

Zadanie 1. (1 pkt.) Parametr m dobrano tak, że rozwiązaniem nierówności $(4 - m^2) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x + (m + 3) \leq 0$ z niewiadomą x jest przedział postaci $(a; +\infty)$. Wynika stąd, że
 A. $a = -2$ B. $a = -1$ C. $a = 1$ D. $a = 2$.

Zadanie 2. (1 pkt.) Liczba $\operatorname{tg} 15^\circ + \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}$ jest równa

- A. 4 B. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Zadanie 3. (1 pkt.) Wykres funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AC i BD oraz odcinka AB , gdzie $A = (-1; 2)$, $B = (1; 2)$, $C = (-3; 6)$, $D = (3; 6)$. Wzór funkcji f to:

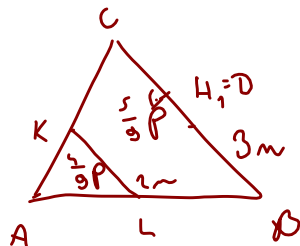
- A. $|x + 1| + |x - 1|$ B. $||x - 1| - 1|$ C. $||x - 1| + 1|$ D. $|x - 1| + 1$

Zadanie 4. (1 pkt.) Dziedzina funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x - a}{ax^2 + ax + 1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych. To oznacza, że liczba a nie może być równa

- A. $\sqrt{3}$ B. 0 C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$

Zadanie 5. (1 pkt.) Na bokach AC i AB trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-1; -1)$, $B = (11; 4)$ i $C = (5; 8)$, wybrano punkty K i L odpowiednio, w ten sposób, że $KL \parallel CB$. Pole trapezu $BCKL$ stanowi $\frac{5}{9}$ pola trójkąta ABC . Zatem

- A. $K = (1; 2)$ B. $K = (7; 2)$ C. $K = (3; 5)$ D. $K = (4; 6)$



$$|CB| = 2\sqrt{5}$$

$$r(CB): y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

D:

$$\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AC} = \frac{1}{3} [6; 9] = [2; 3]$$

$$K - A = [2; 3]$$

$$K = A + [2; 3] = [1; 2]$$

$$K = \frac{3}{2}$$

Zadanie 6. (2 pkt.) W urnie znajduje się 18 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 6 kul białych i 12 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych.

$$P(A) = \frac{22}{51}$$

$$2P$$

$$\begin{matrix} 6B \\ 12C \\ 18E \end{matrix}$$

$$= \frac{\binom{12}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{12 \cdot 11}{3 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{22}{51}$$

Zadanie 7. (2 pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + (1-n)^3}{\sqrt[3]{343n^6 + 64n^4}} =$$

$$= \lim \frac{1 - 3n + 3n^2 - n^3}{n^2 \left(\sqrt[3]{343 + \frac{64}{n^2}} \right)} = \frac{3}{\sqrt[3]{343}} =$$

$$\frac{3}{7}$$

Zadanie 8. (2 pkt.) W czworokącie wypukłym $ABCD$, długości boków AB, BC, AD, DC są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wykaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 9. (3 pkt.) Oblicz odległość między stycznymi do wykresu funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 24x + 15$, które są równoległe do prostej $y = 12x + 2$.

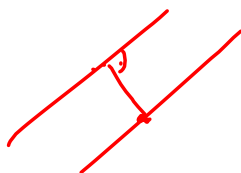
$$l_1: y =$$

$$l_2$$

$$\frac{125}{\sqrt{145}}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 24$$

$$f'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 24 = 12$$



$$d(l_1, l_2) = \frac{|C_k - C_l|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Zadanie 10. (3 pktów.) Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie $n^4 - 17n^2 + 7$ jest podzielne przez 9.

$$n^2(n^2 - 17) + 7 = \frac{(3l+1)(3l+1-17) + 7}{-16} =$$

$$n = 3k_1 + 1 \Rightarrow n^2 = (3k_1 + 1)^2 = 3l_1 + 1$$

$$n = 3k_2 + 2 \Rightarrow n^2 = (3k_2 + 2)^2 = 3l_2 + 4 = 3l_3 + 1$$

$$= 3l^2 - 3 \cdot 16 \cdot l + 3(-16) + 7 = 9l^2 - 9 - 3l(1 - 16) =$$

n	3	n^2	n^3
$\sim$	0	0	0
$\sim$	1	1	1
$\sim$	2	1	

n	n^2	n^3	n^4	n^5
$3k$	$9t_1$	$27t_1$	0	0
$3k+1$	$3t_1+1$	$3t_2+1$	1	1
$3k+2$	$3t_2+1$	$3t_2+2$	1	2

$$(3k+1)^3 = 3t_2 + 1$$

$$(3k+2)^3 =$$

n	n^2	n^3
$5k$	$15t_1$	$125t_1$
$5k+1$	$5t_1+1$	$5t_1+1$
$5k+2$	$5t_2+4$	3
$5k+3$	$5t_3+4$	2
$5k+4$	$5t_4+1$	4

$$(5k+4)^2$$

Zadanie 11. (3 pktów.) Niech P_n , dla liczby całkowitej $n \geq 0$, oznacza sumę odwrotności pierwiastków równania $\sqrt{3}x^2 - 9^{2n}x - 6^{3n} = 0$, z niewiadomą x . Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n) .

$n \geq 0$ x_1, x_2 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$\Delta_x \geq 0$

$$P_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{9^{2n}}{6^{3n}} = -\left(\frac{9^2}{6^3}\right)^n =$$

$$= -\left(\frac{3^4}{3^3 \cdot 2^3}\right)^n = -\left(\frac{3}{8}\right)^n \quad P_n = -\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

$$S = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 1 + \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{9}{64}\right) + \dots$$

$$S = \underbrace{-1}_{-1} - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} - \frac{27}{512} \quad q = \frac{3}{8}$$

$$S = \frac{-1}{1 - \frac{3}{8}} = \boxed{-\frac{8}{5}}$$

Zadanie 12. (4 pktów.) Liczba przekątnych n -kąta foremnego jest o 73 mniejsza niż liczba przekątnych $(n+2)$ -kąta. Oblicz n .

$n \geq 4$

$$n = 37 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 73}$$

Zadanie 13. (4 pktów.) Rozwiąż równanie $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos \frac{x}{2}$ w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \cos\left(x + \frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{5}{4}x\right) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{3}{4}x\right) = 0$$

$$a \cdot b = 0$$

$$a = 0 \vee b = 0$$