

$\checkmark$ Ω - losujemy 10 razy
 $\checkmark$ A -
 $\checkmark$ B - > 125
 $\checkmark$ $A \cap B$ - p. 1 i w. 125
 $\checkmark$ $\overline{A \cap B} = 111$
 $\checkmark$ $\overline{B}$

$P(A/B) = \frac{A \cap B}{\overline{B}} = \frac{111}{501} =$

1.....9

$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{3} \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$\overline{A} = 9 \cdot 8 \cdot 7$

$\overline{B} = \overline{A} - 3$

$\frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot P \cdot 12} \rightarrow P \frac{4}{8}$
 $+ \frac{7 \cdot 5 \cdot 2}{1 \cdot N \cdot 12} \quad N \frac{2}{6}$

Zadanie 1. (0-1) $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-7)$ jest równy
 A. -3 B. -2 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 2. (0-1) Niech $\sin \alpha = \sin \beta$, gdzie $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ oraz $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Wówczas $\sin(2\alpha + \beta)$ jest równy
 A. 0 B. $\sin \alpha$ C. $-\sin \alpha$ D. $3 \sin \alpha$

$(\sqrt{2}+1)^x = (5\sqrt{2}-7)$
 $(\sqrt{2}+1)^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$
 $(\sqrt{2}+1)^{-3} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3\sqrt{2}+4+3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}+7}$
 $(\sqrt{2}+1)$

$2\alpha + \beta =$
 $\angle = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \angle$
 $\beta = \frac{3\pi}{2} + x$

$2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{3\pi}{2} + x = \frac{3\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x$

$\sin(2\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \angle\right) = \sin(-\angle) = -\sin \angle$

Zadanie 3. (0-1)

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach jest większy od 10, o ile suma tych oczek jest mniejsza od 10?

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{17}{36}$

C. $\frac{11}{30}$

D. $\frac{11}{17}$

Zadanie 4. (0-1)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x}{x^2 + a}$. Dla jakich wartości parametru a miejscem zerowym funkcji

$y = f'(x)$ jest $2\sqrt{2}$?

A. Dla $a = -8$ oraz dla $a = 8$

B. Dla $a = -4$ lub $a = 4$

C. Tylko dla $a = 4$

D. Tylko dla $a = 8$

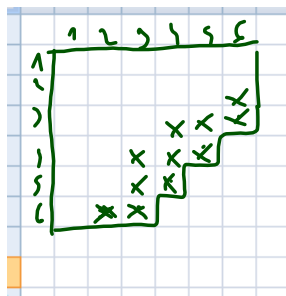
$$f'(2\sqrt{2}) = \frac{2a - 16}{17} = 0 \quad \boxed{a = 8}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + a) - 4x^2}{(x^2 + a)^2} =$$

$$\frac{2a - 4x^2}{17} = 0$$

$$\bar{\pi} = 30$$

$$k_1 \cdot k_2 > 10$$



Zadanie 5. (0-1)

Dany jest ciąg $a_n = \frac{11}{n+1} - \frac{10}{n-1}$ określony dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$.

Ile wyrazów tego ciągu przyjmuje wartości ujemne?

A. 18

B. 19

C. 20

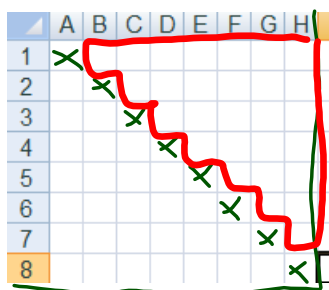
D. 21

$$a_n < 0 \quad \frac{11}{n+1} - \frac{10}{n-1} < 0 \quad \left| \frac{n \geq 2}{(n+1)(n-1) > 0} \right.$$

$$\frac{11n - 11 - 10n - 10}{(n+1)(n-1)} < 0$$

$$n < 21$$

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 20\}$$



K+ P+

8x8

$$\sqrt{1^2} = 1^2$$

K+ P-

8x8 - 8

$$\sqrt{1^2} = 1^2$$

K- P-

$$\frac{8 \times 8 - 8}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{14}{2}$$

