

Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną

2.156. **2.166.** Oblicz:

- | | | | |
|---------------------|---------------------------------|----------------------------|-----------------|
| a) $ 0 $ | b) $\left -2\frac{5}{6}\right $ | c) $ 1,5 $ | d) $ -\pi $ |
| e) $ \sqrt{2} - 3 $ | f) $ 1 - \sqrt{2} $ | g) $ \sqrt{3} - \sqrt{7} $ | h) $ 2\pi - 8 $ |

2.157. **2.167.** Oblicz wartość wyrażenia. Oceń, jaką liczbą – wymierną czy niewymierną – jest wynik obliczeń.

- | | |
|--|---|
| a) $ 3 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1,3 $ | b) $2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} $ |
| c) $ 3 - \pi - \pi - 3 $ | d) $ 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} $ |
| e) $ 1,8 - 4 + 2,9 - 1,4 $ | f) $ 1 - \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2} $ |
| g) $ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} $ | h) $3 1 - \sqrt{6} - 3\sqrt{6}$ |

2.158. **2.168.** Zapisz odległość na osi liczbowej między danymi liczbami, używając znaku wartości bezwzględnej; następnie oblicz tę odległość:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) -4 i -28 | b) 7 i $1,2$ |
| c) $14\frac{1}{3}$ i $28\frac{1}{3}$ | d) $-12,6$ i $8,4$ |
| e) $-2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2} + 3$ | f) $\sqrt{3} - 1$ i $\sqrt{3} + 7$ |
| g) $1 - 2\sqrt{3}$ i $4 + 2\sqrt{3}$ | h) $-2\sqrt{6}$ i $4 - 2\sqrt{6}$ |

2.159. **2.169.** Oblicz wartość wyrażenia, jeśli $a = -4$:

- | | | |
|----------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $ a - a $ | b) $2a \cdot a - 3 $ | c) $ a \cdot 3a - 2 $ |
|----------------|-----------------------|-------------------------|

2.160. **2.170.** Oblicz wartość wyrażenia, jeśli $b = 3$:

- | | | |
|--------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $ 2 - b - b $ | b) $ -1 - 2 - b + b$ | c) $-2b - -b + 1 $ |
|--------------------|-------------------------|---------------------|

2.161. **2.171.** Oblicz wartość wyrażenia, jeśli $c = -\sqrt{5}$

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------------|
| a) $ 1 + c + c $ | b) $ -1 - 2 - c $ | c) $1 - 3c + 2c - 4 $ |
|--------------------|---------------------|--------------------------|

2.162. **2.172.** Podaj wartość wyrażenia:

- | | |
|--|--|
| a) $ a - 3 - a - 2 $, jeśli $a \in (-\infty, 0)$ | b) $ 4 - a + 2 + a $, jeśli $a \in (-2, 4)$ |
| c) $ a - 3 - a + 4 $, jeśli $a \in (3, +\infty)$ | d) $ a + 1 - a + 5 $, jeśli $a \in (-\infty, -5)$ |
| e) $ -2a \cdot a - 1 $, jeśli $a \in (-\infty, -1)$ | f) $ 1 + 2a + -3a $, jeśli $a \in (-\infty, -2)$ |
| g) $a - 3 - a $, jeśli $a \in (4, +\infty)$ | h) $ 2a - 1 - a $, jeśli $a \in (-\infty, -3)$ |

2.163. **2.173.** Rozwiąż równania:

- | | | |
|------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $ x = 4$ | b) $ x = \frac{1}{3}$ | c) $4 x = 6\sqrt{2}$ |
| d) $3 x = 7,5$ | e) $5 x = 10\sqrt{3}$ | f) $-3 x = 18$ |
| g) $ x + 5 = 5$ | h) $\frac{ x }{4} = -2$ | i) $\frac{2 x - 1}{3} = 1$ |

2.164. **2.174.** Rozwiąż równania:

- | | | |
|--------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $ x - 1 = 2$ | b) $ x - 4 = 0$ | c) $ x + 1 = 4$ |
| d) $ x + 2 = 3$ | e) $ x - 3 = 7$ | f) $1 - x + 5 = 0$ |
| g) $7 x - 5 = 21$ | h) $2 x - 1 - 4 = 0$ | i) $5 - 2 x + 3 = -15$ |

2.165. **2.175.** Rozwiąż równania:

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|--|
| a) $ x - 1,2 - 6,8 = 0$ | b) $ 3,4 - x = 0,6$ | c) $1,5 - 2,5 + x = 1,5$ |
| d) $ x + 1,3 = 0,7$ | e) $\frac{ x + 1,2 - 6,8}{3} = 0$ | f) $\frac{ x + 2,4 + 1,2}{3} = \frac{1}{3}$ |

2.166. **2.176.** Podaj przykład równania z wartością bezwzględną, które ma dwa rozwiązania
 a) dodatnie b) ujemne c) o różnych znakach.

