

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_3 4$ jest równa

A) $\frac{1}{\log_2 \sqrt{3}}$

B) $\log_2 9$

C) $\frac{1}{\log_2 9}$

D) $\log_2 \sqrt{3}$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+1} - 1}$ równa jest

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) 0

D) -2

ZADANIE 3 (1 PKT)

Mamy cztery urny. W urnie o numerze k , dla $k = 0, 1, 2, 3$ znajduje się $k + 1$ kul białych i $9 - k$ kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z k oczkami, $k = 1, 2, \dots, 6$ to losujemy jedną kulę z urny, której numer jest równy reszcie z dzielenia liczby k przez 4. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{3}{20}$

D) $\frac{1}{4}$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba S jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $\sqrt{3}$ i ilorazie $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Liczba $(S - 3)$ jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $\sqrt{3}$ i ilorazie q . Wynika stąd, że liczba q jest równa

A) $\frac{1}{3}$

B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

C) $-\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

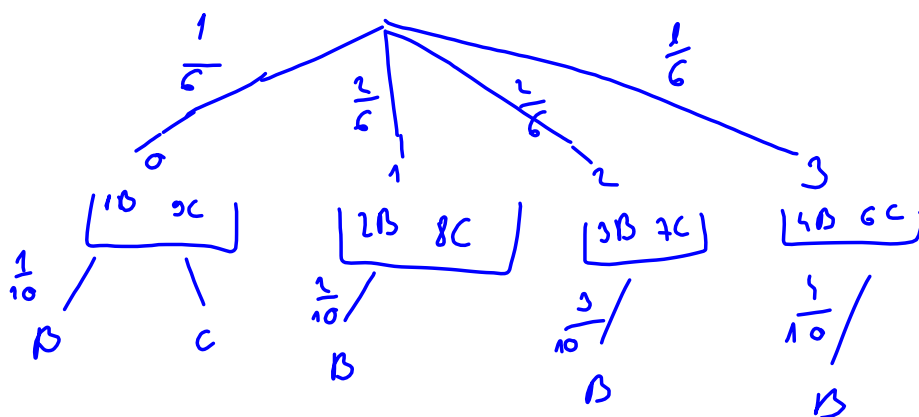
Mamy cztery urny. W urnie o numerze k , dla $k = 0, 1, 2, 3$ znajduje się $k + 1$ kul białych i $9 - k$ kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z k oczkami, $k = 1, 2, \dots, 6$ to losujemy jedną kulę z urny, której numer jest równy reszcie z dzielenia liczby k przez 4. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{3}{20}$

D) $\frac{1}{4}$



$$\begin{aligned}
 1 &= 4 \cdot 0 + 1 \\
 2 &= 4 \cdot 0 + 2 \\
 3 &= 4 \cdot 0 + 3 \\
 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \\
 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \\
 6 &= 4 \cdot 1 + 2
 \end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10} = D = \frac{1}{4}$$

Liczba S jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $\sqrt{3}$ i ilorazie $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Liczba $(S - 3)$ jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $\sqrt{3}$ i ilorazie q . Wynika stąd, że liczba q jest równa

- D)
- $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt{3}}{1-a} + 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1-q} = \frac{3-3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1} = \frac{6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$-1 + \eta = -\frac{3 - \sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}-3+6-3\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}$$

$$q = \frac{3-2\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}} = \frac{(3-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{3(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

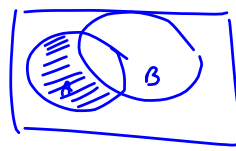
$$q = \frac{\cancel{8} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \cancel{6}}{3 \cdot 1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Wykaż, że jeżeli prawdopodobieństwa zdarzeń A i B spełniają warunki: $P(A) < \frac{5}{8}$ i $P(A \cap B) > \frac{4}{7}$, to

$$P(A \cap B') < \frac{1}{14}.$$

$$Z: P(A) < \frac{5}{8} \wedge P(A \cap B) > \frac{1}{2}$$

$$\tau: P(A \cap B') < \frac{1}{14}$$



②: $P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$P(A) < \frac{5}{8}$$

$$+ -P(A_n) < -\frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) > \frac{1}{7}$$