Zadanie 6. (0-2)

W kwiaciarni są trzy gatunki róż. Na ile sposobów można skomponować bukiet złożony z dziewięciu róż? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jednostki otrzymanego wyniku.

$$9 \times a$$

$$8 \times a \quad 1 \times b$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 3 \cdot 2 \end{array}$$

$$7 \times a \quad 2 \times b$$

$$\begin{array}{r} 7 \times a \quad 1 \times b \quad 1 \times c \\ \hline \end{array} \quad c \text{ (3)}$$

$$abc = acb$$

$$6 \times 3$$

$$6 \times 2 \times 1$$

$$5 \times 4 \times 0$$

$$5 \times 3 \times 1$$

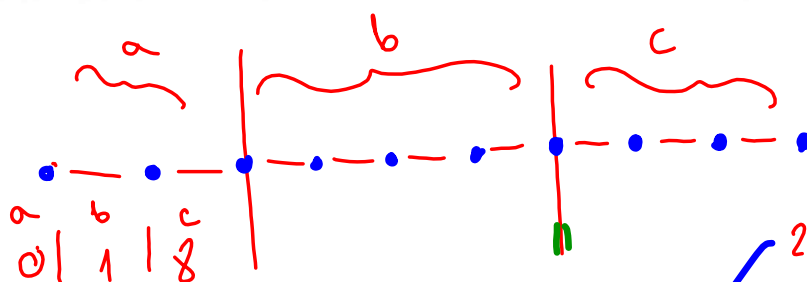
$$\begin{array}{r} 5 \times 2 \times 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow 3 \times$$

$$\boxed{51}$$

$$a \ b \ c \quad a \ c \ b$$

Zadanie 6. (0-2)

W kwiaciarni są trzy gatunki róż. Na ile sposobów można skomponować bukiet złożony z dziewięciu róż? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jednostki otrzymanego wyniku.



$$0 \times a \quad 0 \times b \quad 9 \times c$$

$$2 \times 2 \times 10 \quad k - p -$$

$$1 \times 10 \times 11$$

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45 \quad C_{10}^1 = \binom{10}{1} = 10$$

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{2}$$

$$+$$

$$\binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

5K 3M

PKPKPKKK

M--M--M--

M--M--M-- x2

M--M--M-- x2

20 · 8! · 5!

M--M--M-- x4

M--M--M-- x3

M--M--M-- x2

M--M--M-- x1

↓

↓

↓

↓

↓

Ⓜ

Ⓚ

Ⓜ

Ⓚ

Ⓜ

⋮

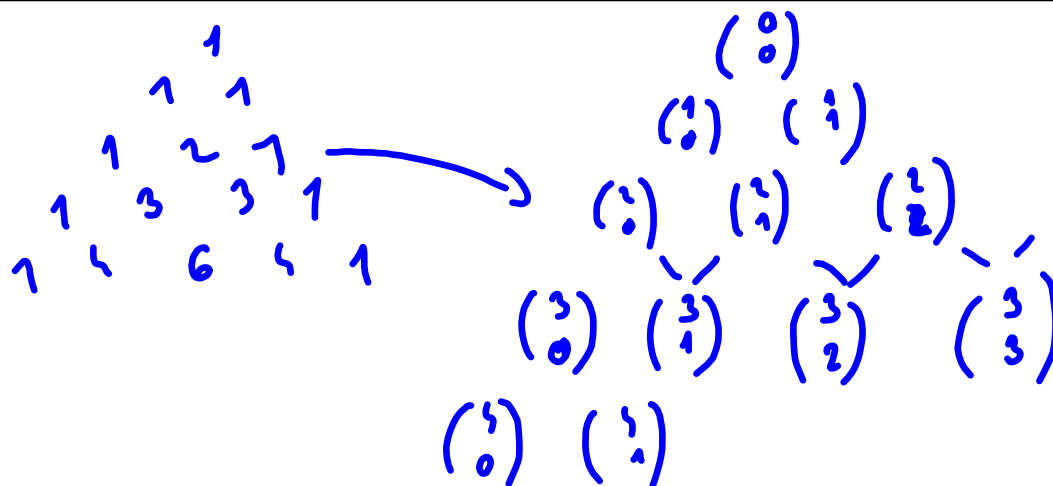
K, K, K

ⓀⓀⓀ x4

ⓀⓀ Ⓚ x4 x3

Ⓚ Ⓚ Ⓚ x $\binom{4}{3} = 4$

20

**Zadanie 6. (0-2)**

W kwiaciarni są trzy gatunki róż. Na ile sposobów można skomponować bukiet złożony z dziewięciu róż? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

