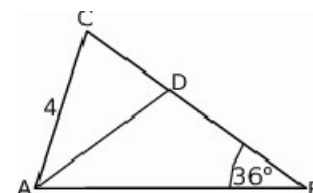


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

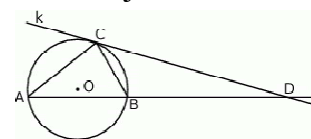
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

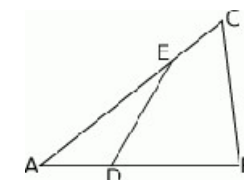
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

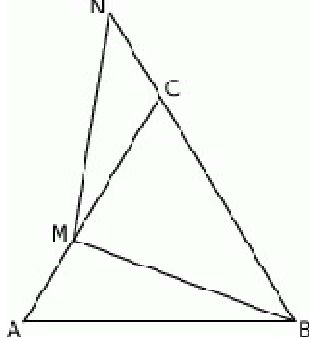
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

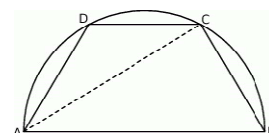
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

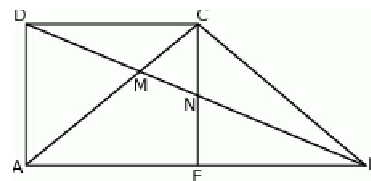


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

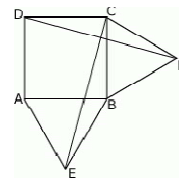
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



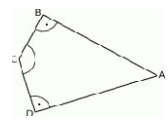
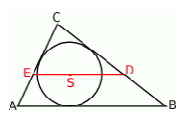
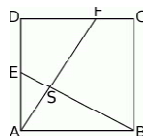
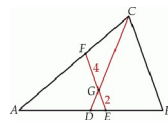
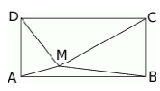
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.

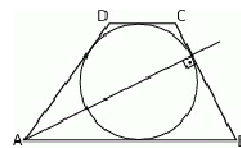
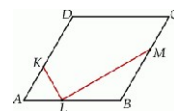
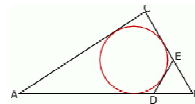


219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC budowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

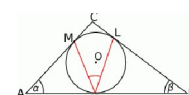
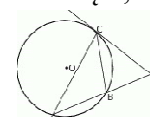
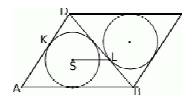
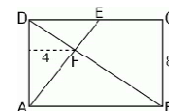
220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4:3$, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BA i CA przecinają bok BC trójkąta w punktach D i E i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

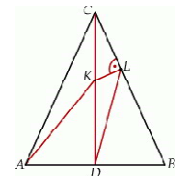
19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia BC . Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.



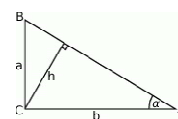
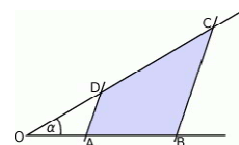
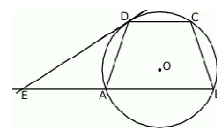
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwie przeciętne kąta C i A przecinają bok AB w punkcie T . Dwie przeciętne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



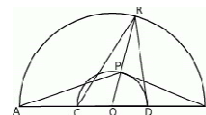
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt Q leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

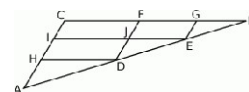
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

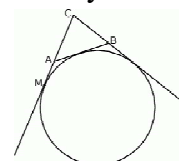


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu

wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

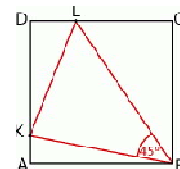
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

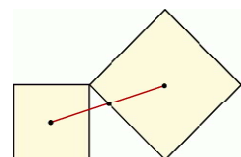
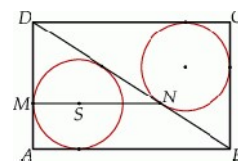
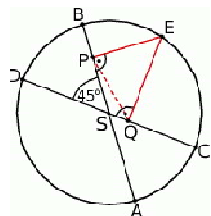
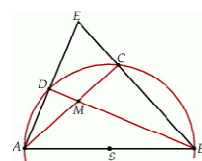
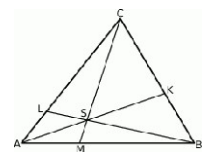


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

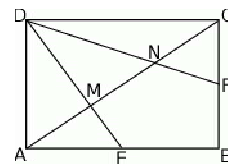


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

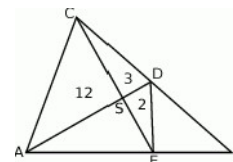
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

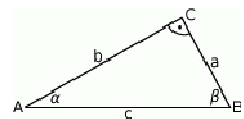
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



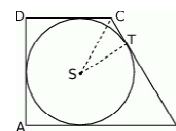
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

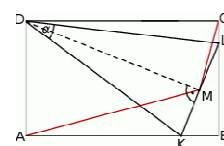
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

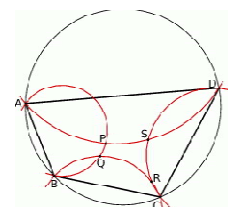
160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL . Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.