2.167. **2.177.** Zapisz równanie z niewiadomą x typu $|x - a| = b$, jeśli dany jest jego zbiór rozwiązań:
 a) $\{-7, 7\}$ b) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$ c) $\{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$
 d) $\left\{1\frac{3}{4}\right\}$ e) $\{-8, -4\}$ f) $\{5, 17\}$
 g) $\{-3, 7\}$ h) $\{-4, 8; 1, 2\}$ i) $\{2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\}$

2.170. **2.178.** Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb, spełniających nierówność:
 a) $|x| \leq 2$ b) $|x| > 5$ c) $|x| \geq 6$
 d) $|x| - \frac{1}{3} \leq 0$ e) $|x| < 1$ f) $|x| - 3,2 \geq 0$
 g) $|x| > \sqrt{2}$ h) $\frac{2}{3}|x| - 1 > \frac{1}{3}$ i) $5|x| - 15 \leq 0$

2.171. **2.179.** Rozwiąż nierówności:
 a) $|x - 4| < 3$ b) $|x + 1| \leq 2$ c) $|x - 2| > 0$
 d) $|x + 2| \geq -3$ e) $|3 - x| - 1 \leq 0$ f) $|5 + x| - 2 > 0$
 g) $0 < 4 - |x - 4|$ h) $1 - |9 - x| \geq 1$ i) $-3|6 + x| < 0$

2.172. **2.180.** Rozwiąż nierówności:
 a) $|x + 1,4| - 8,4 \leq 0$ b) $0 > 1,4 - |2,6 - x|$ c) $|0,25 + x| \geq 1,25$
 d) $|x - 1,3| < 1,8$ e) $|x + 8| \leq 0$ f) $2|x - 1| + 3 < 1$
 g) $0,7|x - 0,1| > 0$ h) $3|x + 2| + 1,8 < 0$ i) $-2|5 - x| + 1,2 > 0$

2.173. **2.181.** Podaj przykład nierówności z wartością bezwzględną, której zbiorem rozwiązań jest:
 a) zbiór pusty b) zbiór jednoelementowy c) zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

2.174. **2.182.** Zapisz nierówność z wartością bezwzględną, jeśli dany jest jej zbiór rozwiązań:
 a) $(-9, 9)$ b) $\langle 0, 10 \rangle$ c) $(-4, 12)$
 d) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ e) $(-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$ f) $(-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty \rangle$
 g) $\langle -9, 5 \rangle$ h) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ i) $(-\infty, -2\pi) \cup (4\pi, +\infty)$

2.175. **2.183.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite, spełniające jednocześnie obie nierówności:
 a) $|x - 2| < 3$ i $3 - |x| > 0$ b) $|x + 1| \geq 4$ i $|x - 2| - 4 < 0$
 c) $|x - 1,2| \leq 4$ i $-2 + |x| \leq 0$ d) $2|x - 0,4| < 5$ i $|x + 0,1| - 0,4 \leq 0$

- 2.177. **2.184.** Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $3 - |x + 3| > 0$, zaś zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 4| \geq 1$.
 a) Wypisz wszystkie liczby parzyste należące do zbioru A .
 b) Podaj przykład liczby wymiernej, która nie należy do zbioru B .
 c) Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $B - A$.
- 2.178. **2.185.** Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $4 - 2|x| > 0$, zaś zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 1| - 2 \leq 0$.
 a) Zaznacz na osiach liczbowych zbiory A i B .
 b) Wypisz wszystkie liczby naturalne należące do zbioru $A \cup B$.
 c) Podaj przykład liczby niewymiernej należącej do zbioru $B - A$.
 d) Wyznacz zbiór $A' \cap B'$.

2.186. Rozwiąż równania:

- a) $|3x + 7| = 2$ b) $|25x - 3| = 122$
 c) $|9 - 4x| = 21$ d) $|1 - 2x| = 13$
 e) $4x^2 - 1 = 8$ f) $|2x^2 - 17| = 1$

2.187. Rozwiąż równania:

- a) $|x| - 6 = 8$ b) $|x| - 2 = 1$
 c) $|x + 1| - 4 = 3$ d) $|x - 3| + 1 = 9$
 e) $|7 - |2x - 5|| = 6$ f) $|5 - |3x + 1|| - 2 = 0$

2.188. Rozwiąż nierówności:

- a) $|3x + 13| \leq 100$ b) $|12x - 2| < 50$
 c) $|4 - 5x| > 13$ d) $|17 - 6x| \geq 5$
 e) $1 - |2x - 7| \leq 0$ f) $3 - |2 - 5x| > 0$

2.189. Rozwiąż nierówności:

- a) $|x| - 1 \leq 2$ b) $|x - 1| - 3 \geq 4$
 c) $|x + 2| - 5 > 1$ d) $|x - 2| - 4 < 2$
 e) $|2x + 3| - 7 \leq 6$ f) $|3x - 2| - 6 \geq 1$
 g) $|8 - |5x + 2|| > 10$ h) $|4x + 2| + 1 < 3$

Własności wartości bezwzględnej

*2.168. **2.190.** Rozwiąż równania:

a) $|x| + |x^2 - x| = 0$

c) $|x - 1| + |x + 2| + |x - 5| = 0$

b) $|x - 3| + |x^2 - 9| = 0$

d) $|x + 2| = -1|(x - 2)(x + 2)|$

2.191. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $|x - 1| - |1 - x|$

b) $2 \cdot |2x - 6| - 4 \cdot |3 - x|$

c) $\frac{1}{|x - 2|} \cdot |2 - x|, x \neq 2$

d) $\left| \frac{4x - 16}{3} \right| \cdot \left| \frac{6}{4 - x} \right|, x \neq 4$

e) $\frac{(4x - 2)^2}{4 \cdot |1 - 2x|}$

f) $\frac{(3x + 6)^2}{3\sqrt{(x + 2)^2}}$

2.192. Rozwiąż równania, korzystając z własności wartości bezwzględnej:

a) $\sqrt{x^2} = 11$

b) $\sqrt{(x - 3)^2} = 1$

c) $\sqrt{(5 - x)^2} = 7$

d) $\sqrt{(9 + 2x)^2} = 3$

e) $(3x + 8)^2 = 25$

f) $(2x - 10)^2 = 36$

g) $16 - (5x - 1)^2 = 0$

h) $49 - (3 - 4x)^2 = 0$

2.193. Rozwiąż nierówności, korzystając z własności wartości bezwzględnej:

a) $\sqrt{x^2} > 1$

b) $\sqrt{x^2} \leq 3$

c) $\sqrt{(x - 5)^2} < 4$

d) $\sqrt{(4 - x)^2} > 6$

e) $\sqrt{(2x + 3)^2} \geq 3$

f) $\sqrt{(3x - 5)^2} < 7$

2.194. Rozwiąż nierówności, korzystając z własności wartości bezwzględnej:

a) $x^2 > 2$

b) $4x^2 \leq 1$

c) $(x + 1)^2 < 9$

d) $9(x - 2)^2 \leq 16$

e) $(5x - 3)^2 - 4 \geq 0$

f) $25 - (2x + 1)^2 > 0$

2.195. Sprawdź, czy istnieje rozwiązanie równania należące do podanego obok przedziału:

a) $|x + 3| + |x - 1| = 6, x \in (-\infty, -3]$

b) $|x - 5| + |x| = 7, x \in (0, 5)$

c) $|x + 3| - |2x - 2| = 8, x \in (1, +\infty)$

d) $|3x + 6| - |x - 1| = 5, x \in (-2, 1)$

e) $|6 - 2x| - |3x + 9| = 1, x \in (3, +\infty)$

f) $4|x + 1| + |5x + 10| = 4, x \in (-\infty, -2)$

***2.196.** Wykaż, że dane równania nie mają rozwiązań:

a) $|x| + |x + 2| = 1$

b) $|x - 3| + |x - 6| = 2$

c) $|x + 4| + |9 + x| = 3$

d) $|2x + 1| + |5 - 2x| = 4$

***2.197.** Wykaż, że dane równania nie mają rozwiązań:

a) $|x + 2| - |x| = 3$

b) $|x + 1| - |x + 4| = -5$

c) $|x + 10| - |x + 4| = 7$

d) $|2x - 8| - |5 - 2x| = -4$

4.9 $(3x-2)^2 - 5x - (3x+2)(3x-2) < (2-3x)^2 - 9x^2 + 4$ (odp.: $x > 0$)

