2.111. Wiedząc, że:

$5 \in \mathbb{P}$

d) $\log_5 4 = a$ i $\log_5 27 = b$, oblicz $\boxed{\log_5 6}$

$\log_5 6 = \log_5 (2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$

$\log_5 4 = a$

$\log_5 4 = \log_5 2^2 = 2\log_5 2 = a$

$\log_5 2 = \frac{1}{2}a$

$\log_5 27 = b = \log_5 3^3 = 3\log_5 3 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3}b$

2.112. Wykaż, że:

a) $\log_6^2 2 + \log_6 4 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3 = 1$ b) $\log_5^2 10 - \log_5 10 \cdot \log_5 4 + \log_5^2 2 = 1$

e) $36^{\log_6 5 - \frac{1}{4}}$ f) $27^{\log_3 2 - \frac{1}{3}}$ g) $3^{2+\log_3 4}$ h) $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}$

1.102. Wykaż, że liczba:

a) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$ b) $\sqrt{10^{2+0,5\log 16}}$

c) $\log_{125} 3 \cdot \log_{\sqrt[3]{6}} 36 \cdot \log_9 5$ d) $\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \cdot \log \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \log \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

jest liczbą naturalną.

1.103. Wykaż, że liczby m i n są równe, jeśli:

$m = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}}$ i $n = \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

1.102a)

$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} \overset{(1)}{=} \log_6 2 + \log_6 3 \overset{(1)}{=} \log_6 6 = 1$

b) $\sqrt{10^{2+0,5\log 16}} = \left(10^{2+\frac{1}{2}\log 2^4}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}(2+2\log 2)} =$

$10^{1+\log 2} = 10 \cdot 10^{\log 2} = 10 \cdot 2 = 20$

$10^{\log_{10} 2} \overset{(8)}{=} 2$

sp II

$10^{\log 10 + \log 2} = 10^{\log 20} = 20$

9) $\log_a a = 1$

10) $\log_a 1 = 0$

1.103. Wykaż, że liczby m i n są równe, jeśli:

$m = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}}$ i $n = \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

$\left(\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{125}} = 5^{5^{-3}}$

$m = \log_5 \underbrace{\log_5 5^{5^{-3}}} = \log_5\left(5^{-3} \cdot \underbrace{\log_5 5}_{1}\right) = \log_5 5^{-3} =$

$-3 \cdot \log_5 5 = \boxed{-3 = m}$

$n = \log_2 \log_2 \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \underbrace{\log_2 2^{\frac{1}{8}}}_{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 = m$

$n = m$ cnd

c) $\log_3 7 = a$, oblicz $\log_7 5\frac{4}{9}$ $= \log_7 \frac{49}{9} = \log_7 49 - \log_7 9 = 2 - 2\log_7 3$

$= 2 - 2 \cdot \frac{1}{\log_3 7} = 2 - \frac{2}{a}$