

**Zadanie 47.**

Kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym oraz  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ . Wykaż, że średnia arytmetyczna liczb:  $a = \sin \alpha$ ,  $b = \frac{1}{2}$  oraz

$c = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}$  jest równa  $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$ .

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{5}}{3} \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{\sqrt{5}}{6} \end{aligned}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = -\frac{4}{9} + 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cancel{\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}}{3} = \frac{\frac{2\sqrt{5} + 3 + \sqrt{5}}{6}}{3} = \frac{\sqrt{5}+1}{6}$$

**Zadanie 43.**

Dana jest liczba  $a = \sin 72^\circ$ . Zapisz liczbę  $1 + \operatorname{tg}^2 72^\circ$  w zależności od  $a$ .

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 72^\circ = 1 + \frac{\sin^2 72^\circ}{\cos^2 72^\circ} = \frac{1 + \frac{a^2}{1-a^2}}{1} = \frac{1-a^2+a^2}{1-a^2}$$

$$\frac{\cos^2 72^\circ + \sin^2 72^\circ}{\cos^2 72^\circ} = \frac{1}{\cos^2 72^\circ} = \frac{1}{1-\sin^2 72^\circ} = \frac{1}{1-a^2}$$

1123! Uzasadnij, że liczba  $2 \cdot (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)^2 - \operatorname{tg} 60^\circ$  jest całkowita.  $2(\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ) - \operatorname{tg} 60^\circ$   
 $= 2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} = 2$

1124! Sprawdź, czy liczba  $\frac{1}{3} \cdot (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ) - \frac{1}{8} \cdot (\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ)$  jest wymierna.

1125! Sinus kąta ostrego  $\alpha$  jest równy  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ . Uzasadnij, że liczba  $27^{\cos \alpha}$  jest całkowita.

1126! W Tangens kąta ostrego  $\alpha$  jest równy  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Oblicz kosinus kąta  $\alpha$ .

1127! Kąt  $ABC$  trójkąta  $ABC$  jest prosty, sinus kąta  $ACB$  jest równy 0,25, a bok  $AB$  ma długość 6. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

1129. Dla każdego kąta ostrego  $\alpha$  zachodzi równość  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Wykorzystując podany wzór, oblicz wartość tangensa kąta  $15^\circ$ . Wynik podaj w postaci  $a/b\sqrt{c}$ , gdzie  $a, b, c$  są liczbami całkowitymi.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \left( \frac{30^\circ}{2} \right) = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

1140. R Dane są liczby  $a = \frac{\cos 77^\circ \cdot \sin 77^\circ}{\sin 77^\circ}$ ,  $b = \cos 45^\circ \cdot \cos^2 54^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin^2 54^\circ$  i  $c = \cos 10^\circ \cdot \sqrt{1 + \tan^2 10^\circ}$ .

510.

a) Które z podanych liczb są wymierne?

 $a + b - c$ b) Liczbę  $|a - 2b|$  zapisz nie używając znaku wartości bezwzględnej.

$$|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

$$a = \frac{\cos 77^\circ \cdot \sin 77^\circ}{\sin 77^\circ} = 1$$

$$b = \cos 45^\circ \cdot \cos^2 54^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin^2 54^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 54^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 54^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

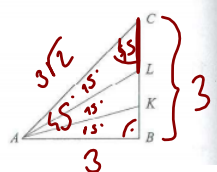
$$c = \cos 10^\circ \sqrt{1 + \tan^2 10^\circ} = \cos 10^\circ \sqrt{\frac{\sin^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ} + \frac{\cos^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ}} = \cos 10^\circ \cdot \frac{1}{\cos 10^\circ} = 1$$

$$\cos 10^\circ \cdot \frac{1}{\cos 10^\circ} = 1$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

1137. W Z wierzchołka A równoramiennego trójkąta prostokątnego ABC poprowadzono odcinki AK i AL (patrz rys. obok), które podzieliły kąt BAC na trzy kąty o równych miarach. Oblicz długość odcinka CL, jeżeli bok AB ma długość 3.

zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi



$$CL = BC - LB$$

$$\triangle LAB \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$LB = \sqrt{3}$$

$$CL = 3 - \sqrt{3}$$

