

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\sin^2(75^\circ)$ jest równa

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$(\sin(45^\circ+30^\circ))^2$$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Prosta o równaniu $25y + 16x - 15 = 0$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-2x+2x^3}{1-3x}$ w punkcie

A) $(1, -\frac{3}{2})$

B) $(1, -\frac{9}{2})$

C) $(-1, \frac{3}{4})$

D) $(-1, \frac{3}{2})$

$$y = -\frac{16}{25}x + \frac{15}{25}$$

$$f'(x) = \frac{-12x^3 + 6x^2 + 7}{(1-3x)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{25}{15}$$

$$\frac{25}{16}$$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowanie każdej z urn jest jednakowo prawdopodobne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej losowo jedną kulę. Wyciągnięta kula była biała. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula pochodziła z drugiej z tych urn, jest równe

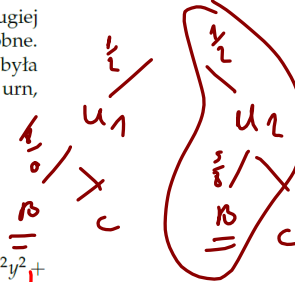
A) $\frac{13}{18}$

B) $\frac{25}{57}$

C) $\frac{50}{57}$

D) $\frac{5}{18}$

$$P(u_2/b) = \frac{P(u_2 \cap b)}{P(b)}$$



ZADANIE 4 (1 PKT)

Po przekształceniu wyrażenia algebraicznego $(x\sqrt{3} - y\sqrt{2})^4$ do postaci $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ współczynnik c jest równy

A) -6

B) $8\sqrt{6}$

C) 36

D) $-12\sqrt{6}$

$$\begin{matrix} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & & 6 & & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$6 \cdot (x\sqrt{3})^2 \cdot (y\sqrt{2})^2 = 6 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot y^2 = 36x^2y^2$$

ZADANIE 5 (2 PKT)

Dane są takie liczby dodatnie a i b , że ciąg $(\log a, \log \frac{a+b}{3}, \log b)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

$$2 \log \frac{a+b}{3} = \log a + \log b = \log ab$$

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$$

$$(a+b)^2 - 9ab = 0$$

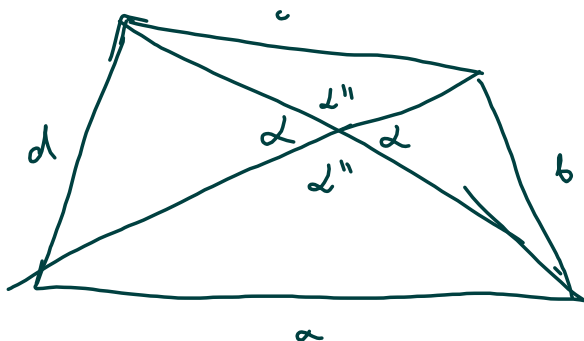
$$a^2 + b^2 - 7ab = 0 \quad |:ab > 0$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} - 7 = 0$$

ZADANIE 6 (3 PKT)

Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ dzielą go na cztery trójkąty. Wykaż, że jeżeli promienie okręgów opisanych na tych czterech trójkątach są równe, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



$$\alpha'' = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \sin \alpha'' = \sin \alpha$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha}$$

$$a = b = c = d \Rightarrow$$

$$a + c = b + d \Rightarrow$$

ZADANIE 7 (3 PKT)

Liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a^3 + 3a^2 + 3a = 8b^3 + 12b^2 + 6b$. Wykaż, że $a = 2b$.

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 8b^3 + 12b^2 + 6b + 1$$

$$(a+1)^3 = (2b+1)^3$$

$$y = x^3 \nearrow \Rightarrow \textcircled{R}$$

$$a+x = 2b+x$$

$$\underline{a = 2b}$$

ZADANIE 8 (4 PKT)

Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \dots$$

$$D: x \neq 1$$

określonej dla wszystkich wartości x , dla których prawa strona powyższego wzoru jest sumą wyrazów zbieżnego szeregu geometrycznego.

