

TEORIA**Wyrażenia algebraiczne**

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą lub iloczynem liczb zapisanych cyframi lub literami, np.: 7, -3, 5a, $7x^2y^3$, x^5 .

Sumą algebraiczną nazywamy jednomiany połączone znakiem „+” lub „-”.

Jednomiany występujące w sumie algebraicznej nazywają się wyrazami tej sumy.

Wyrazy podobne to takie wyrazy, które różnią się tylko współczynnikiem liczbowym.

Zredukować wyrazy podobne, to znaczy wykonać na nich wskazane działania.

Jeśli do danego wyrażenia algebraicznego w miejsce liter wstawimy określone liczby i wykonamy wskazane działania, to otrzymamy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.

Wzory skróconego mnożenia to reguły pozwalające uprościć działania na liczbach, sumach algebraicznych i elementach, dla których obowiązują prawa przemienności, łączności i prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Oto wybrane wzory skróconego mnożenia:

różnica kwadratów	$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
kwadrat sumy	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
kwadrat różnicy	$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
różnica sześcianów	$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
suma sześcianów	$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
sześcian sumy	$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
sześcian różnicy	$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{-kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{-kwadrat różnicy}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{-różnica kwadratów}$$

1.34. Przedstaw w postaci sumy:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $(a+b)^2 + (a-b)^2$, | f) $(2x-3)^2 + (3x-4)^2$, |
| b) $(a+b)^2 - (a-b)^2$, | g) $(x-3)^2 - (2x-4)^2$, |
| c) $(a+b)^2 + (a+b)(a-b)$, | h) $(2x+4)^2 + (x-4)^2$, |
| d) $(a-b)^2 - (a-b)(a+b)$, | i) $(4x-1)^2 - (4x+1)^2$, |
| e) $(x-2)^2 - (x-1)^2$, | j) $(2x+3y)^2 - (4x-y)^2$. |

1.32. Przedstaw w postaci sumy korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

- | | |
|------------------|---|
| a) $(2a+b)^2$, | e) $(x^2-x)^2$, |
| b) $(3a-b)^2$, | f) $(2x^2+3x)^2$, |
| c) $(2a+3b)^2$, | g) $(3a+5b)^2$, |
| d) $(x-1)^2$, | h) $\left(4x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2$. |

1.33. Wykaż prawdziwość wzoru:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

i korzystając z niego wykonaj mnożenie:

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $(x+2)(x-2)$, | d) $(x+1)(x-1)(x^2-1)$, |
| b) $(2x+3)(2x-3)$, | e) $(3x-5y)(3x+5y)$, |
| c) $(x^2+1)(x^2-1)$, | f) $(3x+2)(3x-2)$. |

ROZKŁADANIE NA CZYNNIKI

wyłączyć wspólny czynnik przed nawias:

$$ax+bx=x(a+b)$$

$$ax-bx=x(a-b)$$

- 5.3. Rozłóż na czynniki wylaczając wspólny czynnik poza nawias:**
- | | |
|------------------|----------------------|
| a) $2a+a^2$, | e) $6x-3y+9z$, |
| b) a^2b+ab^2 , | f) $8xy-6x^2+2x$, |
| c) $4x^2+x$, | g) $12x^3-6x^2+3x$, |
| d) a^3-a^2 , | h) $-21x^5-35x^2$. |
- 5.4. Rozłóż na czynniki wylaczając wspólny czynnik poza nawias:**
- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| a) $24a^2-32a+60$, | e) $36a^2b-45ab^2-9ab$, |
| b) $a^2+ab+ac$, | f) $x^2yz-xy^2z+xyz^2$, |
| c) $a^3b+a^2b^2+ab^3$, | g) $x^5+x^4-x^3+x^2$, |
| d) $4x^5-6x^4-8x^3$, | h) $25a^2b^3+50a^3b^4+75a^4b^2$. |

rozłożyć na czynniki tzn. zapisać sumę w postaci mnożenia popgrupowanych wyrażen np.

ax+bx+ay+by=x(a+b) +y(a+b)=(a+b)(x+y)