a b c

9 0 0

3

8 1 0

6

7 2 0

6

7 1 1

3

6 3 0

6

6 2 1

6

5 4 0

6

5 3 1

6

5 2 2

3

4 4 1

3

4 3 2

6

3 3 3

1

Zadanie 7. (0-2)Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 1$ i $y > 1$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} \leq \sqrt{\log(xy)^2}$$

$$1) \quad L > 0 \quad P > 0$$

$$\frac{\log x}{\log x} > 0$$

$$\underbrace{\log x}_a + \underbrace{\log y}_b + 2\sqrt{\log x \cdot \log y} - 2(\log xy) \leq 0$$

$$-2(\log x + \log y) \leq 0$$

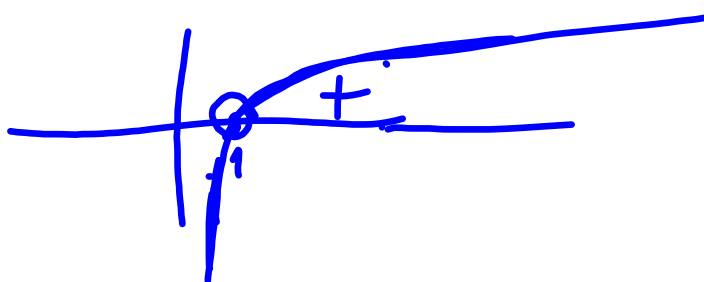
$$a + b + 2\sqrt{ab} - 2a - 2b = -a - b + 2\sqrt{ab} =$$

$$= -(a + b - 2\sqrt{ab}) = -(r_1 - r_2)^2 \leq 0 \quad \forall a, b > 0$$

$$y = \log x$$

$$x > 1$$

$$10^0 = x > 1$$



Zadanie 8. (0-3)

Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $W(x) = ax^3 + bx - 1$, jeśli wiadomo, że jednym z miejsc zerowych tego wielomianu jest 1 oraz $W(x)$ przy dzieleniu przez $x - 2$ daje resztę -5 .

$$W(1) = 0 \quad \cdot \quad a + b - 1 = 0$$

$$W(2) = -5$$

$$8a - 2b - 1 = -5$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = -1 \\ b = 2 \end{matrix}}$$

Zadanie 9. (0-3)

Rozwiąż równanie $\log_x 2\sqrt{2} - 2 = (\log_x \sqrt{2})^2$.

$$\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}}$$

$$3 \log_x \sqrt{2} - 2 = (\log_x \sqrt{2})^2$$

t

$$-t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$\log_x \sqrt{2} = 1 \quad \vee \quad \log_x \sqrt{2} = 2$$

$$x_1 = \sqrt{2}$$

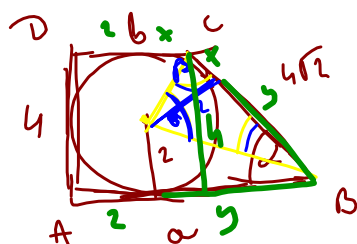
$$x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}^2 = 5 \quad 5\sqrt{5} = \sqrt{5}^3$$

Zadanie 10. (0-4)

W trapez prostokątny $ABCD$ o polu równym $8(1 + \sqrt{2})$ wpisano okrąg o promieniu 2. Wyznacz miarę kąta ostrego w tym trapezie.



$$\alpha = ?$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot 4 = 8(1 + \sqrt{2})$$

