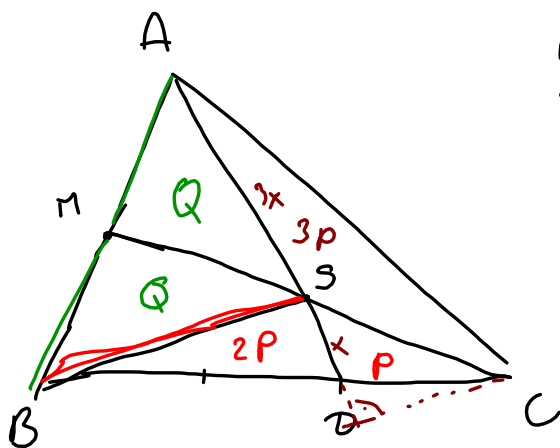


ABC

Na boku BC punkt D taki, że $BD : DC = 2 : 1$. W jakim stosunku
środkowa CM dzieli odcinek AD ?



$$\frac{AS}{SD} = ?$$

$$P_{ABC} = [ABC]$$

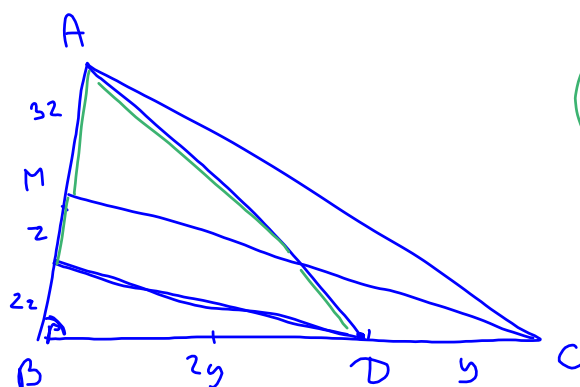
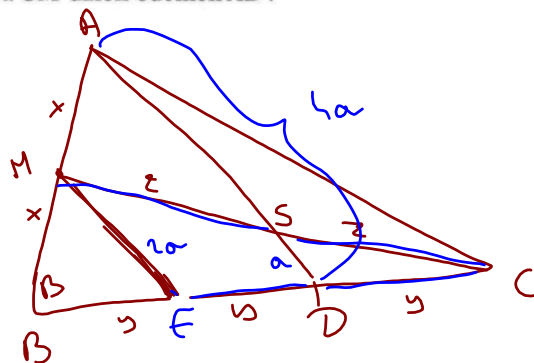
$$[ASC] = [BSC] \quad (b_a)$$

$$[AMC] = [BMC]$$

$$\frac{P_i}{P_r} = \frac{1}{K}$$

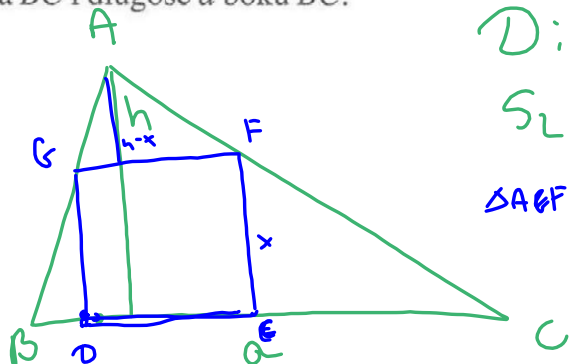


Na boku BC punkt D taki, że $BD : DC = 2 : 1$. W jakim stosunku
środkowa CM dzieli odcinek AD ?



