

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$

TU SIN

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie trójkącie leży w punkcie przecięcia się symetralnych boków,

w trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta,

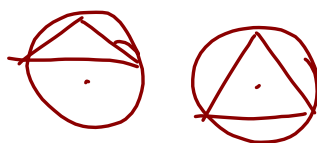
$$a^2 + b^2 > c^2$$

w prostokątnym w środku przeciwprostokątnej,

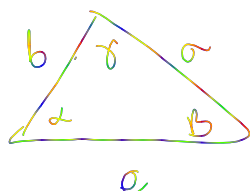
$$a^2 + b^2 = c^2$$

w rozwartokątnym na zewnątrz trójkąta.

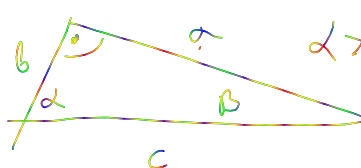
$$a^2 + b^2 < c^2$$



W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest dwusieczną kąta przy wierzchołku i symetralną podstawy, jest również środkową podstawy.



$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \leq \gamma$$



$$\alpha > \beta \Leftrightarrow a > b$$

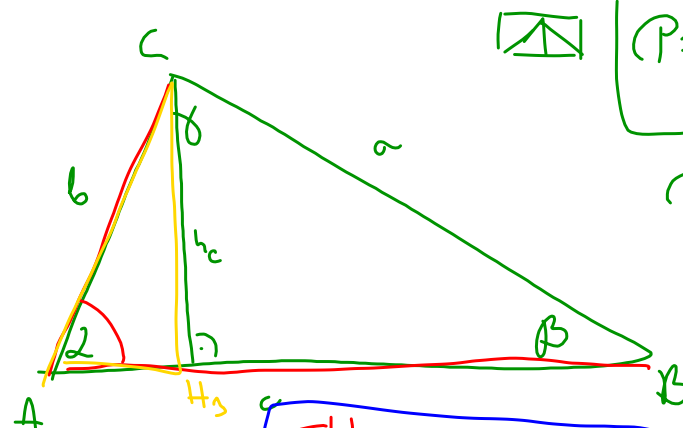


Diagram of a triangle with vertices A, B, C. Side lengths are labeled a, b, c. Angles are labeled α , β , γ . A height h_c is drawn from vertex C to the base AB, meeting it at H_c . The area P is indicated by a shaded region.

Area formulas:

$$P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

$$P = \frac{1}{2}$$

Law of Cosines:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Area formula using sine:

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Derivation:

From $\triangle ACH_c$: $\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = \sin \alpha \cdot b$

Area formula:

$$P = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Area formula:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Proof:

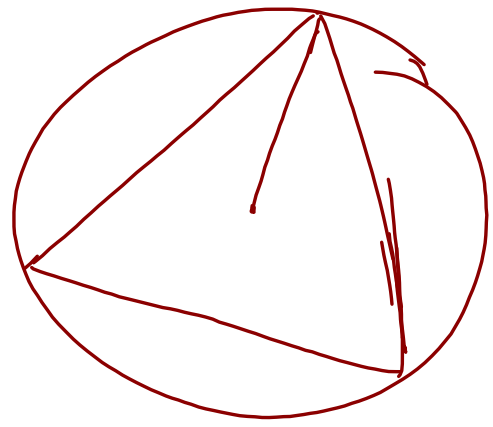
From the diagram, we have:

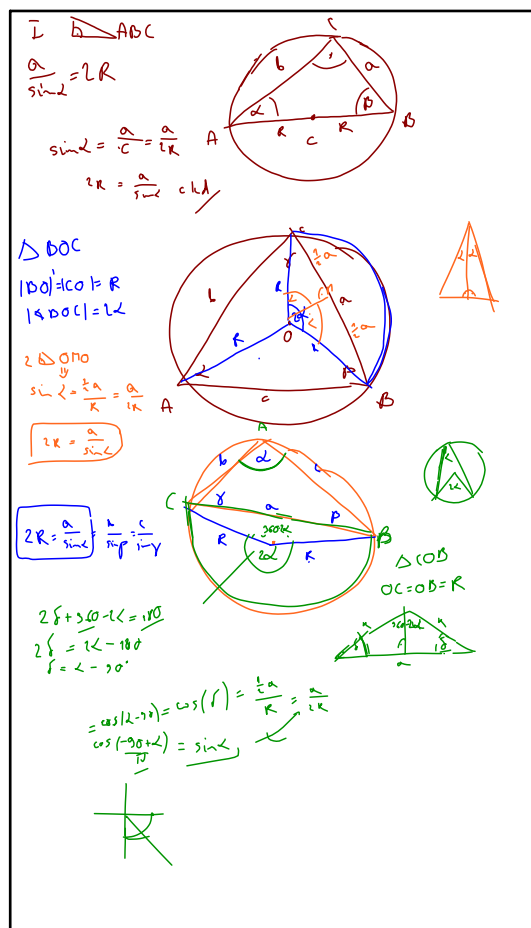
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Therefore:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$




6.109. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 6(1 + \sqrt{3})$ oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.110. W trójkącie ostrokątnym ABC tangens kąta przy wierzchołku C jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, a bok przeciwległy temu kątowi ma długość 12 cm.