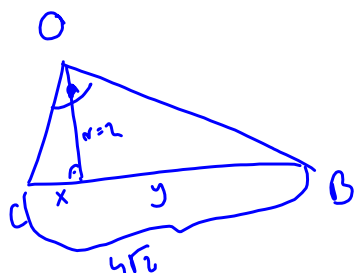
$$4 + (a+b) = a + b = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$cB = 4\sqrt{2}$$

$$90^\circ = \gamma = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha + \beta = 180$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$



$$\begin{aligned} xy &= h^2 = 4 \\ x + y &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x+y=4\sqrt{2}$$

$$x \cdot y = 4$$

$$\frac{4}{y} + y = 4\sqrt{2}$$

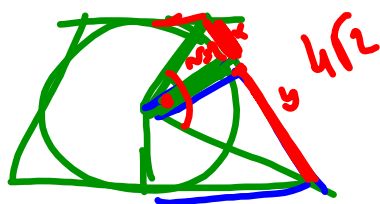
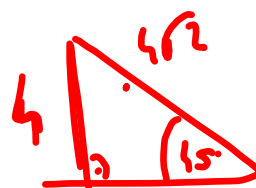
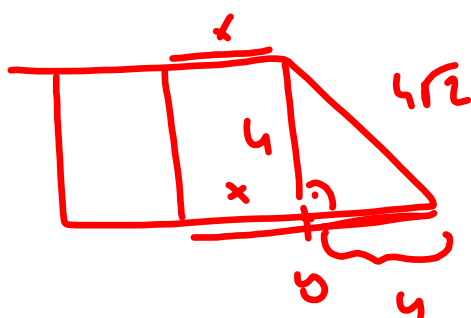
$$y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$$

