

Zadanie 470.

Liczby: $\log_2 x$, $\log_2 8x$, $\log_2 64x$ są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu i sumę początkowych dziesięciu wyrazów tego ciągu. *Dane jest x! 2 po 4 x*

$$x > 0$$

$$a_{10} = \log_2 x + 9 \cdot 3$$

Zadanie 482.

- a) W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego równa się 40. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu równa się -64?
- b) Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego suma początkowych wyrazów tego ciągu spełnia warunek $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

$$r = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$

$$7a_3 = a_6 = a_3 + 3r$$

$$7a_3 = a_3 + 3r$$

$$r = 2a_3$$

$$\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 2 \\ r = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = -2 \\ r = -4 \end{cases}$$

$$S_n = -64 \quad n \neq 0 \quad S_n = -64 \quad n = 1$$

$$-64 = \frac{12 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n$$

$$12n - 4n^2 + 4n + 12 = 0$$

$$n^2 - 4n - 3 = 0$$

$$(n-8)(n+5) = 0$$

$$n = 8$$

Zadanie 482.

- a) W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego równa się 40. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu równa się -64?
- b) Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego suma początkowych wyrazów tego ciągu spełnia warunek $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

$$S_{3n} = \frac{a_1 + a_{3n}}{2} \cdot 3n$$

$$a_{2n} = \frac{a_n + a_{3n}}{2}$$

a_n, a_{2n}, a_{3n}

$$a_{2n-m}, a_{2m}, a_{2n+m}$$

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2} \Leftrightarrow a_{m-k}, a_m, a_{m+k}$$

- b) Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego suma początkowych wyrazów tego ciągu spełnia warunek $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

$$T \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_{3n}}{2} \cdot 3n = 3 \left(\frac{a_1 + a_{2n}}{2} \cdot 2n - \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \right)$$

$$P = 3n \left(\frac{2a_1 + 2a_{2n} - a_1 - a_n}{2} \right) = 3n \frac{a_1 + a_n + a_{3n} - a_n}{2} = 3n \frac{a_1 + a_{3n}}{2}$$

Zadanie 497.

Dane są cztery liczby a, b, c, d . Liczby a, b, c w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Liczby b, c, d w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych jest równa 16, suma środkowych 12. Wyznacz a, b, c i d .

$$\begin{cases} ac = b^2 \\ b+d = 2c \\ a+d = 16 \Rightarrow d = 16-a \\ b+c = 12 \Rightarrow b = 12-c \end{cases}$$

$$b = 2c - d = 2c - 16 + a$$

$$ac = (2c - 3c + 12)^2 = (12 - c)^2$$

$$(a + 3c - 12) = 16$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = 16 \\ d = 0 \\ b = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} c = 9 \\ a = 1 \\ d = 15 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 4 \\ c = 7 \\ d = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 16 \\ b = -8 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 4 \\ a = 16 \\ b = -8 \\ d = 0 \end{cases}$$

Zadanie 500.

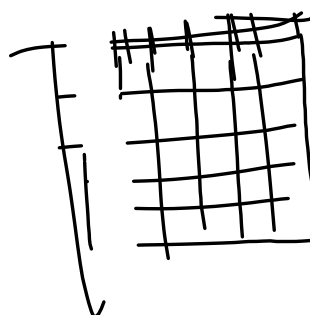
Bolek i Lolek układają piramidę z kasztanów. W podstawie piramida ma kwadrat ułożony z 36 okrągłych nasion. Liczba nasion w każdym rzędzie kolejnej warstwy jest o 1 mniejsza niż poprzednio. Ile kasztanów potrzebują chłopcy do zbudowania takiej piramidy, by w ostatniej warstwie był jeden kasztan?

$$W_1 = 6 \times 6$$

$$W_2 = 5 \times 5$$

$$4 \times 4,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$



Zadanie 501.

Matura 2001 r.

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 12x^2 - 16x - 192$.

- a) Wyznacz wzór na wyraz ogólny rosnącego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) , którego trzema początkowymi wyrazami są pierwiastki wielomianu W .
- b) Oblicz, dla jakich n suma początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od sumy wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) , gdzie $b_n = 576 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Zadanie 502.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3. Suma początkowych sześciu wyrazów tego ciągu jest pięć razy większa od sumy trzech początkowych wyrazów ciągu. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu.

$$a_1 = 3, \quad S_6 = 5 \cdot S_3 \quad \begin{matrix} a_1 \neq 0 \\ q \neq 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 5 \cdot a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \\ a_1 \cdot 6 = 5 \cdot a_1 \cdot 3 \quad q=1 \end{cases}$$

sp

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & q = 1 \end{cases} \quad \text{c.j. stąy.}$$

$$\underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ razy}} = n \cdot a_1$$

$$1 - a^6 = 5(1 - a^3) \quad a \neq 1$$

$$(1 - a^3)(1 + a^3) - 5(1 - a^3) = 0$$

$$(1 - a^3)(a^3 - 4) = 0$$

$$\cancel{a \neq 1} \vee \underline{a^3 = 4} \quad \underline{a_1 = \sqrt[3]{4}}$$

Zadanie 503.

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym wyraz pierwszy jest równy 4, a suma wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.

Zadanie 506.*Matura próbna XII 2004 r., 6 p.*

Iloczyn piątego i jedenastego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 4. Oblicz iloczyn piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 507.*Matura V 2009 r., 6 p.*

Ciąg $(x - 3, x + 3, 6x + 2, \dots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n -początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 508.

Matura V 2008 r., 3 p.

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

Zadanie 512.

Matura V 2012 r., 6 p.

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Zadanie 513.*Matura V 2009 r., 5 p.*

W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbcza król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k , dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

Zadanie 514.*Matura próbna III 2008 r., 5 p.*

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geq 1$.

- Oblicz iloraz tego ciągu.
- Oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_{100}$, czyli sumę logarytmów o podstawie 3, stu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 515.*Matura próbna XII 2005 r., 5 p.*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci: $2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$

Wyznacz wszystkie wartości p , dla których granicą tego ciągu jest liczba:

- a) 0,
- b) 2.