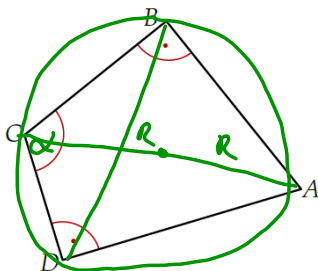
$$P(A) - P(A \cap B) < \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{-} < \frac{b}{\uparrow} \leq \frac{c}{-} = \frac{d}{\uparrow} < \frac{e}{-} \leq \frac{f}{\uparrow}$$

_____ $\rightarrow x$

ZADANIE 6 (3 PKT)

W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta przy wierzchołku C jeżeli $|AC| = 1,3|BD|$.

$$2R = 1,3BD$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{BD}{2R} = \frac{BD}{1,3BD} = \frac{10}{13}$$

ZADANIE 7 (3 PKT)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y większej od 1 prawdziwa jest nierówność $2x^2 + 4y^2 + 1 > 4xy + 3y$.

$$Z: x \in \mathbb{R} \quad y > 1$$

$$T: 2x^2 + 4y^2 + 1 > 4xy + 3y$$

$$D: \underline{2x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy - 3y} > 0$$

$$\boxed{2(x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2 - 3y + 1 > 0}$$

$$\underbrace{2(x-y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)(y+1)}_{> 0} > 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \boxed{y > 1 \Rightarrow \begin{matrix} y-1 > 0 \\ 2y-1 > 0 \end{matrix}} \Rightarrow (y-1)(y+1) > 0$$

$$\underbrace{\quad + \quad}_{> 0} > 0 \quad \leftarrow 1$$

~~$$\begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 > 0 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2y^2 - 3y + 1}{y+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-1)}{y+1} > 0$$~~

~~$$\begin{cases} 2y^2 - 3y > 0 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 > 0$$~~

$$T \Leftrightarrow W_1 \Leftrightarrow U_2 \Leftrightarrow U_3 \Leftrightarrow Z$$


 ~~$W_2 \Leftrightarrow U_3$~~

ZADANIE 8 (3 PKT)

Rozwiąż równanie: $\frac{|x|}{x} - 2 \sin \frac{x+|x|}{2} = 0$.

$x \neq 0$

$x > 0$

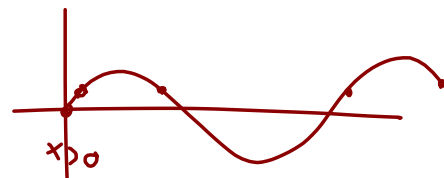
$2 \sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{N} \right\}$$

$x < 0$

$-1 = 2 \sin 0 \Leftrightarrow -1 = 0$



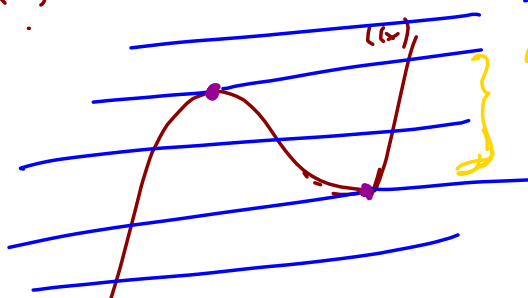
ZADANIE 9 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru p wielomian $W(x) = x^3 - 4x^2 - 3x - p$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste?