Zad. 85

W trójkąt ABC wpisano kwadrat tak, że jeden bok zawiera się w boku BC trójkąta. Znajdź bok kwadratu, znając wysokość h opuszczoną na BC i długość a boku BC .



$$D: a, h$$

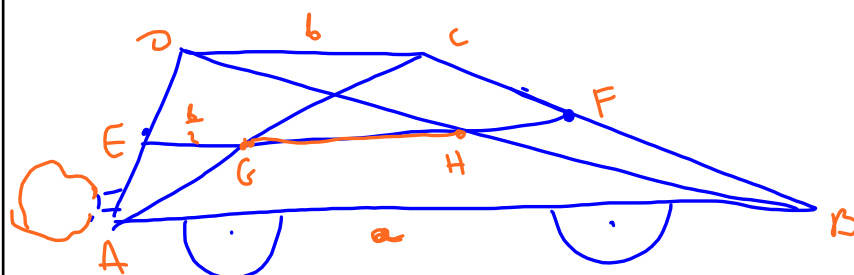
$$S_L : x$$

$$\triangle AGF \sim \triangle ABC \text{ (kkk)}$$

$$\frac{h-x}{x} = \frac{h}{a} \Rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$$

Zad. 86

Podstawy trapezu a i b . Znajdź długość odcinka wyciętego z pierwszej linii średniej przez przekątne oraz długość odcinka równoległego do podstaw, przechodzącego przez punkt wspólny przekątnych, zawartego między ramionami trapezu.



$$D: a, b$$

$$GH = ?$$

$$EF = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} &\triangle FHC \sim \triangle AHC \\ &EF = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

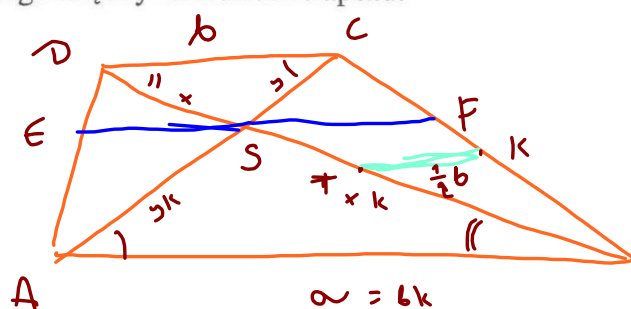
$$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC} \wedge E \in AD$$

$$GH = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

$$\triangle FHC \sim \triangle AHC \Rightarrow FH = \frac{b}{2}$$

Zad. 86

Podstawy trapezu a i b . Znajdź długość odcinka wyciętego z pierwszej linii średniej przez przekątne oraz długość odcinka równoległego do podstaw, przechodzącego przez punkt wspólny przekątnych, zawartego między ramionami trapezu.



$$\triangle DSC \sim \triangle BSA \text{ (KKK)}$$

$$\frac{DS}{SB} = \frac{b}{a} = \frac{1}{k}$$

$$\triangle TDK \sim \triangle BSC \sim$$

$$\triangle SBF$$

$$\hookrightarrow \frac{TK}{SF} = \frac{\frac{1}{2}(x+xk)}{xk} = \frac{1+k}{2k}$$

$$SF = \frac{1}{2}bk \cdot \frac{1}{1+k} =$$

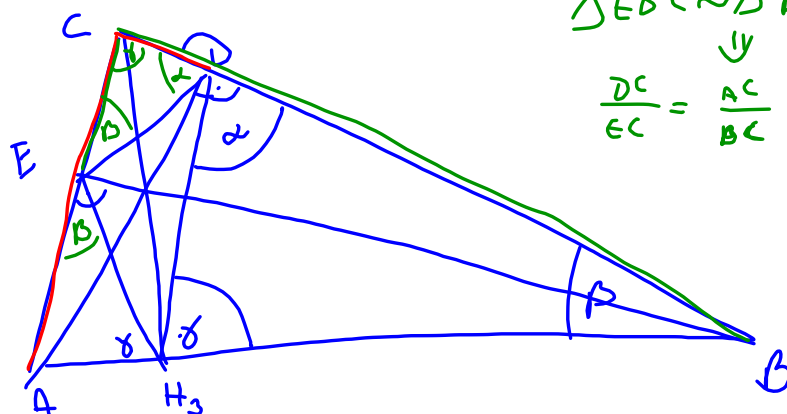
$$SF = \frac{b \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{a+b}$$

$$ES = FS = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{a+b}$$

Zad. 87

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE .

Wykaż, że $\frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC}$. $\text{ktu} \cdot 1$



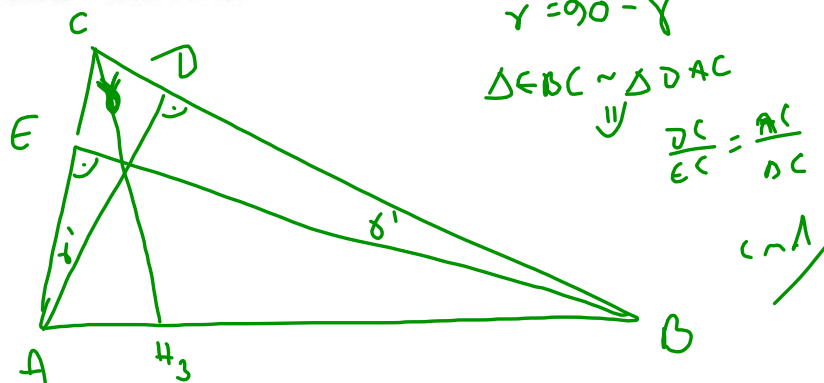
$$\triangle EDC \sim \triangle BAC$$

$$\Downarrow$$

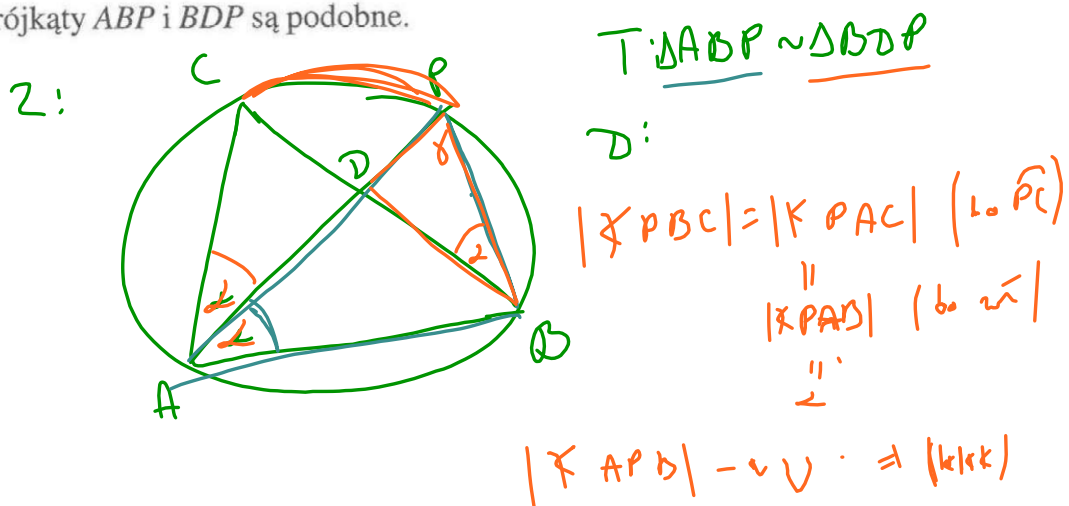
$$\frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC}$$

Zad. 87

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE .
Wykaż, że $DC : EC = AC : BC$.

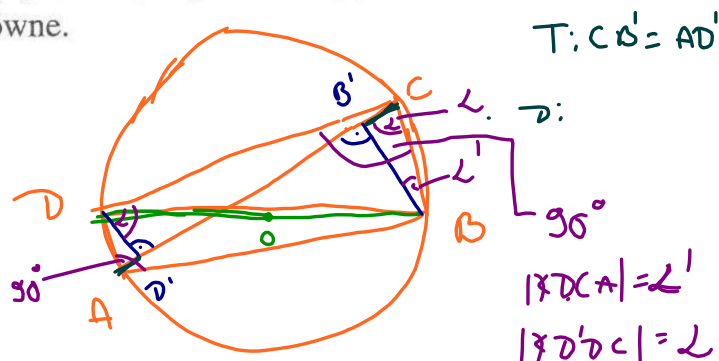
Zad. 88

Dwusieczna AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w P . Wykaż, że trójkąty ABP i BDP są podobne.