- d) $4x^2 - 6x - 9x = -5x$
- 5.5. Rozłóż na czynniki wylaczajac wspólny czynnik poza nawias:

a) $(a+b)x - (a+b)y,$

b) $(a-3b)x + (a-3b)y,$

c) $x(a+b) + (a+b),$

d) $x(a-b) - (b-a),$

e) $a(x-2y) + b(2y-x),$

f) $a(b+c) - b(-b-c).$

5.6. Rozłóż na czynniki grupujac odpowiednio wyrazy:

a) $x^2 + xy + x + y,$

b) $xy + x - y - 1,$

c) $a^2 + 3ab + a + 3b,$

d) $6ax - 4ay + 9bx - 6by,$

e) $ax + 2 + 2x + a,$

f) $3ax + 2b - 2bx - 3a.$

5.7. Rozłóż na czynniki stosujac odpowiednie wzory:

a) $a^2 - 2ab + b^2,$

b) $x^2 + 2x + 1,$

c) $x^4 + 2x^2 + 1,$

d) $4x^2 - 12xy + 9y^2,$

e) $a^2 + 4b^2 - 4ab,$

f) $x^2 + y^2 - 2xy,$

g) $a^6 + 2a^3 + 1,$

h) $x^2y^2 + 2xy + 1.$

5.8. Rozłóż na czynniki:

a) $2x^2 - 4xy + 2y^2,$

b) $12a^2 - 12ab + 3b^2,$

c) $x - x^2 + x^3 - x^4,$

d) $x^3 + x^2y - x^2z - xyz,$

e) $(x-y)^2 - 1,$

f) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + 1.$

(ax+b)- czynnik stopnia pierwszego bo x nie ma zapisanej potęgi tzn. jest do potęgi pierwszej- jeden x

(ax²+b)- dwumian stopnia drugiego bo x jest do potęgi drugiej i są dwa składniki dodawania, których nie da się dodać,

(ax²+bx+c)- trójmian stopnia drugiego bo x jest do potęgi drugiej i są trzy składniki dodawania, których nie da się dodać,

(ax²+bx)- dwumian stopnia drugiego, który można rozłożyć na X(ax+b) czyli na iloczyn czynników stopnia drugiego.

10. Przedstaw daną sumę w postaci iloczynu, w którym każdy czynnik jest sumą stopnia pierwszego. Czy zadanie ma w każdym przypadku rozwiązanie?

a) $2x^3 - 2x,$

b) $x^4 + x - 1 - x^2,$

c) $x^4 - 2x^2 + 1,$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8.$

a) $W(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

b) $W(x) = 5x^4 - 4x^2 - 5x + 4$

c) $W(x) = 16x^2 + 16x^2 - 4x - 4$

d) $W(x) = 18x^2 + 9x^2 - 18x - 9$

e) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 - 27x + 63$

f) $W(x) = 10x^4 + 15x^2 + 8x + 12$

g) $W(x) = -4x^3 + 2x^2 - 6x + 3$

h) $W(x) = -12x^3 - 32x^2 + 3x + 8$

a) $W(x) = x^4 + 3x^3 - x - 2$

b) $W(x) = 8x^2 + 24x^2 + x + 3$

c) $W(x) = x^4 - x^3 - 27x + 27$

d) $W(x) = 125x^4 - 125x^2 - 8x + 8$

a) $W(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 1$

b) $W(x) = 8x^3 - 32x^2 - x^2 + 4$

c) $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 16x^2 - 24$

d) $W(x) = x^3 - x^2 - 125x^2 + 125$

np:

c) $W(x) = 2x^5 + 3x^3 - 16x^2 - 24 = x^3(2x^2+3)-8(2x^2+3) = (2x^2+3)(x^3-8)$

a) $W(x) = 4x^2 - 9$

b) $W(x) = 9x^2 - 30x + 25$

c) $W(x) = -25x^2 - 20x - 4$

d) $W(x) = (x^2 - 8x + 16) - (4x^2 + 4x + 1)$

e) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1) - (4x^2 + 20x + 25)$

TEORIA

Działania arytmetyczne

Dodawanie $a + b = s$, gdzie a, b - składniki, s - suma

$a + (b + c) = (a + b) + c$ Jeżeli $a < 0$ i $b < 0$, to $a + b < 0$.

$a + b = b + a$ Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to $a + b > 0$.