$$x^3 - 4x^2 - 3x = p$$

$$L(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$$

$$P(x) = p - \text{f stała}$$



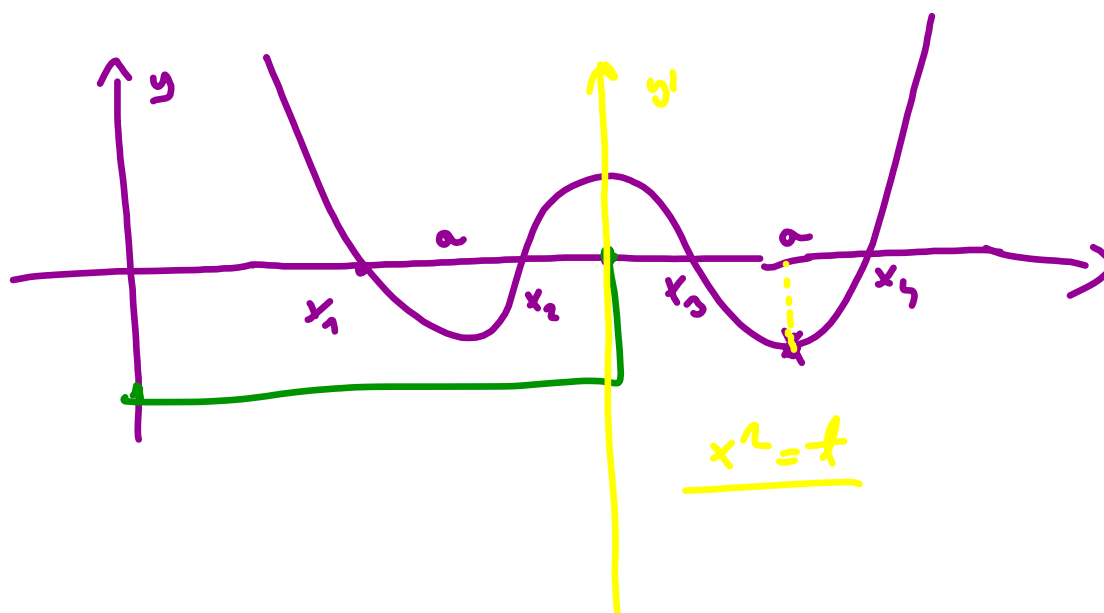
max lok

min lok

$$p \in (\min \text{lok}, \max \text{lok})$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x_1 \neq x_2 \neq x_3$$



$$x^2 = \frac{8}{3}$$

$$\underline{y = (x-5)(x-8)(x-10)(x-3)}$$

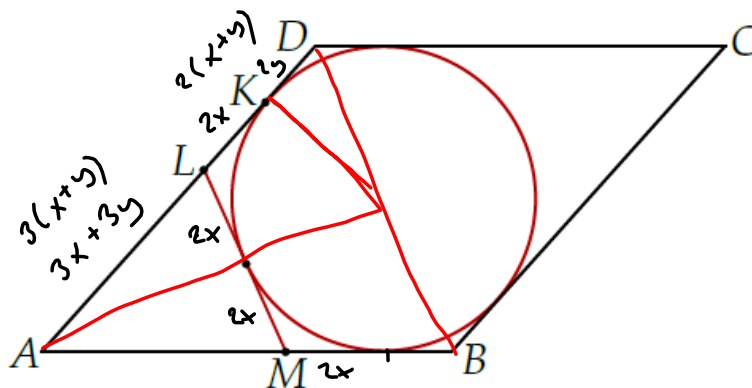
.

ZADANIE 10 (4 PKT)

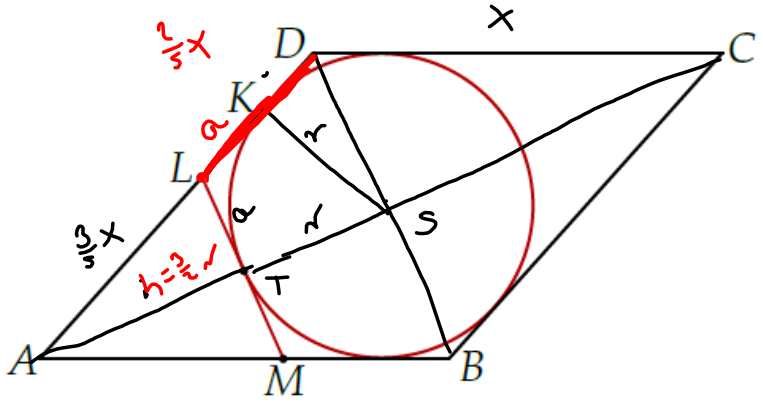
Na bokach AB i AD rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty M i L w ten sposób, że $|AL| = |AM| = \frac{3}{5}|AB|$. Odcinek LM jest styczny do okręgu wpisanego w romb $ABCD$. Punkt K jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten romb z bokiem AD (zobacz rysunek).

T.