Zad. 89

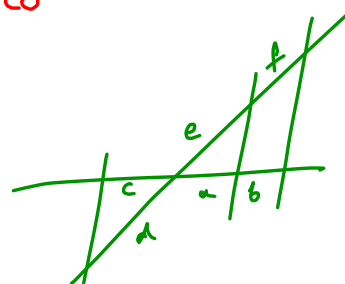
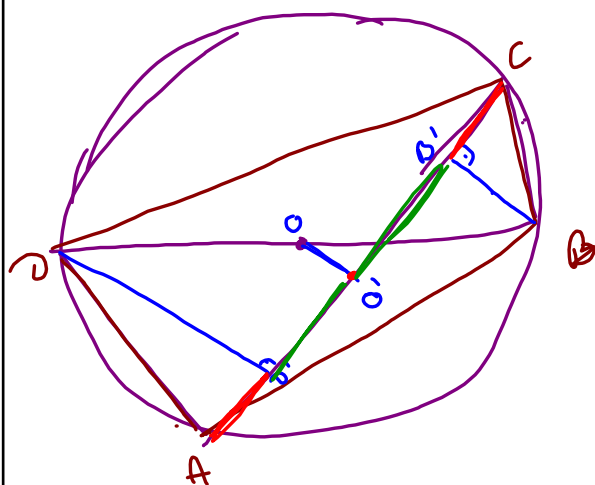
Jedna z przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą. Wykaż, że rzuty prostokątne przeciwległych boków na drugą przekątną są sobie równe.