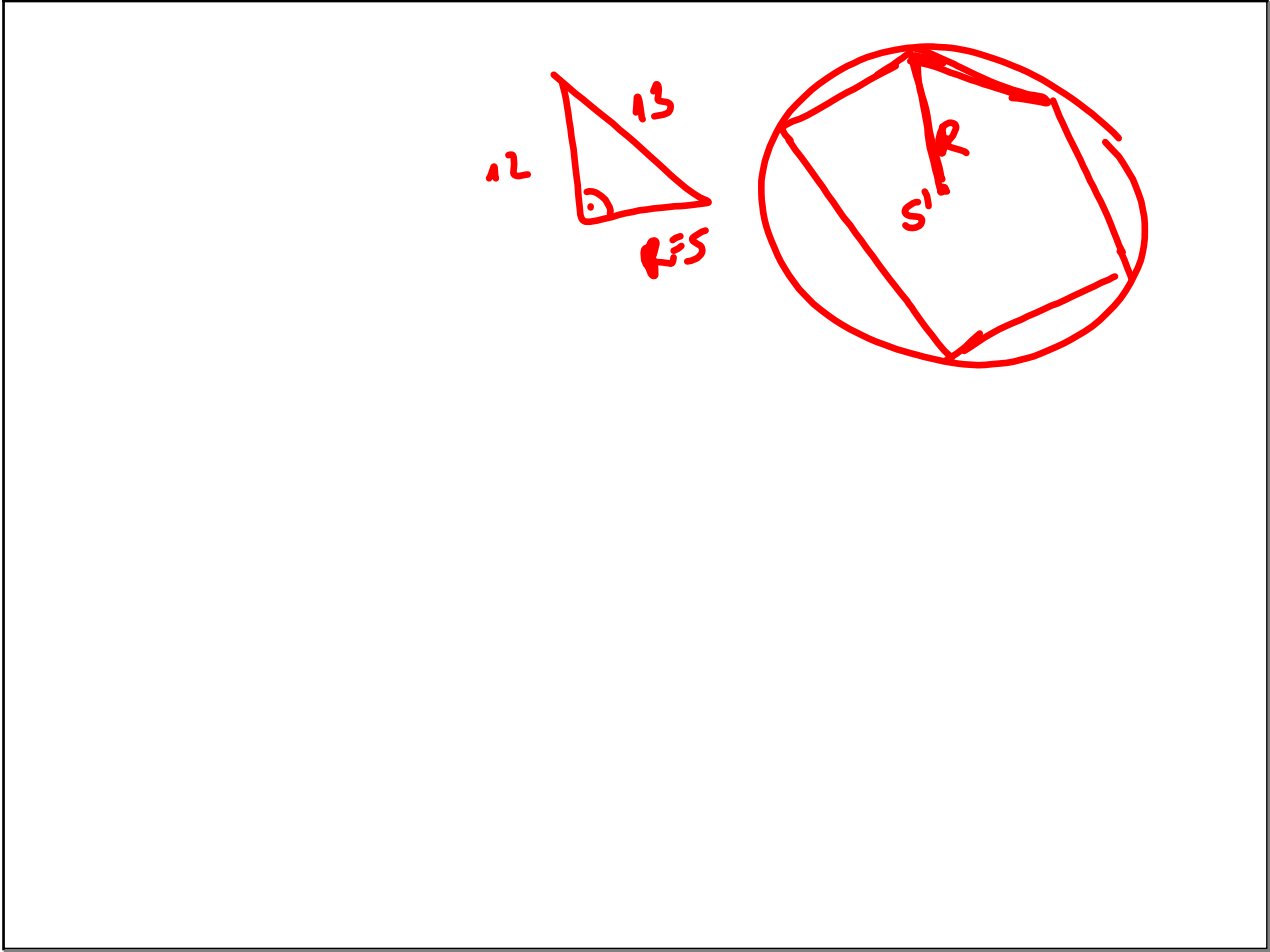
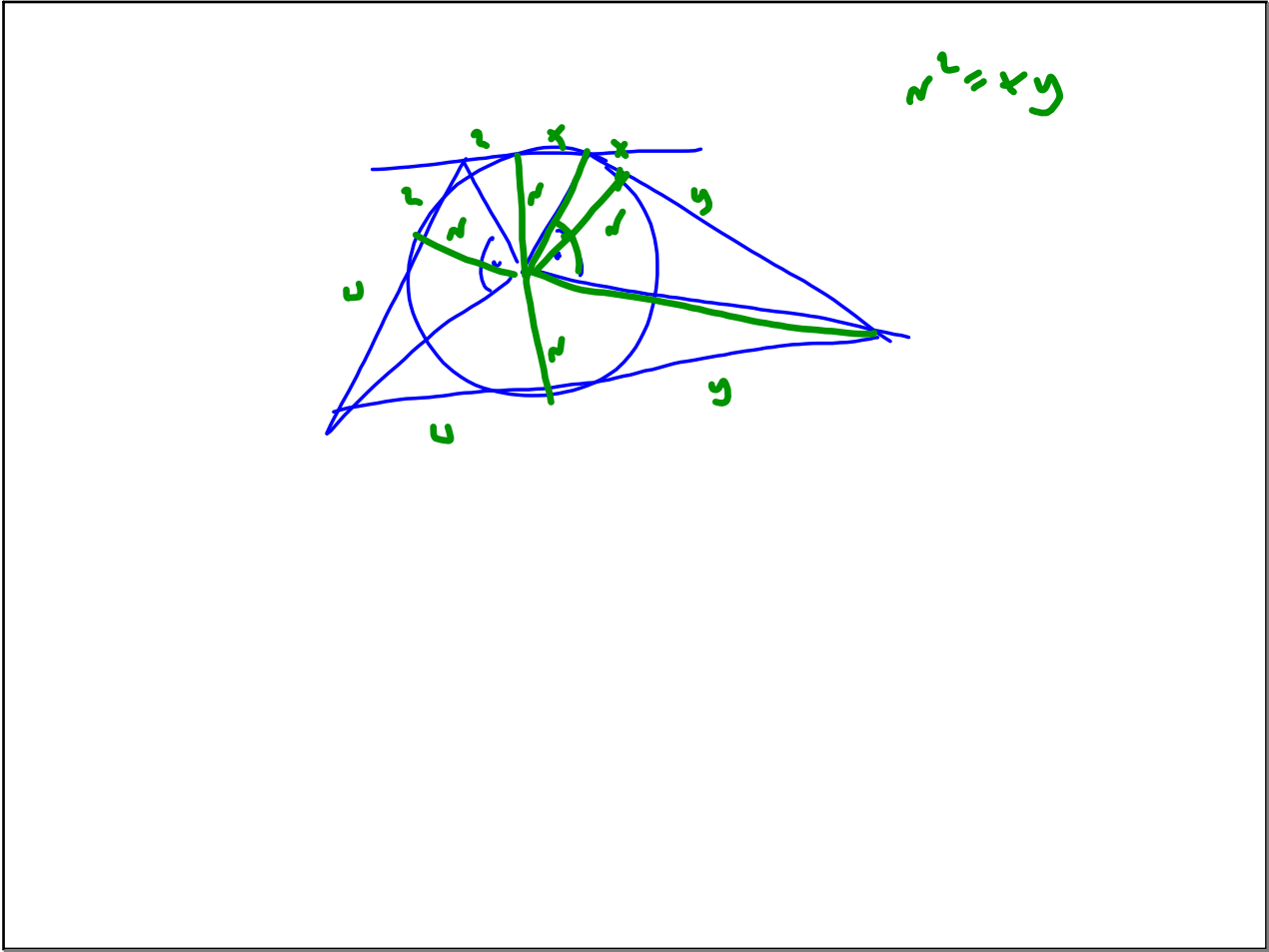
$$\Delta = 16 \cdot 2 - 16 = 16$$

