

Zadanie 18. (0-5)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym długość krawędzi podstawy jest równa 8, a długość krawędzi bocznej 6. Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \beta$, gdzie α jest miarą kąta między ścianami, a β miarą kąta między ścianą i podstawą ostrosłupa.

$$h_s = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\cos \beta = \frac{h_s}{SC} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$H = \sqrt{36 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{35}$$

Zadanie 12. (0-3)

Miara kąta ostrego rombu jest równa 30° . Wykaż, że długość boku rombu jest równa średniej geometrycznej długości jego przekątnych.

$$P = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \frac{1}{2}$$



Zadanie 2. (0–1)

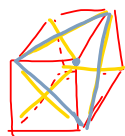
Wartość wyrażenia $\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 4. (0-1)

Liczba przekrojów sześcienną płaszczyzną zawierającą cztery wierzchołki tego sześciennu jest równa

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12



Zadanie 6. (0-3)

Rozwiązaniem nierówności $x + a \leq \sqrt{3}x - 1$ jest przedział $(2 + \sqrt{3}, \infty)$. Wyznacz a i zapisz wynik podając trzy pierwsze cyfry po przecinku jego rozwinięcia dziesiętnego.

$$\begin{aligned}
 x + a - \sqrt{3}x + 1 &\leq 0 \\
 x(1 - \sqrt{3}) &\leq -1 - a \\
 x &\geq \frac{-1-a}{1-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \\
 a + 1 &\leq x(\sqrt{3} - 1) = x(\sqrt{3} - 1) \\
 x &\geq \frac{a+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} \\
 a + 1 &= (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) \\
 a &=
 \end{aligned}$$

Zadanie 7. (0-2)

Ze zbioru liczb $1, 2, 3, \dots, 80$ losujemy bez zwracania trzy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: ostatnia z wylosowanych liczb jest parzysta, jeśli pierwsza wylosowana była nieparzysta. Wynik przybliż z dokładnością 10^{-2} i zapisz wszystkie jego cyfry.

Ω - los 3 z 80 par nie par. los.

$$\bar{\Omega} = 80 \cdot 79 \cdot 78$$

A - ostatni par

B - nie par i ostatni par

A and B - nie par i ostatni par

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 40}{40 \cdot 78 \cdot 79}$$

$$P(A/B) = \frac{A \cap B}{B} = \frac{40 \cdot 39}{78 \cdot 79}$$

Zadanie 15. (0-4)

W trójkącie ABC punkt M jest środkiem odcinka BC . Długość boku AB jest równa 4, długość boku AC jest równa 8 i długość odcinka AM wynosi 3. Oblicz długość boku BC tego trójkąta.

$$\begin{aligned}
 \triangle AMC &\Rightarrow 8^2 = x^2 + 9 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos \alpha \\
 \triangle ABM &\Rightarrow 4^2 = x^2 + 9 + 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos \alpha \\
 \frac{64}{60} &= \frac{64 - 12x \cos \alpha}{60 + 12x \cos \alpha} \\
 64 &= 60 - 12x \cos \alpha \\
 4 &= -12x \cos \alpha \\
 x &= \sqrt{31} \\
 BC &= 2\sqrt{31}
 \end{aligned}$$

Zadanie 19. (0-6)

Środek wszystkich prostokątów symetrycznych względem osi y , których dwa wierzchołki należą do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 4$, a dwa do osi x , wyznacza wierzchołki prostokąta o największym polu. Oblicz pole tego prostokąta.

$$NAD \text{ osią } OX$$

Zadanie 17. (0-4)

W graniastopie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej o długości 6 cm tworzy z przekątną podstawy kąt o miarze α . Oblicz objętość tego graniastopu.

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{36 - \frac{1}{4} \cdot 6^2} = \sqrt{36 - \frac{1}{4} \cdot 36} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \\
 \alpha &= 60^\circ \\
 V &= \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Zadanie 13. (0-3)

Oblicz wartość wyrażenia $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ i $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha - \sin \alpha) \left(\frac{\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \sin^3 \alpha}{1 + \cos \alpha \sin \alpha} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha \sin \alpha} \end{aligned}$$

Zadanie 12. (0-3)

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $f(x) = |\log_2 x| - 1$ przyjmuje wartości dodatnie.

$$\begin{aligned} \log_2 x > 1 & \vee \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > \log_2 2 & \vee \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x > 2$$

$$|\log_2 x| > 1$$

$$x > 0$$

$$1 > \alpha$$

$$y > \alpha \vee y < -\alpha$$

