

$$\boxed{[3, 5]}$$

$$3 \left[1, \frac{5}{3} \right]$$

$$a$$

$$-\frac{1}{a}$$

$$(4, 5)$$

$$k: y = \frac{5}{3}(x-4) + 5$$

$$L: y = -\frac{3}{5}(x-4) + 5$$

$$\vec{a} = [m, m] = m \left[1, \frac{m}{m} \right] \quad A(p, q)$$

$$\vec{a} \parallel k: y = \frac{m}{m}(x-p) + q$$

$$\vec{a} \perp L: y = -\frac{m}{m}(x-p) + q$$

ZADANIE 12 (5 PKT)

Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $A = (0, 2)$ i $B = (-2, 0)$ oraz jest styczny do prostej l w punkcie $C = (-1, a)$, gdzie $a > 1$. Wyznacz równanie prostej l .

$$S(-2, 2) \quad C(-1, 2+\sqrt{3}) \quad \vec{SC} = [1, \sqrt{3}]$$

$$\vec{SC} \perp l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) + 2+\sqrt{3}$$

$$L: \boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono płaszczyznę p wyznaczoną przez wysokość dolnej podstawy i ten z wierzchołków górnej podstawy, że płaszczyzna p z płaszczyzną podstawy graniastosłupa tworzy kąt ostry α taki, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pole przekroju graniastosłupa wyznaczonego przez płaszczyznę p jest równe S . Oblicz objętość graniastosłupa.

ZADANIE 14 (6 Pkt)

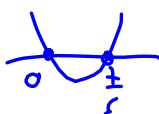
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{6} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{a}{b} \leq \frac{m}{6} \leq -\frac{b}{c} \end{cases} = \begin{cases} m(m-1) \neq 0 \\ 1 - 4(m^2 - m) > 0 \\ m^2 - m \leq \frac{m}{6} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ m \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ m \leq 6 \\ m \in \left(0, \frac{7}{6}\right) \end{cases}$$

$$4m^2 - 4m - 1 < 0$$

$$6m^2 - 6m \leq m \leq 6$$

$$\begin{cases} 6m(m - \frac{7}{6}) \leq 0 \\ m \leq 6 \end{cases}$$



$$\text{Odp. } m \in \left(0, \frac{7}{6}\right) \setminus \{1\}$$

ZADANIE 15 (7 Pkt)

Betonowy kanał wodny ma mieć przekrój w kształcie trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 2 m. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby przez kanał mogło przepłynąć jak najwięcej wody, czyli aby pole powierzchni przekroju kanału było największe. Oblicz to pole przekroju.

$$x^2 + h^2 = 4 \quad h = \sqrt{4 - x^2}$$

$$P = x \cdot h + 2 \cdot h = (2 + x) \cdot h$$

$$P = (2 + x) \cdot \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(2 + x)^2 \cdot (4 - x^2)}$$

$$y = \sqrt{x} \nearrow$$

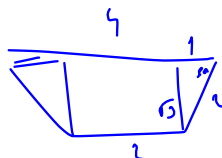
$$f(x) = (4 + 4x + x^2) \cdot (4 - x^2)$$

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 + 16x + 16 \quad (1) : x \in (0, 2) \quad (2) r$$

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2 + 16 = -4(x^3 + 3x^2 - 4) = -4(x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$(1) f'(x) = -4(x-1)(x+2)^2$$

(1)



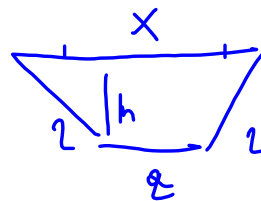
$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

ZADANIE 15 (7 pkt)

Betonowy kanał wodny ma mieć przekrój w kształcie trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 2 m. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby przez kanał mogło przepłynąć jak najwięcej wody, czyli aby pole powierzchni przekroju kanału było największe. Oblicz to pole przekroju.

$$P(x) = \sqrt{\frac{-(x+2)^3 \cdot (x-6)}{16}}$$

$$x \in (2, 6)$$



M.z. pod. ~~x~~, h

$$P'(x) = \left(\sqrt{\frac{-(x+2)^3 \cdot (x-6)}{16}} \right)' = \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{-(x+2)^3 \cdot (x-6)}{16}}} \right)' \cdot \left(-\frac{(x+2)^3 \cdot (x-6)}{16} \right)'$$

$$\left(\sqrt{u} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$\left(\sqrt{x} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' =$$

