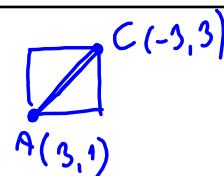


Zadanie 29 (2 pkt)Rozwiąż równanie $(x^2 - 9)(x^2 + 4x) = 0$.**Zadanie 30 (2 pkt)**Kąt α spełnia warunek: $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}$. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.**Zadanie 31 (2 pkt)**Dane są dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu $A = (3, 1)$, $C = (-3, 3)$. Oblicz obwód tego kwadratu.**Zadanie 32 (2 pkt)**Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$(2ac + bd)(ac + 2bd) \geq 9abcd$$

Zadanie 33 (2 pkt)W pudełku jest 9 kul, z czego 7 białych i 2 czarne. Do tego pudełka dołożono n kul białych. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z tego pudełka. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała, jest równe $\frac{20}{21}$. Oblicz n .

$$|AC| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{40} \cdot \sqrt{40} = 20$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha$$

$$3 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = \sin \alpha - \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha = -4 \cos \alpha \quad | : 2 \cos \alpha$$

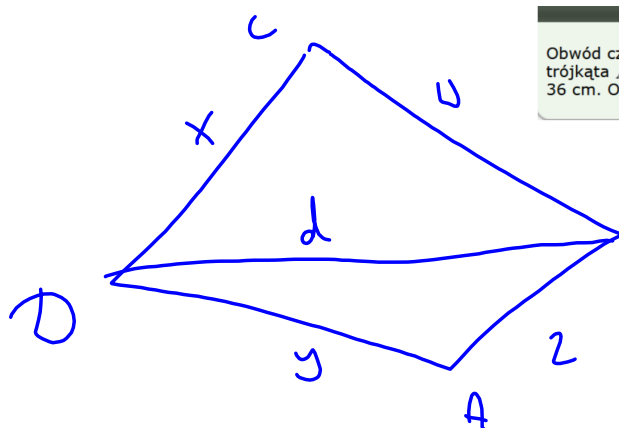
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$$

Zadanie 2 (5 pkt)

Suma pól dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa $234\pi \text{ cm}^2$. Oblicz promienie tych kół, jeżeli wiadomo, że obwód większego koła jest o 400% większy od obwodu mniejszego koła.

Zadanie 3 (5 pkt)

Obwód czworokąta wypukłego $ABCD$ jest równy 50 cm. Obwód trójkąta ABD jest równy 46 cm, a obwód trójkąta BCD jest równy 36 cm. Oblicz długość przekątnej BD .

**Zadanie 3 (5 pkt)**

Obwód czworokąta wypukłego $ABCD$ jest równy 50 cm. Obwód trójkąta ABD jest równy 46 cm, a obwód trójkąta BCD jest równy 36 cm. Oblicz długość przekątnej BD .

$$\begin{cases} u+x+y+z = 50 \\ y+z+d = 46 \\ u+x+d = 36 \end{cases}$$

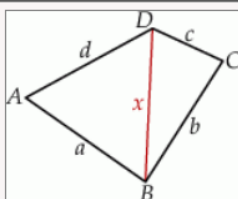
$$46 + 36 = 50 + 2d$$

$$82 = 50 + 2d$$

$$32 = 2d$$

$$d = 16$$

Zaczynamy od szkicowego rysunku.



Sposób I

Przy oznaczeniach z obrazka mamy

$$\begin{cases} a + b + c + d = 50 \\ a + d + x = 46 \\ b + c + x = 36. \end{cases}$$

Dodając dwa ostatnie równania stronami i korzystając z pierwszego mamy

$$\begin{aligned} a + d + b + c + x + x &= 46 + 36 \\ 50 + 2x &= 82 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16. \end{aligned}$$

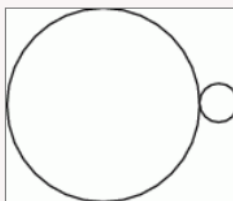
Sposób II

Jeżeli dodamy do siebie obwody trójkątów ABD i BCD to otrzymamy obwód czworokąta $ABCD$ oraz podwojoną długość odcinka DB . Zatem

$$2DB = 46 + 36 - 50 = 32 \Rightarrow DB = 16.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} w+x+y+z = 50 \\ y+z+d = 46 \\ w+x+d = 36 \end{cases} & \begin{aligned} y+z &= 46-d \\ w+x &= 36-d \end{aligned} \\ & \underline{36-d + 46-d = 50} \\ & \underline{82-2d = 50} \end{aligned}$$

Oznaczmy promień dużego koła przez R a małego przez r .



Wiemy zatem, że

$$2\pi R = 2\pi r + 400\% \cdot 2\pi r \quad / : 2$$

$$\pi R = \pi r + 4 \cdot \pi r$$

$$\pi R = 5\pi r \quad / : \pi$$

$$R = 5r.$$

Ponadto

$$\pi R^2 + \pi r^2 = 234\pi$$

$$\pi(5r)^2 + \pi r^2 = 234\pi \quad / : \pi$$

$$26r^2 = 234 \quad / : 26$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3.$$

Stąd $R = 15$. Oczywiście informacja o tym, że koła są styczne nie była do niczego potrzebna.

Odpowiedź: 3 cm i 15 cm

Suma pól dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa $234\pi \text{ cm}^2$.
Oblicz promienie tych kół, jeżeli wiadomo, że obwód większego koła jest o 400% większy od obwodu mniejszego koła.

$$2\pi R = 2\pi r + 400\% 2\pi r \quad / : 2$$

$$\pi R = \pi r + 4\pi r$$

$$\pi R = 5\pi r$$

$$R = 5r$$

$$\boxed{R = 15}$$

$$\pi R^2 + \pi r^2 = 234\pi$$

$$\pi(5r)^2 + \pi r^2 = 234\pi \quad / : \pi$$

$$(5r)^2 + r^2 = 234$$

$$26r^2 = 234 \quad / : 26$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

Zadanie 23 (1 pkt)

Sześć liczb: 19, 15, 13, a , 7, 1, tworzących zestaw danych, jest uporządkowanych malejąco. Mediana tego zestawu sześciu danych jest równa medianie zestawu pięciu danych: 15, a , 8, 2, 9. Zatem

A) $a = 8$ B) $a = 9$ C) $a = 10$ D) $a = 13$

Handwritten work:

$\frac{13+a}{2} = 8$ (crossed out)
 $\frac{13+a}{2} = a$
 $13 \leq a \leq 7$ (boxed)
 $a = 13$ (boxed)
 $\frac{13+a}{2} = 9$ (crossed out)
 $a = 13$ (crossed out)

Ordering of the second set of data:

$a \ a \ a \ a \ a$
 $2 \ 8 \ 9 \ 15$
 $2 \ a \ 8 \ 9 \ 15$
 $2 \ 8 \ a \ 9 \ 15$
 $2 \ 8 \ 9 \ a \ 15$

Zadanie 32 (2 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$(2\underbrace{ac}_x + \underbrace{bd}_y)(\underbrace{ac}_x + 2\underbrace{bd}_y) \geq 9\underbrace{abcd}_{xy}$$

$$(2x+y)(x+2y) \geq 9xy$$

$$2x^2 + 4xy + xy + 2y^2 - 9xy \geq 0$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

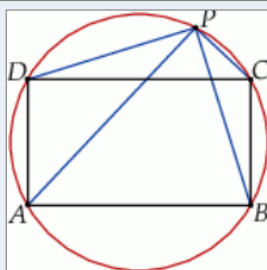
$$(x-y)^2 \geq 0$$

$$(ac-bd)^2 \geq 0$$

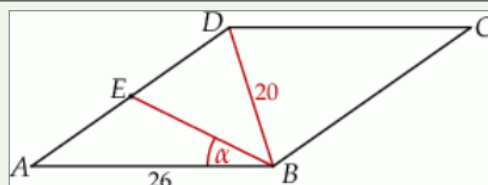
↑
TŁA
kud → it ~ 0
end

Zadanie 34 (2 pkt)

Punkt P należy do okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$. Wykaż, że $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.

**Zadanie 35 (5 pkt)**

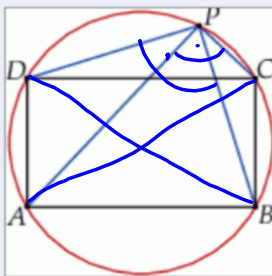
Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 26, w którym przekątna BD ma długość równą 20. Punkt E jest środkiem boku AD (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta α , jaki odcinek BE tworzy z bokiem AB rombu $ABCD$.

Zadanie 34 (2 pkt)

Punkt P należy do okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$. Wykaż, że $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.

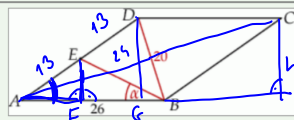


$$\begin{aligned} &Z: AC = BD = 2r \\ &\widehat{DCB} = \widehat{DPB} = 90^\circ \\ &\widehat{ADC} = \widehat{APC} = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \triangle APC &\Rightarrow PA^2 + PC^2 = AC^2 \\ PB^2 + PD^2 &= BD^2 \wedge AC = BD \Rightarrow \text{TEZA} \\ &\quad \text{c.d.} \end{aligned}$$

Zadanie 35 (5 pkt)

Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 26, w którym przekątna BD ma długość równą 20. Punkt E jest środkiem boku AD (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta α , jaki odcinek BE tworzy z bokiem AB rombu $ABCD$.