Wykaż, że $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{21}{4}$.



$$\frac{AK}{KD} = \frac{5x+3y}{2y} =$$



$\frac{\frac{3}{5}x}{x} = \frac{h}{h+n} = \frac{3}{5}$
 $2h = 3n$
 $\Delta KDS \sim \Delta TLA$
 $\Downarrow$
 $\frac{KD}{TL} = \frac{KS}{TA}$
 $\frac{\frac{2}{5}x - a}{a} = \frac{n}{h} = \frac{n}{\frac{3}{2}n} = \frac{2}{3}$
 $2a = \frac{6}{5}x - 3a \quad a = \frac{6}{15}x$
 $\frac{AK}{KD} = \frac{\frac{3}{5}x + \frac{6}{15}x}{\frac{2}{5}x - \frac{6}{15}x} = \frac{15+6}{10-6} = \frac{21}{4}$

ZADANIE 11 (4 PKT)

Wyznacz te wartości parametru p , dla których równanie $x^4 + (2p - 1)x^2 + 4p^2 - 1 = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste. x_1, x_2

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_t > 0 \\ t_1 t_2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ t = -\frac{1}{2a} > 0 \end{cases}$
 $\Updownarrow \quad t = x^2 \quad t > 0$
 $\exists! \quad t > 0 : \quad t \neq 0$
 $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

ZADANIE 12 (5 PKT)

Czterowyzorowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Suma kwadratów trzech najmniejszych wyrazów tego ciągu jest pięciokrotnie większa od kwadratu czwartego wyrazu. Ponadto ciąg $(a - 10, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d) .

$r > 0$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 5d^2 \\ b^2 = (a - 10) \cdot c \end{cases}$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$c = \frac{b+d}{2}$$

$$a = 2b - c$$

$$d = 2c - b$$

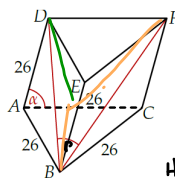
$$\begin{cases} (2b - c)^2 + b^2 + c^2 = 5(2c - b)^2 \\ b^2 = (2b - c - 10)c \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 5(b+2r)^2 \\ b^2 = (b-r-10)(b+r) \end{cases}$$

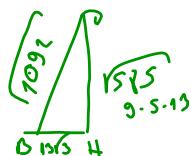
$$-800, -720, -640, -560$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Każda krawędź graniastosłupa trójkątnego ma długość 26. Ściana boczna $ACFD$ jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy ABC , a krawędź AD jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\tan \alpha = 2,4$ (zobacz rysunek).

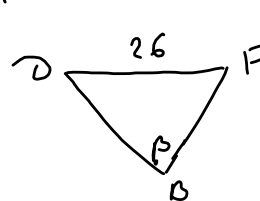
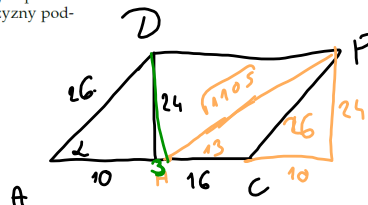


Oblicz cosinus kąta DBF .



$$DH = 585$$

$$HF^2 = 13^2 + 24^2 = 1405$$



$$BF^2 = 13^2 + 13 \cdot 5 \cdot 17 = 13(13 + 85) = 13 \cdot 98$$

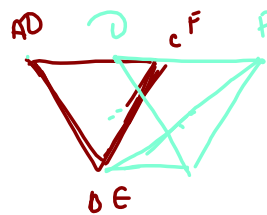
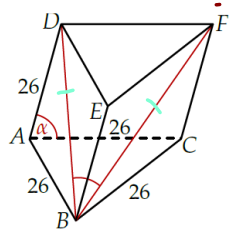
$$DB^2 = 13(98 + 15) = 13 \cdot 113 = 1469$$

$$26^2 = 1092 + 1469 - 2 \sqrt{1092 \cdot 1469} \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{13}{2 \sqrt{1551}} =$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Każda krawędź graniastosłupa trójkątnego ma długość 26. Ściana boczna $ACFD$ jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ABC , a krawędź AD jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$ (zobacz rysunek).

