

**Zadanie 29. (0-2)**

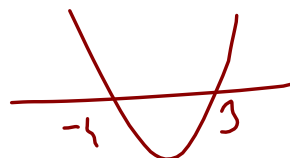
Rozwiąż nierówność:

$$3x(x+1) > x^2 + x + 24$$

$$2x^2 + 2x - 24 > 0$$

$$x^2 + x - 12 > 0$$

$$(x+4)(x-3) > 0$$



$$x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$$

**Zadanie 30. (0-2)**

Rozwiąż równanie:

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x+2$$

$$3x-2 \neq 0$$

$$x \neq \frac{2}{3}$$

$$6x-1 = 9x^2-6$$

$$9x^2-6x-5=0$$

$$3x^2-2x-1=0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x = 1$$

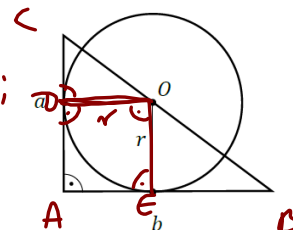
$$2: a, b \in \mathbb{R}_+$$

$$T: r = \frac{ab}{a+b}$$

**Zadanie 31. (0-2)**

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości  $a$  i  $b$ . Punkt  $O$  leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta (zobacz rysunek).

Wykaż, że promień  $r$  tego okręgu jest równy  $\frac{ab}{a+b}$ .



$ADOE$  - kwadrat

$$\triangle DCO \sim \triangle ACB$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{OD}{AB} = \frac{CO}{CB}$$

$$\frac{a-r}{a} = \frac{r}{b}$$

$$\Downarrow$$

$$ba - br = ar$$

$$(a+b)r = ab \quad | : (a+b) \neq 0$$

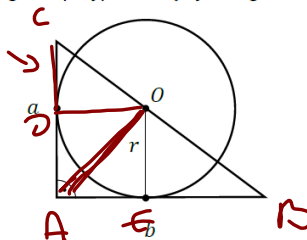
$$r = \frac{ab}{a+b}$$

c.m.d.

**Zadanie 31. (0-2)**

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości  $a$  i  $b$ . Punkt  $O$  leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta (zobacz rysunek).

Wykaż, że promień  $r$  tego okręgu jest równy  $\frac{ab}{a+b}$ .



$SP \parallel$

$$P_{ABC} = P_{ABO} + P_{ACO}$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar$$

$$ab = r(a+b)$$

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

## Zadanie 32. (0-2)

1p

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

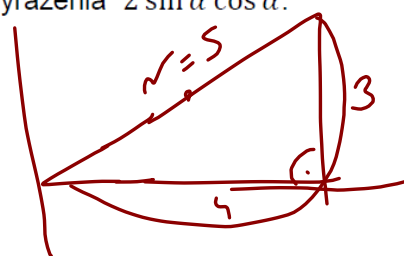
$$\cos \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{25}$$



## Zadanie 32. (0-2)

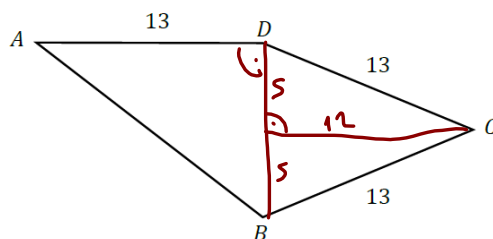
Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \frac{49}{25} \\ \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha &= \frac{49}{25} \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{49}{25} - 1 = \frac{21}{25} \end{aligned}$$

**Zadanie 33. (0-2)**

Dany jest czworokąt  $ABCD$ , w którym  $|BC| = |CD| = |AD| = 13$  (zobacz rysunek).

Przekątna  $BD$  tego czworokąta ma długość 10 i jest prostopadła do boku  $AD$ . Oblicz pole czworokąta  $ABCD$ .



$$(P=125)$$

**Zadanie 34. (0-2)**

Funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 + bx + c$  nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że  $1 + c > b$ .

$1+c > b$   
 $\Delta < 0$   
 $b^2 - 4c < 0$   
 $4c > b^2$   $| :4$   
 $c > \frac{1}{4}b^2$   
 $1+c > \frac{1}{4}b^2 + 1$   
 $1+c-b > \frac{1}{4}b^2 + 1 - b$   
 $1+c-b > \left(\frac{1}{2}b - 1\right)^2 \geq 0$   
 $\Rightarrow$   
 $1+c-b > 0$   
 $1+c > b$   $c \neq 1$

$f(0) = c > 0$   
 $f(1) = 1+b+c > 0$   
 $1+c > -b$   
 $f(-1) = 1-b+c > 0$   
 $1+c > b$   $c \neq 1$

**Zadanie 34. (0-2)**

Funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 + bx + c$  nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że  $1 + c > b$ .

$$\Delta_x < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c < 0$$

$$b^2 < 4c$$

$$\begin{aligned} &? \\ 1+c &> b \\ c &> b-1 \\ 4c &> 4b-4 \end{aligned}$$

$$4c > b^2 - 4b + 4 + 4b - 4 =$$

$$4c > (b-2)^2 + 4b - 4 > 4b - 4$$

$$4c > 4b - 4$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ + \quad c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} a > b \\ - \quad c > d \\ \hline a-d > b-c \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}_+ \\ \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right. \\ \hline a \cdot c > b \cdot d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 > 2 \\ -2 > -5 \\ \hline -3 > -10 \end{array} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{r} 5 > 2 \\ 5 > 2 \\ 5 > 2 \end{array}$$

**Zadanie 35. (0-5)**

Rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  jest określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy  $a_3, a_5, a_{13}$  tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ .

$$S_5 = 10 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$b_1 = a_3 \quad \text{cz}$$

$$b_2 = a_5$$

$$b_3 = a_{13}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_3, a_5, a_{13} - \text{c.g.} \Leftrightarrow$$

$$a_5^2 = a_3 \cdot a_{13}$$

$$10 = S_5 = \frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + 2r = 2 = a_3$$

$$a_5 = a_3 + 2r \quad a_{13} = a_3 + 10r$$

$$(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$$

$$r^2 - 3r = 0 \quad | : r | \quad r = 0 \quad \text{nie}$$

$$0 < r \neq 0 \quad r = 3$$

$$a_n = a_3 + (n-3)r = 2 + 3n - 9 = 3n - 7$$