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 26 = 260$$

$$P_{ABCD} = 26 \cdot h = 260 \Rightarrow h = \frac{260}{26} = 10$$

$$\triangle AGD \sim \triangle AFE \quad k=2 \quad EF = \frac{1}{2}h = \frac{10}{2} = 5$$

$$2 \triangle AEF \Rightarrow \frac{13}{AF} = \frac{10}{5} \Rightarrow AF = \frac{13 \cdot 5}{10} = \frac{13 \cdot 1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$\frac{13}{13} \cdot \frac{10}{13} = \left(\frac{2 \cdot 17}{13} \right)^2$$

$$AF = \frac{119}{13}$$

$$AB = 26$$

$$AF = \frac{119}{13} \quad FB = 26 - \frac{119}{13} = \frac{219}{13}$$

$$\left(\frac{219}{13} \right)^2 + \left(\frac{10}{13} \right)^2 = ED^2$$

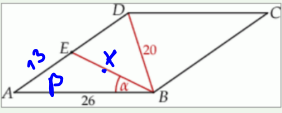
$$\frac{219^2 + 10^2}{13^2} = ED^2 \quad ED = \sqrt{369}$$

$$\sin \angle = \frac{\frac{10}{13}}{\frac{\sqrt{369} + 1101}{13^2}}$$

$$\sin \angle = \frac{10}{13\sqrt{369}}$$

Zadanie 35 (5 pkt)

Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 26, w którym przekątna BD ma długość równą 20. Punkt E jest środkiem boku AD (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta α , jaki odcinek BE tworzy z bokiem AB rombu $ABCD$.

Handwritten solution:

$P_{ABCD} = 480$

$P_{ABD} = \frac{1}{2} 480 = 240$

$P_{AEB} = \frac{1}{2} P_{ABD} = 120$

$P_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 13 \cdot \sin \beta = 120$

$\sin \beta = \frac{120}{169}$

$\cos \alpha = 1 - \frac{120}{169} = \frac{49}{169}$

$BE^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \beta =$

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

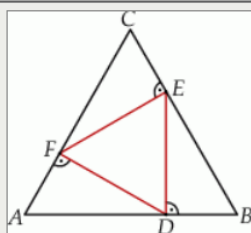
Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 60 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{5}{12}$. Oblicz pole tego trójkąta oraz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.

Rozwiązanie (1021818)



Podobne zadania

Na bokach AB, BC, CA trójkąta równobocznego ABC wybrano kolejno punkty D, E, F tak, że $DE \perp AB, EF \perp BC, FD \perp AC$.



Wykaż, że trójkąt DEF jest trójkątem równobocznym o polu trzy razy mniejszym od pola trójkąta ABC .

Rozwiązanie (1065621)

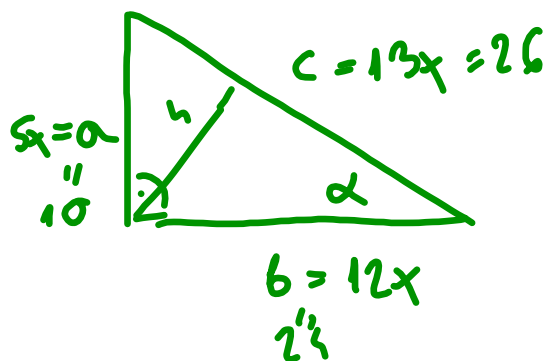


Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 60 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{5}{12}$. Oblicz pole tego trójkąta oraz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.

Rozwiązanie (1021818)



Podobne zadania



$$5x + 12x + 13x = 60$$

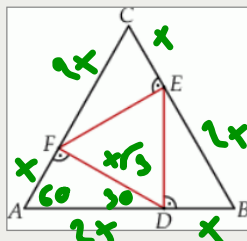
$$30x = 60$$

$$x = 20$$

$$P = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot h$$

$$h = \frac{120}{13} = 9 \frac{3}{13}$$

Na bokach AB, BC, CA trójkąta równobocznego ABC wybrano kolejno punkty D, E, F tak, że $DE \perp AB$, $EF \perp BC$ i $FD \perp AC$.



Wykaż, że trójkąt DEF jest trójkątem równobocznym o polu trzy razy mniejszym od pola trójkąta ABC .

Rozwiązanie (1065621)



$$2 : |\angle CAD| = |\angle ADB| = |\angle BCA| = 60^\circ$$

$\Rightarrow$

$$|\angle ADF| = |\angle BED| = |\angle CFE| = 30^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$$

$\Rightarrow$

$$|\angle FDE| = |\angle DEF| = |\angle DFE| = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \text{ i t.k.}$$