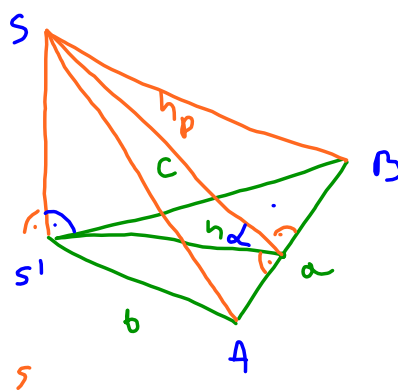


Oblicz cosinus kąta DBF .

D: 2

S_2

$$\frac{P_{ABS}}{P_{ABS'}} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot h_r}{\frac{1}{2}a \cdot h} = \left(\frac{1}{\cos \angle} \right)$$

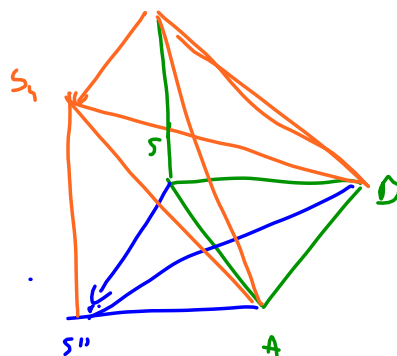


$$\frac{h}{h_p} = \cos \angle$$

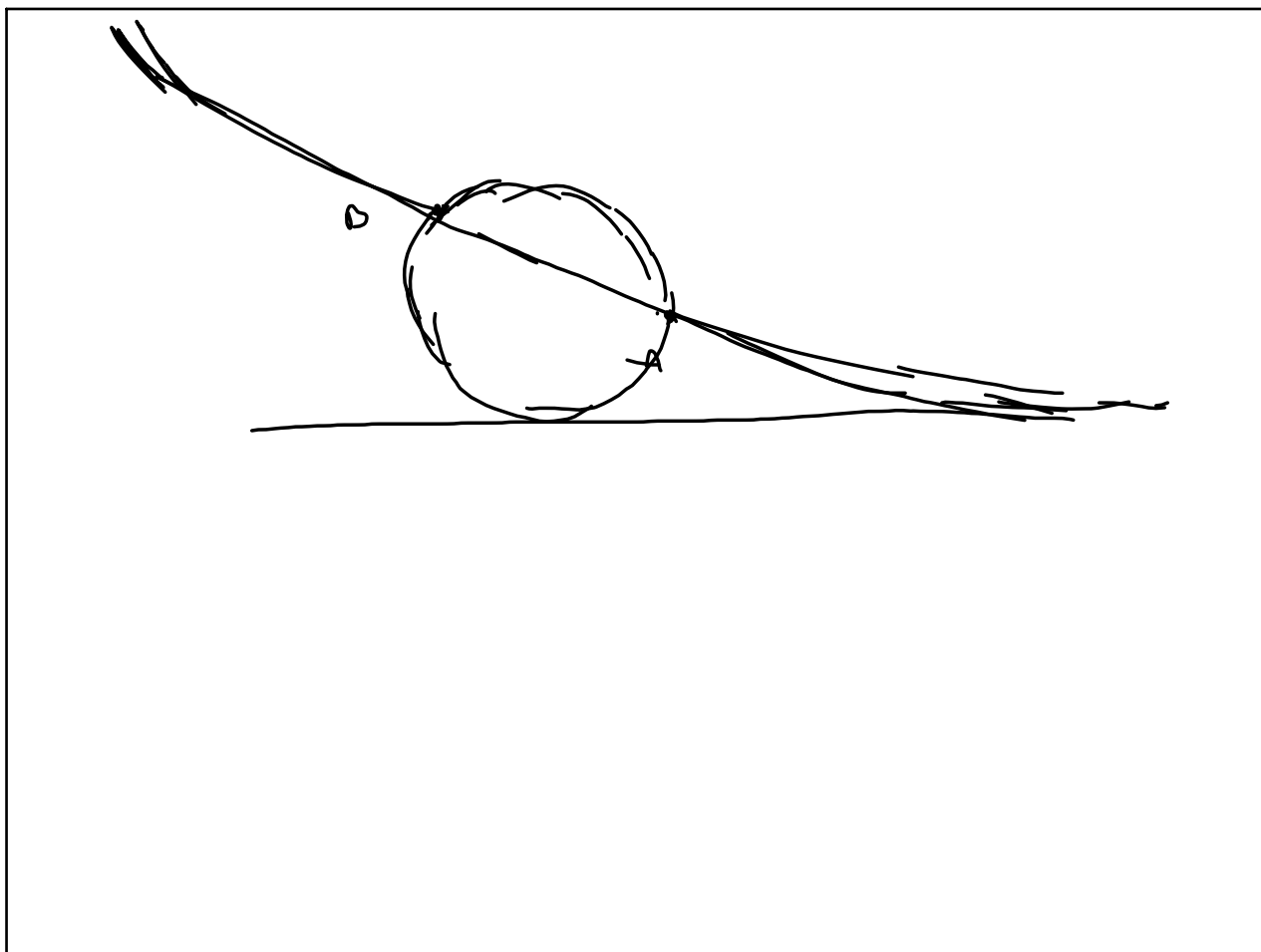
$$h_r = \frac{h}{\cos \angle}$$

$$P_{ABS_1} = P_{ABS}$$

$$P_{ABS''} = P_{ABS'}$$

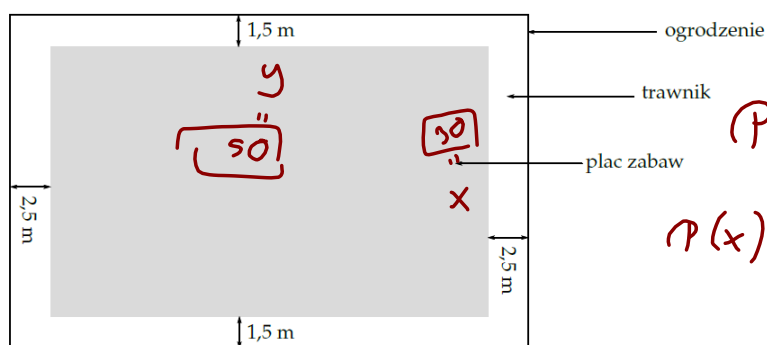






ZADANIE 15 (7 PKT)

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego placu zabaw, tak aby szerokość trawnika wzdłuż dłuższych brzegów placu była równa 1,5 m, a szerokość trawnika wzdłuż krótszych brzegów placu była równa 2,5 m (zobacz rysunek – plac zabaw zaznaczono kolorem szarym). Sam plac zabaw ma mieć powierzchnię 1500 m². Wyznacz takie wymiary placu zabaw, przy których powierzchnia placu wraz z trawnikami jest najmniejsza.



$$y = \frac{1500}{x}$$

$$P(x, y) = (x + 5)(y + 3)$$

$$P(x) = (x + 5)\left(\frac{1500}{x} + 3\right)$$