$a + 0 = 0 + a = a$

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

Odejmowanie $a - b = r$, gdzie a - odjemna, b - odjemnik, r - różnica

$a - b = r \Leftrightarrow r + b = a$ $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$

$a - b = a - (-b)$ $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$

$0 - a = -a$ $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$

Mnożenie $a \cdot b = i$, gdzie a, b - czynniki, i - iloczyn

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ lub $b = 0$ $a(bc) = (ab)c$

$a < 0 \Leftrightarrow a < 0$ i $b > 0$ lub $a > 0$ i $b < 0$ $ab = ba$

$a > 0 \Leftrightarrow a < 0$ i $b < 0$ lub $a > 0$ i $b > 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $-(-a) = a$

$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$ $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

$(-a)(-b) = ab$

$(a+b)c = ac + bc$

Dzielenie $a : b = q$, gdzie a - dzielna, b - dzielnik, q - iloraz

Jeżeli $b \neq 0$, to $a : b = q \Leftrightarrow b \cdot q = a$.

$a : b = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

Jeżeli $b \neq 0$ i $a = 0$, to $\frac{a}{b} = 0$.

Dzielenie przez zero jest niewykonalne.

Kolejność działań arytmetycznych

Przy obliczaniu wartości wyrażeń niezawierających nawiasów wykonujemy najpierw mnożenia i dzielenia w kolejności ich występowania, a następnie dodawania i odejmowania w kolejności ich występowania.

Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych.

Zbiór liczb naturalnych $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Jeżeli dla liczb naturalnych dodatnich w, d, n zachodzi równość $w = d \cdot n$, to liczbę d nazywamy dzielnikiem liczby w , natomiast w jest wielokrotnością liczby d . Liczbę d i n nazywamy też czynnikami liczby w .

Mówimy też, że liczba w jest podzielna przez d .

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę naturalną większą od jedności, która ma dokładnie dwa dzielniki (jeden i siebie samą).

Liczbą złożoną nazywamy liczbę naturalną większą od jedności niebędącą liczbą pierwszą.

Liczby 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Każda liczba naturalna większa od 2 albo jest liczbą pierwszą, albo można ją przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki iloczyn nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Ten rozkład jest jednoznaczny.

Jeżeli a, b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich największym wspólnym dzielnikiem (NWD(a, b)) nazywamy największą z liczb naturalnych, przez którą dzieli się bez reszty każda z liczb a, b .

Liczby naturalne a, b nazywamy względnie pierwszymi, jeśli NWD(a, b) = 1.

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWD(224, 1890) = 2 \cdot 7 = 14$	Rozkładamy liczby a, b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy czynniki wspólne i mnożymy je. Otrzymamy iloczyn to NWD(a, b).

Jeżeli a, b są liczbami naturalnymi dodatnimi, to ich najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW(a, b)) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, która dzieli się bez reszty przez a i przez b .

Przykład	Opis
$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $NWW(224, 1890) = 2^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^3 = 30\,240$	Rozkładamy liczby a, b na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy wszystkie czynniki jednej liczby i dopisujemy do nich te czynniki z rozkładu drugiej liczby, których nie było w rozkładzie pierwszej. Iloczyn tak wybranych czynników to NWW(a, b).

Cechy podzielności przez niektóre liczby

Dzielnik	Przykład	Cechy podzielności
2	76 548 = 2 · 38 274	Ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.
3	571 215 = 3 · 190 405	Suma cyfr dzieli się przez 3.
5	5 + 7 + 1 + 2 + 1 + 5 = 21 = 3 · 7	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 4.
4	1 547 584 964 = 4 · 386 896 241	Ostatnią cyfrą jest 0 albo 5.
6	64 = 4 · 16	
5	67 334 215 = 5 · 13 466 843	

2

7	164 207 393 = 7 · 23 458 199 1993 + 164 = 207 = 350 + 7 = 50	Zaczynając od prawej strony, łączymy kolejno cyfry w grupy trzycyfrowe. Od sumy liczb utworzonych z grup stojących na miejscach nieparzystych odejmujemy sumę liczb z grup stojących na miejscach parzystych. Jeżeli różnica dała się podzielić przez 7 (13), to badana liczba też dzieli się przez 7 (13).
13	7 636 876 405 = 13 · 587 452 185 (405 + 686) · (876 + 7) = = 1091 · 883 = 160 = 13 · 12	Liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr dzieli się przez 6.
8	4 502 744 = 8 · 562 865 744 = 8 · 93	Suma cyfr dała się przez 9.
9	51 118 884 = 9 · 5 679 876 5 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8 + 8 + 4 = 36	Ostatnia cyfra jest zerem.
10	2 798 800 = 10 · 279 880	Różnica między sumą cyfr stojących na miejscach parzystych i sumą cyfr stojących na miejscach nieparzystych jest liczbą podzieloną przez 11.
11	5 779 581 = 11 · 524 877 (8 + 3 + 7) - (1 + 5 + 7 + 5) = = 18 - 18 = 0 = 11 · 0	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr dała się przez 25.
25	76 508 475 = 25 · 3 060 339 75 = 25 · 3	

Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{C} = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$
Dla dowolnych liczb całkowitych w i d ($d > 0$) istnieje takie liczby całkowite n i r , że $w = nd + r$, $r < d$.
Liczby r nazywamy resztą z dzielenia liczby w przez d .
Liczby całkowite podzielne przez dwa nazywamy liczbami parzystymi, zaś niepodzielne przez dwa nazywamy liczbami nieparzystymi.

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{W}$
Liczby wymierne nazywamy liczy, które można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.
Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne, okresowe lub skończone.

Działania na ułamkach
Niech a i b będą dowolnymi liczbami całkowitymi i $b \neq 0$, wtedy $a : b = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad c \neq 0$$

Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{N}\mathbb{W}$
Liczby niewymierne nazywamy liczy, których nie można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, q jest liczbą całkowitą różną od zera.
Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie dziesiętne, które jest nieskończone i nieregularne.
Przykłady liczb niewymiernych: $\sqrt{2}$, π , e , $0,101001000100001\dots$

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$
Liczby wymierne i liczby niewymierne razem tworzą zbiór liczb rzeczywistych.

Własności równości w zbiorze $\mathbb{R}$

$a = a$ a, b, c - dowolne liczby rzeczywiste

Jeżeli $a = b$, to $b = a$. Jeżeli $a = b$ i $b = c$, to $a = c$.

Jeżeli $a = b$, to $a + c = b + c$. Jeżeli $a = b$ i $c = d$, to $a + c = b + d$.

Jeżeli $c \neq 0$, to $\left(a = b \Leftrightarrow ac = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \right)$.

Własności nierówności w zbiorze $\mathbb{R}$

Jeżeli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$. a, b, c - dowolne liczby rzeczywiste

Jeżeli $a < b$, to $a + c < b + c$. Jeżeli $a < b$, to $a - c < b - c$.

Jeżeli $c > 0$, to $\left(a < b \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \right)$.

Jeżeli $c < 0$, to $\left(a < b \Leftrightarrow ac > bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \right)$.

Jeżeli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem: $|x| = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -x, & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$
Dla dowolnych liczb x, y :

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad |x - y| = |y - x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \text{Dla } y \neq 0 \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$

Dla $r \geq 0$ $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ lub $x = -r$,
czyli liczba r jest na osi liczbowej odległością punktu x od punktu 0.
 $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r, \quad |x| > r \Leftrightarrow x < -r$ lub $x > r$

Dla dowolnej liczby a i dla $r \geq 0$ $|x - a| = r \Leftrightarrow x = a - r$ lub $x = a + r$,
czyli r jest na osi liczbowej odległością punktu x od punktu a .
 $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r, \quad |x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

Działania na potęgach o wykładniku wymiernym

Niech m i n będą dowolnymi liczbami wymiernymi, $a > 0$ i $b > 0$.
Iloczyn potęg o tej samej podstawie $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Iloraz potęg o tej samej podstawie $a^m : a^n = a^{m-n}$

Potęga potęgi $(a^n)^m = a^{nm}$

Potęga iloczynu $(ab)^n = a^n b^n$

Potęga ilorazu $\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

potęga ilorazu o wykładniku ujemnym

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

Działania na pierwiastkach arytmetycznych

Niech n, m będą liczbami naturalnymi większymi od 1.

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a \geq 0$ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$

$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}, \quad a \geq 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0 \text{ i } b > 0$

Pierwiastki kwadratowe

$(\sqrt{a})^2 = a$ dla $a \geq 0$ $\sqrt{a^2} = |a|$ dla dowolnego a

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ dla $a > 0$ $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$ dla $a \neq b$

$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}} + \sqrt[n]{\frac{a-b}{2}}, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad \text{dla } a^2 - b^2 = c^2$

Skracanie wyrażień wymiernych
Wyrażenia, które mamy skrócić

$\frac{35}{42}$	$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$
-----------------	--------------------------------

Mianowniki i liczniki rozkładamy na czynniki

$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7}$	$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$
---	------------------------------