$$x = \frac{4\sqrt{2} - 4}{2} = 2\sqrt{2} - 2$$

$$y = 2\sqrt{2} + 2$$

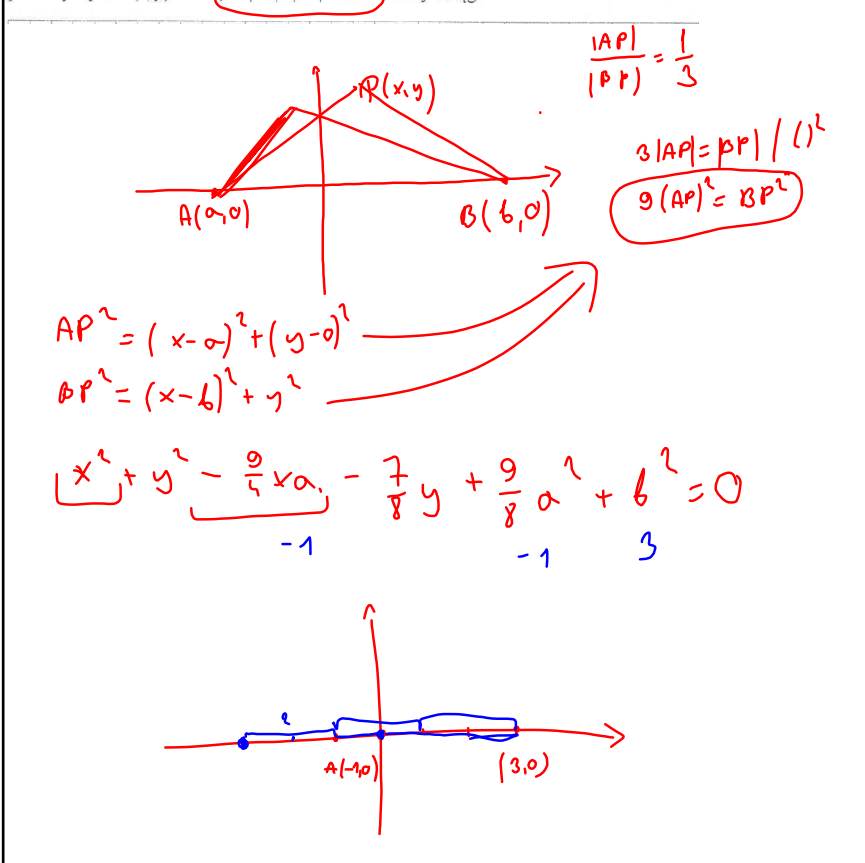
$$\boxed{y - x = 4}$$





Zadanie 11. (0-4)