Zad. 89

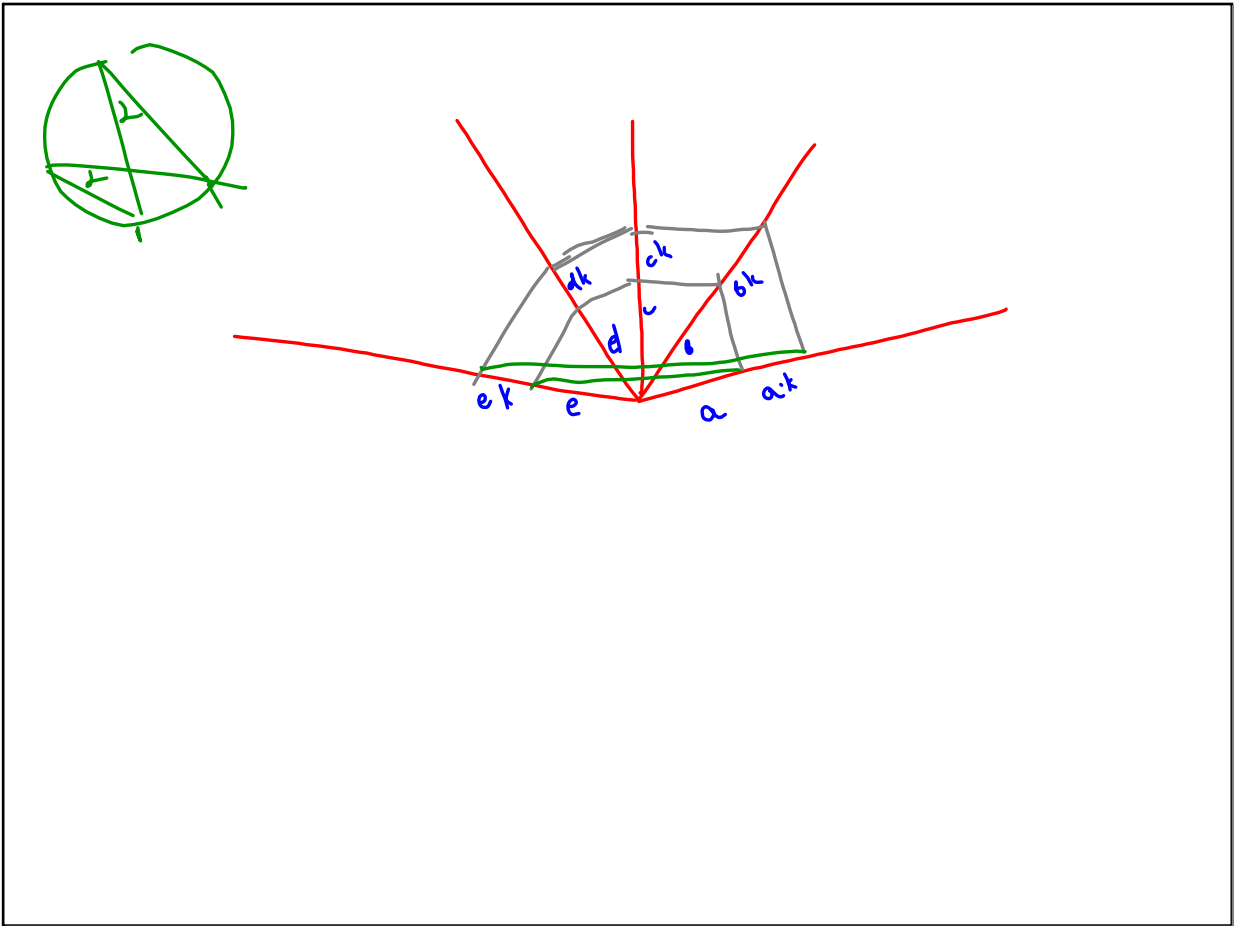
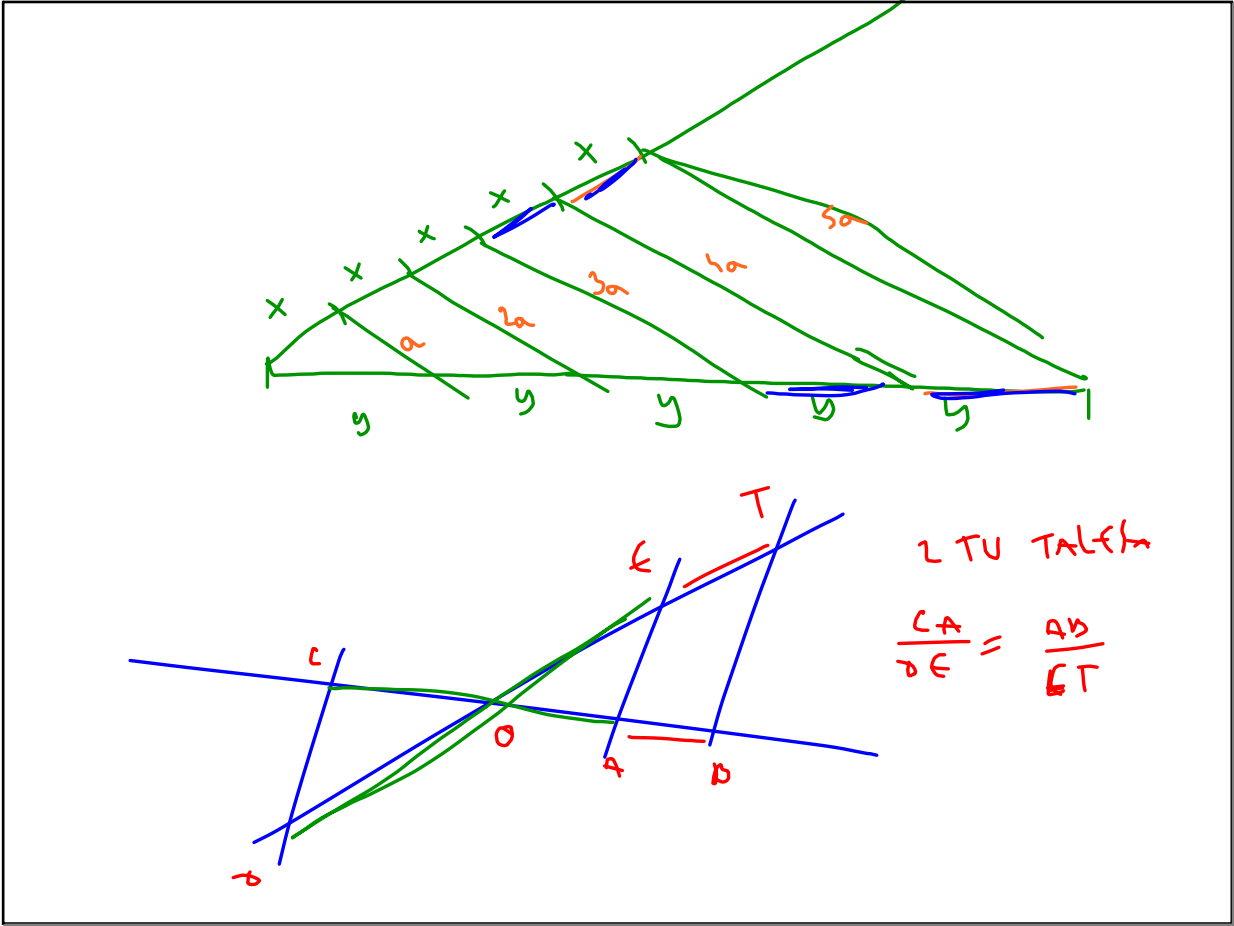
Jedna z przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą. Wykaż, że rzuty prostokątne przeciwległych boków na drugą przekątną są sobie równe.