Ustalamy dzielnik wyrażenia

Dzielimy licznik i mianownik przez wspólny dzielnik licznika i mianownika

$\frac{5}{7}$	$\frac{x-3}{x+3}$
---------------	-------------------

Mnożenie wyrażień wymiernych
Wyrażenia, które mamy pomnożyć

$\frac{16}{125} \cdot \frac{75}{64}$	$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$
--------------------------------------	--

Mianowniki i liczniki rozkładamy na czynniki

$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}$
---	---

Ustalamy dzielnik wyrażenia

Prześmy liczniki jako jeden ułamek

$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+5)(x-3)(x+3)}{x(x-3)(x+5)}$
---	--

Skracamy przez wspólne czynniki licznika i mianownika, a ile zostało

$\frac{3}{5 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{(x-5)(x+3)}{x \cdot x}$
-------------------------------	--------------------------------

Możemy wykonać zamnaczone mnożenie

$\frac{3}{20}$	$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2}$
----------------	-----------------------------

Dzielenie wyrażień wymiernych
Wyrażenia, które mamy podzielić

$\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{15}$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x} : \frac{2x(x+1)}{2x^2 + 4x}$
-----------------------------------	---

Mianowniki i liczniki rozkładamy na czynniki

$\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$	$\frac{x(x-2)}{x(x+2)} : \frac{2x(x+1)}{2x(x+2)}$
---	---

Ustalamy dzielnik wyrażenia

Mnożymy wyrażenie, które jest dzieląc, przez odwrotność dzielnika

$\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{x(x-2)}{x(x+2)} \cdot \frac{2x(x+2)}{2x(x+1)}$
---	---

Uspiechamy nałożenia o nowe dzielniki, o ile się pojawiają

$\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{5}{2 \cdot 2}$	$\frac{x-2}{1} \cdot \frac{1}{(x+1)}$
---	---------------------------------------

Skracamy przez wspólne czynniki licznika i mianownika, a ile zostało

$\frac{3}{16}$	$\frac{x-2}{x+1}$
----------------	-------------------

Możemy wykonać zamnaczone mnożenie

Sprowadzanie wyrażień wymiernych do wspólnego mianownika
Wyrażenia, które mamy sprowadzić do wspólnego mianownika

$\frac{7}{12} - \frac{11}{34}$	$\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x^2-4}$
--------------------------------	------------------------------------

Mianowniki rozkładamy na czynniki

$\frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{11}{2 \cdot 17}$	$\frac{3}{2(x-2)} - \frac{5}{(x-2)(x+2)}$
---	---

Ustalamy dzielnik wyrażenia

Ustalamy wspólny mianownik (WOM), biorąc pod uwagę wszystkie czynniki z pierwszego mianownika i te czynniki drugiego, których nie ma w pierwszym mianowniku

$WM = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$	$WM = 2(x-2)(x+2)$
-----------------------------------	--------------------

Rozszerzamy każde wyrażenie przez te dzielniki WOM, których nie ma w mianowniku tego wyrażenia

$\frac{7 \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17} - \frac{119}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17}$	$\frac{3(x+2)}{2(x-2)(x+2)} - \frac{5}{2(x-2)(x+2)}$
--	--

Dodawanie wyrażień wymiernych
Wyrażenia, które mamy dodać

$\frac{7}{15} + \frac{2}{21}$	$\frac{4}{x^2 + 2x} + \frac{4x}{x^2 - 4}$
-------------------------------	---

Mianowniki rozkładamy na czynniki

$\frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 7}$	$\frac{4}{x(x+2)} + \frac{4x}{(x-2)(x+2)}$
---	--

Ustalamy dzielnik wyrażenia

Ustalamy WOM, biorąc pod uwagę wszystkie czynniki jednego mianownika i te z drugiego, których nie ma w pierwszym

$WM = 3 \cdot 5 \cdot 7$	$WM = x(x-2)(x+2)$
--------------------------	--------------------

Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$\frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$\frac{4(x-2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{4x \cdot x}{x(x-2)(x+2)}$
---	---

Wykonujemy mnożenie w każdym liczniku

$\frac{49}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{10}{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$\frac{4x-8}{x(x-2)(x+2)} + \frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)}$
---	---

Prześmy ułamki na jeden kres ułamkowy i wykonujemy dodawanie w liczniku

$\frac{49+10}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{59}{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$\frac{4x-8+4x^2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+2)}$
--	---

Eventualnie rozkładamy licznik na czynniki i skracamy ułamek

$\frac{59}{105}$	$\frac{4(x+2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)}$
------------------	-----------------------------------