162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

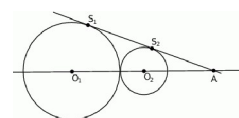
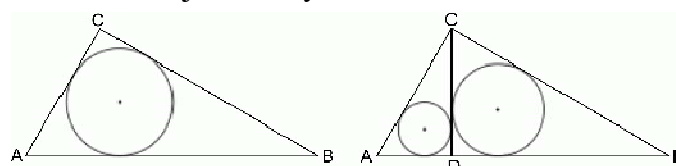
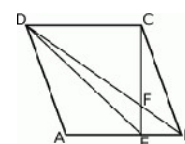
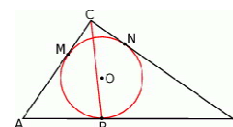
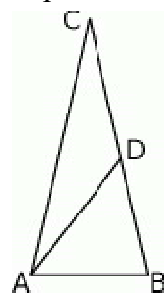
163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .



164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.

165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

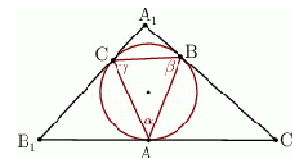


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



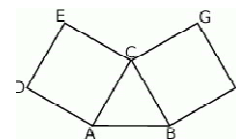
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

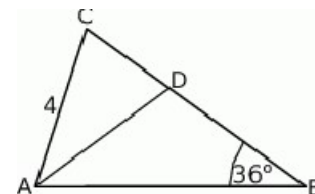


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

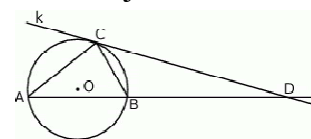
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

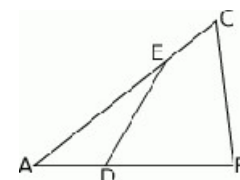
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

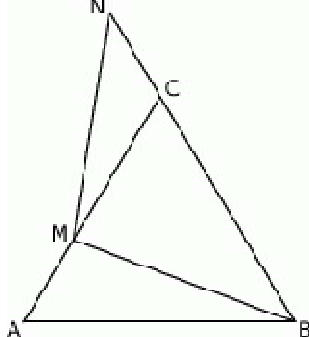
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

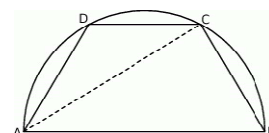
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

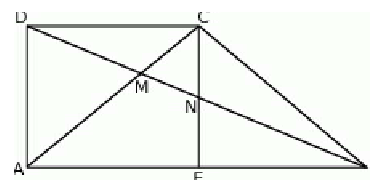


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

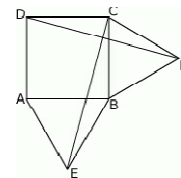
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



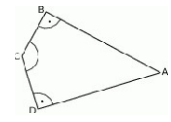
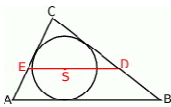
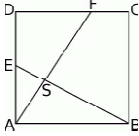
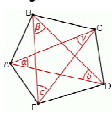
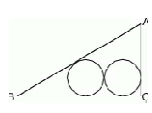
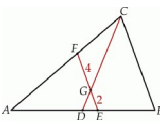
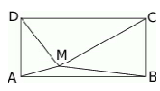
217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

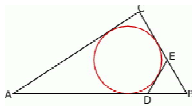
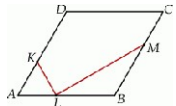
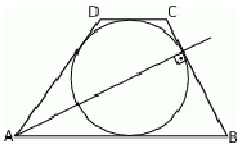
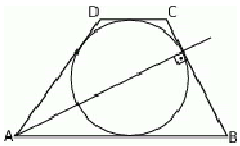
218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



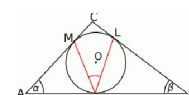
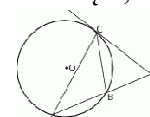
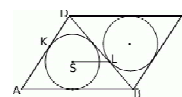
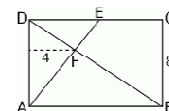
219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.

