8.146. Rozwiąż

a) równanie: $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x - 1 = \frac{\sin 2x}{2}(1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots)$

b) nierówność: $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cos^5 x + \ldots \geq 1 + \cos x$.

8.147. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, równanie

$$m^2 - 1 = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin^2 x}{4} + \frac{\sin^3 x}{8} + \frac{\sin^4 x}{16} + \ldots$$

ma rozwiązanie?

8.147. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, równanie

$$m^2 - 1 = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin^2 x}{4} + \frac{\sin^3 x}{8} + \frac{\sin^4 x}{16} + \ldots$$

ma rozwiązanie?

$\cancel{\frac{\sin x}{2} \in (-1, 1)}$

$\sin x \in (-1, 1) \;/ :2$

$\frac{\sin x}{2} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$P(x) = \frac{\frac{\sin x}{2}}{1 - \frac{\sin x}{2}} = \frac{\sin x}{2 - \sin x}$$

$D: x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \boxed{\frac{\sin x}{2 - \sin x} = m^2 - 1}$$

dla jakich m rozw.

$\sin x \in (-1, 1)$

$-\sin x \in (-1, 1)$

$t = 2 - \sin x \in (1, 3)$

$$\frac{-(2 - \sin x)}{2 - \sin x} + \frac{2}{2 - \sin x} = -\cancel{1} + \frac{2}{2 - \sin x} = m^2 - \cancel{1}$$

$y = \frac{2}{t}$

$$\frac{2}{2 - \sin x} = m^2 \quad / \cdot (2 - \sin x) > 0$$

$m^2 \in (\frac{2}{3}; 2)$

$$2 = 2m^2 - m^2 \sin x$$

$$\sin x = \frac{2m^2 - 2}{m^2} \in (-1, 1)$$

$$m \in (-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}; \sqrt{2})$$

$\boxed{4}$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{2}$

$$\underbrace{2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

$\vee$

$$\underbrace{2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}$$

8.131. Sprawdź, czy prawdziwe są następujące tożsamości, podaj konieczne założenia:

a) $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$ b) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

8.132. Wykaż, że jeśli $\cos x \neq -\sin x$, to $\frac{\cos 2x(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = 1 - \sin 2x$.

b) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

$$P = \frac{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)}{m} =$$

$$= \frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} - \frac{\cos^2\beta\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = L$$

8.122. Rozwiąż równania:

a) $3\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 5$

b) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$

c) $2\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x + 5 = 0$

d) $\mathrm{ctg}^2 x - 3\mathrm{tg}^2 x = 2$

8.123. Rozwiąż równania:

a) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$

b) $\sin^2 3x - \sqrt{2}\sin 3x + \frac{1}{2} = 0$

8.124. Rozwiąż równania:

a) $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$

b) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$

8.125. Rozwiąż równania:

a) $\cos 2x - 5\sin x - 4 = 0$

b) $\cos 2x - 3\cos x - 4\cos^2 x = 4\sin^2 x$

8.126. Rozwiąż równania:

a) $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x = 2$

b) $2\sin^2\frac{x}{2} + \sin x = 0$

8.127. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\,x + 3 = 0$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

8.128. Rozwiąż równania w przedziale $\left\langle\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$:

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + \cos x = 2^{-0,5}$

---

b) $\cos 2x - 3\cos x - \cancel{4\cos^2 x} = \cancel{4\sin^2 x} = 4 - \cancel{4\cos^2 x}$

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x - 4 = 0$

$\cos x = t \in \langle -1, 1 \rangle$

$2t^2 - 3t - 5 = 0$

$(t+1)(2t-5) = 0$

$\emptyset$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

8.129. Rozwiąż równania:

a) $\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

$\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$

$\sin^2 2x - 2\sin 2x \cos x = 0$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad \sin 2x - 2\cos x = 0$

$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$

$2\cos x(\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = 1$

$\cup$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

8.119. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| - 1$, gdzie $x \in (-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Na podstawie wykresu wyznacz:

a) miejsca zerowe funkcji f

b) zbiór rozwiązań nierówności $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$.

8.120. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$, jeśli $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, $\text{ctg}\,\beta = 1$ i $\alpha, \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

8.121. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$

b) $f(x) = 8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 3$

c) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x - 1$

d) $f(x) = \sin x \cdot \text{ctg}\, x - \cos x \cdot \text{tg}\, x$

1422. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

1423. $3^{\sin^2 x}=2+3^{\cos^2 x}$.