$$T: CD' = AD' \Leftrightarrow D'O = O'B' \\ AD' = CO'$$



TALES:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c} = \frac{b}{f} = \frac{a+b}{c+f} = \frac{c+a}{a+b}$$



Zad. 90

Na boku AD równoległoboku punkt P taki, że $AP = \frac{1}{n}AD$. Q – punkt przecięcia się prostych AC z BP . Oblicz stosunek $AQ : AC$.

$\frac{AQ}{AC} = ?$

$\frac{AD}{AP} = n$

$\triangle AQP \sim \triangle CQB$ (k.k.k.)

$AC = AQ + QC$

$\frac{QC}{AQ} = \frac{CB}{AP} = \frac{AD}{AP} = n \quad (\Rightarrow) \quad \frac{AQ}{AP} = \frac{QC}{BC}$

$QC = n \cdot AQ$

$\frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{AQ + QC} = \frac{AQ}{AQ + n \cdot AQ} = \frac{1}{1+n}$

Zad. 91

Punkty K i L dzielą boki BC i AC trójkąta w stosunku $BK : KC = 1 : p$ oraz $AL : LC = 1 : q$. W jakim stosunku dzielą się odcinki AK i BL ?

$q \cdot [ABL] = [CBL]$

$qP + qR = qP + Q(p+1)$

$\frac{R}{Q} = \frac{p+1}{q} = \frac{|AS|}{|SK|}$

$[ABK] p = [AKC]$

$pR + pQ = pQ + P(1+q)$

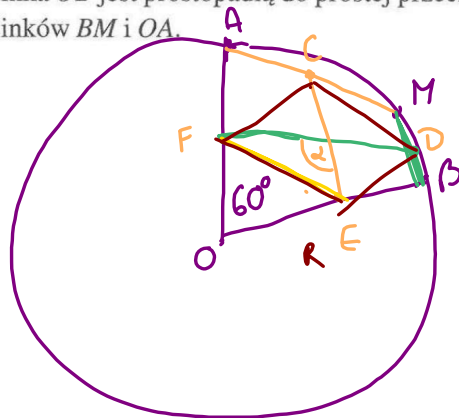
$\frac{R}{P} = \frac{1+q}{p} = \frac{|BS|}{|LS|}$

$\frac{R}{Q} = \frac{1+q}{p} = \frac{|BS|}{|LS|}$

Zad. 92

Punkty A i B wycinają z okręgu o środku O łuk o mierze 60° . Na tym łuku punkt M . Wykaż, że prosta przechodząca przez środek odcinka AM i środek odcinka OB jest prostopadłą do prostej przechodzącej przez środki odcinków BM i OA .