$$1) \int \frac{1}{|x-1|} < 1$$

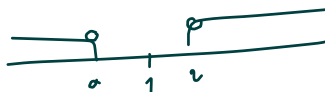
$$2) \int f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}$$

$$ZU = ?$$

$$q = \frac{1}{x-1}$$

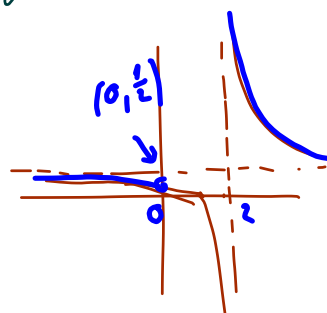
$$2.1) \frac{1}{|x-1|} < 1 \mid \cdot |x-1| > 0 \quad D: x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$|x-1| > 1$$



$$2.2) f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

$$(p, q) = (1, 1)$$

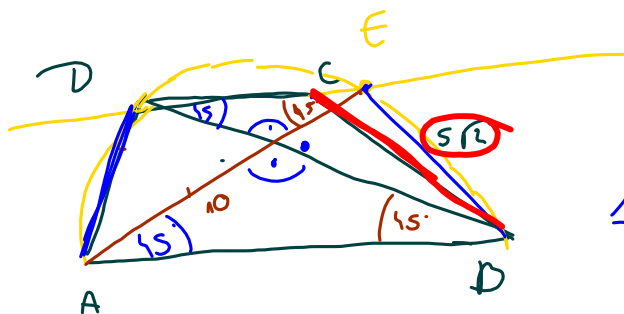


$$\text{odp: } y \in (\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{1\}$$

ZADANIE 9 (3 PKT)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|BC| = 5\sqrt{2}$. Okrąg opisany na trójkącie ABD przecina prostą CD w takim punkcie E , że $|AE| = 10$ i $|\angle AED| = 45^\circ$. Oblicz długość podstawy CD trapezu $ABCD$.

$$CD = ?$$

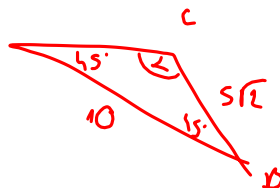


$$\triangle ADE \cong \triangle BAD$$

$$\triangle BDC$$

$$|AD| = |BE| \Rightarrow |AE| = |BD| = 10$$

$$\triangle BDC$$



$$\Rightarrow \frac{10}{\sin 2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 45} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 10$$

$$\angle C = 90^\circ$$

$$BC = DC = 5\sqrt{2}$$

ZADANIE 10 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{3}{4} \quad / : \sqrt{3} \cdot 2$$

$$\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

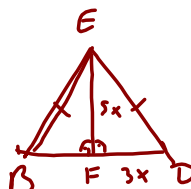
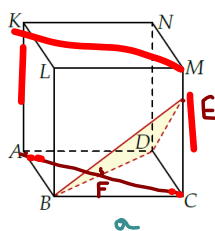
$$2x - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x - \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{30} + k\pi$$

$$\vee x = \frac{16\pi}{30} + k\pi$$

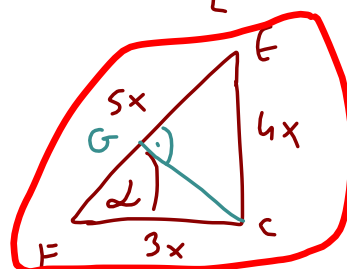
ZADANIE 11 (4 PKT)

Sześcian $ABCDKLMN$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD podstawy, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ (zobacz rysunek).



$$V = \frac{3375 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$BF = FD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Odległość wierzchołka C od płaszczyzny tego przekroju jest równa 6. Oblicz objętość sześcianu $ABCDKLMN$.

$$\sin 2 = \frac{4}{5} \quad d(C; p(BDE)) = 6$$

$$P_{ABCO} = \frac{1}{2} (FC)^2 = \frac{1}{2} \cdot 15^2 = \frac{225}{2}$$

$$a\sqrt{2} = 2FC = 15 \quad a = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2 = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

$$x = 2,5 \Rightarrow FC = 7,5$$

$$V = \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^3$$

ZADANIE 12 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których oba pierwiastki równania

$$(3m+1)x^2 - (4m+1)x + 12m = 0$$

są większe od 2.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{3} \\ m \in \left(-\frac{5+\sqrt{35}}{32}, \frac{\sqrt{35}-5}{32} \right) \\ m \in \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{3} \right) \\ m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right) \cup \left(-\frac{1}{8}, +\infty \right) \end{cases}$$

$$m \in \left(-\frac{5+\sqrt{35}}{32}, -\frac{1}{3} \right)$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Punkt S jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB . Okrąg o średnicy AB ma równanie $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 44 = 0$, a cięciwa tego okręgu równoległa do prostej AB i przechodząca przez punkt S zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 14 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o środku C , który przechodzi przez punkty A i B .