Dany jest odcinek o końcach $A = (a, 0)$ i $B = (b, 0)$, gdzie $a \neq b$. Uzasadnij, że zbiór punktów płaszczyzny $P = (x, y)$ takich, że $|AP| : |BP| = 1 : 3$ tworzy okrąg.



$$9(x-a)^2 + 9y^2 = (x-b)^2 + y^2$$

$$8x^2 - 18xa + 9a^2 + 2xb + 8y^2 - b^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{4}xa + \frac{9}{8}a^2 + y^2 + \frac{1}{4}xb - \frac{1}{8}b^2 = 0$$

$$x^2 - 2x\left(\frac{9}{8}a - \frac{1}{8}b\right) + y^2 + \frac{9}{8}a^2 - \frac{1}{8}b^2 = 0$$

$$r^2 = -c + a^2 + b^2 = \left(\frac{9a-b}{8}\right)^2 + 0 - \frac{9a^2 - b^2}{8} = \frac{9a^2 - 18ab + b^2}{64}$$

$$O\left(\left(\frac{9a-b}{8}, 0\right), r\right)$$

$$p = \frac{9a-b}{8}$$

$$q = 0$$

$$r = \frac{9a^2 - 18ab + b^2}{64} = \frac{9(a-b)^2}{64} > 0$$

$$a \neq b \Rightarrow r = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x \text{ (} \div 8 \text{)} = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 - 8 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 \text{ (} = +9 \text{)}$$

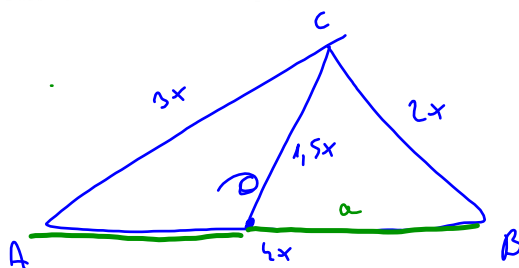
$$r^2 = a^2 + b^2 \text{ (} \neq 0 \text{)}$$

Zadanie 12. (0-4)

Dany jest stożek o objętości V . Jego wysokość podzielono na trzy równe części i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy stożka. Oblicz objętość środkowej części stożka.

Zadanie 13. (0-5)

Dany jest trójkąt ABC , w którym stosunki długości boków wynoszą $|BC| : |AC| = 2 : 3$ oraz $|BC| : |AB| = 1 : 2$. Na boku AB zaznaczono punkt D w ten sposób, że $|BC| : |CD| = 4 : 3$. Wyznacz $|AD| : |BD|$.



$$\frac{AD}{BD} = ?$$

$$9x^2 = 16x^2 + 4x^2 - 16x^2 \cos \beta$$

$$\frac{-11}{-16} = \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{11}{16}$$

$$\frac{9}{4}x^2 = a^2 + 4x^2 - 4ax \cdot \frac{11}{16} \quad | \cdot 4$$

$$9x^2 = 4a^2 + 16x^2 - 11ax$$

$$a = \frac{7}{4}x$$

$$a = x$$

$$7x^2 - 11ax + 4a^2 = 0$$

$$(7x - 4a)(x - a) = 0$$

$$7x^2 - 7ax - 4xa + 4x^2$$

$$7x(x - a) - 4a(x - a) = 0$$

Zadanie 14. (0-5)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne rzeczywiste rozwiązania, które razem z liczbą 3 tworzą rosnący ciąg arytmetyczny?



Zadanie 15. (0-6)

Rozwiąż równanie z niewiadomą x : $\sqrt{\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c}} - \sqrt{2} = 0$, gdzie $a, b, c > 0$. Otrzymane rozwiązanie/rozwiązania zapisz w możliwie najprostszej postaci.

Zadanie 16. (0-7)

Dla jakich wartości parametry m odległość pomiędzy środkami okręgów o równaniach

$(x-1)^2 + y^2 = 4 - m^2$ oraz $\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}m^2}{4}\right)^2 = m$ będzie najmniejsza. Wyznacz tę najmniejszą odległość.