2:


 $\angle DEF \perp A$
 $CE \perp DF$

$$T: \angle = 90^\circ$$

D:

$$OA = OB = R \Rightarrow AB = R$$

$$F \text{ w } \triangle OAB \Rightarrow FE = \frac{1}{2} R$$

$$\triangle AMB \Rightarrow CD = \frac{1}{2} R$$

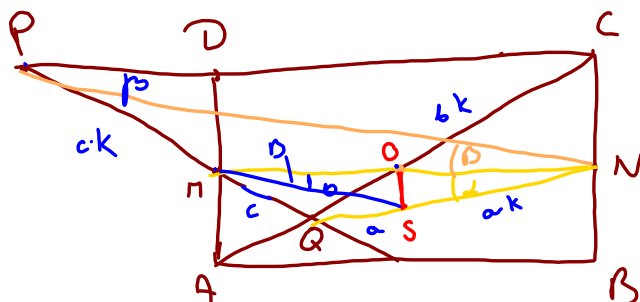
 $\Leftarrow$

$$\triangle AOM \Rightarrow FC = \frac{1}{2} R$$

$$\triangle ODM \Rightarrow DE = \frac{1}{2} R$$

Zad. 93

W prostokącie $ABCD$ M i N to środki boków AD i BC . Na przedłużeniu odcinka DC poza punkt D obrano punkt P . Prosta PM przecina prostą AC w Q . Wykaż, że $\angle QNM = \angle MNP$.



$$T: \angle = \beta$$

$$D: \vec{OS} \parallel \vec{PC}$$

$$\frac{QS}{SN} = \frac{QM}{MN} \Rightarrow$$

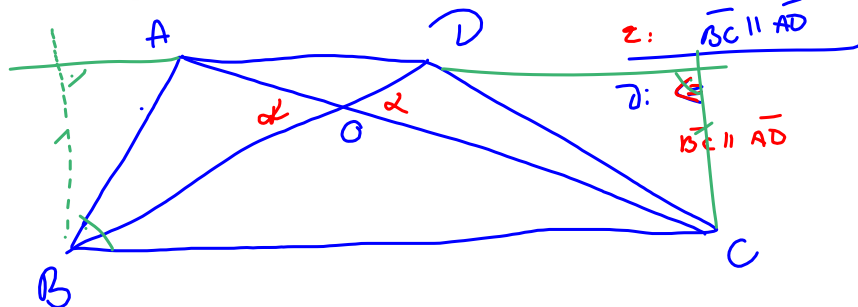
$$\vec{MS} \parallel \vec{PN} \Rightarrow$$

$$|\vec{CPM}| = |\vec{NMS}| = |\vec{MNS}| = \beta$$

$$(\text{bo } NS = SM)$$

Zad. 94

Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w O . Wykaż, że $AO \cdot BO = CO \cdot DO \iff BC \parallel AD$.



$$[ADB] = [ADC] \iff [AOB] = [DOC] \iff AO \cdot OB \cdot \sin \alpha = DO \cdot OC \cdot \sin \alpha$$

$\Downarrow$
TELA $\iff$ "c" n A

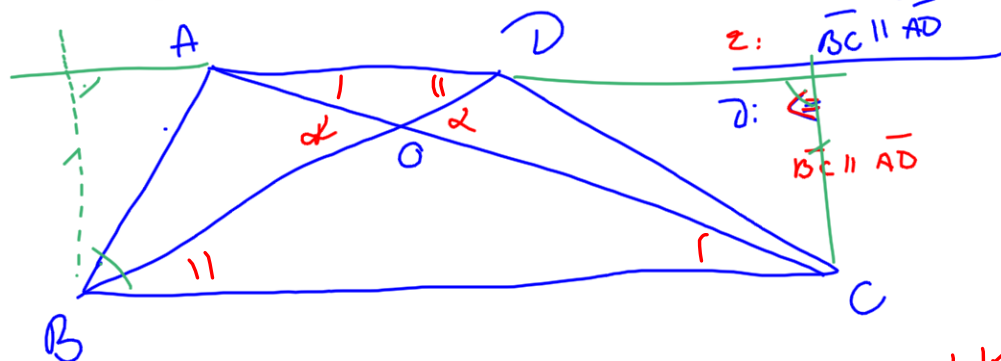
$$\Rightarrow AO \cdot OB = DO \cdot OC \quad | : \sin \alpha > 0$$

$$[AOB] = [DOC] \Rightarrow [ADB] = [ADC] \Rightarrow h_B = h_C \rightarrow$$

$$\overline{BB'} \perp \overline{AD}, \overline{CC'} \perp \overline{AD} \Rightarrow \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