1424. $2^{\cos(2x)}=2^{\cos^2 x}-\frac{1}{2}$;

$$2^{\cos 2x}-2^{\cos^2 x}+\frac{1}{2}=0$$

$$2^{\cos^2 x-\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}+\frac{1}{2}=0$$

$$2^{2\cos^2 x-1}-2^{\cos^2 x}+\frac{1}{2}=0$$

t

$$\left(2^{\cos^2 x}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2^{\cos^2 x}+\frac{1}{2}=0 \quad /\cdot 2$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$\underline{t=1} \qquad 2^{\cos^2 x}=1=2^0$$

$$\cos^2 x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

1425. $2\sin x=3\operatorname{tg}^2 x$.

1426. $\sin^2 x-(\sqrt{3}+1)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

1427. $4\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=2$.

1428. $4\sin^2 x+\sin^2(2x)=3$.

1429. $4(\log_2\cos x)^2+\log_2[1+\cos(2x)]=3$.

1430. $\sin(3x)+\sin x=\cos x$.

1431. $\sin(3x)+\sin x=\cos(3x)+\cos x$.

1432. $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)=0$.

1433. $\sin x+\sin(3x)+\sin(5x)=0$.

1434. $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)$.

1435. $\sin x+\sin(2x)+2\sin(3x)+\sin(4x)+\sin(5x)=0$.

1436. $\sin^2 x+\sin^2(2x)=\sin^2(3x)$.

1437. $\sin^2 x+\sin^2(2x)=\sin^2(3x)+\sin^2(4x)$.

1438. $\cos^2 x+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)+\cos^2(4x)=2$.

1426. $\sin^2 x-(\sqrt{3}+1)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$ $\Big/ : \cos^2 x \neq 0$

II

I

$\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \wedge \quad x = 0 + k\pi$

$x = 0 + \frac{k\pi}{2}$

$\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

$(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x - 1) = 0$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \ \vee \ \operatorname{tg} x = 1$

$\left(x = \frac{\pi}{3}+k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{4}+k\pi\right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \alpha$

1454. $2\sin x\cdot\sin(3x)=1.$

1455. $\cos(2x)\cdot\cos x=\cos(5x)\cdot\cos(4x).$

1456. $\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)=\frac{1}{4}\sin(4x).$

1457. $\sin^3 x+\cos^3 x=1.$

1458. $\sin^8 x+\cos^5 x=1.$

1459. $\sin^8 x+\cos^6 x=1.$

1460. $\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3.$

1461. $\sqrt{\cos^2 x-\cos(2x)}=1+\sin x.$

1462. $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}.$

1463. $\sin x+\cos x=\sqrt{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}.$

1464. $\sin\left|\frac{\pi x}{2}\right|=1.$

1465. $|\sin(2\pi x^2)|=1.$

1466. $\log_{\cos x}\sin x=1.$

1467. $\sin x+\log(1+2^{\sin x})=\sin x\cdot\log 5+\log 6.$

1468. $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x=2.$

1469. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$ z przedziału $\langle 0; 315\rangle$.

1458. $\sin^8 x + \cos^5 x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k\pi$

$\sin^8 x - 1 + \cos^5 x = 0$

$(\sin^4 x + 1)(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) + \cos^5 x = 0$

$-\cos^2 x\left((1+\sin^4 x)(1+\sin^2 x) - \cos^3 x\right) = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\pi$

$\left([(1-\sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x][2 - \cos^2 x] - \cos^3 x\right) = 0$

$$\left[(1-\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\right]\left([2-\cos^2 x]-\cos^2 x\right)=0$$

$$(\cos^4 x+2-2\cos^2 x)(2-\cos^2 x)-\cos^2 x=0$$

$$-\cos^6 x+4\cos^4 x-\cos^2 x-6\cos^2 x+4=0$$

$$(t-1)\underbrace{(t^5+t^4-3t^3-2t^2+4t+4)}_{f(t)}=0$$

$\langle -1, 1\rangle$

$f(-1)=1$ $f(1)=5$

$5t^4+4t^3-9t^2-4t+4$

W zadaniach 1473—1478 zbadaj, dla jakich rzeczywistych wartości parametru a, równanie ma rozwiązania rzeczywiste.

1473. $\sin(2x)=\frac{2a-3}{4-a}$.

1474. $\cos x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=a^2-1$.

1475. $\sin(5x)+\cos(5x)=a$.

1476. $\sin^4 x+\cos^4 x=a$.

1477. $\cos(2x)+3\cos x=a$.

1478. $3\sin(2x)-4\cos(2x)=a$.