

Zadanie 1

Wyznaczyć współczynniki równania

$$(1) \quad x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

w taki sposób, żeby pierwiastkami tego równania były liczby a, b, c .

Zadanie 2

Zbadać, czy równanie

$$(1) \quad \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

gdzie a, b, c oznaczają dane liczby rzeczywiste, ma pierwiastki rzeczywiste.

ZROBIĆ

Zadanie 4. Wyznacz resztę z dzielenia $f(x^n)$ przez $f(x)$ jeśli

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

Zadanie 5. (XXXIX Olimpiada Matematyczna).

Niech $f(x)$ będzie wielomianem, n - liczbą naturalną. Udowodnij, że jeżeli $f(x^n)$ dzieli się przez $x - 1$, to dzieli się również przez

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

Zadanie 6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunki

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n. \text{ Wyznacz } P(n+1).$$

Zadanie 7. Dane są liczby naturalne k i p oraz wielomian $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli $p+1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k)$,

$f(k+1), \dots, f(k+p)$, to wielomian $f(x)$ nie posiada pierwiastków wymiernych.

☆ 4.21. Rozwiąż nierówność: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \dots + \frac{1}{x^{13}} < \frac{7}{x}$.

☆ 4.22. Dla jakich a i b funkcja $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$ jest w swojej dziedzinie funkcją stałą?

★ 4.23. Udowodnij, że jeżeli $x > 1$, to $\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}{x - \frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{3}$.

★ 4.24. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera, parami różne i spełniają warunek $a + b + c = 0$. Udowodnij, że:

$$\left(\frac{a-b}{c^2} + \frac{b-c}{a^2} + \frac{c-a}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a-b} + \frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a} \right) = 4abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^3.$$

★ 4.25. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji:

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)} \quad \text{dla } x > 0.$$

ZROBIĆ

Zadanie 29.

Dane są funkcje $f(k) = k^3$ oraz $g(k) = 2 \cdot f(k) - f(k-2)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$. Wyznacz wartości k , dla których $g(k) = 80$.

Zadanie 30.

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 6$ osiąga najmniejszą wartość równą -22 dla argumentu 4 . Liczba -3 jest jednym z rozwiązań równania $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$. Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania.

Zadanie 31.

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + (1-m)x + m + 3$ osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego wartość najmniejszą osiąga funkcja kwadratowa $g(x) = -(m+1)x^2 + (2m-2)x - 4m$. Uzasadnij, że dla dowolnej wartości argumentu prawdziwa jest nierówność $f(x) \leq g(x)$.