$$P'(x) = \frac{5(x - 30)(x + 30)}{x^2} =$$



"2"

"1" (1)

"O" (O)

12 $(6 \times 2 \wedge 1 \times 0) \vee 5 \times 2 \wedge 2 \times 0$
 9 $(4 \times 2 \wedge 1 \times 0 \wedge 2 \times 0) \vee (3 \times 2 \wedge 3 \times 1 \wedge 1 \times 0) \vee (2 \times 2 \wedge 5 \times 0 \wedge 1 \times 0)$
 6 $(3 \times 2 \wedge 4 \times 0) \vee (2 \times 2 \wedge 2 \times 1 \wedge 3 \times 0) \vee (1 \times 2 \wedge 5 \times 0 \wedge 2 \times 0) \vee (6 \times 0 \wedge 1 \times 0)$
 3 $(1 \times 2 \wedge 1 \times 1 \wedge 5 \times 0) \vee (3 \times 1 \wedge 4 \times 0)$
~~0~~

$$= 1 + \binom{6}{5} \binom{2}{2} + \binom{6}{4} \binom{2}{1} \binom{2}{1} + \binom{6}{3} \binom{4}{3} \binom{1}{1} + \binom{6}{2} \binom{5}{2} \binom{1}{1}$$

$$+ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

485

$$\underline{2 \cdot 3^5 \cdot 1 - 1}$$

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{-} \mid - \frac{1}{-} \mid \frac{1}{-} - \mid \frac{1}{-} - \mid \underline{\frac{1}{-}} - \mid - - \mid - -$