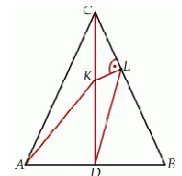
- W czworokącie wypukłym $ABCD$ (zobacz rysunek poniżej) dane są kąty:
 $|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle DCB| = 135^\circ$. Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 
- Przez środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D . Wykaż, że $|ED| = |EA| + |DB|$.
 
- Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE . Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$. Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.
Odp. $\cos = -1/\sqrt{50}$

- Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym boki AB i BC są prostopadłe. Dwie przeciętny kątów AD przecinają się w punkcie S leżącym na boku BC . Wykaż, że $|BS| = |SC|$.
- Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku długości a . Wiedząc, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, wykaż, że długość przekątnej pięciokąta $ABCDE$ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, oblicz długość promienia okręgu wpisanego w pięciokąt $ABCDE$.
- W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy 4:3, poprowadzono dwie przeciętny kątów ADB i BDC . Dwie przeciętny te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
- Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y . Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji. Sporządź wykres tej funkcji.
- Różnica kwadratów długości przekątnych trapezu prostokątnego wynosi 21, jego wysokość ma długość 4, a dłuższe ramię ma długość 5. Oblicz pole trapezu.
- W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku AC jest równa b oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Dwie przeciętny kątów BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D i odcinek AD ma długość d . Wykaż, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}$.
- W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość a , druga jest trzy razy dłuższa. Oblicz pole trapezu oraz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
- Oblicz sumę miar kątów utworzonych przez przekątne pięciokąta wypukłego.
- W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC oraz $|AB| = 2|AC|$. Oblicz miarę kąta BAC .
 
- W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC , a drugi do boków AC i BC . Oblicz długość promienia tych okręgów.
 
- Wykaż, że istnieją dokładnie dwie liczby naturalne n takie, że trójkąt o bokach $n, n+2, n+3$ jest rozwartokątny.
- W trójkącie ABC odcinek EF o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G , oraz odcinek EF jest równoległy do odcinka BC (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.
 
- Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek). Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
 
- Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku $ABCD$, zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2 + b^2 \geq pr$.
- W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy $a = 12\text{cm}$ i wysokości $h = 18\text{cm}$. W trójkąt ten wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie, a po jednym na każdym ramieniu trójkąta, przy czym przekątne prostokąta są równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

19. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\tan \beta = \frac{4}{3}$.
20. Okrąg o promieniu 4 jest wpisany w trójkąt. Punkt styczności podzielił jeden z boków na odcinki o długości 6 i 8. Oblicz długości boków tego trójkąta.
21. Jeden z boków trójkąta ma długość c , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
22. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
23. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 
24. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{17}{25}$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| = 12$, $|DB| = 16$ oraz $|CD| = 17$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że pola tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe.
26. Wykaż, że jeżeli α i β są kątami trójkąta oraz $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$ to trójkąt ten jest prostokątny.
27. Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.
28. Na bokach AD , AB i BC rombu $ABCD$ wybrano punkty K , L i M w ten sposób, że $|AL| : |LB| = k$ oraz $KL \parallel DB$, $LM \parallel AC$. Wyznacz wszystkie wartości k , dla których pole pięciokąta $KLMCD$ stanowi $\frac{11}{16}$ pola rombu.
- 
29. W trójkącie ABC proste zawierające dwusieczne kątów poprowadzonych z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem 45° . Wiedząc, że $|AC| = 2$ i $|BC| = 6$, oblicz długość boku AB trójkąta ABC ; długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
30. W czworokącie $ABCD$ spełniony jest warunek $|\angle ADB| = |\angle ACB|$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
31. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
32. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.
- 
34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.
- 
35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.
36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .
37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
38. Trójkąt prostokątny ABC ma boki długości 3, 4, 5. Oblicz promień okręgu stycznego do przeciwprostokątnej i prostych będących przedłużeniami przyprostokątnych.
39. Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\tan \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.