4.10 $(x+1)^2 - (x+2)(x-2) - 3\left(x+\frac{2}{3}\right) > (x-2)^2 - x^2 + 5x$ (odp.: $x < -\frac{1}{2}$)

4.11 $-3x(x+5) + (2x+1)^2 + 2x \geq (x-3)^2 - 5x - 20$ (odp.: $x \geq 1$)

4.12 Wyznacz zbiór A liczb całkowitych jednocyfrowych spełniających tę nierówność:
 $\frac{x+2}{4} + (x+1)(x-1) < (x+2)^2 - \frac{4x-1}{3}$ (odp.: $x > -2$)

4.13 $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(x-3)(x+3)}{6} \leq x - 3,5 + \frac{1}{12}x^2$ (odp.: $x \geq 3$)

4.14 $\frac{2}{3} - \frac{x(3x+2)}{6} < \frac{1}{2}x(1+x) - \frac{(2x-1)(2x+1)}{4}$ (odp.: $x > \frac{1}{2}$)

4.15 $(3x+1)^2 - \frac{x-3}{2} \leq (3x-4)^2 - \frac{x+1}{3}$ (odp.: $x \leq \frac{29}{170}$)

4.16 $[x(x+1) - (x-1)^2]^2 < (\sqrt{5x^2} - 1)(\sqrt{5x^2} + 1) + 4(x+1)^2 - 2$ (odp.: $x > 0$)

4.17 $(\sqrt{2x} - \sqrt{3})(\sqrt{2x} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2x} - \sqrt{3})^2 < 2(\sqrt{6x} - 1) + x$ (odp.: $x > -4$)

4.18 $2 + 3\left[\frac{3x+2}{5} - 2\left(\frac{2x-2}{5} - 1\right)\right] \geq 8$ (odp.: $x \leq 6$)

4.19 $\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2 - (x+1)^2 < \frac{5}{4}(x-1)(x+1) - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$ (odp.: $x > 4,3$)

4.20 $\frac{2x-1}{3} + (x+2)(x-2) < x(x-1) - \frac{x+1}{2}$ (odp.: $x < 1\frac{10}{13}$)

4.21 $\frac{4}{3}x^2 - \frac{(2x-1)^2 - 3}{4} \leq x + \frac{(x+1)^2}{3}$ (odp.: $x \geq \frac{1}{4}$)

4.22 $3(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1) - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3-x}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

4.23 $16\left(0,25x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1-x}{3} \leq \frac{x(1-x)}{2} + \frac{3}{2}(x+2)(x-2)$ (odp.: $x \geq -4$)
 (odp.: $x \geq 3\frac{31}{38}$)

18

f) $(0,5x+1)^2 + 3\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right) \geq 2x + (x-1)(x+2)$

g) $(2x-5)^2 - 2(x-6)^2 > (x-4)(x+4) + x(x+10) - \sqrt{49}$

h) $3(x-\sqrt{2})(\sqrt{2}+x) + 6(x-1)^2 < -x - \frac{1}{2}(8-18x^2)$

i) $(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\left(x - \sqrt{\frac{49}{2}}\right) \geq x^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

203. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność:
 a) $(x+1)^2 - (x+2)(x-2) - 3\left(2x - \frac{5}{6}\right) \leq (x+5)^2 - x(x-3)$
 b) $\frac{x+4}{2} - \frac{x+4}{3} + \frac{5}{6} \geq x$
 c) $x - \frac{2(x+1)}{3} > 1+x$
 d) $x - \frac{3(x-1)}{6} > 3x+3$
 e) $(x-4)^2 - 3(1-x) > (x-3)(3+x) + 2$
 f) $(3-x)(3+x) < (3x-1)^2 - 10x(x+1)$
 g) $-x - \frac{x-8}{5} \geq 2(x+4)$
 h) $\frac{5(x-3)+2(2x-1)}{3} + \frac{2-5x}{6} \leq \frac{2(3x-2)-4(x-2)}{5} + \frac{3x-4}{2}$

204. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność:
 a) $\frac{(3x-4)(2x+3)}{3} - (x-2)(x+2) < (x+3)^2 + 8$
 b) $\frac{3(3x+5)}{5} - 1 \leq \frac{x+2}{3} - 3(3-x)$
 c) $(x-4)(x+4) - \frac{2}{3} > (x-2)^2 + \frac{x+4}{3}$
 d) $5x^2 - 1 - (x+3)^2 < (2x-5)(2x+5)$
 e) $\frac{3}{4}x - \frac{4x+1}{2} \geq -2x - \frac{3}{8}$
 f) $\frac{x}{2} > \frac{x-1}{3} - 1$
 g) $\frac{3}{4}x - (x+4) < \frac{2}{3}(x-2) - \frac{x-1}{6}$
 h) $5,5 - \frac{(2x-1)(2x+1)}{2} \geq \frac{x-2}{2} - 2(x+2)^2$

$$i) (x-3)^2 < 2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) - \frac{1}{3}(-3x+18) - x^2$$

$$j) \frac{3(2x-1)-4(3-x)}{4} + 6 > \frac{5(x+1)-2(x-3)}{3}$$

205. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność:

$$a) \frac{x-3}{2} - \frac{x+2}{3} < x - 4\frac{2}{3}$$

$$b) (x-4)^2 > (x-3)(x+3) - 3x$$

$$c) (x-2)^2 + 1 \geq \frac{x-8}{3} - (1-x)(1+x)$$

$$d) \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x \leq x$$

$$e) \frac{3(x+1)^2}{2} - x^2 < \frac{(x-2)(x+2)}{2} + x - 7,5$$

206. Podaj zbiór liczb naturalnych, które nie spełniają tej nierówności:

$$a) \left(\frac{4x-1}{3}\right)^2 - (x+2)^2 < \frac{7}{9}(x+2)(x-2) - \left(3\frac{2}{3}\right)^2$$

$$b) \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 - (x+2)^2 \leq \frac{5}{4}(x-1)(x+1) - \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$c) 1 - (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) + 3x^2 < (2x+1)^2 - 6$$

$$207. \text{ Czy liczba } a = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0,8 : \frac{4}{3}}{-\frac{1}{2}} \text{ spełnia nierówność: } \frac{2x-1}{2} \geq x - \frac{3x-4}{3} ?$$

$$208. \text{ Czy liczba } b = \left(\frac{2}{5}\sqrt{8} - \sqrt{2}\right)^2 \text{ spełnia nierówność:}$$

$$\frac{(2x-1)(x+3)}{2} - (x-1)^2 < 3 ?$$

210. Rozwiąż nierówność i przedstaw rozwiązanie na osi liczbowej:

$$\frac{(x+3)(x-3)}{2} - (x+2)^2 - 3x < (x-2)^2 - 1\frac{1}{2}x^2.$$

e) $cx - b = 3ax$,

f) $a(2-x) = b(x+3)$,

g) $2mx + 3m = 4x + 9$,

h) $mx - 2x + 1 = 4x - 2$.

5.64. Rozwiąż równania, w których niewiadomą jest x :

a) $17mx - 3am + 5bm - 8mx = 10mx - 5am + 7bm + mx$,

~~b)~~ $ax + bx = m + x$,

c) $a(x-1) - b = x - a$,

d) $(x-a)(x-b) = x^2 - a^2$,

f) $\frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}$,

e) $\frac{a-bx}{c} + x = \frac{cx-b}{c}$,

g) $\frac{ax-b^2}{a} - \frac{a(b-x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a$.

5.65. Rozwiąż równanie z niewiadomą x . Przeprowadź dyskusję istnienia rozwiązań i ich liczby ze względu na wartości parametrów.

a) $ax - a^2 = 2x - 4$,

d) $a^2x - 2ab - b^2 = a^2 - b^2x$,

b) $bx + ab^2 = abx + b^2c$,

e) $m^2x + 3n^2 = 3m^2 - n^2x - 2mnx$,

c) $mx - 5m + 5n = nx$,

f) $a(x+b) = c$.

5.66. Rozwiąż równanie z niewiadomą x . Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów.

a) $5(x-a) = 3(x+b)$,

c) $x + \frac{x}{a} = b$,

b) $2(3x-5a) + 9(2a-7b) + 3(5a-2x) = 0$,

d) $x - a = \frac{x}{b}$.