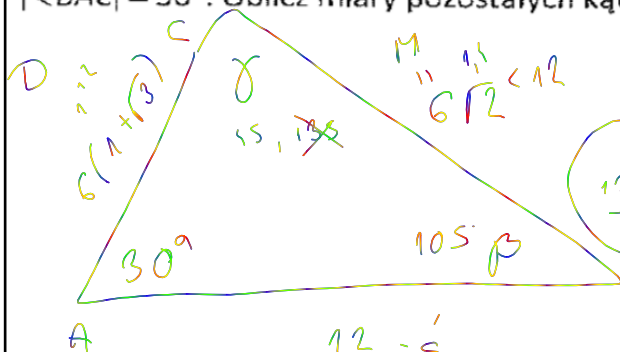
a) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.

b) W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i BF , które przecięły się w punkcie M . Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM .

6.111. Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A_1B_1C_1$ takie, że $\alpha = \alpha_1$ oraz $\beta + \beta_1 = 180^\circ$. Wykaż, że $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}$.

6.109. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 6(1 + \sqrt{3})$ oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

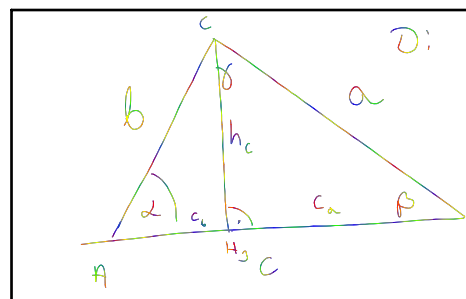
D: $6(1+\sqrt{3})$, $6\sqrt{2} < 12$, $2 \text{ TUSW w } \triangle ABC \Rightarrow$



$12\sqrt{2} = \frac{6(1+\sqrt{3})}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{6(1+\sqrt{3})}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^\circ \vee \gamma = 135^\circ$

D: b, c, α $\sin; a?$ $\in \mathbb{R}_+$



$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$
 $h_c = \sin \alpha \cdot b$
 $\cos \alpha = \frac{c_b}{b}$
 $c_p = \cos \alpha \cdot b$

$a^2 = h_c^2 + c_p^2 = b^2 \sin^2 \alpha + (c - c_b)^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2c \cdot c_b + c_b^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$

$a^2 = b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

analog.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$\frac{c_A}{b} = \cos(180^\circ - \alpha)$

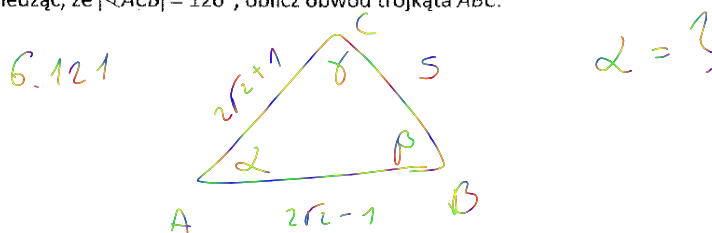
$c_A = -b \cdot \cos \alpha$

$a^2 = h_c^2 + (c + c_A)^2$

6.121. Boki trójkąta ABC mają długość: $|BC| = 5$ cm, $|AB| = (2\sqrt{2} - 1)$ cm oraz $|AC| = (2\sqrt{2} + 1)$ cm. Oblicz miarę kąta przy wierzchołku A .

6.122. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 7$ cm i $|AC| = 6$ cm. Oblicz długość środkowej CE .

6.123. W trójkącie ABC bok AB jest o 4 cm dłuższy od boku AC oraz $|BC| = 6$ cm. Wiedząc, że $\angle ACB = 120^\circ$, oblicz obwód trójkąta ABC .



Tw cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego z boków jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinus kąta pomiędzy nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$5^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 + (2\sqrt{2} + 1)^2 - 2 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$$

$$25 - 18 = 14 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = 60^\circ$$

6.124. W trójkącie ABC bok AC jest o 6 cm dłuższy od boku AB , a $|BC| = 5\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że $|\angle ABC| = 135^\circ$, oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

6.125. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 4$, $|BC| = |AB| - 2$ oraz $|\angle ACB| = 60^\circ$. Oblicz sinusy kątów CAB i ABC .

6.126. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC , $|AC| = |AB|$, poprowadzono środkowe CD i BE , które przecięły się w punkcie M . Wykaż, że $\cos(\angle DMB) = \frac{4}{5}$.

6.127. W trójkącie boki mają długość a , b , c , natomiast miary kątów są odpowiednio równe α , β , γ . Wykaż, że jeśli $a \cdot \cos \beta = b \cdot \cos \alpha$, to trójkąt ten jest równoramienny.

6.128. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt M taki, że $|BM| = \frac{1}{3}|MC|$. Wykaż, że sinus kąta CAM jest równy $\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

6.108. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3$ oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.109. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 6(1 + \sqrt{3})$ oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.110. W trójkącie ostrokątnym ABC tangens kąta przy wierzchołku C jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, a bok przeciwległy temu kątowi ma długość 12 cm.

a) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.

b) W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i BF , które przecięły się w punkcie M . Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM .