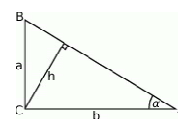
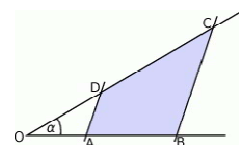
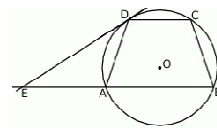
40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A . Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
41. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD . Wykaż że
 $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|$.
42. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz cosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw wynosi 3:2.
43. Kąt ostry rombu $ABCD$ ma miarę $\angle A = 60^\circ$. Na bokach AB i BC wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|AK| = |BL|$. Uzasadnij, że trójkąt KLD jest trójkątem równobocznym.
44. Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.
45. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.
46. Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a .
47. Dwa okręgi przecinają się w punktach M i N . Przez punkt A pierwszego okręgu prowadzimy proste AM i AN , przecinające drugi okrąg w punktach B i C . Udowodnij, że styczna w punkcie A do pierwszego okręgu jest równoległa do prostej BC .
48. W prostokącie $ABCD$, w którym $|BC| = 8$, połączono wierzchołek A z punktem E leżącym na boku DC . Odcinek ten przeciął przekątną BD w punkcie F . Wiedząc, że odległość punktu F od boku AD jest równa 4, oraz że $|AE| = 10$, oblicz długość boku AB prostokąta.
49. W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość t . Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.
50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że jeżeli odcinki MN i PQ są prostopadłe, to $|AD| = |BC|$.
51. Dwie przeciętne kąta B i C trójkąta ABC przecinają bok AC w punkcie S , a dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie T . Dwusieczne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
52. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.
53. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie L , a okrąg wpisany w trójkąt ABD ma środek S i jest styczny do boku AD w punkcie K . Wykaż, że jeżeli odcinek SL jest równoległy do prostej AB , to $|KD| = |SL|$.
54. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
55. Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C . Uzasadnij, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.
56. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu, która przecina ramiona trapezu w punktach E i F . Wykaż, że $|ES| = |SF|$.
57. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .
58. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty P i Q takie, że $|AP| : |PC| = 2 : 1$ oraz $|BQ| : |QC| = 2 : 1$. Odcinki AQ i BP przecinają się w punkcie R . Wykaż, że pole czworokąta $CPRQ$ jest równe polu trójkąta ARP .
59. Długości a i b przyprostokątnych trójkąta prostokątnego spełniają równość $a^2 - 6ab - 7b^2 = 0$. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{14}a^2$.
60. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
61. W trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC . Wykaż, że $\angle MKL = \frac{\alpha + \beta}{2}$.



62. W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jeżeli $|AB| = 2R$.
63. Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny, znajduje się w odległości 4 oraz 8 od końców dłuższego ramienia trapezu. Oblicz pole tego trapezu.
64. Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta k nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej k . Rozważ dwa przypadki.
65. Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
66. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC trójkąta w punkcie D . Wykaż, że $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
67. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.
68. Wyznaczyć sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{5}{2}$.
69. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $\angle ADC = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2:1.
70. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość u . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.
71. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna AD ma długość d a miara kąta ADB wynosi α . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
72. Na trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) o polu równym $3\sqrt{3}$ opisano okrąg, którego promień ma długość 2 cm. Oblicz długość wysokości CD tego trójkąta.
73. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 24\sqrt{5}$. Na przekątnej BD leży punkt E taki, że $|DE| : |EB| = 3 : 2$ oraz $|AE| = 2\sqrt{269}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
74. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.
75. Wykaż, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, oraz miara α jednego z jego kątów spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2}$ to trójkąt ten jest prostokątny.
76. Odcinek CD jest wysokością przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt L jest rzutem punktu K wysokości CD na bok BC . Udowodnij, że $\angle CAK = \angle KDL$.
77. W kąt o mierze α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień r i jest styczne do ramion kąta a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Oblicz sumę pól kół tego ciągu.
78. W trapezie równoramiennym o podstawach długości 20 i 40, oraz kącie ostrym o mierze 30° połączono środki wszystkich boków. Oblicz pole otrzymanego czworokąta.
79. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.
80. Wewnątrz kąta o mierze 60° leży punkt S . Odległość tego punktu od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość tego punktu od wierzchołka kąta.
81. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .
82. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem wspólnym przekątnych. Oblicz pole trapezu wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe 5, a pole trójkąta CDO jest równe 4.
83. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj który z tych prostokątów ma największe pole.
84. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.