Zad. 94

Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w O . Wykaż, że $AO \cdot BO = CO \cdot DO \iff BC \parallel AD$.



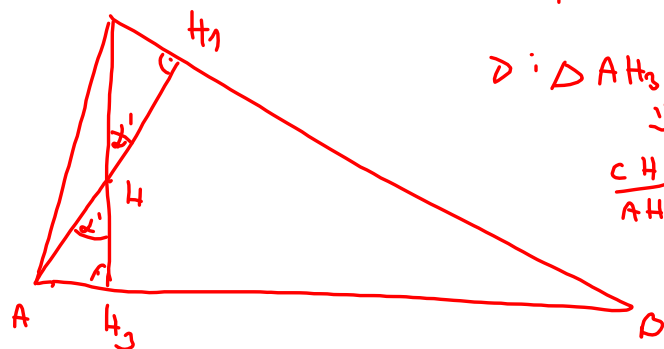
$$\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO} \wedge |\angle AOD| = |\angle COB| \Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle COB \Rightarrow |\angle OAD| = |\angle OCB|$$

$\Downarrow$
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Zad. 95

Niech H to ortocentrum w $\triangle ABC$. H_1, H_2, H_3 – spodki wysokości.

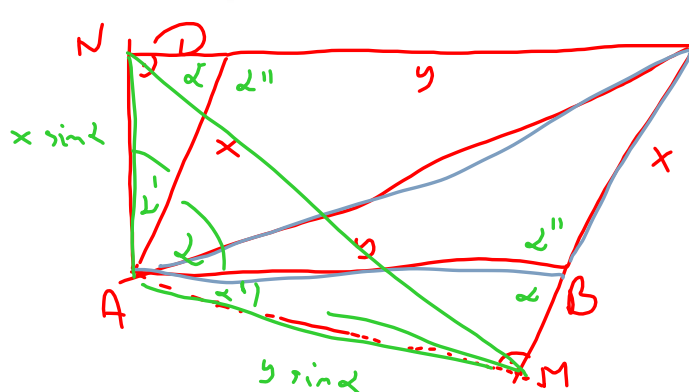
Wykaż, że $AH \cdot H_1H = BH \cdot H_2H = CH \cdot H_3H$.



T: ...
 $\Delta AH_3H \sim \Delta CH_1H$ (kkk)
 $\Rightarrow$
 $\frac{CH}{AH} = \frac{HH_1}{HH_3} \Leftrightarrow$ TŁ

Zad. 96

Na boki BC i CD (lub ich przedłużenia) równoległoboku $ABCD$ opuszczono prostopadłe AM i AN . Wykaż, że $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.



$\angle NAM = 90^\circ + \angle' = \angle''$
 $\triangle ABC \sim \triangle MAN$ (BkK)
 cnd

Zad. 97

Niech B to środek odcinka AC . Punkty D i E leżą po jednej ze stron prostej AC oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EBC$ i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCE$. Wykaż, że $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ADB$.

Zad. 98

Na dwusiecznej kąta prostego w trójkącie obrano punkt P i poprowadzono przez niego prostą, która na ramionach kąta odcina odcinki o długości a i b . Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nie zależy od wyboru prostej.

Zad. 99

Na boku BC trójkąta równobocznego ABC jako na średnicy zbudowano półokrąg (na zewnątrz). Punkty K i L dzielą półokrąg na trzy równe łuki. Wykaż, że proste AK i AL dzielą bok BC na trzy równe części.