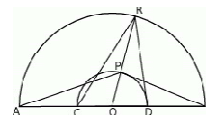
85. Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, gdzie α i β są miarami kątów trójkąta przyległych do boku, na który opuszczono wysokość h .
86. Trójkąt ABC podzielony jest przez dwie proste równoległe do boku AC , na trzy figury o równych polach. Oblicz na jakie części proste te podzieliły bok $AB = a$.
87. W okrąg wpisano trapez równoramienny $ABCD$, którego podstawy mają długości: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|DC| = 4 \text{ cm}$. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (rys). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5} \text{ cm}$ oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.
88. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.
89. W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.
90. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 3:4. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
91. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .
92. W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono punkt D , na boku AC zaznaczono punkt E , na boku AB punkt F . Poprowadzono okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, w ten sposób, że do okręgu ω_A należą punkty A, E, F , do ω_B punkty B, D, F , a do ω_C punkty C, D, E . Wykaż, że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.
93. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta $\angle ABC$ jest dwa razy większa od miary kąta $\angle BAC$. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
94. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.
95. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3. Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
96. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC o bokach długości $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$ jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Proste DE i AB przecinają się w punkcie F . Oblicz pole trójkąta EBF .
97. Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest równoległy do podstawy AB i styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe $\frac{|AB|^2 \sqrt{|AB| \cdot |PQ|}}{2(|AB| - |PQ|)}$.
98. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle ACB = 90^\circ$, $|BC| < |AC|$) poprowadzono prostą przechodzącą przez wierzchołek C trójkąta która przecina przeciwprostokątną w punkcie D , takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz długość przeciwprostokątnej jeśli $|BC| = \sqrt{3}$ i $\angle DCB = 30^\circ$.
99. Wiedząc, że $\alpha = 30^\circ$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.
100. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 5 \sin^2 \gamma$, to $\sin \gamma \leq \frac{3}{5}$.
101. W trójkącie o obwodzie 14 jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego boku. Oblicz cosinus najmniejszego kąta, tego spośród trójkątów spełniających podany warunek, w którym suma kwadratów długości boków jest najmniejsza.
102. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
103. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
104. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają prostokąt, czy można stwierdzić, że czworokąt jest rombem? Jeśli środki



boków czworokąta wyznaczają romb, czy można stwierdzić, że czworokąt jest prostokątem? Jeśli środki boków czworokąta wyznaczają kwadrat, czy można stwierdzić, że czworokąt jest kwadratem?

105. Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$; $m \neq 1$.

106. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe).



107. Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt K leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $|\angle APB| + |\angle CRD| = 180^\circ$.

108. Wykaż, że jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

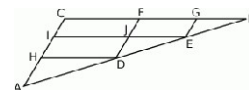
109. Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz wszystkie naturalne wartości p i q , dla których najkrótszy bok otrzymanego trójkąta ma długość 13.

110. Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zaznaczono

odpowiednio punkty K i L tak, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CL|}{|LA|} = \frac{1}{2}$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz $\frac{|MB|}{|MK|}$.

111. Odcinki DH i EI są równoległe do boku BC trójkąta ABC , a odcinki DF i EG są

równoległe do boku AC . Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{|CH|}{|HA|}$, to $|AD|^2 = |DE| \cdot |DB|$.

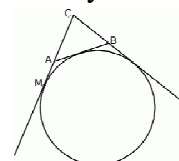


112. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu zawierającego punkty styczności tych okręgów.

113. Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

114. Drut o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5:8, a w drugim 13:10. Jakie obwody mają te trójkąty jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

115. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC to okrąg, który jest jednocześnie styczny do tego boku, oraz do przedłużeń boków AC i BC .



116. Wykaż, że jeżeli M jest punktem styczności tego okręgu z przedłużeniem boku AC to długość odcinka CM jest równa połowie obwodu trójkąta ABC .

117. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw oraz $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{p}{q}$. Oblicz długość odcinka KL .

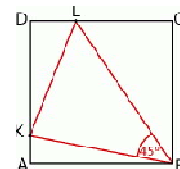
118. Odcinek AS jest środkową trójkąta ABC . Udowodnij, że $|AB| + |AC| > 2|AS|$.

119. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 10$ i kąt $ACB = 120^\circ$. Wyznacz długość środkowej CD tego trójkąta.

120. Wykaż, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

121. Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaka figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków: a) rombu, b) prostokąta, c) kwadratu?

122. Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ połu 1 wybrano punkty K i L w ten sposób, że $|\angle KBL| = 45^\circ$. Oblicz odległość punktu B od prostej KL .

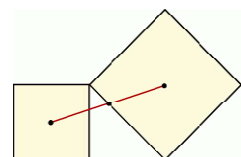
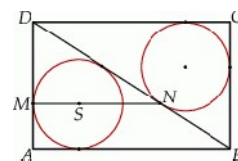
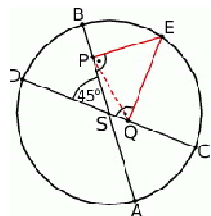
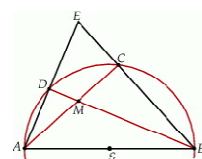
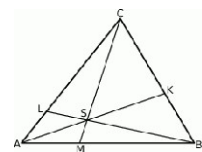


123. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długości boków i pole tego równoległoboku.

124. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 3 razy dłuższa od podstawy CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E , a proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie F . Oblicz stosunek pola czworokąta $DECF$ do pola trapezu $ABCD$.

125. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 8$, $|CA| = \sqrt{17}$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|AD| = 2$. Oblicz sinus kąta DCA .

126. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wykaż, że $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|AC|^2$.
127. Wyraż pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.
128. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$
129. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS .
130. W trójkącie ABC środkowa AD jest prostopadła do boku AC . Kąt BAC ma miarę 120° . Wykaż, że $|AB| = 2|AC|$.
131. Kąty ostre trójkąta ABC o polu S mają miary $|\angle A| = \alpha, |\angle B| = \beta$. Oblicz długości boków AB i BC tego trójkąta.
132. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą k prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej k . Oblicz stosunek pól tych kół.
133. Na okręgu o środku S wybrano punkty A, B, C i D w ten sposób, że prosta AB zawiera punkt S , a proste AD i BC przecinają się w punkcie E . Punkt M jest punktem wspólnym prostych AC i BD . Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.
134. W trapezie równoramiennym, którego podstawy mają długość a i b ($b > a$), kąt ostry ma miarę α , połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.
135. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ADF, BED i CFE przecinają się w jednym punkcie.
136. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9.
137. Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 1, w którym kąt BAD jest ostry i $\sin \angle BAD = \frac{1}{7}$. Na bokach AB, AD i BC wybrano odpowiednio punkty K, L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Oblicz pole czworokąta $CDLM$. Oblicz największą możliwą wartość pola trójkąta KLM .
138. W okręgu o promieniu 6 średnice AB i CD przecinają się pod kątem 45° . Na okręgu tym wybrano punkt E oraz skonstruowano jego rzuty P i Q odpowiednio na średnice AB i CD . Oblicz długość odcinka PQ .
139. Na okręgu wybrano takich pięć różnych punktów: A, A_1, A_2, A_3, A_4 , że $|\angle A_1 A A_2| = |\angle A_2 A A_3| = |\angle A_3 A A_4| = 45^\circ$. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami kwadratu.
140. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.
141. Uzasadnij, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cot 30^\circ + \sqrt{2}}$ W równoległoboku $ABCD$ dane są miary kątów $|\angle ABD| = 30^\circ$ i $|\angle CAB| = 15^\circ$. Oblicz miarę kąta DAC .
142. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = b$ i $|AB| = a$. Punkty M i N są rzutami prostopadłymi środka podstawy AB trójkąta na ramiona BC i AC . Wyraż pole czworokąta $ABMN$ za pomocą a i b .
143. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $|BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D w ten sposób, że $|\angle CBD| = |\angle BAC| = \alpha$ oraz $|AD| = \frac{69}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
144. Na zewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty – jeden na przyprostokątnej, a drugi na przeciwprostokątnej. Wykaż, że przeciwprostokątna dzieli odcinek łączący środki kwadratów na dwie równe części.
145. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt S , którego odległości od ramion

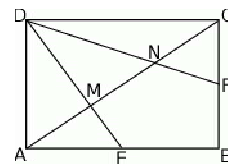


kąta są równe α i β . Oblicz odległość punktu S od wierzchołka kąta.

146. Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α , a z ramieniem kąt α . Wykaż, że stosunek pól trójkątów, na które został podzielony trapez tą przekątną, jest równy

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}.$$

147. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek D połączono odcinkami ze środkami E i F boków AB i BC , zaś M i N to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną AC . Uzasadnij, że odcinki AM , MN i NC są jednakowej długości. Uzasadnij, że trójkąty AEM i CNF mają równe pola.



148. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $\angle DAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

149. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta leżącymi na przeciwko odpowiednio kątów o miarach $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ to $a \leq b \leq c$.

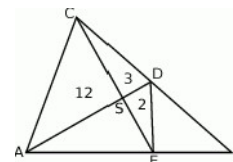
150. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 9$, $|AD| = 3\sqrt{7}$, na przekątnej AC wybrano taki punkt E , że $|AE| : |EC| = 2 : 1$. Oblicz sinus kąta $\angle EBC$.

151. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta to $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

152. Wyznacz długość przeciwprostokątnej oraz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

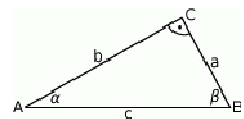
153. Oblicz pole rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD odpowiednio są równe R_1 i R_2 .

154. Trójkąt podzielono odcinkami AD , CE i DE na 5 trójkątów, przy czym $|AE| : |EB| = 2 : 1$. Korzystając z podanych pól trzech z tych trójkątów, wyznacz pole trójkąta DEB .



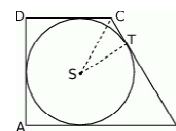
155. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3:5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

156. Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.



157. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

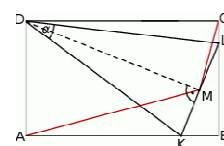
158. W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg, przy czym punkt S jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem BC . Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|SC| = 10$ i $|BT| = 8\sqrt{5}$.



159. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

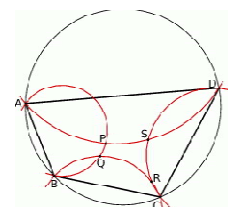
160. Styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie E . Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta A z prostą BC . Udowodnić, że $AE = ED$.

161. Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K i L w ten sposób, że trójkąt DKL jest ostrokątny oraz $\angle KDL = \alpha$. Odcinek DM jest wysokością trójkąta DKL . Wykaż, że $\angle AMC = 90^\circ + \alpha$.



162. Podstawy trapezu mają długości 9 i 12. Oblicz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu.

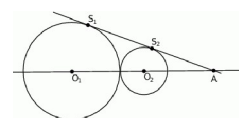
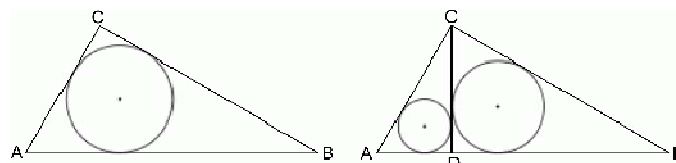
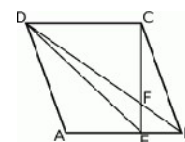
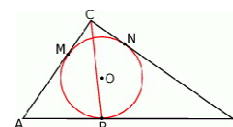
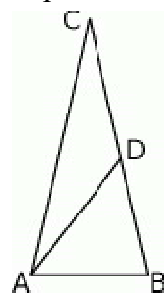
163. Na okręgu o danym promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ do dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności K dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD .



164. Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty P, Q, R, S , w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.

165. W trójkąt równoboczny wpisane są 3 koła o równych promieniach, przy czym każde koło jest styczne do dwóch boków trójkąta oraz do dwóch pozostałych kół. Oblicz stosunek sumy pól tych kół do pola trójkąta.

166. W trójkącie ABC , o bokach długości a, b, c , połączono odcinkiem wierzchołek A z punktem E na boku BC takim, że $BE = p$ i $EC = q$. Uzasadnij, że jeżeli $d = AE$, to $a(d^2 + pq) = b^2p + c^2q$ (twierdzenie Stewarta).
167. Punkt F jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt E jest takim punktem boku AB tego prostokąta, że prosta CF jest dwusieczną kąta DCE . Wykaż, że trójkąt CFE jest prostokątny.
168. Uzasadnij, że trójkąt równoboczny nie jest figurą środkowosymetryczną.
169. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
170. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.
171. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkty M, N, P są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC, BC oraz AB . Przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, a długości przyprostokątnych pozostają w stosunku $|AC| : |BC| = 3 : 4$. Oblicz obwód trójkąta PBC .
172. Kąty w trójkącie mają miary: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha$. Wykaż, że długości boków a, b, c tego trójkąta spełniają równość: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.
173. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
174. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta prostego przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D . Środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek AD w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od punktu A . Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .
175. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt $\angle APB$ jest prosty.
176. Przekątna BD rombu $ABCD$ przecina jego wysokość CE , poprowadzoną na bok AB , w punkcie F . Oblicz pole rombu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|DE| = \sqrt{313}$ oraz $\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{13}{5}$.
177. W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha < 90^\circ$.
178. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta < \alpha$. Wykaż, że tangens kąta utworzonego przez środkową i wysokość opuszczone z wierzchołka C jest równy $\frac{1}{2 \tan \beta} - \frac{1}{2 \tan \alpha}$.
179. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle C = 90^\circ$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD . Wykaż, że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC .
180. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D . Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz długość odcinka BD .
181. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny, którego długość jednej z podstaw wynosi $4r$. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołków trapezu.
182. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $0,4$.
183. W trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.
184. W trójkącie $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Wykaż, że w tym trójkącie $\gamma = 2\alpha$.
185. Dane są 2 koła styczne zewnętrznie o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach O_1 i O_2 . Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych okręgów w punktach S_1 i S_2 odpowiednio ($S_1 \neq S_2$). Oblicz pole trójkąta AO_1S_1 , gdzie A jest punktem przecięcia się prostych S_1S_2 i O_1O_2 .
186. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta $\angle CAD$ i znajdź stosunek promieni okręgów

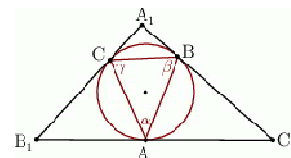


opisanych na trójkątach ACD i ABD .

187. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz długość odcinka KL .

188. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A, B, C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

189. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów $\angle CAM$ i $\angle MAB$.



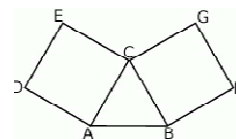
190. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.

191. Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin \alpha = 2 \cos \gamma \sin \beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

192. W trójkącie ostrokatnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

193. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Wykaż, że punkty A, E i F są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

194. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F . Wykaż, że jeżeli okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF są styczne, to punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie CED .

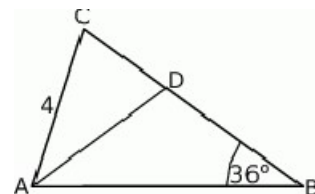


195. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta, która jest odległa o d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległość środków tych okręgów.

196. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

197. Znaleźć pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4. Jakie pole ma koło opisane na tym kwadracie?

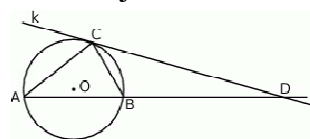
198. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC dane są: $|AC| = 4$ oraz $|\angle ABC| = 36^\circ$. Odcinek AD jest odcinkiem dwusiecznej kąta BAC (zobacz rysunek).



199. Oblicz długość odcinka CD .

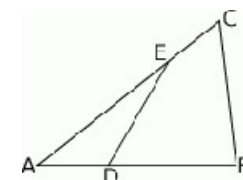
200. Na trójkącie ABC , w którym $|AB| = 8, |BC| = 5, |AC| = 7$ opisano okrąg o środku O . Następnie poprowadzono styczną k do okręgu w punkcie C , która w punkcie D przecięła prostą zawierającą bok AB (jak na rysunku poniżej). Oblicz odległość punktu D od wierzchołka B , jeżeli

wiadomo, że $|OD| = \frac{14\sqrt{7}}{3}$.



201. Na bokach AB i AC trójkąta ABC , który nie jest równoramienny, wybrano takie punkty D i E , że $|AD| : |DB| = 1 : k$ oraz $|AE| : |EC| = k : 1$, dla $k \in (0, +\infty)$. Wyznacz wzór funkcji $f(k)$, która jest zdefiniowana jako

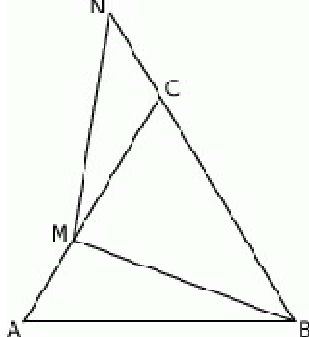
stosunek pól trójkątów ADE i ABC . Wiedząc że $\frac{|AB|}{|AC|} = m$, dla $m \in (0, 1)$ wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których trójkąty ADE i ABC są podobne.



202. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|BC| = 28, |CA| = 21$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe 126. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie BCD .

203. Pole trapezu jest równe P , a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.

204. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, przekątnej 17 cm a ramienia 10 cm. Oblicz jego pole.



205. Dany jest trapez opisany na okręgu, którego kąty przy jednej podstawie są ostre, oraz którego pole jest równe 168. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów jeżeli ramiona trapezu mają długości 13 i 15.

206. Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM| : |AL| = 4 : 1$.

207. Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM .

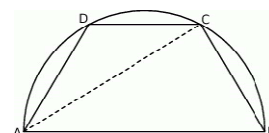
208. Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na tych trójkątach.

209. Wyznacz $\sin \angle LKA$.

210. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60° , wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

211. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną MN , przy czym punkt M należy do pierwszego, a punkt N do drugiego okręgu. Wykaż, że prosta AB dzieli odcinek MN na połowy.

212. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są odpowiednio równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.

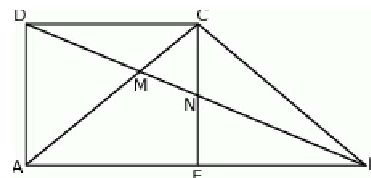


213. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a . Oblicz długość przekątnej trapezu.

214. W trójkąt równoramienny o ramieniu 10 i podstawie 12 wpisano prostokąt o stosunku boków 1:4 w ten sposób, że krótszy bok jest zawarty w podstawie trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

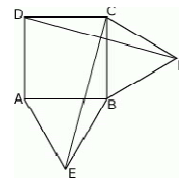
215. Kąty ostre trapezu opisanego na okręgu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

216. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



217. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

218. Punkt M jest punktem wspólnym przekątnych trapezu prostokątnego $ABCD$. Punkt N jest punktem wspólnym przekątnej BD i wysokości CE opuszczonej na dłuższą podstawę AB . Wykaż, że $|DM|^2 = |MN| \cdot |MB|$.



219. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC . Uzasadnij, że proste DF i CE są prostopadłe.

220. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych trapezu leży na prostej przechodzącej przez środki jego podstaw.